Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Волович, А. С. Трушечкин, Асимптотические свойства квантовой динамики в ограниченных областях на различных масштабах времени, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 1, 43–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/im5845>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:28:05

УДК 517.958+530.145

И. В. Волович, А. С. Трушечкин

Асимптотические свойства квантовой динамики в ограниченных областях на различных масштабах времени

Изучается своеобразный квазиклассический предел динамики квантовых состояний на окружности и в ящике (бесконечно глубокой потенциальной яме с твердыми стенками), когда постоянная Планка стремится к нулю, а время – к бесконечности. Доказаны теоремы, описывающие динамику когерентных состояний на окружности и в ящике на всех масштабах времени в квазиклассическом приближении. Они позволяют подробно проследить все этапы квантовой эволюции в квазиклассическом пределе. В частности, получено строгое обоснование факта, что большую часть времени пространственное распределение волнового пакета близко к равномерному. Ранее этот факт был известен лишь из численных экспериментов. Полученные результаты применяются к вопросам классической механики, а именно к вопросу о том, какую формулировку классической механики следует предпочесть: традиционную или недавно предложенную функциональную. Для этого изучается квазиклассический предельный переход для функции Хусими квантовых состояний. Показано, что обе формулировки классической механики адекватно описывают систему при не сколь угодно больших значениях времени. Однако функциональная формулировка классической механики сохраняет свою справедливость на больших масштабах времени, чем традиционная формулировка. Следовательно, с этой точки зрения она является более предпочтительной. Показано, что, вопреки утверждению о почти периодичности квантовой динамики в конечном объеме, распределение вероятностей положения квантовой частицы в ящике стремится к некоторому предельному распределению при больших значениях времени, если учесть погрешность в определении размеров ящика.

Библиография: 35 наименований.

Ключевые слова: динамика квантовых систем, квазиклассический предел, слабый предел.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются некоторые аспекты динамики квантовых когерентных состояний в ограниченных областях. Эта тематика связана с фундаментальными проблемами теоретической и математической физики. Динамика квантовых систем в ограниченных областях изучается уже несколько десятков лет [1]–[3] и не теряет своей актуальности сейчас [4]–[6]. Получены

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00828-а, 11-01-12114-офи-м), Программы Президента РФ «Поддержка ведущих научных школ России» (грант НШ-7675.2010.1) и Программы ОМН РАН.

такие важные результаты, как аналог теоремы Пуанкаре о возвращении для случая квантовых ограниченных систем, подробно описана структура такого явления, как возрождение квантовых волновых пакетов для квантовых систем с дискретным спектром [2], [3], в частности для бесконечно глубокой потенциальной ямы (ящика) [4]. С помощью численного моделирования более подробно исследованы некоторые свойства динамики, касающиеся распылений и возрождений квантовых волновых пакетов в ограниченных областях [5], [6]. Понимание квантовой динамики в ограниченных областях имеет важное значение для физики конденсированного состояния и физики наносистем [7], [8].

В настоящее время имеется ряд открытых вопросов в квантовой и классической динамике частиц, находящихся в ограниченных областях. В частности, в работе [5] указывается, что вопрос о распылении квантовых волновых пакетов исследован в недостаточной степени. Другой вопрос: на каких временных интервалах квантовое и классическое описания согласуются друг с другом? Остается открытым вопрос о виде соотношений неопределенностей для ограниченных областей [9].

Асимптотические свойства классической динамики для бесстолкновительной сплошной среды в ящике рассматривались А. Пуанкаре и В. В. Козловым (см. [10]–[12]). В данной работе получены аналоги теорем Козлова о диффузии для квантовых систем.

В настоящей работе для исследования динамики квантовых состояний на окружности и в ящике используется своеобразный квазиклассический предел, когда постоянная Планка стремится к нулю, а время – к бесконечности (аналогичный предельный переход используется в методе стохастического предела [13]). Мы докажем теоремы, описывающие динамику когерентных состояний частицы на окружности и в ящике на всех масштабах времени в квазиклассическом приближении. Теоремы позволяют подробно проследить все этапы квантовой эволюции в квазиклассическом пределе.

В частности, получено строгое обоснование факта, что большую часть времени пространственное распределение волнового пакета близко к равномерному (аналог теорем Козлова о диффузии). Ранее данный факт был известен лишь из численных экспериментов. Этому посвящены § 2 (случай окружности, основной результат – теорема 1) и § 3 (случай ящика, основной результат – теорема 2).

Далее полученные результаты применяются к вопросам классической механики, а именно к вопросу о том, какую формулировку классической механики следует предпочесть: традиционную ньютоновскую или функциональную, предложенную недавно в [14] (см. также [15]–[18]). Исходным понятием механики в функциональной формулировке является не материальная точка или траектория, а функция плотности распределения в фазовом пространстве. Соответственно, фундаментальным динамическим уравнением становится не уравнение Ньютона (или эквивалентные ему уравнения Гамильтона), а уравнение Лиувилля (рассматриваются не ансамбли, а одна частица). Уравнение Ньютона (Гамильтона) тогда становится приближенным уравнением для средних распределений координат и импульсов. В работе [14] вычислены поправки к решениям уравнения Ньютона для некоторых частных случаев.

Целью перехода к новой формулировке классической механики является попытка решения проблемы необратимости, т. е. согласование обратимой микроскопической динамики с необратимой макроскопической динамикой (см. [11],

а также [12], [19]). В новой формулировке парадокс отсутствует, поскольку не только макро-, но и микроскопическая динамика в определенном смысле необратимы.

Аргумент в пользу применения функциональной формулировки механики состоит в том, что произвольные вещественные числа, т. е. бесконечные дроби (а с ними и отдельные траектории) ненаблюдаемы. Поэтому на самом деле рассмотрение пучка траекторий или динамики функции плотности распределения более оправдано, чем рассмотрение отдельной траектории точки. Отдельная траектория является своего рода “скрытой переменной” и не имеет непосредственного физического смысла.

В работе [17] описана процедура построения функции плотности физической системы на основании непосредственно наблюдаемых величин – результатов измерений. В работе [18] рассматриваются вопросы взаимодействия системы и прибора в динамике с точки зрения функциональной формулировки.

В § 4 делается попытка подойти к проблеме о предпочтении той или иной формулировки классической механики со стороны квантовой механики. А именно, ставится задача выяснить, выводы какой формулировки классической механики – традиционной или функциональной – дольше сохраняют свою справедливость с точки зрения квантовой механики. Для этого изучается квазиклассический предельный переход для функции Хусими квантовых состояний частиц на окружности и в ящике. При каждом $\hbar > 0$ квантовому оператору плотности ставится в соответствие классическая функция плотности на фазовом пространстве, затем осуществляется предельный переход $\hbar \rightarrow 0$. Отметим, что эволюция функции Вигнера и диффузия в бесстолкновительной среде, состоящей из квантовых частиц в некомпактном пространстве, рассмотрены в работе [20].

В результате мы получаем (теоремы 3, 4), что обе формулировки классической механики адекватно описывают систему при не сколь угодно больших значениях времени. Однако функциональная формулировка классической механики сохраняет свою справедливость на больших временных масштабах, чем традиционная формулировка. Следовательно, в этом аспекте она является более предпочтительной.

В § 5 показано, что, вопреки утверждению о почти периодичности квантовой динамики частиц в конечном объеме, распределение вероятностей положения квантовой частицы в ящике стремится к некоторому предельному распределению при больших значениях времени, если учесть погрешность в определении размеров ящика.

§ 2. Когерентные состояния на окружности

2.1. Определение когерентных состояний на окружности. Рассмотрим семейство функций $\eta_{qp}(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $(q, p) \in \mathbb{R}^2$:

$$\eta_{qp}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2}} \exp\left\{-\frac{(x-q)^2}{4\alpha^2} + \frac{ip(x-q)}{\hbar}\right\}, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$, $\hbar > 0$, которое обладает свойством, называемым *непрерывным разложением единицы* [21]:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} P[\eta_{qp}] dq dp = 1.$$

Здесь через $P[\psi]$, $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, обозначен одномерный оператор, действующий на произвольный вектор $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ по правилу $P[\psi]\varphi = (\psi, \varphi)\psi$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$ (если ψ – единичный вектор, то $P[\psi]$ – проектор). Равенство понимается в слабом смысле: для любых $\psi, \chi \in L_2(\mathbb{R})$ выполнено

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} (\psi, P[\eta_{qp}]\chi) dq dp = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} (\psi, \eta_{qp})(\eta_{qp}, \chi) dq dp = (\psi, \chi). \quad (2)$$

В квантовой механике функции η_{qp} (при фиксированном α) называются *когерентными состояниями*. Наиболее общее формальное определение когерентных состояний дано Дж. Клаудером и Б.-С. Скагерштамом [22]: семейством когерентных состояний называется произвольное семейство векторов, непрерывно зависящее от своих индексов и образующее непрерывное разложение единицы. Однако другой ключевой особенностью когерентных состояний является то, что они наилучшим образом из всевозможных чистых квантовых состояний (всех квадратично интегрируемых функций) приближаются по свойствам к классическим частицам.

В работе [23] был введен аналог семейства когерентных состояний для пространства $L_2(-l, l)$:

$$v_{qp}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta_{qp}(x - 2nl). \quad (3)$$

Ряд сходится, например, в $L_2(-l, l)$. Для этого семейства справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Семейство функций (3) образует непрерывное разложение единицы в пространстве $L_2(-l, l)$:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} P[v_{qp}] dq dp = 1,$$

где $\Omega = \{(q, p) \mid q \in [-l, l], p \in \mathbb{R}\}$. Равенство понимается в слабом смысле: для любых $\psi, \chi \in L_2(-l, l)$ выполнено

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} (\psi, P[v_{qp}]\chi) dq dp = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} (\psi, v_{qp})(v_{qp}, \chi) dq dp = (\psi, \chi). \quad (4)$$

Здесь через $P[\psi]$, $\psi \in L_2(-l, l)$, обозначен одномерный оператор, действующий на произвольный вектор $\varphi \in L_2(-l, l)$ по правилу $P[\psi]\varphi = (\psi, \varphi)\psi$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(-l, l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Установим простое соотношение

$$(\psi, \eta_{qp}(y - 2ml)) \equiv \int_{-l}^l \overline{\psi}(y) \eta_{qp}(y - 2ml) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_m}(y) \eta_{qp}(y) dy,$$

где

$$\psi_m(x) = \begin{cases} \psi(x + 2ml), & x \in [-2ml - l, -2ml + l], \\ 0, & x \notin [2ml - l, 2ml + l]. \end{cases}$$

Пользуясь этим соотношением и свойством $\eta_{qp}(x - a) = \eta_{q+a,p}(x)$ для произвольного $a \in \mathbb{R}$, получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\psi, v_{qp})(v_{qp}, \chi) dq dp &= \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} \iint_{\Omega} (\psi, \eta_{qp}(y - 2(n+k)l)) (\eta_{qp}(x - 2nl), \chi) dq dp \\ &= \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} \iint_{\Omega} (\psi_k, \eta_{q+2nl,p})_{\mathbb{R}} (\eta_{q+2nl,p}, \chi_0)_{\mathbb{R}} dq dp \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_k, \eta_{qp})_{\mathbb{R}} (\eta_{qp}, \chi_0)_{\mathbb{R}} dq dp. \end{aligned}$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}}$ – скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$. Тогда необходимое нам равенство следует из соотношения (2):

$$\iint_{\Omega} (\psi, v_{qp})(v_{qp}, \chi) dq dp = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\psi_k, \chi_0)_{\mathbb{R}} = (\psi_0, \chi_0)_{\mathbb{R}} = (\psi, \chi).$$

Предложение доказано.

Функции v_{qp} можно назвать *когерентными состояниями на окружности* потому, что, во-первых, они удовлетворяют общему определению Клаудера–Скагерштама (непрерывная зависимость от индексов и непрерывное разложение единицы), во-вторых, как мы увидим, временная эволюция на окружности этих состояний в квазиклассическом пределе переходит в динамику классической частицы на окружности и, в-третьих, при $l \rightarrow \infty$ они переходят в обычные когерентные состояния η_{qp} на прямой.

В §3 мы покажем, что аналогичное утверждение верно для еще одного семейства функций из $L_2(-l, l)$:

$$\omega_{qp}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \eta_{qp}[(-1)^n(x - 2nl)].$$

Это когерентные состояния в бесконечно глубокой потенциальной яме (ящике).

2.2. Спектральные свойства когерентных состояний на окружности. Функции v_{qp} можно выразить через тета-функцию ($\text{Re } \tau > 0$)

$$\theta(x, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\{-\pi\tau k^2 + 2\pi i k x\}$$

следующим образом:

$$v_{qp}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2}} \theta\left(\frac{(x-q)l}{2i\pi\alpha^2} - \frac{pl}{\pi\hbar}, \frac{l^2}{\pi\alpha^2}\right) \exp\left\{-\frac{(x-q)^2}{4\alpha^2} + \frac{ip(x-q)}{\hbar}\right\}. \quad (5)$$

Для тета-функции справедливо так называемое модулярное свойство (тождество Якоби)[24], [25]:

$$\theta\left(\frac{x}{i\tau}, \frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\tau} e^{\frac{\pi x^2}{\tau}} \theta(x, \tau).$$

Применяя последнее тождество к (5), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} v_{qp}(x) &= \sqrt[4]{\frac{\pi\alpha^2}{2l^4}} \theta\left(-\frac{x-q}{2l} - \frac{p\alpha^2}{il\hbar}, \frac{\pi\alpha^2}{l^2}\right) \exp\left\{-\left(\frac{\alpha p}{\hbar}\right)^2\right\} \\ &= \sqrt[4]{\frac{\pi\alpha^2}{2l^4}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\alpha^2\left[\frac{\pi}{l}k - \frac{p}{\hbar}\right]^2 + i\frac{\pi}{l}k(x-q)\right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Мы получили разложение функций v_{qp} по ортогональному базису

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{i\frac{\pi}{l}kx}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

в пространстве $L_2(-l, l)$. Этот же результат можно получить, непосредственно интегрируя v_{qp} по элементам данного базиса. Заметим, что

$$\int_{-l}^l v_{qp}(x) e^{i\frac{\pi}{l}kx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{qp}(x) e^{i\frac{\pi}{l}kx} dx \quad (7)$$

для целых k . В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l v_{qp}(x) e^{i\frac{\pi}{l}kx} dx &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-l}^l \eta_{qp}(x - 2nl) e^{i\frac{\pi}{l}kx} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-2nl-l}^{-2nl+l} \eta_{qp}(x) e^{i\frac{\pi}{l}kx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{qp}(x) e^{i\frac{\pi}{l}kx} dx. \end{aligned}$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (7), является гауссовым, и в результате его вычисления мы также приходим к формуле (6). Таким образом, модулярное свойство для тета-функции оказывается связанным с преобразованием Фурье периодических функций, полученных отражениями гауссовой функции на прямой. Этот результат не является неожиданным, так как в доказательстве модулярного свойства используется интегрирование гауссовой функции с тригонометрическими функциями (см. [24] и более общий случай в [25]). В § 6 изложено доказательство модулярного свойства тета-функции, непосредственно основывающееся на разложении периодической функции в ряд Фурье.

Функции e_k являются собственными для самосопряженного в $L_2(-l, l)$ оператора

$$H^c = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

с областью определения

$$D(H^c) = \{\psi \in AC^2(-l, l) \mid \psi(-l) = \psi(l), \psi'(-l) = \psi'(l)\},$$

где $m > 0$ – некоторая постоянная. Здесь $AC^2(-l, l)$ – множество дифференцируемых функций, производные которых лежат в $AC(-l, l)$, а $AC(-l, l)$ – множество абсолютно непрерывных функций, производные которых лежат в $L_2(-l, l)$.

Оператор H^c является оператором Гамильтона (энергии) для свободной квантовой частицы массой m на окружности (см. [9]). Таким образом, функции $v_{qp}(x)$ разлагаются в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям оператора Гамильтона для частицы на окружности.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Квантовая частица на окружности по определению не может быть свободной, поскольку должен существовать некоторый потенциал, удерживающий ее на окружности. Свободной частица может быть только во всем пространстве (в рассматриваемом одномерном случае – на прямой). Здесь мы, однако, используем выражение “свободная квантовая частица на окружности” в том смысле, что другие потенциалы, кроме удерживающего в пределах окружности, отсутствуют, т. е. частица движется свободно внутри окружности, а при $l \rightarrow \infty$ получаем свободную частицу на прямой.

2.3. Общие свойства динамики когерентных состояний частицы на окружности. Эволюция состояния v_{qp} во времени описывается формулой

$$v_{qp,t} = U_t^c v_{qp},$$

где

$$U_t^c = \exp\left\{-\frac{it}{\hbar} H^c\right\} \quad (8)$$

– оператор эволюции для свободной квантовой частицы, движущейся по окружности.

Функция $v_{qp,t}$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера с граничными условиями, соответствующими движению по окружности:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial v_{qp,t}}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 v_{qp,t}}{\partial x^2}, \\ v_{qp,t}(-l) &= v_{qp,t}(l), \quad v'_{qp,t}(-l) = v'_{qp,t}(l), \\ v_{qp,0}(x) &= v_{qp}(x), \end{aligned} \quad (9)$$

где $x \in [-l, l]$, $t \in \mathbb{R}$. Воспользовавшись методом отражений [26], приходим к тому, что

$$v_{qp,t}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta_{qp,t}(x - 2nl), \quad (10)$$

где

$$\eta_{qp,t}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2(1+i\gamma)^2}} \exp\left\{-\frac{(x - q - \frac{pt}{m})^2}{4\alpha^2(1+i\gamma)} + \frac{ip(x - q - \frac{pt}{m})}{\hbar}\right\} \quad (11)$$

– хорошо известная функция из $L_2(\mathbb{R})$, описывающая эволюцию во времени начального волнового пакета η_{qp} . Здесь $\gamma = \frac{\hbar t}{2m\alpha^2}$.

Как можно видеть из (11), при свободном движении на прямой центр волнового пакета перемещается по классической траектории $q(t) = q + \frac{pt}{m}$, в то время как его дисперсия увеличивается, т. е. волновой пакет со временем неограниченно расплывается. Если $\Delta x(0) = \alpha$ – среднеквадратичное отклонение координаты в начальный момент, то в момент t оно составит

$$\Delta x(t) = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\hbar t}{2m\alpha}\right)^2}. \quad (12)$$

На окружности при малых значениях времени существенно ненулевой вклад в сумму (10) дают лишь слагаемые с $n = 0$ (предполагая, что $\alpha \ll l$),

поэтому наблюдается похожее поведение: движение центра волнового пакета по классической траектории с периодом

$$T_{cl} = \frac{2lm}{p}$$

(период движения по окружности длиной $2l$ обладающей импульсом p классической частицы массой m). Постепенно волновой пакет расплывается. Численные эксперименты, результаты которых приведены в [6], показывают, что в момент

$$T_{coll} = \frac{2ml\alpha}{\sqrt{3}\hbar} \quad (13)$$

(здесь используется сокращение “coll” от слова “collapse”, означающего “разрушение” локализованного волнового пакета) достигается приблизительно равномерное распределение положения частицы на окружности: $|v_{qp,t}(x)|^2 \approx \frac{1}{2l}$. Значение T_{coll} получено следующим образом. Среднеквадратичное отклонение равномерного пространственного распределения на окружности $[-l, l]$ равно $\frac{l}{\sqrt{3}}$. Пусть $\Delta x(t) = \frac{l}{\sqrt{3}}$, где $\Delta x(t)$ определено формулой (12). Тогда T_{coll} является решением полученного уравнения относительно t . Разумеется, этот вывод является нестрогим, поскольку $\Delta x(t)$ есть среднеквадратичное отклонение в момент t для динамики на прямой, а не на окружности. Однако, повторим, этот вывод приблизительно подтверждается численными экспериментами. Нами получены некоторые строгие асимптотические оценки, соответствующие выравниванию пространственной плотности (см. следующий параграф).

При больших значениях времени возникает ситуация, совершенно иная по сравнению с динамикой на прямой. Представим решение задачи (9) в виде ряда по собственным функциям оператора H^c :

$$v_{qp,t}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{k,qp} \exp \left\{ i \frac{\pi}{l} kx - \frac{i\hbar t}{2m} \left(\frac{\pi}{l} k \right)^2 \right\}.$$

Коэффициенты разложения $a_{k,qp}$ можно найти из формулы (6). Отсюда видно, что динамика периодическая: за время

$$T_{rev} = \frac{4ml^2}{\pi\hbar} \quad (14)$$

волновой пакет полностью восстанавливается в изначальном виде, $v_{qp,T_{rev}} = v_{qp}$. Это явление называется *полным возрождением волнового пакета*. В моменты времени $\frac{M}{N} T_{rev}$, где M и N – целые числа, наблюдаются так называемые *дробные возрождения пакета* [2], [3], когда копия начального пакета восстанавливается сразу в нескольких местах на окружности (подробнее о динамике квантовых систем с дискретным энергетическим спектром и, как частный случай, квантовых частиц на окружности см. [1]–[6]).

Таким образом, в квантовой динамике на окружности присутствуют три временных масштаба [6]:

- 1) T_{cl} – классический период движения;
- 2) T_{coll} – характерное время расплывания квантового волнового пакета;
- 3) T_{rev} – период полного возрождения квантового волнового пакета.

В следующем пункте мы будем рассматривать квазиклассический предел $\hbar \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$ (параметр α участвует в определении функций v_{qp} ;

см. формулы (1) и (3)). В этом пределе масштабы времени имеют разные асимптотики:

$$T_{\text{cl}} = C_1, \quad T_{\text{coll}} = C_2 \frac{\alpha}{\hbar}, \quad T_{\text{rev}} = \frac{C_3}{\hbar}, \quad (15)$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные. Квазиклассический предел в квантовой механике при $\hbar \rightarrow 0$ исследуется, например, в [27].

2.4. Квазиклассический предел динамики когерентных состояний на окружности. Пределы, которые мы будем рассматривать в этом пункте, имеют смысл в пространстве обобщенных функций. Пусть K – цилиндр (множество $\Omega = [-l, l] \times \mathbb{R} \ni (q, p)$ с отождествленными точками $(-l, p)$ и (l, p) для всех $p \in \mathbb{R}$). Определим пространства основных и обобщенных функций на K . Введем множество основных функций

$$\mathcal{S}(K) = \left\{ \sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid \sigma(q + 2nl, p) = \sigma(q, p), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \right. \\ \left. \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2); \lim_{p \rightarrow \pm\infty} p^r \frac{\partial^{s_1+s_2} \sigma}{\partial q^{s_1} \partial p^{s_2}} = 0, r, s_1, s_2 = 0, 1, 2, \dots \right\}. \quad (16)$$

Топология на этом пространстве задается полунормами

$$P_N(\sigma) = \max_{s_1+s_2 \leq N} \sup_{\mathbb{R}^2} (1+p^2)^{N/2} \left| \frac{\partial^{s_1+s_2} \sigma}{\partial q^{s_1} \partial p^{s_2}} \right|, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Это пространство функций на цилиндре K , быстро убывающих по p .

Тогда $\mathcal{S}'(K)$ – это пространство обобщенных функций, т. е. непрерывных линейных функционалов над $\mathcal{S}(K)$. Условимся считать, что

$$(\delta(q - q_0, p - p_0), \sigma) = \sigma(q_0, p_0),$$

$$(f(q)\delta(p - p_0), \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q)\sigma(q, p_0) dq, \quad (c\delta(p - p_0), \sigma) = c \int_{-l}^l \sigma(q, p_0) dq,$$

где $(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$, $f(q)$ – интегрируемая функция на прямой, $c \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_D(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D^2}} e^{-\frac{q^2}{2D^2}}, \quad (18)$$

где $D \in (0, \infty)$, и доопределим ее при $D = 0$ и $D = \infty$: $\varphi_0(q) = \lim_{D \rightarrow 0} \varphi_D(q) = \delta(q)$ и $\varphi_\infty(q) = \lim_{D \rightarrow \infty} \varphi_D(q) = \frac{1}{2l}$ (пределы берутся в пространстве обобщенных функций $\mathcal{S}'(K)$).

Введем пространство основных функций $\mathcal{D}(K)$ по такой же формуле, что и $\mathcal{S}(K)$, с заменой третьего условия быстрого убывания по p в (16) на финитность по p . Аналогично вводится пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(K)$.

ТЕОРЕМА 1. В $\mathcal{S}'(K)$ имеет место следующее предельное соотношение (переменные (q, p) фиксированы, а (q', p') – переменные интегрирования с пробными функциями $\sigma(q', p') \in \mathcal{S}(K)$):

$$\lim \left\{ \frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{qp}, v_{q'p'}, t)|^2 - \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} \varphi_D \left[q' - q - \frac{2kl}{N'} - a + \frac{p}{m}(t - cT_{\text{rev}}) \right] \delta(p' - p) \right\} = 0. \quad (19)$$

Предел осуществляется следующим образом: $\hbar \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$, $t = t(\hbar)$, $\frac{\hbar}{\alpha}(t - cT_{\text{rev}}) \rightarrow 2mD$, $\hbar(t - cT_{\text{rev}}) \rightarrow 0$, где $c \in \mathbb{R}$, $D \in [0, \infty]$, а числа N' и a

зависят от числа s . Пусть s рационально, а значит, может быть записано в виде несократимой дроби: $s = \frac{M}{N}$. Тогда $N' = N$, если N нечетно, и $N' = \frac{N}{2}$, если N четно; $a = \frac{2l}{N}$, если $N \equiv 2 \pmod{4}$, и $a = 0$ в противном случае. Если число s иррационально, то $N' = 1$, $a = 0$. Параметр α участвует в определении функций v_{qp} (см. формулы (1) и (3)), $T_{\text{rev}} = \frac{4ml^2}{\pi\hbar}$ (формула (14)). Сходимость в формуле (19) является равномерной по $(q, p) \in \Omega$.

Поясним утверждения теоремы 1: величина $\frac{1}{2\pi\hbar}|(v_{qp}, v_{q'p'}, t)|^2$ представляет собой плотность вероятности нахождения квантовой частицы на окружности в состоянии v_{qp} в момент времени t при условии, что в нулевой момент времени частица находилась в состоянии $v_{q'p'}$ (с точностью до норм $\|v_{qp}\|^2$ и $\|v_{q'p'}\|^2$, которые в рассматриваемых пределах стремятся к единице; см. далее предложение 2).

Предел $\hbar \rightarrow 0$ соответствует квазиклассическому приближению. Пределы $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$ соответствуют стремлению среднеквадратичных отклонений координаты и импульса квантового волнового пакета v_{qp} к нулю. При этом $\Delta x \sim \alpha$, $\Delta p \sim \frac{\hbar}{\alpha}$, где Δx и Δp – среднеквадратичные отклонения координаты и импульса соответственно для v_{qp} при всех $(q, p) \in \Omega$ (см. [9]). Здесь запись $f \sim g$ означает, что $\lim \frac{f}{g} = 1$. Таким образом, в рассматриваемом квазиклассическом пределе у квантовой частицы в состоянии v_{qp} хорошо определены и координата (равная q), и импульс (равный p), как у классической частицы. Поэтому можно сказать, что в квазиклассическом пределе $\frac{1}{2\pi\hbar}|(v_{qp}, v_{q'p'}, t)|^2$ – это плотность вероятности нахождения квантовой частицы на окружности в фазовой точке (q, p) в момент времени t при условии, что в нулевой момент времени частица находилась в фазовой точке (q', p') .

В теореме 1 рассматриваются различные скорости стремления t к бесконечности по отношению к $\hbar$ и α , т. е. различные масштабы времени 1)–3), перечисленные в конце п. 2.3.

Как видно из (15), случай $c = 0$ и $D = 0$ ($\frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow 0$) соответствует классическому масштабу времени T_{cl} : время фиксировано или возрастает медленнее, чем снижается скорость распыливания пакета, пропорциональная $\frac{\hbar}{\alpha}$. Тогда формула (19) принимает вид

$$\lim \left[\frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{qp}, v_{q'p'}, t)|^2 - \delta \left(q' - q + \frac{p}{m} t, p' - p \right) \right] = 0.$$

Здесь вычитаемое $\delta(q' - q + \frac{p}{m} t, p' - p)$ есть плотность вероятности нахождения классической частицы на окружности в фазовой точке (q, p) в момент времени t при условии, что в нулевой момент времени частица находилась в фазовой точке (q', p') . Таким образом, в квазиклассическом пределе на масштабе времени T_{cl} имеет место классическая динамика: квантовая плотность вероятности перехода в фазовую точку (q, p) для частицы, находившейся в нулевой момент времени в фазовой точке (q', p') , равна соответствующей классической плотности вероятности.

Случай $c = 0$, $D \in (0, \infty)$ ($\frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow 2mD \in (0, \infty)$) соответствует масштабу времени T_{coll} . В этом случае формула (19) принимает вид

$$\lim \left[\frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{qp}, v_{q'p'}, t)|^2 - \varphi_D \left(q' - q + \frac{p}{m} t \right) \delta(p' - p) \right] = 0.$$

Как видно, квантовая плотность вероятности перехода из точки в точку уже не равна классической: наблюдается некоторое пространственное расплывание распределения вероятностей. В частности, случай $t = T_{\text{coll}}$ соответствует $D = \frac{l}{\sqrt{3}}$, а поскольку D связано со среднеквадратичным отклонением “размазывающей функции” φ_D , то последнее приблизительно совпадает со среднеквадратичным отклонением равномерного распределения на отрезке $[-l, l]$, что согласуется с численными результатами из [5], [6]. Однако в пределе $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$ точное равномерное распределение места все же не имеет, в отличие от следующего случая.

Случай $c = 0$, $D = \infty$ ($\frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow \infty$) соответствует промежуточному масштабу времени между T_{coll} и T_{rev} . Здесь формула (19) принимает вид

$$\lim \frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{qp}, v_{q'p'}, t)|^2 = \frac{1}{2l} \delta(p' - p), \quad (20)$$

т.е. утверждение теоремы 1 в этом случае соответствует полному выравниванию пространственной плотности вероятности. Поэтому отнесем этот случай также к масштабу времени 2) (соответствующему разрушению локализованного волнового пакета). Заметим, что здесь получено математическое обоснование (асимптотического) выравнивания пространственной плотности вероятности для квантовой частицы в конечном объеме, известное ранее лишь из численных экспериментов [5], [6]. Этот результат можно рассматривать как квантовый аналог теорем Козлова о диффузии для классических систем [11], [12].

Случай $c \neq 0$ соответствует масштабу времени T_{rev} . Если c – иррациональное число, то, как и в предыдущем случае, формула (19) сводится к формуле (20), т.е. наблюдается полное выравнивание пространственной плотности вероятности. Случай рационального c соответствует возрождению волнового пакета, в общем случае – дробному и неточному. Разберем этот случай подробнее.

Пусть сначала $t - \frac{M}{N} T_{\text{rev}} \rightarrow 0$, откуда следует $D = 0$ (пример: $t = \frac{M}{N} T_{\text{rev}}$). Тогда формула (19) принимает вид

$$\lim \frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{qp}, v_{q'p'}, t)|^2 = \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} \delta\left(q' - q - \frac{2kl}{N'} - a, p' - p\right),$$

где N' и a определены в утверждении теоремы 1. Это точное дробное возрождение пакета, результат согласуется с результатами работ [2]–[4]. Случай $N = 1$ (т.е. целого c) соответствует точному полному возрождению пакета. В случае $D \in (0, \infty)$ мы получаем сумму тех же N' , но “размазанных” волновых пакетов. Это случай неточного возрождения пакета (дробного или полного). В случае $D = \infty$ мы снова получаем полное выравнивание пространственной плотности распределения (20).

Поскольку любое иррациональное число можно сколь угодно точно приблизить рациональными, то (не строго) можно сказать, что случай иррационального c в теореме 1 является предельным случаем рационального c при $N \rightarrow \infty$: если мы приближаем иррациональное число последовательностью рациональных, то знаменатели рациональных чисел последовательности возрастают, расстояние между соседними слагаемыми в сумме дельта-функций в формуле (19) стремится к нулю и в пределе сумма дельта-функций переходит в равномерное распределение. Иными словами, случаи иррационального c и очень близкого к нему рационального c' практически неразличимы.

Заметим, что во всех предельных случаях сохраняется распределение по импульсу.

Мы проследили всю динамику квантового волнового пакета на окружности. Сначала хорошо локализованный волновой пакет со временем расплывается, пока не достигается полное выравнивание пространственной плотности. В некоторые моменты времени сразу в нескольких точках окружности постепенно возникает по копии исходного волнового пакета, которые затем снова постепенно расплываются, пока снова не достигается полное выравнивание плотности. Поскольку иррациональных чисел “больше”, чем рациональных, то можно сказать, что большую часть времени частица проводит в состоянии с пространственным распределением плотности, близким к равномерному.

Таким образом, теорема 1 полностью описывает квазиклассический предел свободной квантовой динамики частицы на окружности во всех масштабах времени.

Приведем упрощенный вариант теоремы 1, в котором рассмотрены только основные масштабы времени, без промежуточных: классическое движение, полное расплывание и точные возрождения.

СЛЕДСТВИЕ 1. В $\mathcal{S}'(K)$ имеют место следующие предельные соотношения:

- 1) $\lim \left[\frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 - \delta(q' - q + \frac{p}{m}t, p' - p) \right] = 0$ при $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0, t = \text{const}$;
- 2) $\lim \frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 = \frac{1}{2l} \delta(p' - p)$ при $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow \infty$, а также при $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0, t = cT_{\text{rev}} \rightarrow \infty, c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, T_{\text{rev}} = \frac{16ml^2}{\pi\hbar}$;
- 3) $\lim \left[\frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 - \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} \delta(q' - q - \frac{2kl}{N'} - a, p' - p) \right] = 0$ при $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0, t = cT_{\text{rev}} \rightarrow \infty, c \in \mathbb{Q}$.

Предельные соотношения являются равномерными по $(q, p) \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Выразим скалярное произведение функций v_{qp} и $v_{q'p',t}$ в пространстве $L_2(-l, l)$ через скалярные произведения функций η_{qp} и $\eta_{q'+2kl,p',t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, в пространстве $L_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} (v_{qp}, v_{q'p',t}) &= \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} \int_{-l}^l \overline{\eta_{qp}}(x - 2kl) \eta_{q'p',t}(x - 2(k+n)l) dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\eta_{qp}}(x) \eta_{q'+2kl,p',t}(x) dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\eta_{qp}, \eta_{q'+2kl,p',t}). \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя в (21) выражение для скалярного произведения

$$\begin{aligned} (\eta_{qp}, \eta_{q'p',t}) &= \sqrt{\frac{2}{2 + i\gamma}} \exp \left\{ -\frac{(q' - q + \frac{(p'+p)t}{2m})^2}{4\alpha^2(2 + i\gamma)} - \frac{\alpha^2(p' - p)^2}{2\hbar^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i(p' + p)(q' - q)}{2\hbar} - \frac{it(p' + p)^2}{8m\hbar} \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

где, как и ранее, $\gamma = \frac{\hbar t}{2m\alpha^2}$, получаем

$$(v_{qp}, v_{q'p',t}) = \sqrt{\frac{2}{2+i\gamma}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{(q' - q + 2kl + \frac{(p'+p)t}{2m})^2}{4\alpha^2(2+i\gamma)} - \frac{\alpha^2(p' - p)^2}{2\hbar^2} - \frac{i(p' + p)(q' - q + 2kl)}{2\hbar} - \frac{it(p' + p)^2}{8m\hbar} \right\},$$

$$|(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 = \frac{2}{\sqrt{4+\gamma^2}} \sum_{k,n=-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{(q' - q + 2kl + \frac{(p'+p)t}{2m})^2}{4\alpha^2(2+i\gamma)} - \frac{(q' - q + 2nl + \frac{(p'+p)t}{2m})^2}{4\alpha^2(2-i\gamma)} - \frac{\alpha^2(p' - p)^2}{\hbar^2} - \frac{i(p' + p)(k - n)l}{\hbar} \right\}.$$

Обозначим $k = n + r$ и заменим сумму по k и n суммой по r и n :

$$|(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 = \frac{2}{\sqrt{4+\gamma^2}} \sum_{r,n=-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{(q' - q + 2nl + rl + \frac{(p'+p)t}{2m})^2}{\alpha^2(4+\gamma^2)} - \frac{r^2l^2}{\alpha^2(4+\gamma^2)} + \frac{irl\gamma(q' - q + 2nl + rl + \frac{(p'+p)t}{2m})}{\alpha^2(4+\gamma^2)} - \frac{\alpha^2(p' - p)^2}{\hbar^2} - \frac{i(p' + p)rl}{\hbar} \right\}.$$

Пусть $\sigma(q', p')$ – произвольная основная функция из $\mathcal{S}(K)$; разложим ее в ряд Фурье по q' и представим в виде интеграла Фурье по p' :

$$\sigma(q', p') = \frac{1}{2\sqrt{\pi l}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_j(\nu) \exp \left\{ i\frac{\pi}{l}jq' + i\nu p' \right\} d\nu. \quad (23)$$

Вычислим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 \exp \left\{ i\frac{\pi}{l}jq' + i\nu p' \right\} dq' dp' \\ &= \iint_{\Omega} |(v_{qp}, v_{q' - \frac{(p'+p)t}{2m}, p', t})|^2 \exp \left\{ i\frac{\pi}{l}j \left(q' - \frac{pt}{2m} \right) + ip' \left(\nu - \frac{\pi jt}{2lm} \right) \right\} dq' dp' \\ &= \frac{2}{\sqrt{4+\gamma^2}} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp \left\{ -\frac{(q' - q + rl)^2}{\alpha^2(4+\gamma^2)} - \frac{r^2l^2}{\alpha^2(4+\gamma^2)} + \frac{irl\gamma(q' - q + rl)}{\alpha^2(4+\gamma^2)} - \frac{\alpha^2(p' - p)^2}{\hbar^2} - \frac{i(p' + p)rl}{\hbar} + i\frac{\pi}{l}j \left(q' - \frac{pt}{2m} \right) + ip' \left(\nu - \frac{\pi jt}{2lm} \right) \right\} dq' dp' \\ &= 2\pi\hbar \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2(4+\gamma^2)}{4} \left[\frac{rl\gamma}{\alpha^2(4+\gamma^2)} + \frac{\pi j}{l} \right]^2 - \frac{1}{4\alpha^2} \left[rl + \frac{\pi j\hbar t}{2lm} - \nu\hbar \right]^2 - \frac{2iprl}{\hbar} - \frac{r^2l^2}{\alpha^2(4+\gamma^2)} + i\frac{\pi}{l}j \left(q - rl - \frac{pt}{m} \right) + ip\nu \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Осуществим теперь все предельные переходы. Сначала рассмотрим случай $c = 0$, $D \in (0, \infty)$. В выражении (24) остается ненулевым только слагаемое

с $r = 0$; имеем

$$\lim \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 \exp \left\{ i \frac{\pi}{l} j q' + i \nu p' \right\} dq' dp' - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi j}{l} D \right)^2 + i \frac{\pi}{l} j \left(q - \frac{p}{m} t \right) + i p \nu \right\} \right] = 0.$$

Это означает, что

$$\lim \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 \sigma(q', p') dq' dp' - \frac{1}{2\sqrt{\pi l}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_j(\nu) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi j}{l} D \right)^2 + i \frac{\pi}{l} j \left(q - \frac{pt}{m} \right) + i p \nu \right\} d\nu \right] = 0.$$

Очевидно, сходимость интегралов и ряда равномерная по $(q, p) \in \Omega$. Выражая снова $a_j(\nu)$ через $\sigma(q', p')$ по формуле

$$a_j(\nu) = \frac{1}{2\sqrt{\pi l}} \iint_{\Omega} \sigma(q', p') \exp \left\{ -i \frac{\pi}{l} j q' - i \nu p' \right\} dq' dp'$$

и используя модулярное свойство тета-функции, получаем (19). Аналогично и более просто получается формула (19) при $D = 0$ и $D = \infty$ (здесь по-прежнему $c = 0$), а также при иррациональном c .

Рассмотрим случай произвольного рационального $c = \frac{M}{N}$. Для простоты сначала предположим, что $t - \frac{M}{N} T_{\text{rev}} \rightarrow 0$ (следовательно, $D = 0$). В этом случае в выражении (24) ненулевыми в пределе остаются слагаемые с $r = -2cj$ (это видно из первых двух слагаемых в экспоненте). Соответственно, в сумме (23) остаются ненулевыми только слагаемые с такими j , что $2cj$ – целое число. А именно, остаются ненулевыми слагаемые с $j = N'J$, $J = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где $N' = N$, если N нечетно, и $N' = \frac{N}{2}$, если N четно. Внимания заслуживает слагаемое $-ipjr = 2\pi icj^2$ экспоненты выражения (24). Если N нечетно, то $\exp\{2\pi icj^2\} = \exp\{2\pi iMNJ^2\} = 1$ при всех J . Если N четно, то $\exp\{2\pi icj^2\} = \exp\{i\pi MN'J^2\} = (-1)^J = \exp\{i\pi N'J\}$ (если N четно, то M обязательно нечетно, поскольку M и N взаимно просты). Таким образом, при нечетном N получаем

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 \sigma(q', p') dq' dp' \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi l}} \sum_{J=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_{NJ}(\nu) \exp \left\{ i \frac{\pi}{l} N J q + i p \nu \right\} d\nu. \end{aligned} \quad (25)$$

Это эквивалентно тому, что

$$\lim \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 \sigma(q', p') dq' dp' = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma \left(q + \frac{2kl}{N}, p \right).$$

Формула (19) для случая нечетного N доказана. При четном N имеем

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 \sigma(q', p') dq' dp' \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi l}} \sum_{J=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_{N'J}(\nu) \exp \left\{ i \frac{\pi}{l} N' J (q + l) + i p \nu \right\} d\nu. \end{aligned} \quad (26)$$

Это эквивалентно равенству

$$\lim \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 \sigma(q', p') dq' dp' = \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} \sigma\left(q + l + \frac{2kl}{N'}, p\right).$$

Если N' чётно (т. е. N делится на 4), то $l + \frac{2kl}{N'} = 0$ для некоторого k . Если N' нечётно (т. е. $N \equiv 2 \pmod{4}$), то $l + \frac{2kl}{N'} = \frac{2l}{N}$ для некоторого k . Поэтому можно записать

$$\lim \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 \sigma(q', p') dq' dp' = \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} \sigma\left(q + \frac{2kl}{N'} + a, p\right),$$

где $a = 0$, если N делится на 4, и $a = \frac{2l}{N}$, если $N \equiv 2 \pmod{4}$. Для случая нечётного N формула (19) также доказана.

Если условие $t - \frac{M}{N} T_{\text{rev}} \rightarrow 0$ не выполнено, но по-прежнему $D = 0$, то рассуждения остаются теми же. Отличие состоит в том, что у первого аргумента σ появляется дополнительное слагаемое $\frac{p}{m}(t - \frac{M}{N} T_{\text{rev}})$ (следствие того, что сумма $\frac{2iprl}{\hbar} + \frac{i\pi jpt}{lm}$ в экспоненте выражения (24) уже не сходится к нулю).

Аналогично разбирается случай $D \in (0, \infty)$: снова в выражении (24) ненулевыми в пределе остаются слагаемые с $r = -2cj$, а в сумме (23) – слагаемые с такими j , что $2cj$ – целое число. Однако, как и в случае $c = 0$, в подынтегральных выражениях правых частей (25) и (26) появляется множитель $e^{-\frac{1}{2}(\frac{\pi j}{l} D)^2}$, в результате чего в итоге вместо дельта-функций получаются функции φ_D . В случае $D = \infty$ все элементы суммы по k стремятся к $\frac{1}{2l}\delta(p' - p)$, отсюда получаем формулу (19) для последнего предельного случая. Теорема доказана.

Докажем еще одно утверждение, необходимое нам в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Норма v_{qp} стремится к единице равномерно на Ω при $\hbar \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (21) имеем

$$\|v_{qp}\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{l^2 k^2}{2\alpha^2} + \frac{2iplk}{\hbar}\right\} \rightarrow 1. \quad (27)$$

Приведем несколько замечаний к теореме 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы доказали теорему о квазиклассическом пределе динамики на окружности только для когерентных состояний. Однако полученный результат носит общий характер, поскольку согласно формуле (4) произвольную функцию $\psi \in L_2(-l, l)$ можно разложить в интеграл по когерентным состояниям:

$$\psi = \iint_{\Omega} f_{\psi}(q, p) v_{qp} dq dp,$$

где $f_{\psi}(q, p) = (v_{qp}, \psi)$.

Кроме того, очевидно, что в утверждении теоремы 1 можно заменить функции v_{qp} произвольными функциями $\psi_{qp\hbar\alpha} \in L_2(-l, l)$, зависящими от параметров $(q, p) \in \Omega$, $\hbar, \alpha > 0$, для которых выполнено $\|v_{qp} - \psi_{qp\hbar\alpha}\| \rightarrow 0$ при $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$. В самом деле (для краткости опустим индексы $\hbar$ в записи α и ψ), имеем

$$|(\psi_{qp}, \psi_{q'p',t})|^2 = |(v_{qp}, \psi_{q'p',t})|^2 + |(\psi - v_{qp}, \psi_{q'p',t})|^2 + 2\operatorname{Re}(\psi - v_{qp}, \psi_{q'p',t})(v_{qp}, \psi_{q'p',t}),$$

поэтому $||(\psi_{qp}, \psi_{q'p',t})|^2 - |(v_{qp}, \psi_{q'p',t})|^2| \rightarrow 0$, причем независимо от поведения $t = t(\hbar)$, т. е. на всех масштабах времени. Тогда

$$\begin{aligned} |(\psi_{qp}, \psi_{q'p',t})|^2 &\approx |(v_{qp}, \psi_{q'p',t})|^2 = |(v_{qp,-t}, \psi_{q'p'})|^2 \\ &\approx |(v_{qp,-t}, v_{q'p'})|^2 = |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Здесь запись $a \approx b$ означает, что $|a - b| \rightarrow 0$, а $\psi_{q'p',t} = U_t^c \psi_{q'p'}$. Таким образом, теорема 1 верна для функций произвольного вида, которые в квазиклассическом пределе стремятся к точечной частице с хорошо определенными координатой и импульсом.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассмотрим динамику средней координаты и среднего импульса состояния $v_{qp,t}$. Легко доказать, что в рассматриваемом квазиклассическом пределе $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$ на всех масштабах времени, т. е. при любом поведении функции $t = t(\hbar t)$, импульс сохраняется:

$$\bar{p} = -i\hbar \int_{-l}^l \overline{v_{qp,t}(x)} v'_{qp,t}(x) dx \rightarrow p.$$

Исследуем теперь динамику средней координаты. Оператор координаты частицы на окружности не имеет корректного определения, вместо этого обычно рассматривают среднюю комплексную экспоненту от координаты, которая уже определена однозначно:

$$\left(\overline{e^{i\frac{\pi}{l}q}}\right)_t = \int_{-l}^l e^{i\frac{\pi}{l}x} |v_{qp,t}(x)|^2 dx.$$

Рассмотрим масштаб времени 1), т. е. $\frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow 0$, для простоты будем считать $t = \text{const}$. Поскольку на этом масштабе времени $|v_{qp,t}(x)|^2$ стремится к периодической дельта-функции $\sum_n \delta(x - q - \frac{p}{m}t - 2nl)$, то

$$\left(\overline{e^{i\frac{\pi}{l}q}}\right)_t \rightarrow e^{i\frac{\pi}{l}(q + \frac{p}{m}t)}.$$

Таким образом, на масштабе времени 1) центр волнового пакета движется по классической траектории. На остальных масштабах времени понятия “центр пакета” и “средняя координата” не имеют физического смысла, поскольку либо пакет расплылся, поэтому не имеет определенного центра, либо пакет имеет несколько центров (дробное возрождение), и тогда обычное математическое ожидание координаты (комплексной экспоненты от координаты) может лежать между этими центрами, что также не имеет физического смысла, так как в окрестности этого математического ожидания частица не может быть обнаружена. Только после полного возрождения пакета понятие координаты вновь обретает смысл (и частицы движутся по классической траектории).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Всюду мы рассматривали предел $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$ и использовали его как математический прием для облегчения вычислений. В частности, как было уже отмечено, до сих пор в литературе отсутствовало доказательство того факта, что большую часть времени пространственная плотность частицы в конечном объеме близка к равномерной. Более того, отсутствовала даже достаточно четкая математическая формулировка этого факта: для изначально локализованного пакета равномерное распределение в точности никогда не достигается. В каком смысле тогда требуется понимать “близость” распределения равномерному? Мы доказали, что на определенных масштабах времени (масштабе 2) и большей части масштаба 3)) в нашем предельном случае пространственная плотность в точности является равномерной, т. е. факт нахождения частицы в состоянии с пространственной плотностью, близкой к равномерной, мы выразили математически как предел специального вида.

С физической точки зрения эти пределы непосредственного смысла не имеют: постоянная Планка $\hbar$ является мировой константой и не может стремиться к нулю (обсуждение квазиклассического предела в этом случае для преобразования пекаря см. в [28]). Параметр α также является фиксированным для фиксированного когерентного состояния. С физической точки зрения более правильно было бы рассматривать предельные случаи для безразмерных величин [29]. Переформулируем наши утверждения в терминах соотношений между временными масштабами T_{cl} , T_{coll} , T_{rev} и временным параметром t . Учитывая формулу (15), заметим, что пределы $\hbar \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$ можно записать в виде

$$\frac{T_{coll}}{T_{cl}} \rightarrow \infty, \quad \frac{T_{rev}}{T_{coll}} \rightarrow \infty, \quad \frac{T_{rev}}{T_{cl}} \rightarrow \infty,$$

или

$$T_{rev} \gg T_{coll} \gg T_{cl},$$

т. е. временные масштабы (классический период движения, характерное время расплывания и время полного возрождения) далеко отстоят друг от друга на временной шкале. Далее, пределы $\frac{\hbar t}{\alpha}(t - cT_{rev}) \rightarrow 2mD$ и $\hbar t(t - cT_{rev}) \rightarrow 0$, участвующие в теореме 1, переписываются в виде

$$\frac{t - cT_{rev}}{T_{coll}} \rightarrow 2mD, \quad \frac{t}{T_{rev}} \rightarrow c.$$

Как видим, рассмотренные пределы имеют ясный физический смысл.

§ 3. Когерентные состояния в бесконечно глубокой потенциальной яме

3.1. Отображение динамики частицы, движущейся по окружности, в динамику частицы, движущейся в ящике (классическая механика). Пусть имеется частица, движущаяся свободно в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме $[-l, l]$ с твердыми (упругими) стенками. В классической механике этот случай можно свести к динамике на окружности. Для этого отрезок дважды накрывается окружностью (см., например, [11]). Пусть имеются отрезок $[-l, l]$ с соответствующими ему фазовыми переменными (q, p) и окружность $[-2l, 2l]$ (т. е. точки $-2l$ и $2l$ отождествляются)

с соответствующими ей фазовыми переменными (q', p') . Тогда двулистное накрытие отрезка окружностью осуществляется по формуле

$$q' = \begin{cases} q - l, & p \geq 0, \\ l - q, & p < 0, \end{cases} \quad p' = |p|, \quad (28)$$

т. е. отрезок $[-l, l]$ сначала переводится в $[-2l, 0]$, отражается зеркально от точки 0, переходя в отрезок $[-2l, 2l]$, а затем точки $-2l$ и $2l$ соединяются. Таким образом, вместо колебательного движения вдоль отрезка мы получаем вращательное движение по окружности в одну сторону. Динамику частицы в ящике мы свели к динамике частицы на окружности. Однако отметим, что если $q = \pm l$, то знак импульса определен неоднозначно, поскольку в этих точках он меняется мгновенно. Это следствие приближительности модели.

Определим пространства основных и обобщенных функций на полосе Ω . Введем сначала пространство быстро убывающих функций на Ω :

$$\mathcal{S}(\Omega) = \left\{ \sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid \sigma[(-1)^n(q + 2nl), (-1)^n p] = \sigma(q, p), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \right. \\ \left. \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2); \lim_{p \rightarrow \pm\infty} p^r \frac{\partial^{s_1+s_2} \sigma}{\partial q^{s_1} \partial p^{s_2}} = 0, r, s_1, s_2 = 0, 1, 2, \dots \right\}. \quad (29)$$

Топология на этом пространстве задается полунормами (17).

Пространство обобщенных функций $\mathcal{S}'(\Omega)$ – это пространство непрерывных линейных функционалов над $\mathcal{S}(\Omega)$. Условимся считать, что

$$\begin{aligned} (\delta(q - q_0, p - p_0), \sigma) &= \sigma(q_0, p_0), \\ (f(q)\delta(p - p_0), \sigma) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(q)\sigma(q, p_0) dq, \\ (c\delta(p - p_0), \sigma) &= c \int_{-l}^l \sigma(q, p_0) dq, \end{aligned}$$

где $(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$, $f(q)$ – интегрируемая функция на прямой, $c \in \mathbb{R}$.

Снова рассмотрим функцию

$$\varphi_D(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D^2}} e^{-\frac{q^2}{2D^2}},$$

где $D \in (0, \infty)$, и доопределим обобщенную функцию $\varphi_D(q)\delta(p - p_0)$, $p_0 \in \mathbb{R}$, при $D = 0$ и $D = \infty$, исходя из соответствующих пределов в новом пространстве обобщенных функций:

$$\begin{aligned} \varphi_0(q)\delta(p - p_0) &= \lim_{D \rightarrow 0} \varphi_D(q)\delta(p - p_0) = \delta(q, p - p_0), \\ \varphi_\infty(q)\delta(p - p_0) &= \lim_{D \rightarrow \infty} \varphi_D(q)\delta(p - p_0) = \frac{1}{4l}\delta(p - p_0) + \frac{1}{4l}\delta(p + p_0) \end{aligned}$$

(пределы берутся в пространстве $\mathcal{S}'(\Omega)$).

Отметим важное свойство функций из $\mathcal{S}(\Omega)$:

$$\sigma(\pm l, p) = \sigma(\pm l, -p). \quad (30)$$

Это условие устраняет проблему неопределенности направления импульса на концах отрезка, о которой говорилось ранее.

Обозначим через K_{2l} цилиндр K , определенный в п. 2.4, где l заменено на $2l$. Иными словами, K_{2l} – это множество $\Omega_{2l} = [-2l, 2l] \times \mathbb{R}$ с отождествленными точками $(2l, p)$ и $(-2l, p)$ для всех $p \in \mathbb{R}$. Пространство $\mathcal{S}(K_{2l})$ – это пространство $\mathcal{S}(K)$, определенное формулой (16) с заменой l на $2l$. Легко видеть, что $\mathcal{S}(\Omega)$ – подмножество в $\mathcal{S}(K_{2l})$. А именно, $\mathcal{S}(\Omega) = T\mathcal{S}(K_{2l})$, где отображение T определено по формуле

$$\sigma(q, p) = T[\rho](q, p) = \rho(q - l, p) + \rho(l - q, -p). \quad (31)$$

Обозначим через T^{-1} отображение

$$\rho(q', p') = T^{-1}[\sigma](q', p') = \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma(l + q', p'), & q' \leq 0, \\ \frac{1}{2}\sigma(l - q', -p'), & q' > 0. \end{cases} \quad (32)$$

Здесь $\rho \in \mathcal{S}(K_{2l})$, $\sigma \in \mathcal{S}(\Omega)$. Отображение T^{-1} не является обратным: формула $TT^{-1}\sigma = \sigma$ верна для всякой функции σ на отрезке, но $T^{-1}T\rho = \rho$ верно только для четных функций, т. е. удовлетворяющих условию $\rho(q', p') = \rho(-q', -p')$. Это означает, что, когда мы используем динамику на окружности как вспомогательное средство для исследования динамики в ящике, нам интересны не отдельные функции плотности на окружности, а классы функций плотности, причем каждый класс соответствует прообразу некоторой функции плотности в ящике.

Введем также пространство основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ по такой же формуле, что и $\mathcal{S}(\Omega)$, с заменой третьего условия в (29) быстрого убывания по p на финитность по p . Аналогично вводится пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$, и также $\mathcal{D}(\Omega) = T\mathcal{D}(K_{2l})$.

3.2. Отображение динамики частицы, движущейся по окружности, в динамику частицы, движущейся в ящике (квантовая механика). Заметим, что при отображении (28) для определения координаты на окружности надо одновременно знать значения и координаты q , и импульса p (точнее, направления импульса) в ящике, т. е. предполагается, что они одновременно хорошо определены. Однако в квантовом случае, как известно, это не так в силу соотношений неопределенностей. Поэтому отображение (28) нельзя непосредственно использовать для построения соответствующего отображения в квантовой механике.

Определим другое отображение

$$\Theta: L_2(-2l, 2l) \rightarrow L_2(-l, l), \quad \psi(x) \mapsto [\Theta\psi](y) = \frac{\sqrt{2}}{2}[\psi(y - l) - \psi(l - y)]$$

и отображение

$$\Theta^{-1}: L_2(-l, l) \rightarrow L_2(-2l, 2l), \quad \varphi(y) \mapsto [\Theta^{-1}\varphi](x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi(x + l), & x \leq 0, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\varphi(l - x), & x > 0. \end{cases}$$

Отображение Θ является аналогом отображения T , а Θ^{-1} – аналогом T^{-1} (см. формулы (31) и (32)). Очевидно, соотношение $\Theta\Theta^{-1}\varphi = \varphi$ выполнено для любой функции $\varphi \in L_2(-l, l)$, но соотношение $\Theta^{-1}\Theta\psi = \psi$ верно только для нечетных функций $\psi \in L_2(-2l, 2l)$. Поэтому если область определения отображения Θ сузить на множество нечетных функций из $L_2(-2l, 2l)$, то получится взаимно однозначное отображение нечетных функций из $L_2(-2l, 2l)$ на множество всех функций из $L_2(-l, l)$, т. е. обычное нечетное продолжение функций на отрезок вдвое большей длины. Однако мы будем пользоваться тем, что Θ определено не только для нечетных функций.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. 1) Отображение Θ^{-1} сохраняет скалярное произведение

$$(\Theta^{-1}\varphi, \Theta^{-1}\varkappa)_{2l} = (\varphi, \varkappa)_l$$

для любых функций $\varphi, \varkappa \in L_2(-l, l)$. Здесь индексы $2l$ и l у скалярных произведений соответствуют гильбертовым пространствам $L_2(-2l, 2l)$ и $L_2(-l, l)$, в которых эти произведения берутся.

2) Отображение Θ сохраняет скалярное произведение:

$$(\Theta\psi, \Theta\chi)_l = (\psi, \chi)_{2l},$$

если хотя бы одна из функций $\psi \in L_2(-2l, 2l)$ или $\chi \in L_2(-2l, 2l)$ нечетна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Имеем

$$\begin{aligned} (\Theta^{-1}\varphi, \Theta^{-1}\varkappa)_{2l} &= \int_{-2l}^{2l} \overline{[\Theta^{-1}\varphi]}(x) [\Theta^{-1}\varkappa](x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2l}^0 \overline{\varphi}(x+l) \varkappa(x+l) dx + \frac{1}{2} \int_0^{2l} \overline{\varphi}(l-x) \varkappa(l-x) dx \\ &= \int_{-l}^l \overline{\varphi}(y) \varkappa(y) dy = (\varphi, \varkappa)_l. \end{aligned}$$

2) Для определенности предположим, что нечетной является функция ψ . Тогда

$$\begin{aligned} (\Theta\psi, \Theta\chi)_l &= \int_{-l}^l \overline{\Theta\psi}(y) \Theta\chi(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l [\overline{\psi}(y-l) - \overline{\psi}(l-y)] [\chi(y-l) - \chi(l-y)] dy \\ &= \int_{-l}^l \overline{\psi}(y-l) \chi(y-l) dy + \int_{-l}^l \overline{\psi}(l-y) \chi(l-y) dy \\ &= \int_{-2l}^{2l} \overline{\psi}(x) \chi(x) dx = (\psi, \chi)_{2l}. \end{aligned}$$

3.3. Когерентные состояния в ящике. Рассмотрим когерентные состояния v_{qp} , определенные формулой (3), на пространстве $L_2(-2l, 2l)$:

$$v_{qp}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta_{qp}(x - 4nl),$$

где $q \in [-2l, 2l]$, $p \in \mathbb{R}$ (обозначим $[-2l, 2l] \times \mathbb{R} = \Omega_{2l}$, тогда можно записать $(q, p) \in \Omega_{2l}$). Здесь η_{qp} определены формулой (1), т.е. это по-прежнему обычные когерентные состояния на прямой. Если не оговорено противное, то всюду в этом пункте v_{qp} – функции на $L_2(-2l, 2l)$, определяемые формулой (3) с заменой l на $2l$.

Тогда легко видеть, что

$$[\Theta v_{qp}](y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_{l+q,p}(y), & q \leq 0, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \omega_{l-q,-p}(y), & q > 0 \end{cases} \quad (33)$$

(мы воспользовались свойством $\eta_{qp}(x) = \eta_{-q,-p}(-x)$). Здесь

$$\omega_{qp}(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\eta_{qp}(y - 4nl) - \eta_{qp}(2l - y + 4nl)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \eta_{qp}[(-1)^n(y - 2nl)], \quad (34)$$

где $(q, p) \in \Omega$. Аналогично можно установить, что

$$[\Theta^{-1} \omega_{qp}](x) = \frac{\sqrt{2}}{2} [v_{q-l,p}(x) - v_{l-q,-p}(x)] \quad (35)$$

(т.е. $\Theta^{-1} \Theta v_{qp} \neq v_{qp}$, поскольку функция v_{qp} не является нечетной). Из определения функций ω_{qp} можно заметить, что $\omega_{\pm l,0} \equiv 0$.

Докажем теперь аналог предложения 1 (фактически, следствие из него и свойств введенного преобразования Θ).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Семейство функций (34) образует непрерывное разложение единицы в пространстве $L_2(-l, l)$:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} P[\omega_{qp}] dq dp = 1.$$

Равенство понимается в слабом смысле: для любых $\varphi, \varkappa \in L_2(-l, l)$ выполнено

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} (\varphi, P[\omega_{qp}] \varkappa) dq dp = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} (\varphi, \omega_{qp})(\omega_{qp}, \varkappa) dq dp = (\varphi, \varkappa). \quad (36)$$

Здесь через $P[\psi]$, $\psi \in L_2(-l, l)$, по-прежнему обозначается одномерный оператор, действующий на произвольный вектор $\varphi \in L_2(-l, l)$ по правилу $P[\psi]\varphi = (\psi, \varphi)\psi$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(-l, l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. По свойствам отображений Θ , Θ^{-1} и предложению 1 имеем

$$\begin{aligned} (\varphi, \varkappa) &= (\Theta^{-1} \varphi, \Theta^{-1} \varkappa) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega_{2l}} (\Theta^{-1} \varphi, v_{qp})(v_{qp}, \Theta^{-1} \varkappa) dq dp \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega_{2l}} (\varphi, \Theta v_{qp})(\Theta v_{qp}, \varkappa) dq dp \\ &= \frac{1}{4\pi\hbar} \iint_{\Omega_{2l}^-} (\varphi, \omega_{q+l,p})(\omega_{q+l,p}, \varkappa) dq dp + \frac{1}{4\pi\hbar} \iint_{\Omega_{2l}^+} (\varphi, \omega_{l-q,-p})(\omega_{l-q,-p}, \varkappa) dq dp \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} (\varphi, \omega_{qp})(\omega_{qp}, \varkappa) dq dp, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Здесь использованы обозначения $\Omega_{2l}^- = [-2l, 0] \times \mathbb{R}$ и $\Omega_{2l}^+ = [0, 2l] \times \mathbb{R}$.

Предложение 3, а также свойства, которые мы докажем позже, касающиеся квазиклассической динамики (теорема 2), позволяют назвать функции ω_{qp} , $(q, p) \in \Omega$, когерентными состояниями в бесконечно глубокой потенциальной яме (ящике).

Можно получить аналог формулы (5) для функций ω_{qp} :

$$\begin{aligned} \omega_{qp}(x) = & \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2}} \theta\left(\frac{(x-q)l}{i\pi\alpha^2} - \frac{2pl}{\pi\hbar}, \frac{4l^2}{\pi\alpha^2}\right) \exp\left\{-\frac{(x-q)^2}{4\alpha^2} + \frac{ip(x-q)}{\hbar}\right\} \\ & - \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2}} \theta\left(\frac{(x-2l+q)l}{i\pi\alpha^2} - \frac{2pl}{\pi\hbar}, \frac{4l^2}{\pi\alpha^2}\right) \exp\left\{-\frac{(x-2l+q)^2}{4\alpha^2} - \frac{ip(x-2l+q)}{\hbar}\right\}. \end{aligned}$$

Используя модулярное свойство тета-функции, получаем следующий аналог формулы (6):

$$\begin{aligned} \omega_{qp} = & \sqrt[4]{\frac{\pi\alpha^2}{32l^4}} \left[\theta\left(-\frac{x-q}{4l} - \frac{p\alpha^2}{2il\hbar}, \frac{\pi\alpha^2}{4l^2}\right) - \theta\left(-\frac{x-2l+q}{4l} - \frac{p\alpha^2}{2il\hbar}, \frac{\pi\alpha^2}{4l^2}\right) \right] e^{-(\frac{\alpha p}{\hbar})^2} \\ = & \sqrt[4]{\frac{\pi\alpha^2}{2l^4}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left\{-\alpha^2\left(\frac{\pi k}{2l} - \frac{p}{\hbar}\right)^2 - \frac{i\pi k(q-l)}{2l}\right\} \right. \\ & \left. - \exp\left\{-\alpha^2\left(\frac{\pi k}{2l} + \frac{p}{\hbar}\right)^2 + \frac{i\pi k(q-l)}{2l}\right\} \right] \sin\left(\frac{\pi k}{2l}(x-l)\right). \quad (37) \end{aligned}$$

Получили разложение функций ω_{qp} по ортогональному базису

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin\left(\frac{\pi k}{2l}(x-l)\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Как и в случае окружности, этот же результат можно получить, непосредственно интегрируя ω_{qp} по элементам этого базиса и используя формулу

$$\int_{-l}^l \omega_{qp}(x) \sin\left(\frac{\pi k}{2l}(x-l)\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{qp}(x) \sin\left(\frac{\pi k}{2l}(x-l)\right) dx$$

при целых k . Последнюю формулу можно получить из равенства

$$\int_{-2l}^{2l} v_{qp}(x) \sin\left(\frac{\pi k}{2l}x\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{qp}(x) \sin\left(\frac{\pi k}{2l}x\right) dx$$

(доказывается аналогично (7)), пользуясь свойствами преобразования Θ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{qp}(x) \sin\left(\frac{\pi k}{2l}(x-l)\right) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{q-l,p}(x) \sin\left(\frac{\pi k}{2l}x\right) dx \\ &= \int_{-2l}^{2l} v_{q-l,p}(x) \sin\left(\frac{\pi k}{2l}x\right) dx = \left(\sin\left(\frac{\pi k}{2l}x\right), v_{q-l,p}\right)_{2l} \\ &= \left(\Theta\left[\sin\left(\frac{\pi k}{2l}x\right)\right], \Theta v_{q-l,p}\right)_l = \left(\sin\left(\frac{\pi k}{2l}(x-l)\right), \omega_{qp}\right)_l \\ &= \int_{-l}^l \omega_{qp}(x) \sin\left(\frac{\pi k}{2l}(x-l)\right) dx. \end{aligned}$$

Функции f_k являются собственными для оператора

$$H^b = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

с областью определения

$$D(H^b) = \{\psi \in AC^2(-l, l) \mid \psi(-l) = \psi(l) = 0\}.$$

Оператор H^b является оператором Гамильтона (энергии) для свободной (см. замечание 1) квантовой частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме (ящике) (см. [9]). Таким образом, функции $\omega_{qp}(x)$ разлагаются в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям оператора Гамильтона для частицы в ящике.

Эволюция состояния ω_{qp} во времени задается формулой

$$\omega_{qp,t} = U_t^b \omega_{qp},$$

где

$$U_t^b = \exp\left\{-\frac{it}{\hbar} H^b\right\} \quad (38)$$

– оператор эволюции для свободной квантовой частицы в ящике. Функция $\omega_{qp,t}$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера с граничными условиями, соответствующими движению в ящике:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \omega_{qp,t}}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \omega_{qp,t}}{\partial x^2}, \\ \omega_{qp,t}(-l) &= \omega_{qp,t}(l) = 0, \quad \omega_{qp,0}(x) = \omega_{qp}(x), \end{aligned} \quad (39)$$

где $x \in [-l, l]$, $t \in \mathbb{R}$. Воспользовавшись методом отражений, приходим к тому, что

$$\omega_{qp,t}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \eta_{qp,t} [(-1)^n (x - 2nl)],$$

где $\eta_{qp,t}$ определено ранее (см. формулу (11)).

Заметим, что соотношения (33) и (35) сохраняют свой вид, если v_{qp} и ω_{qp} заменить соответственно на $v_{qp,t}$ и $\omega_{qp,t}$ для произвольного t .

Если разложить $\omega_{qp,t}$ по собственным функциям оператора H^b , то получим

$$\omega_{qp,t}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,qp} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \exp\left\{-\frac{i\hbar t}{2m} \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2\right\},$$

где коэффициенты разложения $b_{k,qp}$ можно найти в формуле (37).

Динамика когерентных состояний $\omega_{qp,t}$ в ящике аналогична динамике когерентных состояний на окружности. При малых значениях времени изначально хорошо локализованный волновой пакет продолжает быть хорошо локализованным и его центр движется по классической траектории с периодом

$$T_{cl} = \frac{4lm}{p}.$$

Постепенно пакет расплывается, в момент

$$T_{\text{coll}} = \frac{2ml\alpha}{\sqrt{3}\hbar}$$

наблюдается приблизительно равномерное пространственное распределение, но в момент

$$T_{\text{rev}} = \frac{16ml^2}{\pi\hbar}$$

наблюдается полное возрождение волнового пакета: $\omega_{qp, T_{\text{rev}}} = \omega_{qp}$. В моменты $\frac{M}{N}T_{\text{rev}}$ при всех целых M и N наблюдаются дробные возрождения. Увеличение в четыре раза времени полного возрождения по сравнению с временем возрождения при движении по окружности (ср. последнюю формулу для T_{rev} с формулой (14)) связано с тем, что энергетический спектр здесь вдвое более плотный, нежели для частицы на окружности $[-l, l]$.

Таким образом, как и для частицы на окружности, здесь имеют место три масштаба времени:

- 1) T_{cl} – классический период движения;
- 2) T_{coll} – характерное время расплывания квантового волнового пакета;
- 3) T_{rev} – период полного возрождения квантового волнового пакета.

Остается справедливой формула (15), касающаяся асимптотического поведения масштабов времени при $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$.

3.4. Квазиклассический предел динамики когерентных состояний частицы, находящейся в ящике. Докажем теперь аналог теоремы 1 для ящика.

ТЕОРЕМА 2. В $\mathcal{S}'(\Omega)$ имеет место следующее предельное соотношение (переменные (q, p) фиксированы, а (q', p') – переменные интегрирования с пробными функциями $\sigma(q', p') \in \mathcal{S}(\Omega)$):

$$\lim \left\{ \frac{1}{2\pi\hbar} |(\omega_{qp}, \omega_{q'p', t})|^2 - \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} \varphi_D \left[q' - q - \frac{4kl}{N'} - a + \frac{p}{m}(t - cT_{\text{rev}}) \right] \delta(p' - p) \right\} = 0. \quad (40)$$

Предел осуществляется следующим образом: $\hbar \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$, $t = t(\hbar)$, $\frac{\hbar}{\alpha}(t - cT_{\text{rev}}) \rightarrow 2mD$, $\hbar(t - cT_{\text{rev}}) \rightarrow 0$, где $c \in \mathbb{R}$, $D \in [0, \infty]$, а числа N' и a зависят от числа s . Пусть число s рационально, а значит, может быть записано в виде несократимой дроби: $s = \frac{M}{N}$. Тогда $N' = N$, если N нечетно, и $N' = \frac{N}{2}$, если N четно; $a = \frac{2l}{N}$, если $N \equiv 2 \pmod{4}$, и $a = 0$ в противном случае. Если число s иррационально, то $N' = 1$, $a = 0$. Параметр α участвует в определении функций ω_{qp} (см. формулы (1) и (34)), $T_{\text{rev}} = \frac{16ml^2}{\pi\hbar}$.

Сходимость в формуле (40) является равномерной по (q, p) на любом подмножестве из Ω , не пересекающемся с некоторой окрестностью отрезка $\{p = 0\} \subset \Omega$. Более того, если s – целое или полуцелое число, то сходимость равномерна на любом подмножестве из Ω , не пересекающемся с некоторыми окрестностями точек $(\pm l, 0)$.

Смысл утверждений теоремы 2 аналогичен смыслу утверждений теоремы 1, поэтому повторим их здесь более кратко. Усложнение происходит, в частности, в силу необходимости учета отражений частицы от стенок и скачков знака ее

импульса вследствие этого. Здесь $\frac{1}{2\pi\hbar} |(\omega_{qp}, \omega_{q'p',t})|^2$ представляет собой плотность вероятности нахождения квантовой частицы в состоянии ω_{qp} в момент времени t при условии, что в нулевой момент времени частица находилась в состоянии $\omega_{q'p'}$ (с точностью до норм $\|\omega_{qp}\|^2$ и $\|\omega_{q'p'}\|^2$, которые в рассматриваемых пределах на рассматриваемых множествах стремятся к единице; см. далее предложение 4).

В рассматриваемом квазиклассическом пределе $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$ квантовая частица в состоянии ω_{qp} имеет хорошо определенные и координату (равную q), и импульс (равный p), как и классическая частица. Поэтому можно сказать, что в квазиклассическом пределе $\frac{1}{2\pi\hbar} |(\omega_{qp}, \omega_{q'p',t})|^2$ – это плотность вероятности нахождения квантовой частицы в ящике в фазовой точке (q, p) в момент времени t при условии, что в нулевой момент времени частица находилась в фазовой точке (q', p') .

Как и ранее, случай $c = 0$ и $D = 0$ ($\frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow 0$) соответствует классическому масштабу времени T_{cl} : время фиксировано или возрастает медленнее, чем снижается скорость расплывания пакета, пропорциональная $\frac{\hbar}{\alpha}$. Тогда предельное соотношение (40) принимает вид

$$\lim \left[\frac{1}{2\pi\hbar} |(\omega_{qp}, \omega_{q'p',t})|^2 - \delta\left(q' - q + \frac{p}{m}t, p' - p\right) \right] = 0.$$

Вычитаемое $\delta(q' - q + \frac{p}{m}t, p' - p)$ в левой части последнего равенства есть плотность вероятности нахождения классической частицы в фазовой точке (q, p) в момент времени t при условии, что в нулевой момент времени частица находилась в фазовой точке (q', p') . Таким образом, в квазиклассическом пределе на масштабе времени T_{cl} имеет место классическая динамика: квантовая плотность вероятности перехода в фазовую точку (q, p) для частицы, находившейся в нулевой момент времени в фазовой точке (q', p') , равна соответствующей классической плотности вероятности.

Случай $c = 0$, $D \in (0, \infty)$ ($\frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow 2mD \in (0, \infty)$) соответствует масштабу времени T_{coll} . В этом случае наблюдается некоторое пространственное расплывание распределения вероятностей. В отличие от случая окружности, здесь выравниваются не только пространственная плотность распределения, но и вероятности знаков импульса.

Случай $c = 0$, $D = \infty$ ($\frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow \infty$) соответствует полному выравниванию пространственной плотности вероятности (и вероятностей знаков импульса): формула (40) принимает вид

$$\lim \frac{1}{2\pi\hbar} |(\omega_{qp}, \omega_{q'p',t})|^2 = \frac{1}{4l} [\delta(p' - p) + \delta(p' + p)]. \quad (41)$$

Поэтому отнесем этот случай также к масштабу времени 2) (соответствующему разрушению локализованного волнового пакета). Получено математическое обоснование (асимптотического) выравнивания пространственной плотности вероятности для квантовой частицы в ящике, известное ранее лишь из численных экспериментов [5], [6].

Случай $c \neq 0$ соответствует масштабу времени T_{rev} . Если c – иррациональное число, то, как и в предыдущем случае, формула (40) сводится к формуле (41), т. е. наблюдается полное выравнивание пространственной плотности вероятности. Случай рационального c соответствует возрождению волнового пакета,

в общем случае дробному (если $N \neq 1$, т.е. $c = \frac{M}{N}$ нецелое) и неточному (если $D > 0$). В случае $D = \infty$ мы снова получаем полное выравнивание пространственной плотности распределения (41).

Отличие от случая окружности, связанное с условием $p \neq 0$ (см. формулировку теоремы 2) при $N \neq 1, 2$, объясняется специфической структурой дробных возроджений состояний ω_{q0} , проистекающей из их свойств симметрии (а именно, из свойства $\omega_{2l-q,0} = -\omega_{q0}$).

Как и для случая окружности, поскольку любое иррациональное число можно сколь угодно точно приблизить рациональными, то (не строго) можно сказать, что случай иррационального c теоремы 2 является предельным случаем для рационального c при $N \rightarrow \infty$: расстояние между соседними слагаемыми в сумме дельта-функций в формуле (40) стремится к нулю, и в пределе сумма дельта-функций переходит в равномерное распределение. Иными словами, случаи иррационального c и очень близкого к нему рационального c' практически неразличимы.

Заметим, что во всех предельных случаях сохраняется распределение модуля импульса.

Мы проследили всю динамику квантового волнового пакета в бесконечно глубокой потенциальной яме. Сначала хорошо локализованный волновой пакет со временем расплывается, пока не достигается полное выравнивание пространственной плотности и знака импульса. В некоторые моменты времени сразу в нескольких точках ямы постепенно возникает по копии исходного волнового пакета, которые затем снова постепенно расплываются, пока снова не достигается полное выравнивание плотности. Поскольку иррациональных чисел “больше”, чем рациональных, можно сказать, что большую часть времени частица проводит в состоянии с пространственным распределением плотности, близким к равномерному. Таким образом, теорема 2 полностью описывает квазиклассический предел свободной квантовой динамики в бесконечно глубокой потенциальной яме на всех масштабах времени, которые параметризуются двумя параметрами c, D .

Приведем упрощенный вариант теоремы 2, в котором рассмотрены только основные масштабы времени, без промежуточных: классическое движение, полное расплывание и точные возроджения.

СЛЕДСТВИЕ 2. В $\mathcal{S}'(\Omega)$ имеют место следующие пределы:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi\hbar} |(\omega_{qp}, \omega_{q'p'}, t)|^2 - \delta(q' - q + \frac{p}{m}t, p' - p) \right] &= 0 \text{ при } \hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0, t = \text{const}; \\ 2) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\hbar} |(\omega_{qp}, \omega_{q'p'}, t)|^2 &= \frac{1}{4l} \delta(p' - p) + \frac{1}{4l} \delta(p' + p) \text{ при } \hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \\ \frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow \infty, \text{ а также при } \hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0, t = cT_{\text{rev}} \rightarrow \infty, \text{ число } c &\text{ иррационально,} \\ T_{\text{rev}} &= \frac{16ml^2}{\pi\hbar}; \end{aligned}$$

$$3) \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi\hbar} |(\omega_{qp}, \omega_{q'p'}, t)|^2 - \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} \delta(q' - q - \frac{4kl}{N'} - a, p' - p) \right] = 0 \text{ при } \hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0, \\ t = cT_{\text{rev}} \rightarrow \infty, \text{ число } c = \frac{M}{N} \text{ рационально, числа } N' \text{ и } a \text{ зависят от } N.$$

Сходимости в пп. 1), 2) и п. 3) при $N = 1$ или $N = 2$ (т.е. при целом или полуцелом c , если оно рационально) являются равномерными по (q, p) на любом подмножестве из Ω , не пересекающемся с некоторыми окрестностями точек $(\pm l, 0)$. Если в п. 3) величина N отлична от 1 и 2, то сходимость равномерна на любом подмножестве из Ω , не пересекающемся с некоторой окрестностью отрезка $\{p = 0\} \subset \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Поскольку

$$\omega_{q'p'} = \sqrt{2}\Theta v_{q'-l,p'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Theta[v_{q'-l,p'} - v_{l-q',-p'}],$$

причем $(v_{q'-l,p'} - v_{l-q',-p'})$ – нечетная функция, то по свойствам Θ имеет место равенство

$$(\omega_{qp}, \omega_{q'p',t})_l = (v_{q-l,p}, v_{q'-l,p',t} - v_{l-q',-p'})_{2l}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{q-l,p}, v_{q'-l,p',t} - v_{l-q',-p',t})|^2 \sigma(q', p') dq' dp' \\ &= \iint_{\Omega_{2l}} \frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{q-l,p}, v_{q'p',t} - v_{-q',-p',t})|^2 T^{-1}[\sigma](q', p') dq' dp'. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{q-l,p}, v_{q'p',t} - v_{-q',-p',t})|^2 &= \frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{q-l,p}, v_{q'p',t})|^2 \\ &+ \frac{1}{2\pi\hbar} |(v_{q-l,p}, v_{-q',-p',t})|^2 - \frac{1}{\pi\hbar} \operatorname{Re}(v_{q-l,p}, v_{q'p',t})(v_{-q',-p',t}, v_{q-l,p}). \end{aligned} \quad (42)$$

Последнее слагаемое, очевидно, стремится к нулю равномерно на любом подмножестве из Ω , не пересекающемся с некоторой окрестностью отрезка $\{p = 0\}$ (т.е. таким, что $|p| > \varepsilon$ для всех элементов подмножества при некотором ε). Рассмотрим более слабое ограничение, когда (q, p) принадлежит некоторому подмножеству из Ω , не пересекающемуся с некоторыми окрестностями точек $(\pm l, 0)$. Как уже известно, при $p \neq 0$ слагаемое стремится к нулю, поэтому рассмотрим случай $p = 0$. Разложим функцию $T^{-1}[\sigma]$ в ряд Фурье по q' и представим ее в виде интеграла Фурье по p' :

$$T^{-1}[\sigma](q', p') = \frac{1}{2\sqrt{\pi l}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_j(\nu) e^{i\frac{\pi}{2l}jq' + i\nu p'} d\nu.$$

Используя формулу (21) и технику доказательства теоремы 1, приходим к тому, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} (v_{q-l,0}, v_{q'p',t})(v_{-q',-p',t}, v_{q-l,0}) e^{i\frac{\pi}{2l}jq' + i\nu p'} dq' dp' \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2(4+\gamma^2)}{4} \left[\frac{\pi j}{2l} - \frac{\gamma(q-l-2rl)}{\alpha^2(4+\gamma^2)} \right]^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4\alpha^2} \left[q-l-2rl - \frac{\pi j\hbar t}{4ml} + \nu\hbar \right]^2 - \frac{(q-l-2rl)^2}{\alpha^2(4+\gamma^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Это выражение стремится к нулю при $q \neq \pm l$ в предельных случаях, соответствующих случаю рационального s , если $N = 1$ или $N = 2$, причем при этом условии сходимость равномерна на любом отрезке $[-l + \varepsilon, l - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, т.е.

$$\lim \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} (v_{q-l,p}, v_{q'p',t})(v_{-q',-p',t}, v_{q-l,p}) T^{-1}[\sigma](q', p') dq' dp' = 0 \quad (43)$$

равномерно по (q, p) на любом подмножестве из Ω , не пересекающемся с некоторыми окрестностями точек $(\pm l, 0)$.

Согласно равенству (42) с нулевым последним слагаемым, теореме 1, определению T^{-1} и свойству четности $T^{-1}[\sigma](q', p') = T^{-1}[\sigma](-q', -p')$ образа отображения T^{-1} для случая рационального c получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \lim \iint_{\Omega} \frac{1}{2\pi\hbar} |(\omega_{qp}, \omega_{q'p', t})|^2 \sigma(q', p') dq' dp' \\ &\quad - \frac{2}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} \int_{-2l}^{2l} \varphi_D \left[q' - q + l - \frac{4kl}{N'} - a + \frac{p}{m} \left(t - \frac{M}{N} T_{\text{rev}} \right) \right] T^{-1}[\sigma](q', p) dq' \\ &= \lim \iint_{\Omega} \frac{1}{2\pi\hbar} |(\omega_{qp}, \omega_{q'p', t})|^2 \sigma(q', p') dq' dp' \\ &\quad - \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} \int_{-l}^l \varphi_D \left[q' - q - \frac{4kl}{N'} - a + \frac{p}{m} \left(t - \frac{M}{N} T_{\text{rev}} \right) \right] \sigma(q', p) dq' \\ &\quad - \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} \int_{-l}^l \varphi_D \left[q' - 2l + q + \frac{4kl}{N'} + a - \frac{p}{m} \left(t - \frac{M}{N} T_{\text{rev}} \right) \right] \sigma(q', -p) dq', \end{aligned}$$

где величины N' и a определены так, как указано в формулировке теоремы. Таким образом, теорема в случае рационального c доказана.

Для случая иррационального c имеем

$$\begin{aligned} \lim \iint_{\Omega} \frac{1}{2\pi\hbar} |(\omega_{qp}, \omega_{q'p', t})|^2 \sigma(q', p') dq' dp' \\ = \frac{1}{4l} \int_{-2l}^{2l} (T^{-1}[\sigma](q', p) + T^{-1}[\sigma](q', -p)) dq' = \frac{1}{4l} \int_{-2l}^{2l} \sigma(q', p) dq'. \end{aligned}$$

Равномерность сходимостей в последних двух формулах следует из равномерности сходимости в формуле (19) и равномерности сходимости к нулю последнего слагаемого в (42) или выражения (43) (в зависимости от рассматриваемого предельного случая). Теорема доказана.

Докажем теперь аналог предложения 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Норма ω_{qp} стремится к единице при $\hbar \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$ равномерно на любом подмножестве из Ω , не пересекающемся с некоторыми окрестностями точек $(\pm l, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойствам функций ω_{qp} и отображения Θ имеет место (см. начало доказательства теоремы 2) цепочка равенств

$$\|\omega_{qp}\|^2 = (\omega_{qp}, \omega_{qp}) = (v_{q-l,p}, v_{q-l,p} - v_{l-q,-p}) = \|v_{q-l,p}\|^2 - (v_{q-l,p}, v_{l-q,-p}).$$

Первое слагаемое стремится к единице по предложению 2. Второе слагаемое стремится к нулю при $(q, p) \in \Omega$, $(q, p) \neq (\pm l, 0)$. Обе сходимости равномерны на множествах, указанных в формулировке предложения. Предложение доказано.

Приведем два замечания к теореме 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Замечания, сделанные в конце § 2 для случая окружности, остаются справедливыми и здесь. Некоторые не столь существенные различия имеются в квазиклассической динамике средней координаты и среднего импульса. Во-первых, в ящике в квазиклассическом пределе средний импульс не сохраняется, а периодически меняет знак вследствие отражении от стенок, сохраняется его абсолютное значение. Во-вторых, в ящике координата частицы определена корректно, поэтому для средней координаты можно использовать обычную формулу

$$\bar{q}_t = \int_{-l}^l x |\omega_{qp,t}(x)|^2 dx.$$

Также легко получить, что на масштабе времени T_{cl} центр пакета перемещается по классической траектории.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Мы доказали теоремы о квазиклассическом пределе квантовой динамики на окружности и на отрезке (в ящике). Разумеется, эти результаты непосредственно обобщаются в случае многомерных областей, являющихся декартовыми произведениями произвольного числа окружностей и отрезков: прямоугольник и прямоугольный параллелепипед, тор, цилиндр и др. Было бы интересно обобщить результаты в случае более общих областей, главным образом произвольных областей трехмерного пространства, а также в случае взаимодействующих частиц.

§ 4. Квазиклассический предел динамики для функции Хусими

4.1. Случай свободной квантовой динамики на окружности. В статье [14] предложена новая формулировка классической механики, названная *функциональной*. Исходным понятием механики в этой формулировке является не материальная точка или траектория, а функция плотности распределения в фазовом пространстве. Соответственно, фундаментальным динамическим уравнением становится не уравнение Ньютона (или эквивалентные ему уравнения Гамильтона), а уравнение Лиувилля (даже если рассматривать не ансамбль, а одну частицу). Уравнение Ньютона (Гамильтона) тогда становится приближенным уравнением для средних распределений координат и импульсов. В работах [14], [30] вычислены поправки к решениям уравнения Ньютона для некоторых частных случаев.

Целью перехода к новой формулировке классической механики является согласование обратимой микроскопической динамики с необратимой макроскопической динамикой. Эта проблема известна как *проблема необратимости* и является в настоящее время одной из важнейших фундаментальных проблем математической физики, требующих решения.

Как известно, динамика материальной точки обратима и возвращаема. Динамика функции плотности, подчиняющаяся уравнению Лиувилля, обладает так называемым свойством *делокализации* (расплывания). Это свойство соответствует необратимому поведению. Поэтому если мы описываем с помощью функции плотности не только системы, состоящие из большого числа частиц, но даже одну частицу, то противоречия между микро- и макроскопической динамиками не существует: обе динамики необратимы.

В работе [17] описана процедура построения функции плотности физической системы на основании непосредственно наблюдаемых величин – результатов

измерений, в работе [18] рассматриваются вопросы взаимодействия системы и прибора с точки зрения функциональной формулировки.

Подойдем к проблеме выбора той или иной формулировки классической механики с точки зрения квантовой механики. Для этого рассмотрим квазиклассический предельный переход для квантовой динамики на окружности и в ящике. В этом пункте мы исследуем квазиклассический предел для свободной квантовой динамики на окружности.

Известно соответствие между квантовыми состояниями (операторами плотности) и классическими состояниями (функциями плотности распределения), рассмотренное Хусими для случая когерентных состояний на всей оси [31]–[33]. Здесь мы определим аналогичное соответствие для когерентных состояний на отрезке.

Пусть ρ – оператор плотности (иначе – квантовое состояние) в $L_2(-l, l)$ (т. е. положительный оператор с единичным следом). Поставим ему в соответствие следующую функцию на фазовом пространстве Ω :

$$\tilde{\rho}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Tr } P[v_{qp}]\rho = \frac{1}{2\pi\hbar} (v_{qp}, \rho v_{qp}), \quad (44)$$

где через Tr обозначена операция взятия следа оператора. В случае если оператор плотности представляет собой проектор ($\rho = P[\psi]$, $\psi \in L_2(-l, l)$), что отвечает случаю чистого квантового состояния, то формула (44) принимает вид

$$\tilde{\rho}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} |\langle \psi, v_{qp} \rangle|^2.$$

Очевидно, $\tilde{\rho}(q, p) > 0$, и в силу (4) имеем

$$\iint_{\Omega} \tilde{\rho}(q, p) dq dp = 1,$$

т. е. $\tilde{\rho}(q, p)$ является функцией плотности вероятности на фазовом пространстве (т. е. классическим состоянием). Сопоставление по формуле (44) квантовому оператору плотности классической плотности распределения вероятностей называется *преобразованием Хусими*. Оно также может быть выражено как сглаживание функции Вигнера квантового состояния с гауссовой функцией [31]–[33]. Саму функцию плотности вероятностей $\tilde{\rho}$ также будем называть *функцией Хусими* оператора ρ .

В более общем случае классическое состояние σ – это обобщенная функция¹. Допустим, $\sigma \in \mathcal{D}'(K)$ (см. п. 3.1). Неотрицательность σ понимается в смысле $(\sigma, f) \geq 0$ для любой всюду неотрицательной основной функции f . Нормировка обобщенной функции на единицу понимается в смысле существования предела $\lim_{P \rightarrow \infty} (\sigma, \lambda_P) = 1$, где λ_P , $P > 0$, – такое семейство функций, что $\lambda(x, p) = 1$ при $|p| \leq P$, $0 \leq \lambda(x, p) \leq 1$ при $P < |p| < P+1$, $\lambda(x, p) = 0$ при $|p| \geq P+1$. Если $\sigma(q, p)$ – обычная функция (регулярная обобщенная функция), то это требование переходит в условие ее интегрируемости на Ω и $\iint_{\Omega} \sigma dq dp = 1$. Обозначим множество неотрицательных и нормированных на единицу обобщенных функций из $\mathcal{D}'(K)$ через $\mathcal{D}'_1(K)$.

¹В наиболее общем случае классическое состояние определяется как вероятностная мера на фазовом пространстве [34].

Нас интересует, любое ли классическое состояние можно получить как квазиклассический предел функций Хусими некоторого семейства квантовых состояний. Строгая постановка вопроса следующая: пусть дана (обобщенная) функция плотности вероятности $\sigma \in \mathcal{D}'_1(K)$; существует ли семейство $\rho^{(\hbar)}$, $\hbar > 0$, операторов плотности в $L_2(-l, l)$ такое, что $\tilde{\rho}^{(\hbar)} \rightarrow \sigma$ в $\mathcal{D}'(K)$ при $\hbar \rightarrow 0$ (где $\tilde{\rho}^{(\hbar)}$ – функция Хусими оператора $\rho^{(\hbar)}$)? Заметим, что в определении функций v_{qp} , участвующих в преобразовании Хусими, присутствует параметр α . Как и в теореме 1, будем считать, что $\alpha = \alpha(\hbar)$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$ (как мы отмечали, в этом предельном случае квантовая частица в состоянии v_{qp} имеет хорошо определенные координаты и импульсы).

Теперь рассмотрим динамику во времени. Пусть квантовая система (оператор плотности) эволюционирует во времени на окружности: $\rho_t^{(\hbar)} = U_t^c \rho^{(\hbar)} (U_t^c)^\dagger$, где U_t^c определен формулой (8). Функцию Хусими от $\rho_t^{(\hbar)}$ обозначим $\tilde{\rho}_t^{(\hbar)}(q, p)$. Эволюция классической системы (функции плотности вероятности) задается формулой $\sigma_t(q, p) = \sigma(q - \frac{p}{m}t, p)$. Можно поставить вопрос: сохраняется ли соответствие между семейством квантовых состояний $\rho^{(\hbar)}$, $\hbar > 0$, и классическим состоянием σ во времени для различных его масштабов (см. п. 2.3)? А именно, верно ли, что $\tilde{\rho}_t^{(\hbar)} - \sigma_t \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}'(K)$ при $\hbar \rightarrow 0$, где $t \in \mathbb{R}$ – произвольная, но фиксированная величина (масштаб времени 1)) или $t \rightarrow \infty$ (масштабы времени 2), 3); см. различные варианты взаимного стремления $\hbar \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ в теореме 1)?

Если ответы на поставленные вопросы отличаются для σ вида $\sigma(q, p) = \delta(q - q_0, p - p_0)$ (что соответствует традиционной формулировке классической механики) и для $\sigma \in L_1(\Omega)$ (что соответствует функциональной формулировке классической механики), то можно говорить о предпочтении той или иной формулировки.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Известно, что асимптотическое поведение σ_t сильно зависит от начальной функции плотности $\sigma = \sigma_0$. Если $\sigma(q, p) = \delta(q - q_0, p - p_0)$, то движение периодическое с периодом $\frac{2lm}{p_0}$. Если $\sigma \in L_1(\Omega)$, то плотность $\sigma_t(q, p)$ асимптотически выравнивается по q на окружности (в смысле так называемого слабого предела). А именно, вторая теорема Козлова о диффузии [11] гласит, что существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \iint_{\Omega} \sigma\left(q - \frac{p}{m}t, p\right) g(q, p) dq dp = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2l} \int_{-l}^l \sigma(q', p) dq' \right] g(q, p) dq dp, \quad (45)$$

если $\sigma, g \in L_2(\Omega)$. Легко показать, что соотношение (45) остается справедливым, если $\sigma \in L_1(\Omega)$, $g \in \mathcal{D}(K)$. Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \sigma\left(q - \frac{p}{m}t, p\right) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \sigma(q', p) dq' \quad \text{в } \mathcal{D}'(K), \quad (46)$$

если $\sigma \in L_1(\Omega)$. В этом смысле и происходит выравнивание пространственной плотности.

Ответы на вопросы, поставленные выше, дает следующая

ТЕОРЕМА 3. 1) Пусть $\sigma \in \mathcal{D}'_1(K)$. Тогда существует такое семейство операторов плотности $\rho^{(\hbar)}$, $\hbar > 0$, в $L_2(-l, l)$, что соответствующие им функции Хусими $\tilde{\rho}^{(\hbar)}$ сходятся к σ в $\mathcal{D}'(K)$ при $\hbar \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$.

2) Пусть $\rho_t^{(\hbar)} = U_t^c \rho^{(\hbar)} (U_t^c)^\dagger$, $\tilde{\rho}_t^{(\hbar)}$ – соответствующая $\rho_t^{(\hbar)}$ функция Хусими. Тогда

$$\lim \left[\tilde{\rho}_t^{(\hbar)}(q, p, t) - \sigma \left(q - \frac{p}{m} t, p \right) \right] = 0 \quad \forall \mathcal{D}'(K). \quad (47)$$

Предел здесь осуществляется следующим образом: $\hbar \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$, $t = t(\hbar)$, $\frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow 0$.

3) Если дополнительно $\sigma \in L_1(\Omega)$, то равенство (47) остается справедливым, если предел осуществляется следующим образом: $\hbar \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $\hbar t \rightarrow 0$, $\frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow 2mD \in (0, \infty]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана функция $\sigma = \sigma(q, p)$ из $\mathcal{S}(K)$ (частный случай обобщенной функции из $\mathcal{D}'(K)$), удовлетворяющая условиям неотрицательности и нормированности на единицу. Определим тогда

$$\rho^{(\hbar)} = \iint_{\Omega} \sigma(q', p') P[v_{q'p'}] \frac{dq' dp'}{\|v_{q'p'}\|^2}. \quad (48)$$

В правой части равенства параметр $\hbar$ присутствует в определении функции $v_{q'p'}$. Кроме того, α в определении этой функции также положим функцией от $\hbar$ (т. е. $\alpha = \alpha(\hbar)$) такой, что $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$ при $\hbar \rightarrow 0$. Например, можно взять $\alpha = C\sqrt{\hbar}$. Интеграл понимается в слабом смысле: $\rho^{(\hbar)}$ – это такой оператор, что для любых $\psi, \chi \in L_2(-l, l)$

$$\begin{aligned} (\psi, \rho^{(\hbar)} \chi) &= \iint_{\Omega} \sigma(q', p') (\psi, P[v_{q'p'}] \chi) \frac{dq' dp'}{\|v_{q'p'}\|^2} \\ &= \iint_{\Omega} \sigma(q', p') (\psi, v_{q'p'}) (v_{q'p'}, \chi) \frac{dq' dp'}{\|v_{q'p'}\|^2}. \end{aligned}$$

Докажем, что $\rho^{(\hbar)}$ – оператор плотности, т. е. положительный и с единичным следом. Положительность $\rho^{(\hbar)}$ непосредственно следует из неотрицательности σ . Для доказательства того, что $\rho^{(\hbar)}$ – ядерный оператор, рассмотрим произвольный ортонормированный базис u_i , $i = 1, 2, \dots$, в $L_2(-l, l)$ и вычислим след этого оператора:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (u_i, \rho^{(\hbar)} u_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \iint_{\Omega} \sigma(q', p') |(u_i, v_{q'p'})|^2 \frac{dq' dp'}{\|v_{q'p'}\|^2} \\ &= \iint_{\Omega} \sigma(q', p') \sum_{i=1}^{\infty} |(u_i, v_{q'p'})|^2 \frac{dq' dp'}{\|v_{q'p'}\|^2} = \iint_{\Omega} \sigma(q', p') dq' dp' = 1. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь в третьем равенстве мы воспользовались равенством Парсеваля–Стеклова. Обоснуем перестановку суммы и интеграла во втором равенстве. Последовательность $\sum_{i=1}^N |(u_i, v_{q'p'})|^2$, $N = 1, 2, \dots$, сходится, следовательно, ограничена некоторой постоянной A . Тогда подынтегральная функция мажорируется интегрируемой функцией $A\sigma$. По теореме Лебега можно осуществить предельный переход под знаком интеграла. Поскольку ортонормированный базис был произвольным, утверждение доказано: $\rho^{(\hbar)}$ является оператором плотности.

В динамике имеем

$$\rho_t^{(\hbar)} = \iint_{\Omega} \sigma(q', p') P[v_{q'p',t}] \frac{dq' dp'}{\|v_{q'p'}\|^2},$$

$$\tilde{\rho}_t^{(\hbar)}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} \sigma(q', p') |(v_{qp}, v_{q'p',t})|^2 \frac{dq' dp'}{\|v_{q'p'}\|^2}.$$

По формуле (44), теореме 1 (случай $c = 0$, $D = 0$) и предложению 2 имеем

$$\lim \left[\tilde{\rho}_t^{(\hbar)}(q, p) - \sigma\left(q - \frac{p}{m}t, p\right) \right] = 0$$

равномерно на Ω (а значит, и в $\mathscr{D}'(K)$), где предел осуществляется, как указано в утверждении 2) теоремы. Доказаны утверждения 1), 2) теоремы (утверждение 1) получается отсюда, если положить $t = 0$) для случая $\sigma \in \mathscr{S}(K)$. Утверждения 1), 2) для произвольной функции $\sigma \in \mathscr{D}'(K)$ следуют из того, что множество $\mathscr{S}$ плотно на множестве локально интегрируемых функций, т.е. регулярных обобщенных функций, а множество регулярных обобщенных функций плотно в пространстве всех обобщенных функций $\mathscr{D}'$ [26].

Для того чтобы получить произвольную обобщенную функцию $\sigma \in \mathscr{D}'(K)$, рассмотрим последовательность функций $\sigma_r \in \mathscr{S}(K)$, стремящихся к σ в $\mathscr{D}'(K)$ при $r \rightarrow \infty$, и возьмем

$$\rho^{(\hbar)} = \iint_{\Omega} \sigma_{r(\hbar)}(q', p') P[v_{q'p'}] \frac{dq' dp'}{\|v_{q'p'}\|^2}. \quad (50)$$

Здесь $r(\hbar)$ – функция, стремящаяся к бесконечности при $\hbar \rightarrow 0$. Тогда при преобразовании Хусими в пределе мы получим искомую обобщенную функцию σ .

Для обобщенной функции вида $\sigma(q, p) = \delta(q - q_0, p - p_0)$, $(q_0, p_0) \in \Omega$, можно построить процедуру, отличную от только что предложенной общей процедуры, связанной с приближением сингулярной обобщенной функции регулярными. Определим

$$\rho^{(\hbar)} = P \left[\frac{v_{q_0 p_0}}{\|v_{q_0 p_0}\|} \right]; \quad (51)$$

тогда $\rho_t^{(\hbar)} = \rho^{(\hbar)} = P \left[\frac{v_{q_0 p_0, t}}{\|v_{q_0 p_0, t}\|} \right]$. По теореме 1 (также случай $c = 0$, $D = 0$) имеем

$$\tilde{\rho}_t^{(\hbar)}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar \|v_{q_0 p_0, t}\|^2} |(v_{qp}, v_{q_0 p_0, t})|^2 \rightarrow \delta\left(q - q_0 - \frac{p}{m}t, p - p_0\right). \quad (52)$$

Докажем утверждение 3) теоремы. Пусть $\sigma \in L_1(\Omega)$, $\rho^{(\hbar)}$ определяется по формуле (48) или (50). По теореме 1 (случай $c = 0$, $D \in (0, \infty]$) имеем

$$\lim \left[\tilde{\rho}_t^{(\hbar)}(q, p) - \int_{-l}^l \sigma\left(q - \frac{p}{m}t + q', p\right) \varphi_D(q') dq' \right] = 0$$

равномерно на Ω , где предел осуществляется, как указано в утверждении 3). С другой стороны, имеет место сходимость (46). Если мы подставим ее в последнюю формулу, то получим

$$\lim \tilde{\rho}_t^{(\hbar)}(q, p) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \sigma(q', p) dq' \quad (53)$$

в $\mathcal{D}'(K)$. Сравнивая (53) и (46), заключаем, что соотношение (47) остается верным. Теорема доказана.

Заметим, что формула (47) неверна, если $\sigma(q, p) = \delta(q - q_0, p - p_0)$, $(q_0, p_0) \in \Omega$, а предел осуществляется, как в утверждении 3) теоремы 3. В самом деле, определим $\rho^{(\hbar)}$ по формуле (51). Тогда

$$\tilde{\rho}_t^{(\hbar)}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar\|v_{q_0 p_0}\|^2} |(v_{qp}, v_{q_0 p_0, t})|^2,$$

$$\lim \left[\tilde{\rho}_t^{(\hbar)}(q, p) - \varphi_D \left(q - q_0 - \frac{p}{m} t \right) \delta(p - p_0) \right] = 0,$$

где $\varphi_D(q - q_0 - \frac{p}{m}t) \neq \delta(q - q_0 - \frac{p}{m}t)$, поскольку $D \neq 0$.

В случае $\sigma \in L_1(\Omega)$ формула (47) также перестает быть верной, если предел осуществляется следующим образом: $\hbar \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $t - \frac{M}{N}T_{\text{rev}} \rightarrow 0$, где $\frac{M}{N} \neq 0$ – рациональная дробь, T_{rev} определено формулой (14). Например, если $\frac{M}{N} = 1$, то

$$\lim \tilde{\rho}_t^{(\hbar)}(q, p) = \sigma(q, p),$$

в то время как для $\sigma(q - \frac{p}{m}t, p)$ верна формула (46).

Как видно из теоремы 3, при подходящем выборе семейств операторов плотности в пределе можно получить любую классическую функцию плотности (т. е. в этом смысле квантовых состояний по крайней мере не меньше, чем классических), которая на масштабе времени 1) эволюционирует согласно законам классической механики. Таким образом, на масштабе времени T_{cl} не наблюдаются различия между динамикой материальной точки (функции плотности в виде дельта-функции) и динамикой интегрируемой функции плотности. Однако различия имеют место на масштабе времени 2), который связан с распылением квантовых волновых пакетов. Как мы видели, если σ – дельта-функция, то классическая динамика расходится с квантовой вследствие того, что квантовый пакет расплывается, в то время как классическая точечная частица при любых значениях времени остается точечной частицей. Таким образом, традиционная формулировка классической механики справедлива лишь на масштабе времени 1).

Если σ – интегрируемая функция, то по теореме 3 классическая динамика остается справедливой с точки зрения квантовой динамики и на масштабе времени 2), поскольку для нее так же, как и для квантовой динамики, наблюдается расплывание пространственной плотности. Однако в этом случае классическая динамика расходится с квантовой на масштабе времени 3) вследствие квантового эффекта восстановления пакета.

Таким образом, функциональная формулировка классической механики остается справедливой на большем масштабе времени, чем традиционная формулировка, и, следовательно, с этой точки зрения является более предпочтительной.

Когда в классической механике исследуется асимптотика $t \rightarrow \infty$, с точки зрения квантовой механики исследуется асимптотика $\hbar \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $\frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow D$, где $D \rightarrow 0$, если исследуется асимптотика динамики материальной точки, и $D \rightarrow \infty$, если исследуется асимптотика интегрируемой функции плотности.

Поскольку в действительности $\hbar$ постоянна и не может стремиться к нулю, исследование такой асимптотики физически означает, что рассматриваются не сколь угодно большие значения времени, а значения времени, малые по сравнению с временем T_{rev} ; в случае традиционной формулировки – малые также и по сравнению с T_{coll} . В случае функциональной формулировки этого дополнительного ограничения не существует.

4.2. Случай квантовой динамики в ящике. Поскольку семейство ω_{qp} , $(q, p) \in \Omega$, так же, как и v_{qp} , $(q, p) \in \Omega$, является разложением единицы в $L_2(-l, l)$, можно определить преобразование Хусими следующим способом:

$$\tilde{\rho}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Tr } P[\omega_{qp}] \rho = \frac{1}{2\pi\hbar} (\omega_{qp}, \rho \omega_{qp}),$$

где ρ – оператор плотности (квантовое состояние) в $L_2(-l, l)$, $\tilde{\rho}(q, p)$ – функция плотности на фазовом пространстве Ω (классическое состояние). Если $\rho = P[\psi]$, $\psi \in L_2(-l, l)$, то

$$\tilde{\rho}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} |(\psi, \omega_{qp})|^2.$$

Преобразование Хусими, основанное на функциях ω_{qp} , удобно для исследования соответствия между классической и квантовой механиками для частицы в ящике. Будем исследовать те же вопросы, что и для частицы на окружности: всякое ли классическое состояние может быть получено как квазиклассический предел функций Хусими квантовых состояний и на каких масштабах времени это соответствие сохраняется для классических состояний различного вида?

Особенность случая ящика состоит в том, что $\omega_{\pm l, 0} \equiv 0$, поэтому для любого оператора плотности ρ имеет место $\tilde{\rho}(\pm l, 0) = 0$. Вследствие этого ограничим наше рассмотрение только такими функциями плотности σ , которые обращаются в нуль в некоторых окрестностях точек $(\pm l, 0)$. С физической точки зрения это ограничение не столь существенно, поскольку данная окрестность может быть сколь угодно малой.

Пусть квантовая система эволюционирует во времени в ящике: $\rho_t = U_t^b \rho (U_t^b)^\dagger$, где оператор эволюции U_t^b в ящике определен формулой (38), ρ – начальный оператор плотности. Функцию Хусими от ρ_t снова обозначим $\tilde{\rho}_t(q, p)$.

Теперь мы можем доказать аналог теоремы 3 для случая динамики в ящике. Неотрицательность и нормированность на единицу обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\Omega)$ определяются аналогично тому, как в $\mathcal{D}'(K)$. Обозначим множество неотрицательных и нормированных на единицу обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\Omega)$ через $\mathcal{D}'_1(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 4. 1) Пусть функция $\sigma \in \mathcal{D}'_1(\Omega)$ такая, что ее носитель не пересекается с некоторыми окрестностями точек $(\pm l, 0)$. Тогда существует такое семейство операторов плотности $\rho^{(\hbar)}$, $\hbar > 0$, в $L_2(-l, l)$, что соответствующие им функции Хусими $\tilde{\rho}^{(\hbar)}$ сходятся к σ в $\mathcal{D}'(\Omega)$ при $\hbar \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$.

2) Пусть $\rho_t^{(\hbar)} = U_t^b \rho^{(\hbar)} (U_t^b)^\dagger$, $\tilde{\rho}_t^{(\hbar)}$ – соответствующая $\rho_t^{(\hbar)}$ функция Хусими. Тогда

$$\lim \left[\tilde{\rho}_t^{(\hbar)}(q, p, t) - \sigma \left(q - \frac{p}{m} t, p \right) \right] = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (54)$$

Предел здесь осуществляется следующим образом: $\hbar \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$, $t = t(\hbar)$, $\frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow 0$.

3) Если дополнительно $\sigma \in L_1(\Omega)$, то равенство (54) остается справедливым, если предел осуществляется следующим образом: $\hbar \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $\hbar t \rightarrow 0$, $\frac{\hbar t}{\alpha} \rightarrow 2mD \in (0, \infty]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 3, только вместо теоремы 1 опирается на теорему 2. В частности, если $\sigma \in \mathcal{S}(\Omega)$, то

$$\rho^{(\hbar)} = \iint_{\Omega} \sigma(q', p') P[\omega_{q'p'}] \frac{dq' dp'}{\|\omega_{q'p'}\|^2},$$

произвольная обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\Omega)$ приближается функциями из $\mathcal{S}(\Omega)$. Отметим, что интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, определен несмотря на то, что $\omega_{\pm l, 0} = 0$, поскольку по условию σ обращается в нуль в некоторых окрестностях точек $(\pm l, 0)$. Однако даже при произвольной $\sigma \in \mathcal{S}(\Omega)$ точки $(\pm l, 0)$ не являются особенными для подынтегрального выражения в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} \frac{|\omega_{qp}, \omega_{q'p'}, t|^2}{\|\omega_{q'p'}\|^2} \sigma(q', p') dq' dp' \leq \frac{\|\omega_{qp}\|^2}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} \sigma(q', p') dq' dp'.$$

Если σ имеет вид $\sigma(q, p) = \delta(q - q_0, p - p_0)$, $(q_0, p_0) \neq (\pm l, 0)$, то можно предъявить специальное семейство $\rho^{(\hbar)} = P[\frac{\omega_{q_0 p_0}}{\|\omega_{q_0 p_0}\|}]$.

Таким образом, к динамике в ящике применимы те же выводы, что и к динамике на окружности: в пределе $\hbar \rightarrow 0$ на масштабе времени 1) мы можем получить как классическую динамику материальной точки, так и динамику функции плотности. Однако далее традиционная формулировка не описывает распыление плотности вероятности, поэтому перестает быть справедливой на масштабе времени 2). В функциональной формулировке, как и в квантовой механике, имеет место распыление плотности вероятности, но в ней не имеют место возрождения волнового пакета (т.е. это чисто квантовое явление, не имеющее аналогов в классической механике). Поэтому функциональная формулировка остается справедливой на масштабе времени 2), но перестает быть справедливой на масштабе времени 3). Таким образом, функциональная формулировка классической механики сохраняет свою справедливость на большем временном масштабе, чем традиционная формулировка, и, следовательно, с этой точки зрения является более предпочтительной.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В классической механике доказан определенный вариант теоремы о слабой сходимости решений уравнения Лиувилля и для взаимодействующих частиц [35]. Поэтому было бы полезно обобщить полученные результаты для квантовой динамики в случае взаимодействующих частиц, что мы отметили в замечании 6.

§ 5. Квантовая динамика в ящике с учетом погрешности в определении его размеров

Всюду мы предполагали, что длина ящика $2l$ определена с бесконечной точностью. Однако можно заметить, что параметры физической системы не могут быть измерены с бесконечной точностью. Это одно из базовых положений

функциональной механики. Следовательно, если мы хотим предсказывать вероятность местонахождения частицы в том или ином месте в тот или иной момент времени, то мы должны вместо фиксированного $l \in \mathbb{R}$ рассматривать некоторую функцию плотности распределения вероятностей $f(l)$ параметра l . В частности, ее можно построить исходя из результатов измерений [17]. Быть может, дисперсия этого распределения будет очень мала, но обязательно ненулевая. Тогда, поскольку T_{rev} зависит от l , строгая периодичность свободной квантовой динамики нарушается. Более того, оказывается, что при $t \rightarrow \infty$ для пространственной плотности в конечном объеме существует предел.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\psi_l \in L_2(-l, l)$, $l > 0$, – такое произвольное семейство векторов состояния, что $|\psi_l(x)|^2$ интегрируема по (x, l) на $[-l, l] \times [0, \infty)$, $f(l)$ – непрерывная плотность распределения вероятностей с носителем, лежащим в $[0, \infty)$ (предполагается, что $f(l) \geq 0$, $\int_0^\infty f(l)dl = 1$ и $f(l) = o(l^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, при $l \rightarrow 0$). Тогда существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P(x, t) = P_\infty(x) \\ = \int_0^\infty \frac{\chi_l(x)}{2l} \left[1 - \frac{1}{2}(\psi_l(y), \psi_l(y + 2x - 2l) + \psi_l(y - 2x + 2l)) \right] f(l) dl,$$

где

$$P(x, t) = \int_0^\infty \chi_l(x) |\psi_l(x, t)|^2 f(l) dl,$$

$\chi_l(x)$ – характеристическая функция отрезка $[-l, l]$, $\psi_l(x, t) = U_t^b \psi_l(x)$, а функции ψ_l продолжены на всю числовую прямую по формуле $\psi_l(x + 2nl) = (-1)^n \psi_l[(-1)^n(x - 2nl)]$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Величина $P(x, t)$ представляет собой плотность распределения вероятностей в момент времени t , рассчитанную с учетом погрешности в определении l . В значение $P(x, t)$ при заданном x вносят вклад величины $|\psi_l(x, t)|^2$ для таких значений l , что отрезок $[-l, l]$ включает в себя точку x , с этим связан множитель $\chi_l(x)$ в выражении для $P(x, t)$.

Проанализируем предельное распределение вероятностей $P_\infty(x)$. Слагаемое

$$\int_0^\infty \frac{\chi_l(x)}{2l} f(l) dl$$

соответствует равномерному распределению: $\frac{\chi_l(x)}{2l}$ – это равномерное распределение на отрезке $[-l, l]$, а множитель $f(l)dl$ соответствует плотности вероятности нахождения конца отрезка в окрестности значения l . Поэтому дополнительное слагаемое

$$\Delta(x) = \int_0^\infty \frac{\chi_l(x)}{4l} (\psi_l(y), \psi_l(y + 2x - 2l) + \psi_l(y - 2x + 2l)) f(l) dl$$

является поправкой к равномерному распределению, т.е. получается, что предельное конечное распределение вероятностей зависит от начального. Далее мы покажем, что в квазиклассическом примере эта поправка стремится к нулю. Заметим, что пределы одинаковы для $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$, как и в теоремах Козлова, что является отражением симметрии во времени квантовой динамики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Разложим функции $\psi_l(x, t)$ в ряд Фурье:

$$\psi_l(x, t) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(l) \sin\left(\frac{\pi k}{2l}(x-l)\right) \exp\left\{-\frac{i\pi^2 \hbar k^2 t}{8ml^2}\right\},$$

и подставим в выражение для $P(x, t)$:

$$P(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{\chi_l(x)}{l} \sum_{k,n=1}^{\infty} a_k \overline{a_n} \sin\left(\frac{\pi k}{2l}(x-l)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2l}(x-l)\right) \times \exp\left\{-\frac{i\pi^2 \hbar (k^2 - n^2)t}{8ml^2}\right\} f(l) dl.$$

Из леммы Римана–Лебега следует, что при $t \rightarrow \pm\infty$ все слагаемые с $k \neq n$ стремятся к нулю, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P(x, t) = P_{\infty}(x) = \int_0^{\infty} \frac{\chi_l(x)}{l} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{2l}(x-l)\right) f(l) dl.$$

Утверждение теоремы следует из того, что, как можно непосредственно проверить,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{2l}(x-l)\right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi k}{l}(x-l)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2}(\psi_l(y), \psi_l(y+2x-2l) + \psi_l(y-2x+2l))\right]. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Этот результат достаточно неожиданный, поскольку считается, что в ограниченной области квантовая динамика почти периодична [1], а значит, предела при больших значениях времени не имеет. Однако, как замечено выше, предельное распределение не совпадает с равномерным. Оценим поправку $\Delta(x)$ к нему в квазиклассическом пределе. Сначала предположим, что $\psi_l = \omega_{qp}$ – когерентное состояние (индекс l выписывать не будем), а затем воспользуемся тем, что произвольное состояние можно разложить в интеграл по когерентным состояниям.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\psi_l = \omega_{qp}$ для всех $l > 0$. Тогда в квазиклассическом пределе $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \rightarrow 0$ величина $\Delta(x)$ стремится к нулю в слабом смысле, т. е. для любой функции σ из пространства быстро убывающих функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ выполнено

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x) \sigma(x) dx \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разлагая функцию σ в интеграл Фурье:

$$\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\sigma}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda,$$

и учитывая, что $\omega_{qp}(y+2x-2l) = \omega_{-q-2x,-p}(y)$ и $\omega_{qp}(y-2x+2l) = \omega_{-q+2x,-p}(y)$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x) \sigma(x) dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi l}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \tilde{\sigma}(\lambda) \int_0^{\infty} dl f(l) \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega_{qp}, \omega_{-q-2x,-p} + \omega_{-q+2x,-p}) dx. \end{aligned}$$

Вычисляя в этом выражении интеграл по x (вычисления не приводим, поскольку в них не содержится никаких новых идей по сравнению с аналогичными вычислениями в § 3), убеждаемся в том, что выражение стремится к нулю. Предложение доказано.

Рассмотрим теперь опять произвольные функции $\psi_l \in L_2(-l, l)$, $l > 0$, и представим их в виде интеграла по когерентным состояниям (следствие формулы (36)):

$$\psi_l = \iint_{\Omega} g(q, p) \omega_{qp} dq dp.$$

Здесь g может быть найдено по формуле $g(q, p) = (\omega_{qp}, \psi_l)$. Осуществим квазиклассический переход следующим образом: устремим, как обычно, $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha}$ к нулю как параметры состояний ω_{qp} , но будем сохранять постоянной функцию g . Иными словами, функция ψ_l зависит от $\hbar$ и α следующим образом: скалярное произведение (ω_{qp}, ψ_l) должно совпадать с фиксированной функцией $g(q, p)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для таким образом определенного квазиклассического предела произвольных функций ψ_l выполнено $\Delta(x) \rightarrow 0$ в слабом смысле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО также проводится непосредственным вычислением.

Напомним, что для функций плотности вероятности слабая сходимость с физической точки зрения является достаточной [11], [12].

Итак, если учесть неминуемую погрешность в определении размеров ящика, то распределение вероятностей положения частицы в ящике имеет предел при $t \rightarrow \infty$, причем предельное распределение не является равномерным, а зависит от начального распределения. Однако в квазиклассическом случае предельное распределение является равномерным.

§ 6. Приложение

Здесь приводится замечание о модулярном свойстве тета-функции

$$\theta(z, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\{-\pi\tau k^2 + 2\pi i k z\}, \quad z, \tau \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} \tau > 0,$$

изложенное применительно к свойствам квантовых когерентных состояний на отрезке.

Имеет место известное модулярное соотношение

$$\theta\left(\frac{z}{i\tau}, \frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\tau} e^{\frac{\pi z^2}{\tau}} \theta(z, \tau). \quad (55)$$

Действительно, искомое равенство (55) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\pi(z-n)^2}{\tau}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\{-\pi\tau k^2 + 2\pi i k z\}. \quad (56)$$

Представим $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Левая часть (56) как функция от x при фиксированных y и τ принадлежит пространству $L_2(0, 1)$, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье по ортонормированному базису $\{e^{i\pi k x}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$:

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\pi(x+iy-n)^2}{\tau}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\pi k x}. \quad (57)$$

Определим коэффициенты Фурье следующим образом:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-l}^l \exp\left\{-\frac{\pi(x+iy-n)^2}{\tau} - i\pi k x\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\pi(x+iy)^2}{\tau} - i\pi k x\right\} dx = \exp\{-\pi\tau k^2 + 2\pi i k(iy)\}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (57), получаем (56).

Таким образом, модулярное свойство тета-функции выражает разложение в ряд Фурье функции, являющейся суммой отражений гауссовой функции относительно концов отрезка $[0, 1]$.

Авторы выражают благодарность С. В. Болотину, Б. Л. Воронову, В. В. Ведениянину, В. С. Владимирову, С. Ю. Доброхотову, Е. И. Зеленову, В. В. Козлову, В. И. Манько, А. Г. Сергееву, О. Г. Смолянову, А. Д. Суханову, Д. В. Трещёву за полезные замечания и обсуждения.

Список литературы

1. P. Bocchieri, A. Loinger, “Quantum recurrence theorem”, *Phys. Rev.* (2), **107**:2 (1957), 337–338.
2. I. Sh. Averbukh, N. F. Perelman, “Fractional revivals: Universality in the long-term evolution of quantum wave packets beyond the correspondence principle dynamics”, *Phys. Rev. Lett.*, **139**:9 (1989), 449–453.
3. И. Ш. Авербух, Н. Ф. Перельман, “Динамика волновых пакетов высоковозбужденных состояний атомов и молекул”, *УФН*, **161**:7 (1991), 41–81; англ. пер.: I. Sh. Averbukh, N. F. Perel'man, “The dynamics of wave packets of highly-excited states of atoms and molecules”, *Soviet Phys. Uspekhi*, **34**:7 (1991), 572–591.
4. D. L. Aronstein, C. R. Stroud, “Fractional wave-function revivals in the infinite square well”, *Phys. Rev. A*, **55**:6 (1997), 4526–4537.
5. R. W. Robinett, “Visualizing the collapse and revival of wave packets in the infinite square well using expectation values”, *Amer. J. Phys.*, **68**:5 (2000), 410–420.
6. R. W. Robinett, “Quantum wave packet revivals”, *Phys. Rep.*, **392**:1–2 (2004), 1–119.
7. E. M. Wright, D. F. Walls, J. C. Garrison, “Collapses and revivals of Bose–Einstein condensates formed in small atomic samples”, *Phys. Rev. Lett.*, **77**:11 (1996), 2158–2161.

8. P. Plötz, J. Madroñero, S. Wimberger, “Collapse and revival in inter-band oscillations of a two-band Bose–Hubbard model”, *J. Phys. B*, **43**:8 (2010).
9. И. В. Волович, А. С. Трушечкин, “О квантовых сжатых состояниях на отрезке и соотношениях неопределенностей для наноскопических систем”, *Избранные вопросы математической физики и р-адического анализа*, Тр. МИАН, **265**, МАИК, М., 2009, 288–319; англ. пер.: I. V. Volovich, A. S. Trushechkin, “Squeezed quantum states on an interval and uncertainty relations for nanoscale systems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **265** (2009), 276–306.
10. А. Пуанкаре, “Замечания о кинетической теории газов”, *Избранные труды в трех томах*, т. III: *Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ А. Пуанкаре*, Наука, М., 1974, 385–412.
11. В. В. Козлов, *Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2002.
12. В. В. Козлов, *Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика*, РХД, М.–Ижевск, 2008.
13. L. Accardi, Yu. G. Lu, I. Volovich, *Quantum theory and its stochastic limit*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
14. И. В. Волович, “Проблема необратимости и функциональная формулировка классической механики”, *Вестн. СамарГУ*, **8**:67 (2008), 35–55.
15. I. V. Volovich, “Randomness in classical mechanics and Quantum mechanics”, *Found. Phys.*, **41**:3 (2011), 516–528.
16. И. В. Волович, “Уравнения Боголюбова и функциональная механика”, *ТМФ*, **164**:3 (2010), 354–362; англ. пер.: I. V. Volovich, “Bogoliubov equations and functional mechanics”, *Theoret. and Math. Phys.*, **164**:3 (2010), 1128–1135.
17. A. S. Trushechkin, I. V. Volovich, “Functional classical mechanics and rational numbers”, *P-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:4 (2009), 361–367.
18. А. С. Трушечкин, “Необратимость и роль измерительного прибора в функциональной формулировке классической механики”, *ТМФ*, **164**:3 (2010), 435–440; англ. пер.: A. S. Trushechkin, “Irreversibility and the role of an instrument in the functional formulation of classical mechanics”, *Theoret. and Math. Phys.*, **164**:3 (2010), 1198–1201.
19. В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, “Тонкая и грубая энтропия в задачах статистической механики”, *ТМФ*, **151**:1 (2007), 120–137; англ. пер.: V. V. Kozlov, D. V. Treshchev, “Fine-grained and coarse-grained entropy in problems of statistical mechanics”, *Theoret. and Math. Phys.*, **151**:1 (2007), 539–555.
20. В. В. Козлов, О. Г. Смолянов, “Функция Вигнера и диффузия в бесстолкновительной среде, состоящей из квантовых частиц”, *ТВП*, **51**:1 (2006), 109–125; англ. пер.: V. V. Kozlov, O. G. Smolyanov, “Wigner function and diffusion in a collision-free medium of quantum particles”, *Theory Probab. Appl.*, **51**:1 (2007), 168–181.
21. Дж. Клаудер, Э. Сударшан, *Основы квантовой оптики*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: J. R. Klauder, E. C. G. Sudarshan, *Fundamentals of quantum optics*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1968.
22. J. R. Klauder, B.-S. Skagerstam, *Coherent states. Applications in physics and mathematical physics*, World Scientific, Singapore, 1985.
23. G. A. González, M. A. del Olmo, “Coherent states on the circle”, *J. Phys. A*, **31**:44 (1998), 8841–8857.
24. С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994; англ. пер.: A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, de Gruyter Exp. Math., **5**, de Gruyter, Berlin, 1992.
25. Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, Мир, М., 1988; пер. с англ.: D. Mumford, *Tata lectures on theta*, Birkhäuser, Boston, MA, 1983.

26. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1971; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics*, Dekker, New York, 1971.
27. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
28. К. Inoue, М. Ohya, I. V. Volovich, “Semiclassical properties and chaos degree for the quantum baker’s map”, *J. Math. Phys.*, **43** (2002), 734–755.
29. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика*, 4-е изд., Наука, М., 2002; англ. пер. 2-го изд.: L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics*, v. 3: *Quantum mechanics: non-relativistic theory*, Pergamon Press, Oxford, 1958.
30. E. V. Piskovskiy, I. V. Volovich, “On the correspondence between Newtonian and functional mechanics”, *Quantum Bio-Informatics IV. From Quantum Information to Bio-Informatics*, QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., **28**, World Scientific, Hackensack, NJ, 2011, 363–372.
31. К. Husimi, “Some formal properties of the density matrix”, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, III. Ser.*, **22** (1940), 264–314.
32. J. McKenna, H. L. Frisch, “Quantum-mechanical, microscopic Brownian motion”, *Phys. Rev. (2)*, **145**:1 (1966), 93–110.
33. M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner, “Distribution functions in physics: fundamentals”, *Phys. Rep.*, **106**:3 (1984), 121–167.
34. Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский, *Лекции по квантовой механике для студентов-математиков*, Изд-во ЛГУ, Л., 1980; англ. пер.: L. D. Faddeev, O. A. Yakubovskii, *Lectures on quantum mechanics for mathematics students*, Stud. Math. Libr., **47**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
35. В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, “Слабая сходимостъ решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем”, *ТМФ*, **134**:3 (2003), 388–400; англ. пер.: V. V. Kozlov, D. V. Treshchev, “Weak convergence of solutions of the Liouville equation for nonlinear hamiltonian systems”, *Theoret. and Math. Phys.*, **134**:3 (2003), 339–350.

И. В. Волович (I. V. VOLOVICH)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: volovich@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
 12.11.2010

А. С. Трушечкин (A. S. TRUSHECHKIN)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: trushechkin@mi.ras.ru