Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Жесткая изотопическая классификация
вещественных трехмерных кубик, *Изв. РАН. Сер. ма-
тем.*, 2006, том 70, выпуск 4, 91–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/im585>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:30:06

УДК 512.7

В. А. Краснов

Жесткая изотопическая классификация вещественных трехмерных кубик

Доказано, что пространство неособых вещественных трехмерных кубик имеет ровно 9 компонент связности. Кроме этого изучается пространство вещественных канонических кривых рода 4, в частности доказано, что это пространство состоит из 8 компонент связности.

Библиография: 19 наименований.

Введение

В настоящей статье используются следующие обозначения. Любая комплексная кубическая форма от переменных $X_0, \dots, X_4$

$$\sum_{i_0+\dots+i_4=3} w_{i_0\dots i_4} X_0^{i_0} \dots X_4^{i_4} = \sum_{|I|=3} w_I X^I$$

определяется своими комплексными коэффициентами $w_{i_0\dots i_4}$, число которых равно 35. Через $\mathcal{B}$ обозначим комплексное проективное пространство $\mathbb{P}_W^{34}$ с однородными координатами W_I , где

$$I = (i_0, \dots, i_4), \quad |I| = i_0 + \dots + i_4 = 3.$$

Для любой точки $b = [w_I] \in \mathcal{B} = \mathbb{P}_W^{34}$ обозначим через V_b тело в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}_X^4$ с однородными координатами $X_0, \dots, X_4$, заданное уравнением

$$\sum_{|I|=3} w_I X^I = 0.$$

Через $\mathcal{B}^*$ обозначим множество точек $b \in \mathcal{B}$ таких, что кубика V_b неособая. Множество $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ является дополнением дискриминантной гиперповерхности $\Delta \subset \mathcal{B}$, параметризующей особые кубики V_b . Через $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ обозначим множество вещественных точек из $\mathcal{B}^*$, оно параметризует неособые вещественные кубики. Если $b \in \mathbb{R}\mathcal{B} = \mathbb{RP}_W^{34}$, то на комплексной кубике V_b определена инволюция комплексного сопряжения $\tau: V_b \rightarrow V_b$. Пара (V_b, τ) называется *вещественной кубикой*; мы будем обозначать ее также через V_b , так как инволюция $\tau: V_b \rightarrow V_b$ однозначно восстанавливается из инволюции комплексного сопряжения $\tau: \mathbb{P}_X^{34} \rightarrow \mathbb{P}_X^{34}$ и канонического вложения $V_b \hookrightarrow \mathbb{P}_X^{34}$.

Множество $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ является несвязным в евклидовой топологии. Компоненты связности топологического пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ называются *жесткими изотопическими классами* неособых вещественных кубик в $\mathbb{P}_X^4$ (см. [18]). Настоящая

статья посвящена описанию этих жестких изотопических классов. Оказывается, что жесткий изотопический класс вещественной кубики $V = (V, \tau)$ определяется топологическим типом вещественной части $\mathbb{R}V$ и принадлежностью кубики V к типу I или II. Напомним, что вещественная кубика V принадлежит типу I, если класс гомологий $[\mathbb{R}V] \in H_3(V, \mathbb{F}_2)$ равен нулю, где $\mathbb{F}_2$ – поле из двух элементов. В противном случае вещественная кубика V принадлежит типу II. Чтобы сформулировать соответствующий результат более точно, сделаем несколько замечаний и введем дополнительные обозначения.

Прежде всего заметим, что если V – неособая вещественная кубика и

$$\beta_*(\mathbb{R}V) = \sum_{q=0}^3 \dim_{\mathbb{F}_2} H_q(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2)$$

– полное $\mathbb{F}_2$ -число Бетти ее вещественной части, то $\beta_*(\mathbb{R}V)$ четное и выполняется двойное неравенство

$$4 \leq \beta_*(\mathbb{R}V) \leq 14.$$

Покажем, что при каждом $0 \leq k \leq 5$ существует неособая вещественная кубика V такая, что $\beta_*(\mathbb{R}V) = 4 + 2k$. Обозначим через $\mathcal{B}(k)$ множество точек $b \in \mathbb{R}\mathcal{B}^*$, для которых выполняется равенство $\beta_*(\mathbb{R}V_b) = 4 + 2k$. Множество $\mathcal{B}(k)$ непустое при $0 \leq k \leq 5$, причем оно состоит из целых компонент связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$. Покажем, что при $k \neq 1, 3$ множество $\mathcal{B}(k)$ связное. Через $\mathcal{B}(k)_I$, $\mathcal{B}(k)_{II}$ обозначим множества точек $b \in \mathcal{B}(k)$, для которых кубика V_b принадлежит типу I, II соответственно. Тогда оказывается, что $\mathcal{B}(k) = \mathcal{B}(k)_{II}$ при $k = 0, 2, 4$, $\mathcal{B}(5) = \mathcal{B}(5)_I$, а множества $\mathcal{B}(3)_I$, $\mathcal{B}(3)_{II}$ непустые и связные. Множество $\mathcal{B}(1)$ состоит из трех компонент связности, которые мы обозначаем через $\mathcal{B}(1)'_I$, $\mathcal{B}(1)''_I$, $\mathcal{B}(1)_{II}$, где компоненты $\mathcal{B}(1)'_I$, $\mathcal{B}(1)''_I$ определяются следующими условиями. Точка $b \in \mathcal{B}(1)$ принадлежит множеству $\mathcal{B}(1)'_I$ тогда и только тогда, когда кубика V_b принадлежит типу I, а множество вещественных точек $\mathbb{R}V_b$ связное. Точка $b \in \mathcal{B}(1)$ принадлежит множеству $\mathcal{B}(1)''_I$ тогда и только тогда, когда кубика V_b принадлежит типу I, а вещественная часть $\mathbb{R}V_b$ кубики V_b состоит из двух компонент связности. На самом деле, $b \in \mathcal{B}(1)''_I$ тогда и только тогда, когда кубика $\mathbb{R}V_b$ гомеоморфна несвязной сумме сферы S^3 и проективного пространства $\mathbb{R}P^3$. Во всех остальных случаях кубика $\mathbb{R}V_b$ связная.

Таким образом, в статье доказывается

ТЕОРЕМА 0.1. *Для топологического пространства неособых вещественных кубик $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ имеет место следующее разложение на связные компоненты:*

$$\mathbb{R}\mathcal{B}^* = \mathcal{B}(0) \sqcup \mathcal{B}(1)'_I \sqcup \mathcal{B}(1)''_I \sqcup \mathcal{B}(1)_{II} \sqcup \mathcal{B}(2) \sqcup \mathcal{B}(3)_I \sqcup \mathcal{B}(3)_{II} \sqcup \mathcal{B}(4) \sqcup \mathcal{B}(5).$$

Для доказательства этой теоремы используем методы построения неособых вещественных поверхностей третьей степени, изложенные в работе [12]. Применение этих методов для трехмерных кубик потребовало получить жесткую изотопическую классификацию вещественных канонических кривых рода 4.

Напомним, что неособая комплексная кривая $C \subset \mathbb{P}^3$ рода 4 называется канонической, если существует базис голоморфных форм $\omega_1, \dots, \omega_4$ на C такой,

что отображение вложения $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ задается равенством

$$[Y_1, \dots, Y_4] = [\omega_1(p), \dots, \omega_4(p)],$$

где $Y_1, \dots, Y_4$ – однородные координаты в $\mathbb{P}^3$, p – переменная точка на C . Заметим, что точка $[\omega_1(p), \dots, \omega_4(p)] \in \mathbb{P}^3$ определяется следующим образом. Если z – локальная голоморфная координата на C в окрестности точки $p \in C$, то для голоморфных форм $\omega_1, \dots, \omega_4$ имеем

$$\omega_1(p) = f_1(p) dz, \dots, \omega_4(p) = f_4(p) dz.$$

Тогда по определению выполняется равенство

$$[\omega_1(p), \dots, \omega_4(p)] = [f_1(p), \dots, f_4(p)].$$

Каждая каноническая кривая $C \subset \mathbb{P}^3$ рода 4 является неособым полным пересечением квадрики и кубики в $\mathbb{P}^3$, причем квадрика определяется кривой C однозначно, будем ее обозначать через $Q(C)$. Также верно обратное утверждение, т.е. неособое полное пересечение квадрики и кубики является канонической кривой рода 4. Таким образом, степень канонической кривой C в $\mathbb{P}^3$ равна 6. Обозначим через $\mathcal{H}_{6,4,3}$ схему Гильберта кривых в $\mathbb{P}^3$ степени 6 и рода 4. Тогда множество канонических кривых образует на схеме Гильберта открытое множество в топологии Зариского, которое будем обозначать через $\mathcal{C}$. Таким образом, $\mathcal{C}$ – это пространство канонических кривых рода 4 в $\mathbb{P}^3$. Все точки из $\mathcal{C}$ неособые. Этот факт вытекает из равенства $H^1(C, \mathcal{N}) = 0$, где $\mathcal{N}$ – пучок ростков нормального расслоения к канонической кривой C в $\mathbb{P}^3$.

Множество вещественных точек $\mathbb{R}\mathcal{C}$ пространства канонических кривых $\mathcal{C}$ параметризует вещественные канонические кривые рода 4. По определению (см. [18]) две кривые $C_1, C_2 \in \mathbb{R}\mathcal{C}$ принадлежат одному жесткому изотопическому классу, если они принадлежат одной компоненте связности топологического пространства $\mathbb{R}\mathcal{C}$ с евклидовой топологией.

Далее мы сформулируем теорему, дающую описание компонент связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{C}$. Заметим, что множество вещественных точек $\mathbb{R}C$ вещественной канонической кривой $C \in \mathbb{R}\mathcal{C}$ может состоять из k компонент связности, где число k удовлетворяет неравенству Гарнака: $k \leq 5$. Обозначим через $\mathcal{C}(k)$ множество вещественных канонических кривых $C \in \mathbb{R}\mathcal{C}$, у которых множество вещественных точек состоит из k компонент связности. Каждое из множеств $\mathcal{C}(k)$ состоит из целых компонент связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{C}$. Заметим также, что кривые из множества $\mathcal{C}(5)$ называются *M-кривыми*. Согласно Ф. Клейну, кривая $C \in \mathbb{R}\mathcal{C}$ принадлежит типу I или II в зависимости от того, разбивает топологическая кривая $\mathbb{R}C$ риманову поверхность C на две половинки или не разбивает. Через $\mathcal{C}(k)_I, \mathcal{C}(k)_{II}$ будем обозначать множество кривых из $\mathcal{C}(k)$ типа I, II соответственно. В принципе, каждое из множеств $\mathcal{C}(k)_I, \mathcal{C}(k)_{II}$ может быть пустым или состоять из целых компонент связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{C}$. Например, множество $\mathcal{C}(5)_{II}$ пустое, поэтому выполняется равенство $\mathcal{C}(5) = \mathcal{C}(5)_I$. Кроме этого оказывается, что множества $\mathcal{C}(0)_I, \mathcal{C}(2)_I, \mathcal{C}(4)_I$ пустые, т.е. выполняются равенства

$$\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(0)_{II}, \quad \mathcal{C}(2) = \mathcal{C}(2)_{II}, \quad \mathcal{C}(4) = \mathcal{C}(4)_{II}.$$

В настоящей статье доказана

ТЕОРЕМА 0.2. *Множества $\mathcal{C}(0)$, $\mathcal{C}(1)_I$, $\mathcal{C}(1)_{II}$, $\mathcal{C}(2)$, $\mathcal{C}(3)_I$, $\mathcal{C}(3)_{II}$, $\mathcal{C}(4)$, $\mathcal{C}(5)$ связные, а также имеет место следующее разложение на связные компоненты пространства вещественных канонических кривых рода 4:*

$$\mathbb{R}\mathcal{C} = \mathcal{C}(0) \sqcup \mathcal{C}(1)_I \sqcup \mathcal{C}(1)_{II} \sqcup \mathcal{C}(2) \sqcup \mathcal{C}(3)_I \sqcup \mathcal{C}(3)_{II} \sqcup \mathcal{C}(4) \sqcup \mathcal{C}(5).$$

Доказательство теоремы 0.2 опирается на результаты о вещественных кубических сечениях фиксированной квадрики, изложенные в работах [10], [9], [6], [5]. Вполне возможно, что можно придумать независимое и более короткое доказательство теоремы 0.2.

Доказательство теоремы 0.1 организовано по следующей схеме. Сначала мы покажем, что существует не более девяти жестких изотопических типов неособых вещественных кубик. Доказательство этого утверждения использует жесткую изотопическую квалификацию вещественных особых кубик, имеющих единственную особую точку, которая должна быть двойной, но может быть вырожденной, в этом случае должно выполняться дополнительное условие. Это дополнительное условие в геометрической форме сформулировано в следующем абзаце. Аналитическая формулировка этого условия означает следующее: должны существовать голоморфные координаты z_1, z_2, z_3, z_4 на проективном пространстве $\mathbb{P}^4_X$, определенные в окрестности особой точки кубики и такие, что в этой окрестности кубика задается уравнением $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0$. Мы показываем, что пространство таких кубик имеет ровно восемь компонент связности. Фактически это утверждение вытекает из теоремы 0.2. Доказательство основывается на сопоставлении особой кубике канонической кривой, которая параметризует множество прямых на кубике, проходящих через особую точку. Затем мы строим девять различных эквивариантных топологических типов неособых вещественных кубик, которые перечислены в теореме 0.1, другими словами, доказываем, что множества

$$\mathcal{B}(0), \mathcal{B}(1)'_I, \mathcal{B}(1)''_I, \mathcal{B}(1)_{II}, \mathcal{B}(2), \mathcal{B}(3)_I, \mathcal{B}(3)_{II}, \mathcal{B}(4), \mathcal{B}(5)$$

непустые. Построение неособых вещественных кубик с нужными эквивариантными топологическими свойствами производится с помощью метода возмущения особых кубик.

Структура статьи следующая. В § 1 изучаются пространства вещественных канонических кривых рода 4 в $\mathbb{P}^3$. Здесь доказывается теорема 0.2. В § 2 рассматриваются особые комплексные трехмерные кубики с единственной особой точкой. Пусть $V \subset \mathbb{P}^4$ – кубика с единственной особой точкой $a \in V$, которая обязана быть двойной, но может быть вырожденной. Тогда множество прямых в $\mathbb{P}^4$, проходящих через точку $a \in V$ и лежащих на кубике, образуют кривую $C \subset \mathbb{P}(a)$, где $\mathbb{P}(a)$ – проективизация касательного пространства $T_a\mathbb{P}^4$. Пусть также $Q \subset \mathbb{P}(a)$ – проективизация касательного конуса $\hat{T}_a V$. Поскольку особая точка $a \in V$ двойная, то Q является квадрикой. Квадрика Q будет неособой, если двойная особая точка $a \in V$ невырожденная, в противном случае квадрика Q особая. Кривая C лежит на квадрике Q . Дополнительное условие

требует, чтобы кривая C не проходила через особые точки квадрики Q . Пространство кубик с единственной особой точкой, которая обязана удовлетворять этим условиям, обозначается через $\Delta^\bullet$. Это пространство является открытым множеством в топологии Зариского на Δ и имеет особые точки. Множество неособых точек дискриминантной гиперповерхности Δ обозначается через Δ^* , оно содержится в пространстве $\Delta^\bullet$, а разность $\Delta^\bullet \setminus \Delta^*$ обозначается через Δ° .

Мы показываем, что справедлива

ТЕОРЕМА 0.3. *Для каждой точки $b \in \Delta^\circ \subset \mathcal{B}$ существует окрестность в евклидовой топологии на $\mathcal{B}$ и голоморфные координаты $z_1, \dots, z_{34}$ на этой окрестности такие, что гиперповерхность $\Delta \subset \mathcal{B}$ задается в этой окрестности уравнением $z_1^2 + z_2^3 = 0$.*

Оказывается, что из единственности особой точки $a \in V$ и выполнения дополнительного условия следует, что кривая $C \subset Q$ является неособой канонической кривой рода 4 в проективном пространстве $\mathbb{P}(a)$. Это отображение пространства особых кубик $\Delta^\bullet$ в пространство канонических кривых применяется в § 3, где описаны компоненты связности вещественной части $\mathbb{R}\Delta^\bullet$ пространства особых кубик $\Delta^\bullet$. Здесь с помощью теоремы 0.2 мы показываем, что пространство $\mathbb{R}\Delta^\bullet$ состоит из восьми компонент связности. Наконец, в § 4 доказывается теорема 0.1. При доказательстве этой теоремы мы используем аналог теоремы 0.3 для вещественной части $\mathbb{R}\Delta^\bullet$ пространства особых кубик $\Delta^\bullet$, а также результат о количестве компонент связности этой вещественной части.

Заметим также, что теорема 0.1 указывает число компонент связности пространства неособых вещественных кубик $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$, но мало говорит о топологии вещественной части $\mathbb{R}V$ кубики V с заданным жестким изотопическим типом.

§ 1. Жесткая изотопическая классификация вещественных канонических кривых рода 4

1.1. Комплексные канонические кривые рода 4. Пусть Q – квадрика в трехмерном комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}_Y^3$ с однородными координатами $Y_1, \dots, Y_4$. Тогда она определяется уравнением

$$q(Y) \equiv \sum_{i,j=1}^4 q_{ij} Y_i Y_j = 0,$$

где (q_{ij}) – ненулевая симметрическая матрица размером 4×4 . Пространство таких квадрик обозначим через $\mathcal{Q}$. Коэффициенты матрицы (q_{ij}) определяют изоморфизм $\mathcal{Q} \cong \mathbb{P}_W^9$, где $\mathbb{P}_W^9$ – проективное пространство, ассоциированное с векторным пространством симметрических матриц размером 4×4 , а W_{ij} – однородные координаты в нем, причем предполагается, что выполняется равенство $W_{ji} = W_{ij}$. Обозначим через $\mathcal{Q}_k$ пространство квадрик Q , для которых ранг матрицы (q_{ij}) равен k . Тогда имеем разложение на непересекающиеся неособые квазипроективные многообразия:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_4 \cup \mathcal{Q}_3 \cup \mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{Q}_1.$$

Здесь $\mathcal{Q}_4$ – пространство неособых квадратик, $\mathcal{Q}_3$ – пространство квадратичных конусов, $\mathcal{Q}_2$ – пространство пар плоскостей, $\mathcal{Q}_1$ – пространство двойных плоскостей. Объединение $\mathcal{Q}_4 \cup \mathcal{Q}_3$ будем обозначать через $\mathcal{Q}_{\geq 3}$, оно является открытым множеством в топологии Зариского на пространстве всех квадратик $\mathcal{Q} = \mathbb{P}_W^9$.

Пусть $C \subset \mathbb{P}_Y^3$ – каноническая кривая рода 4. Тогда через нее проходит единственная квадратика $Q = Q(C) \subset \mathbb{P}_Y^3$. Правило $C \mapsto Q(C)$ задает регулярное отображение $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Q}$, где $\mathcal{C}$ – пространство канонических кривых рода 4 (см. введение). Образ этого отображения состоит из квадратик Q , для которых соответствующая квадратичная форма $q(Y)$ имеет ранг не менее 3, т. е. $\pi(\mathcal{C}) = \mathcal{Q}_{\geq 3}$. Прообраз $\pi^{-1}(Q)$, где $Q \in \mathcal{Q}_{\geq 3}$, является открытым множеством в топологии Зариского в 15-мерном проективном пространстве $\mathbb{P}(\Gamma(Q, \mathcal{O}_Q(3)))$. На самом деле многообразие $\mathcal{C}$ является открытым множеством в топологии Зариского расслоения со слоем $\mathbb{P}^{15}$ на пространстве квадратик $\mathcal{Q}_{\geq 3}$, которое мы сейчас опишем. В произведении $(\mathcal{Q}_{\geq 3}) \times \mathbb{P}_Y^3$ полное тело квадратик

$$\Omega = \bigcup_{p \in \mathcal{Q}_{\geq 3}} p \times Q,$$

где $Q \subset \mathbb{P}_Y^3$ – квадратика, отвечающая точке $p \in \mathcal{Q}_{\geq 3}$, образует неособую гиперповерхность. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathcal{Q}_{\geq 3}$ – проекция. Тогда пучок $\mathcal{E} = f_*(\mathcal{O}_\Omega(3))$ локально свободный, поэтому имеем локально тривиальное расслоение $\pi: \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{Q}_{\geq 3}$ со слоем $\mathbb{P}^{15}$. Многообразие канонических кривых $\mathcal{C}$ является открытым множеством в топологии Зариского в $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.

Многообразие канонических кривых на фиксированной квадратике Q будем обозначать через $\mathcal{C}_Q$. Каждая кривая $C \in \mathcal{C}_Q$ является неособым полным пересечением квадратика Q и некоторой кубики $S \subset \mathbb{P}^3$. Множество всех кубических сечений квадратика Q образует проективное пространство $\mathbb{P}_Q^{15} = \mathbb{P}(\Gamma(Q, \mathcal{O}_Q(3)))$. Обозначим через $\mathcal{S}_Q$ множество особых кубических сечений квадратика Q . Тогда выполняется равенство $\mathcal{C}_Q = \mathbb{P}_Q^{15} \setminus \mathcal{S}_Q$. Множество $\mathcal{S}_Q$ является особой гиперповерхностью в проективном пространстве $\mathbb{P}_Q^{15}$, множество неособых точек на ней будем обозначать через $\mathcal{S}_Q^*$. Заметим, что если квадратика Q неособая, то кубическое сечение $C \in \mathbb{P}_Q^{15}$ принадлежит $\mathcal{S}_Q^*$ тогда и только тогда, когда кривая C имеет единственную особую точку, которая является простой двойной особой точкой.

1.2. Вещественные канонические кривые рода 4. Приведем без доказательства результаты об изотопической квалификации кубических сечений фиксированной вещественной квадратика. Доказательства этих результатов изложены в работах [10], [9], [6], [5].

Рассмотрим пространство вещественных квадратик $\mathbb{R}\mathcal{Q}$. Оно состоит из квадратик $Q \in \mathcal{Q}$, заданных уравнениями с вещественными коэффициентами q_{ij} . Для вещественных квадратик $Q \in \mathbb{R}\mathcal{Q}_k$ определена сигнатура (p, n) , где p, n – число положительных и отрицательных квадратов в каноническом представлении квадратичной формы

$$q(Y) = \sum_{i,j=1}^4 q_{ij} Y_i Y_j.$$

Чтобы сигнатура была определена однозначно, будем полагать, что выполняется неравенство $p \geq n$, в противном случае форму $q(Y)$ нужно умножить на -1 . Через $\mathcal{Q}_n^p$ обозначим пространство вещественных квадратик $Q \in \mathbb{R}\mathcal{Q}_k$ с сигнатурой (p, n) , где $k = p + n$. Каждое из открытых множеств $\mathcal{Q}_n^p \subset \mathbb{R}\mathcal{Q}_{p+n}$ является связным, т.е. является одной из связных компонент в евклидовой топологии квазипроективного многообразия $\mathbb{R}\mathcal{Q}_{p+n}$. Компоненты $\mathcal{Q}_n^p$ классифицируются по множествам вещественных точек квадратик $Q \in \mathcal{Q}_n^p$. Если $Q \in \mathcal{Q}_0^4$, то множество $\mathbb{R}Q$ пустое. Если $Q \in \mathcal{Q}_1^3$, то множество $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом. Если $Q \in \mathcal{Q}_2^2$, то множество $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом. Если $Q \in \mathcal{Q}_3^1$, то множество $\mathbb{R}Q$ состоит из одной точки. Если $Q \in \mathcal{Q}_1^2$, то множество $\mathbb{R}Q$ – обычный конус. Если $Q \in \mathcal{Q}_0^2$, то множество $\mathbb{R}Q$ состоит из одной прямой. Если $Q \in \mathcal{Q}_1^1$, то множество $\mathbb{R}Q$ состоит из двух плоскостей. Если $Q \in \mathcal{Q}_0^1$, то множество $\mathbb{R}Q$ состоит из одной плоскости. Заметим еще, что компонента $\mathcal{Q}_s^r$ лежит в границе компоненты $\mathcal{Q}_n^p$, если выполняются следующие условия: $r \leq p$, $s \leq n$ и $r + s < p + n$.

Пусть $Q \in \mathbb{R}\mathcal{Q}$ – фиксированная вещественная квадратика. Множество комплексных канонических кривых на ней было обозначено через $\mathcal{C}_Q$, тогда множество вещественных канонических кривых на квадратике Q будем обозначать через $\mathbb{R}\mathcal{C}_Q$. Поскольку канонические кривые неособые, то вещественная квадратика $Q \in \mathbb{R}\mathcal{Q}$ может принадлежать одному из следующих пространств: $\mathcal{Q}_0^4$, $\mathcal{Q}_1^3$, $\mathcal{Q}_2^2$, $\mathcal{Q}_3^1$, $\mathcal{Q}_1^2$. Через $\mathbb{RP}_Q^{15}$, $\mathbb{R}\mathcal{S}_Q$, $\mathbb{R}\mathcal{S}_Q^*$ обозначим вещественные части многообразий $\mathbb{P}_Q^{15}$, $\mathcal{S}_Q$, $\mathcal{S}_Q^*$ соответственно.

Пусть $Q \in \mathcal{Q}_0^4$, т.е. Q – неособая квадратика с пустым множеством вещественных точек. Тогда множество $\mathbb{R}\mathcal{S}_Q^*$ пустое, поэтому выполняется равенство $\dim \mathbb{R}\mathcal{S}_Q = 13$. Следовательно, пространство $\mathbb{R}\mathcal{C}_Q = \mathbb{RP}_Q^{15} \setminus \mathbb{R}\mathcal{S}_Q$ состоит из одной компоненты связности. Справедливо аналогичное утверждение, если $Q \in \mathcal{Q}_0^3$, т.е. когда квадратика Q является конусом с единственной вещественной точкой – его вершиной. В этом случае множество $\mathbb{R}\mathcal{S}_Q$ состоит из вещественных кубических сечений, проходящих через вершину, а также из особых кубических сечений, не проходящих через вершину. Обозначим через $\mathbb{R}\mathcal{S}_Q^0$ множество вещественных кубических сечений, проходящих через вершину конуса. Тогда это множество является гиперплоскостью в $\mathbb{RP}_Q^{15}$, а множество $\mathbb{R}\mathcal{S}_Q \setminus \mathbb{R}\mathcal{S}_Q^0$ имеет размерность, равную 13. Следовательно, пространство $\mathbb{R}\mathcal{C}_Q = \mathbb{RP}_Q^{15} \setminus \mathbb{R}\mathcal{S}_Q$ состоит из одной компоненты связности и в этом случае.

Пусть $Q \in \mathcal{Q}_1^3$, т.е. Q – неособая квадратика, у которой множество вещественных точек $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом. Тогда пространство $\mathbb{R}\mathcal{C}_Q$ состоит из семи компонент связности (см. [6], [9]), которые мы сейчас опишем. Принадлежность кривой $C \in \mathbb{R}\mathcal{C}_Q$ к какой-либо компоненте определяются ее *вещественным типом*, т.е. изотопическим классом вложения $\mathbb{R}C \hookrightarrow \mathbb{R}Q$. Пусть k – число компонент связности в $\mathbb{R}C$, тогда $0 \leq k \leq 5$. Если $k \neq 3$, то оказывается, что можно так выбрать точку $\infty \in \mathbb{R}Q \setminus \mathbb{R}C$, что на дополнении $\mathbb{R}Q \setminus \{\infty\}$ компоненты $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ кривой $\mathbb{R}C$ будут лежать вне друг друга, т.е. не будут образовывать гнезд. В этом случае говорится, что *кривая имеет вещественную схему $\langle k \rangle$* . При $k = 3$ возможны два способа расположения компонент $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ на эллипсоиде $\mathbb{R}Q$. А именно, или по схеме $\langle 3 \rangle$, или по схеме $\langle 1\langle 1 \rangle \rangle$, где схема

$\langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle$ означает, что можно так выбрать точку $\infty \in \mathbb{R}Q \setminus \mathbb{R}C$, что на дополнении $\mathbb{R}Q \setminus \{\infty\}$ компоненты $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ кривой $\mathbb{R}C$ будут содержаться друг в друге, т.е. образуют гнездо. Кроме этого оказывается, что кривая $\mathbb{R}C$ разбивает риманову поверхность C на две половины, т.е., согласно Ф. Клейну, принадлежит типу I в случае, когда ее вещественная схема имеет вид $\langle 5 \rangle$ или $\langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle$, а в других случаях кривая $\mathbb{R}C$ не разбивает риманову поверхность C на две половины, т.е., согласно Ф. Клейну, принадлежит типу II.

Пусть $Q \in \mathcal{Q}_2^2$, т.е. Q – неособая квадрака, у которой множество вещественных точек $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом. Тогда пространство $\mathcal{C}_Q$ состоит из 18 компонент связности (см. [6], [9], [10]), которые мы сейчас опишем. Принадлежность кривой $C \in \mathbb{R}\mathcal{C}_Q$ к какой-либо компоненте не определяется полностью ее вещественным типом, необходимо еще указать, принадлежит ли она типу I или II. На гиперboloиде $\mathbb{R}Q$ имеются два семейства прямых; выберем по представителю l', l'' из каждого семейства. Зафиксируем на прямых l', l'' ориентацию, тогда получим ориентацию и на гиперboloиде $\mathbb{R}Q$. Среди компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ могут быть стягиваемые на гиперboloиде $\mathbb{R}Q$ и нестягиваемые компоненты. Стягиваемые компоненты называются *овалами*. Оказывается, что на нестягиваемых компонентах можно так выбрать ориентацию, что они станут гомологичными между собой на гиперboloиде $\mathbb{R}Q$. Поэтому после такого выбора ориентации индексы пересечения $\Gamma_i \cdot l', \Gamma_i \cdot l''$ не зависят от номера i нестягиваемой компоненты Γ_i . Оба индекса пересечения $\Gamma_i \cdot l', \Gamma_i \cdot l''$ ненулевые, поэтому можно считать, что индекс пересечения $\Gamma_i \cdot l'$ больше нуля, в противном случае изменим ориентацию всех нестягиваемых компонент. Набор чисел $\Gamma_i \cdot l', \Gamma_i \cdot l''$ определяет вещественный тип нестягиваемой компоненты Γ_i , он обозначается через $(\Gamma_i \cdot l', \Gamma_i \cdot l'')$. Оказывается, что возможны следующие вещественные схемы расположения овалов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ на гиперboloиде $\mathbb{R}Q$:

h1) $_{\pm}^{\pm}$ $\langle (1, \pm 1), k - 1 \rangle$, где $1 \leq k \leq 5$, т.е. имеется одна нестягиваемая компонента типа $(1, \pm 1)$ и $k - 1$ овалов;

h2) $_{\pm}$ $\langle 3(1, \pm 1) \rangle$, т.е. имеются три нестягиваемых компоненты типа $(1, \pm 1)$, а овалов совсем нет;

h3) $'_{\pm}$ $\langle (3, \pm 1) \rangle$, т.е. имеется только одна нестягиваемая компонента типа $(3, \pm 1)$, а других компонент нет;

h3) $''_{\pm}$ $\langle (1, \pm 3) \rangle$, т.е. имеется только одна нестягиваемая компонента типа $(1, \pm 3)$, а других компонент нет.

Таким образом, имеется 16 вещественных схем расположения компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ на гиперboloиде $\mathbb{R}Q$. Принадлежность кривой (C, τ) типу I или II определяется следующими правилами.

Кривые с вещественными схемами $\langle (1, \pm 1), 4 \rangle, \langle 3(1, \pm 1) \rangle, \langle (3, \pm 1) \rangle, \langle (1, \pm 3) \rangle$ всегда принадлежат типу I. Схема $\langle (1, \pm 1), 2 \rangle$ неопределенного типа, т.е. имеются кривые со схемой $\langle (1, \pm 1), 2 \rangle$, принадлежащие типу I, а также имеются кривые с такой вещественной схемой, принадлежащие типу II. Кривые с остальными вещественными схемами всегда принадлежат типу II. В итоге получаем 18 классов кривых (C, τ) на квадраке $Q \in \mathcal{Q}_2^2$. Каждая из 18 компонент связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{C}_Q$ состоит из кривых одного из этих классов.

Пусть теперь $Q \in \mathcal{Q}_1^2$, т.е. Q – особая квадрака, у которой множество вещественных точек $\mathbb{R}Q$ является конусом. Тогда пространство $\mathbb{R}\mathcal{C}_Q$ состоит из 11

компонент связности (см. [5, приложение A]), которые мы сейчас опишем. На конусе $\mathbb{R}Q$ имеется одно семейство прямых, выберем одну из них, зафиксируем на ней ориентацию и обозначим ее через l . Пусть $O \in \mathbb{R}Q$ – вершина конуса; тогда компоненты $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ не проходят через точку O , поэтому определен индекс пересечения $\Gamma_i \cdot l$, если выбрать ориентацию компоненты Γ_i и зафиксировать ориентацию конуса $\mathbb{R}Q$. Индекс пересечения $\Gamma_i \cdot l$ или равен ± 1 (знак зависит от выбора ориентации компоненты Γ_i и ориентации конуса), или равен нулю. Компоненты, индекс пересечения которых с прямой l равен нулю, называются *овалами*. Вершина O конуса и компоненты, не являющиеся овалами, разбивают конус $\mathbb{R}Q$ на части $Z_1, \dots, Z_s$. Эти части приобретают порядок, если двигаться от вершины конуса по направлению прямой l . На каждой из этих частей расположено несколько овалов, причем они не образуют гнезд. Таким образом, вещественная схема расположения компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ на конусе $\mathbb{R}Q$ имеет вид $\langle k_1 | \dots | k_s \rangle$, где вертикальная черта обозначает компоненту, не являющуюся овалом, а числа $k_1, \dots, k_s$ обозначают количество овалов на частях $Z_1, \dots, Z_s$.

В работе [5] показано, что возможны только следующие вещественные схемы:

$C1)_k' \langle k-1|0 \rangle$, где $1 \leq k \leq 5$, т. е. имеется только одна компонента, не являющаяся овалом, а все овалы расположены между вершиной и этой компонентой;

$C1)_k'' \langle 0|k-1 \rangle$, где $1 \leq k \leq 5$, т. е. имеется только одна компонента, не являющаяся овалом, а все овалы расположены между этой компонентой и вершиной (заметим, что схемы в случаях $C1)_1'$, $C1)_1''$ совпадают и равны $\langle 0|0 \rangle$);

$C2) \langle 1|1 \rangle$, т. е. имеются два овала и одна компонента, не являющаяся овалом, причем один овал расположен до этой компоненты, а другой овал расположен после нее;

$C3) \langle ||| \rangle$, т. е. овалов нет, а имеются только три компоненты, не являющиеся овалами.

В итоге получаем 11 классов кривых (C, τ) на квадрике $Q \in \mathcal{Q}_1^2$. Каждая из 11 компонент связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{C}_Q$ состоит из кривых одного из этих классов. Заметим, что компоненты связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{C}_Q$ определяются вещественными схемами. Следовательно, принадлежность кривой (C, τ) типу I или II также определяется ее вещественной схемой. В работе [5] нет соответствующего описания. Оказывается, что *к типу I принадлежат только кривые со схемами $\langle 4|0 \rangle$, $\langle 0|4 \rangle$, $\langle 1|1 \rangle$, $\langle ||| \rangle$* . Приведем доказательство этого утверждения.

Итак, пусть $C \in \mathbb{R}\mathcal{C}_Q$, где $Q \in \mathcal{Q}_1^2$. Тогда кривая C является неособым полным пересечением вещественной квадрики $q(Y) = 0$ и вещественной кубики $c(Y) = 0$, где $q(Y)$ – квадратичная форма, а $c(Y)$ – кубическая форма. Формы $q(Y)$, $c(Y)$ имеют вещественные коэффициенты, причем матрица квадратичной формы $q(Y)$ имеет сигнатуру $(2, 1)$. Тогда существует регулярное семейство вещественных квадратичных форм $q_t(Y)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, таких, что $q_0(Y) = q(Y)$, а матрица квадратичной формы $q_t(Y)$ при $t > 0$ имеет сигнатуру $(3, 1)$, а при $t < 0$ – сигнатуру $(2, 2)$. Пусть кривая $C(t)$ задана системой уравнений $q_t(Y) = 0$, $c(Y) = 0$. Тогда при малых t эта кривая неособая, причем при $t > 0$ она лежит на эллипсоиде, а при $t < 0$ – на гиперboloиде.

Кривая $(C(t), \tau)$ принадлежит типу I тогда и только тогда, когда кривая (C, τ) принадлежит типу I. Так как M -кривая всегда принадлежит типу I, то мы можем предполагать, что кривая (C, τ) не является M -кривой. Итак, если (C, τ) принадлежит типу I, то кривая $(C(t), \tau)$ при $t > 0$ обязана иметь вещественную схему $\langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle$. Это возможно только в случае, когда кривая (C, τ) имеет вещественную схему $\langle 1|1 \rangle$ или схему $\langle ||| \rangle$. Также верно обратное утверждение. А именно, если кривая (C, τ) имеет вещественную схему $\langle 1|1 \rangle$ или схему $\langle ||| \rangle$, то кривая $(C(t), \tau)$ при $t > 0$ обязана иметь вещественную схему $\langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle$, а поэтому принадлежит типу I. Итак, сформулированное ранее утверждение доказано.

1.3. Компоненты связности пространства вещественных канонических кривых. Докажем теорему 0.2. Рассмотрим проекцию $\pi: \mathbb{R}\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{Q}$. Прообраз пространства квадрик $\mathcal{Q}_n^p$ при этом отображении будем обозначать через $\mathcal{C}_n^p$. Тогда мы имеем локально тривиальные дифференцируемые расслоения

$$\pi: \mathcal{C}_0^4 \rightarrow \mathcal{Q}_0^4, \quad \pi: \mathcal{C}_0^3 \rightarrow \mathcal{Q}_0^3, \quad \pi: \mathcal{C}_1^3 \rightarrow \mathcal{Q}_1^3, \quad \pi: \mathcal{C}_2^2 \rightarrow \mathcal{Q}_2^2, \quad \pi: \mathcal{C}_1^2 \rightarrow \mathcal{Q}_1^2.$$

Мы хотим описать компоненты связности пространств $\mathcal{C}_0^4, \mathcal{C}_0^3, \mathcal{C}_1^3, \mathcal{C}_2^2, \mathcal{C}_1^2$.

Поскольку пространства $\mathcal{Q}_0^4, \mathcal{Q}_0^3$ связные, а слои расслоения $\pi: \mathcal{C}_0^4 \rightarrow \mathcal{Q}_0^4, \pi: \mathcal{C}_0^3 \rightarrow \mathcal{Q}_0^3$ также связные, то каждое из пространств $\mathcal{C}_0^4, \mathcal{C}_0^3$ состоит из одной компоненты.

Пространство $\mathcal{C}_1^3$ состоит из семи компонент связности. Это утверждение вытекает из описания компонент связности слоя $\mathcal{C}_Q$ расслоения $\pi: \mathcal{C}_1^3 \rightarrow \mathcal{Q}_1^3$. Действительно, обозначим через $\mathcal{C}_1^3(k)$, $0 \leq k \leq 5$, множество кривых $C \in \mathcal{C}_1^3$ таких, что топологическая кривая $\mathbb{R}C$ состоит из k компонент. Тогда из связности пространства $\mathcal{Q}_1^3$ и из описания компонент связности слоя $\mathcal{C}_Q$ вытекает, что при $k \neq 3$ множества $\mathcal{C}_1^3(k)$ являются компонентами связности пространства $\mathcal{C}_1^3$, а множество $\mathcal{C}_1^3(3)$ состоит из двух компонент связности $\mathcal{C}_1^3(3)_I, \mathcal{C}_1^3(3)_{II}$, где $\mathcal{C}_1^3(3)_I$ состоит из кривых $C \in \mathcal{C}_1^3(3)$ типа I, а $\mathcal{C}_1^3(3)_{II}$ состоит из кривых $C \in \mathcal{C}_1^3(3)$ типа II. Таким образом, имеем разложение на компоненты связности:

$$\mathcal{C}_1^3 = \mathcal{C}_1^3(0) \sqcup \mathcal{C}_1^3(1) \sqcup \mathcal{C}_1^3(2) \sqcup \mathcal{C}_1^3(3)_I \sqcup \mathcal{C}_1^3(3)_{II} \sqcup \mathcal{C}_1^3(4) \sqcup \mathcal{C}_1^3(5). \quad (1.1)$$

Пространство $\mathcal{C}_2^2$ состоит из восьми компонент связности. Для доказательства этого утверждения прежде всего рассмотрим множества $\mathcal{C}_2^2(k)$, $1 \leq k \leq 5$, которые состоят из кривых $C \in \mathcal{C}_2^2$ таких, что топологическая кривая $\mathbb{R}C$ имеет k компонент связности. Тогда каждое такое множество состоит из целых компонент связности пространства $\mathcal{C}_2^2$ и имеет место разложение

$$\mathcal{C}_2^2 = \prod_{k=1}^5 \mathcal{C}_2^2(k).$$

Покажем теперь, что при $k \neq 1, 3$ каждое из множеств $\mathcal{C}_2^2(k)$ связное. Из описания слоя $\mathcal{C}_Q$ расслоения $\pi: \mathcal{C}_2^2 \rightarrow \mathcal{Q}_2^2$ следует, что для доказательства связности пространства $\mathcal{C}_2^2(k)$ при $k \neq 1, 3$ достаточно для фиксированной

квадрики $Q \in \mathcal{Q}_2^2$ и фиксированной канонической кривой $C \in \mathcal{C}_Q$ с вещественной схемой $\langle(1, 1), k - 1\rangle$ построить путь $C(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве $\mathcal{C}_2^2(k)$ такой, что $C(0) = C$, а кривая $C_1 = C(1) \in \mathcal{C}_Q$ имеет схему $\langle(1, -1), k - 1\rangle$. Мы можем считать, что квадрика Q определяется уравнением

$$Y_1 Y_3 + Y_2 Y_4 = 0,$$

а прямые l' , l'' на гиперboloиде $\mathbb{R}Q$ задаются системами уравнений

$$l': Y_1 = Y_2 = 0, \quad l'': Y_1 = Y_4 = 0.$$

Рассмотрим путь $g(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в группе $\mathrm{PGL}_4 \mathbb{R}$, заданный семейством матриц

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ 0 & 0 & -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix}.$$

Тогда путь $C(t) = g(t)(C)$ в пространстве $\mathcal{C}_2^2(k)$ будет искомым путем. Итак, связность пространств $\mathcal{C}_2^2(k)$ при $k \neq 1, 3$ доказана.

Из предыдущего рассуждения следует, что пространство $\mathcal{C}_2^2(3)$ состоит из трех компонент связности, которые мы обозначаем через

$$\mathcal{C}\langle(1, 1), 2\rangle_I, \quad \mathcal{C}\langle(1, 1), 2\rangle_{II}, \quad \mathcal{C}\langle 3(1, 1)\rangle.$$

Компоненты $\mathcal{C}\langle(1, 1), 2\rangle_I$, $\mathcal{C}\langle(1, 1), 2\rangle_{II}$ состоят из кривых $C \in \mathcal{C}_2^2(3)$, имеющих на квадрике $Q(C)$ вещественную схему $\langle(1, \pm 1), 2\rangle$ и тип I, II соответственно. Компонента $\mathcal{C}\langle 3(1, 1)\rangle$ состоит из кривых $C \in \mathcal{C}_2^2(3)$, имеющих на квадрике $Q(C)$ вещественную схему $\langle 3(1, \pm 1)\rangle$.

Пространство $\mathcal{C}_2^2(1)$ состоит из двух компонент связности, которые мы обозначаем через $\mathcal{C}\langle(1, 1)\rangle$, $\mathcal{C}\langle(3, 1)\rangle$. Компонента $\mathcal{C}\langle(1, 1)\rangle$ состоит из кривых $C \in \mathcal{C}_2^2(1)$, имеющих на квадрике $Q(C)$ вещественную схему $\langle(1, \pm 1)\rangle$. Из предыдущего рассуждения следует, что множество $\mathcal{C}\langle(1, 1)\rangle$ связное. Компонента $\mathcal{C}\langle(3, 1)\rangle$ состоит из кривых $C \in \mathcal{C}_2^2(1)$, имеющих на квадрике $Q(C)$ одну из следующих вещественных схем: $\langle(3, \pm 1)\rangle$, $\langle(1, \pm 3)\rangle$. Покажем, что множество $\mathcal{C}\langle(3, 1)\rangle$ связное. Чтобы это установить, достаточно для фиксированной квадрики $Q \in \mathcal{Q}_2^2$ и фиксированной канонической кривой $C \in \mathcal{C}_Q$ с вещественной схемой $\langle(3, 1)\rangle$ построить путь $C(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве $\mathcal{C}_2^2(1)$ такой, что $C(0) = C$, а кривая $C_1 = C(1) \in \mathcal{C}_Q$ имеет схему $\langle(1, \pm 3)\rangle$. Можно считать, что квадрика Q определяется уравнением $Y_1^2 + Y_2^2 - Y_3^2 - Y_4^2 = 0$, а прямые l' , l'' на гиперboloиде $\mathbb{R}Q$ задаются системами уравнений

$$l': Y_1 = Y_3, \quad Y_2 = Y_4, \quad l'': Y_1 = Y_3, \quad Y_2 = -Y_4.$$

Рассмотрим путь $g(t)$ в группе $\mathrm{PGL}_4 \mathbb{R}$, заданный семейством матриц $G(t)$. Тогда путь $C(t) = g(t)(C)$ в пространстве $\mathcal{C}_1^2(1)$ будет искомым путем.

Таким образом, имеем разложение на компоненты связности:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2^2 = & \mathcal{C}\langle(1, 1)\rangle \sqcup \mathcal{C}\langle(3, 1)\rangle \sqcup \mathcal{C}_2^2(2) \sqcup \mathcal{C}\langle(1, 1), 2\rangle_I \\ & \sqcup \mathcal{C}\langle(1, 1), 2\rangle_{II} \sqcup \mathcal{C}\langle 3(1, 1)\rangle \sqcup \mathcal{C}_2^2(4) \sqcup \mathcal{C}_2^2(5). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Пространство $\mathcal{C}_1^2$ имеет семь компонент связности. Для доказательства этого утверждения прежде всего рассмотрим множества $\mathcal{C}_1^2(k)$, $1 \leq k \leq 5$, которые состоят из кривых $C \in \mathcal{C}_1^2$ таких, что топологическая кривая $\mathbb{R}C$ имеет k компонент связности. Тогда каждое такое множество состоит из целых компонент связности пространства $\mathcal{C}_1^2$ и имеет место разложение

$$\mathcal{C}_1^2 = \prod_{k=1}^5 \mathcal{C}_1^2(k).$$

Покажем, что при фиксированном k две кривые с вещественными схемами $\langle k|0\rangle$, $\langle 0|k\rangle$ соответственно принадлежат одной компоненте связности пространства $\mathcal{C}_1^2$. Для доказательства этого достаточно для фиксированной квадрики $Q \in \mathcal{Q}_1^2$ и фиксированной кривой $C \in \mathcal{C}_Q$ с вещественной схемой $\langle k|0\rangle$ построить путь $C(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве $\mathcal{C}_1^2$ такой, что $C(0) = C$, а кривая $C_1 = C(1)$ принадлежит слою $\mathcal{C}_Q$, но имеет вещественную схему $\langle 0|k\rangle$. Мы можем считать, что квадратика Q определяется уравнением $Y_2^2 + Y_3^2 - Y_4^2 = 0$. Рассмотрим путь $g(t)$ в группе $\mathrm{PGL}_4 \mathbb{R}$, заданный семейством матриц $G(t)$. Тогда путь $C(t) = g(t)(C)$ в пространстве $\mathcal{C}_1^2$ будет искомым путем.

Обозначим через $\mathcal{C}\langle 2|0\rangle$ множество кривых $C \in \mathcal{C}_1^2$, имеющих на квадрике $Q(C)$ вещественную схему $\langle 2|0\rangle$ или $\langle 0|2\rangle$. Кривые из этого множества имеют тип II, поэтому в данном множестве не содержатся кривые $C \in \mathcal{C}_1^2$, имеющие на квадрике $Q(C)$ вещественную схему $\langle 1|1\rangle$ или $\langle ||| \rangle$, так как кривые с такими схемами принадлежат типу I. Следовательно, множество $\mathcal{C}\langle 2|0\rangle$ образует связную компоненту пространства $\mathcal{C}_1^2$.

Заметим наконец, что кривые со схемами $\langle 1|1\rangle$, $\langle ||| \rangle$ не могут принадлежать одной компоненте связности пространства $\mathcal{C}_1^2$, так как они имеют разные количества овалов. Поэтому если мы обозначим через $\mathcal{C}\langle 1|1\rangle$, $\mathcal{C}\langle ||| \rangle$ множества кривых $C \in \mathcal{C}_1^2$, имеющих на квадрике $Q(C)$ вещественную схему $\langle 1|1\rangle$, $\langle ||| \rangle$ соответственно, то получим две компоненты связности пространства $\mathcal{C}_1^2$.

В итоге получаем разложение

$$\mathcal{C}_1^2 = \mathcal{C}_1^2(1) \sqcup \mathcal{C}_1^2(2) \sqcup \mathcal{C}\langle 2|0\rangle \sqcup \mathcal{C}\langle 1|1\rangle \sqcup \mathcal{C}\langle ||| \rangle \sqcup \mathcal{C}_1^2(4) \sqcup \mathcal{C}_1^2(5). \quad (1.3)$$

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 0.2. Мы должны доказать, что множества

$$\mathcal{C}(0), \mathcal{C}(1)_I, \mathcal{C}(1)_{II}, \mathcal{C}(2), \mathcal{C}(3)_I, \mathcal{C}(3)_{II}, \mathcal{C}(4), \mathcal{C}(5)$$

связные.

Для того чтобы установить связность множеств $\mathcal{C}(0)$, мы зафиксируем кривую $C \in \mathcal{C}_0^3$ и построим путь $C(t)$, $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, в пространстве $\mathbb{R}\mathcal{C}$ такой, что

$$C(0) = C, \quad C(\varepsilon) \in \mathcal{C}_0^4, \quad C(-\varepsilon) \in \mathcal{C}_1^3(0).$$

Из связности пространств $\mathcal{C}_0^3, \mathcal{C}_0^4, \mathcal{C}_1^3(0)$ следует, что из существования такого пути $C(t)$ вытекает связность пространства $\mathcal{C}(0)$.

Итак, пусть $C \in \mathcal{C}_0^3$. Тогда кривая C является неособым полным пресечением вещественной квадрики $q(Y) = 0$ и вещественной кубики $c(Y) = 0$, где $q(Y) -$

квадратичная форма, а $c(Y)$ – кубическая форма. Формы $q(Y)$, $c(Y)$ имеют вещественные коэффициенты, причем матрица квадратичной формы $q(Y)$ имеет сигнатуру $(3, 0)$. Тогда существует регулярное семейство вещественных квадратичных форм $q_t(Y)$ таких, что $q_0(Y) = q(Y)$, и матрица этой квадратичной формы при малых $t > 0$ имеет сигнатуру $(4, 0)$, а при малых $t < 0$ – сигнатуру $(3, 1)$. Пусть кривая $C(t)$ задана системой уравнений $q_t(Y) = 0$, $c(Y) = 0$. Тогда при малых t эта кривая неособая, поэтому она является искомой кривой.

Пространство $\mathcal{C}(1)_I$ совпадает с пространством $\mathcal{C}\langle(3, 1)\rangle$, поэтому является связным. Для того чтобы установить связность пространства $\mathcal{C}(1)_{II}$, мы зафиксируем кривую $C \in \mathcal{C}_1^2(1)$ и построим так же, как раньше, путь $C(t)$, $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, в пространстве $\mathbb{R}\mathcal{C}$ такой, что

$$C(0) = C, \quad C(\varepsilon) \in \mathcal{C}_1^3(1), \quad C(-\varepsilon) \in \mathcal{C}\langle(1, 1)\rangle.$$

Из связности пространств $\mathcal{C}_1^2(1)$, $\mathcal{C}_1^3(1)$, $\mathcal{C}\langle(1, 1)\rangle$ следует, что из существования такого пути $C(t)$ вытекает связность пространства $\mathcal{C}(1)_{II}$.

Для того чтобы установить связность пространства $\mathcal{C}(2)$, мы зафиксируем кривую $C \in \mathcal{C}_1^2(2)$ и построим так же, как раньше, путь $C(t)$, $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, в пространстве $\mathbb{R}\mathcal{C}$ такой, что

$$C(0) = C, \quad C(\varepsilon) \in \mathcal{C}_1^3(2), \quad C(-\varepsilon) \in \mathcal{C}_2^2(2).$$

Из связности пространств $\mathcal{C}_1^2(2)$, $\mathcal{C}_1^3(2)$, $\mathcal{C}_2^2(2)$ следует, что из существования такого пути $C(t)$ вытекает связность пространства $\mathcal{C}(2)$. Аналогично доказывается связность пространств $\mathcal{C}(4)$, $\mathcal{C}(5)$.

Для того чтобы установить связность пространства $\mathcal{C}(3)_I$, мы зафиксируем кривые $C' \in \mathcal{C}\langle 1|1\rangle$, $C'' \in \mathcal{C}\langle ||| \rangle$ и построим так же, как раньше, пути $C'(t)$, $C''(t)$, $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, в пространстве $\mathbb{R}\mathcal{C}$ такие, что

$$\begin{aligned} C'(0) = C', \quad C''(0) = C'', \quad C'(\varepsilon) \in \mathcal{C}_1^3(3)_I, \quad C'(-\varepsilon) \in \mathcal{C}\langle(1, 1), 2\rangle_I, \\ C''(\varepsilon) \in \mathcal{C}_1^3(3)_I, \quad C''(-\varepsilon) \in \mathcal{C}\langle 3(1, 1)\rangle. \end{aligned}$$

Из связности пространств $\mathcal{C}\langle 1|1\rangle$, $\mathcal{C}\langle ||| \rangle$, $\mathcal{C}_1^3(3)_I$, $\mathcal{C}\langle(1, 1), 2\rangle_I$, $\mathcal{C}\langle 3(1, 1)\rangle$ следует, что из существования таких путей $C'(t)$, $C''(t)$ вытекает связность пространства $\mathcal{C}(3)_I$.

Наконец, чтобы установить связность пространства $\mathcal{C}(3)_{II}$, мы зафиксируем кривую $C \in \mathcal{C}\langle 2|0\rangle$ и построим так же, как раньше, путь $C(t)$, $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, в пространстве $\mathbb{R}\mathcal{C}$ такой, что

$$C(0) = C, \quad C(\varepsilon) \in \mathcal{C}_1^3(3)_{II}, \quad C(-\varepsilon) \in \mathcal{C}\langle(1, 1), 2\rangle_{II}.$$

Из связности пространств $\mathcal{C}\langle 2|0\rangle$, $\mathcal{C}_1^3(3)_{II}$, $\mathcal{C}\langle(1, 1), 2\rangle_{II}$ следует, что из существования такого пути $C(t)$ вытекает связность пространства $\mathcal{C}(3)_{II}$.

Теорема 0.2 полностью доказана. Заметим также, что из доказательства этой теоремы и разложений (1.1)–(1.3) вытекает следующее замечание, которое показывает, как пересекаются компоненты связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{C}$ с компонентами связности пространств $\mathcal{C}_0^4$, $\mathcal{C}_0^3$, $\mathcal{C}_1^3$, $\mathcal{C}_2^2$, $\mathcal{C}_1^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Компонента $\mathcal{C}(0)$ имеет непустое пересечение только с множествами $\mathcal{C}_0^4$, $\mathcal{C}_0^3$, $\mathcal{C}_1^3(0)$. Компонента $\mathcal{C}(1)_I$ совпадает с множеством $\mathcal{C}\langle(3, 1)\rangle$. Компонента $\mathcal{C}(1)_II$ имеет непустое пересечение только с множествами $\mathcal{C}_1^3(1)$, $\mathcal{C}\langle(1, 1)\rangle$, $\mathcal{C}_1^2(1)$. Компонента $\mathcal{C}(2)$ имеет непустое пересечение только с множествами $\mathcal{C}_1^3(2)$, $\mathcal{C}_2^2(2)$, $\mathcal{C}_1^2(2)$. Компонента $\mathcal{C}(3)_I$ имеет непустое пересечение только с множествами $\mathcal{C}_1^3(3)_I$, $\mathcal{C}\langle(1, 1), 2\rangle_I$, $\mathcal{C}\langle 1|1\rangle$, $\mathcal{C}\langle||| \rangle$. Компонента $\mathcal{C}(3)_II$ имеет непустое пересечение только с множествами $\mathcal{C}_1^3(3)_II$, $\mathcal{C}\langle(1, 1), 2\rangle_{II}$, $\mathcal{C}\langle 2|0\rangle$. Компонента $\mathcal{C}(4)$ имеет непустое пересечение только с множествами $\mathcal{C}_1^3(4)$, $\mathcal{C}_2^2(4)$, $\mathcal{C}_1^2(4)$. Компонента $\mathcal{C}(5)$ имеет непустое пересечение только с множествами $\mathcal{C}_1^3(5)$, $\mathcal{C}_2^2(5)$, $\mathcal{C}_1^2(5)$.

§ 2. Пространство комплексных особых трехмерных кубик

Сначала введем несколько обозначений, причем сделаем это для гиперповерхностей произвольных размерности и степени.

2.1. Пространство гиперповерхностей. Пусть $L - (n + 1)$ -мерное комплексное линейное пространство. Тогда через $L^\vee$ обозначим двойственное линейное пространство, а через $\Phi = \Phi_m = S^m L^\vee$ – пространство m -форм на L . Размерность пространства Φ равна $\binom{n+m}{m}$. Через $\mathbb{P}(L)$, $\mathbb{P}(\Phi)$ обозначаются проективные пространства размерности $n, N = \binom{n+m}{m} - 1$ соответственно, которые являются проективизациями линейных пространств L, Φ .

Если на линейном пространстве L зафиксированы линейные координатные функции $X_0 \in L^\vee, \dots, X_n \in L^\vee$, то они становятся однородными координатами проективного пространства $\mathbb{P}(L)$. Линейное пространство L с координатами $X_0, \dots, X_n$ обозначим через $\mathbb{C}_X^{n+1}$, а проективное пространство $\mathbb{P}(L)$ с однородными координатами $X_0, \dots, X_n$ – через $\mathbb{P}_X^n$.

С помощью линейных координат $X_0, \dots, X_n$ на L каждая m -форма $\varphi \in \Phi$ записывается следующим образом:

$$\varphi = \sum_{i_0 + \dots + i_n = m} w_{i_0 \dots i_n} X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n} = \sum_{|I|=m} w_I X^I.$$

Числа $w_{i_0 \dots i_n}$ являются координатами формы $\varphi \in \Phi$. Таким образом, на линейном пространстве Φ получаем координатные функции $W_{i_0 \dots i_n}$, поэтому будем обозначать его через $\mathbb{C}_W^{N+1}$, а проективное пространство $\mathbb{P}(\Phi)$ – через $\mathbb{P}_W^N$.

Если $l \in L$ – ненулевой вектор, то через $[l]$ обозначим соответствующую точку в $\mathbb{P}(L)$. Если точка $a \in \mathbb{P}_X^n$ имеет однородные координаты $x = (x_0, \dots, x_n)$, то $a = [x] = [x_0, \dots, x_n]$. Аналогично, если $\varphi \in \Phi$ – ненулевая форма, то через $[\varphi]$ обозначим соответствующую точку в $\mathbb{P}(\Phi)$, а если точка $b \in \mathbb{P}_W^N$ имеет однородные координаты $w = (w_{i_0 \dots i_n})$, то $b = [w] = [w_{i_0 \dots i_n}]$.

Для любой ненулевой формы $\varphi \in \Phi$ обозначим через V_φ гиперповерхность степени m в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}(L)$, заданную уравнением $\varphi = 0$. Поскольку пропорциональные формы определяют одну и ту же гиперповерхность, то множество гиперповерхностей степени m совпадает с проективным пространством $\mathbb{P}(\Phi)$. На произведении проективных пространств $\mathbb{P}(L) \times \mathbb{P}(\Phi)$ рассмотрим форму $\langle l, \varphi \rangle = \varphi(l)$ бистепени $(m, 1)$. Тогда полное

тело гиперповерхностей

$$\mathfrak{V} = \bigcup_{b \in \mathbb{P}(\Phi)} V_b \times b \subset \mathbb{P}(L) \times \mathbb{P}(\Phi)$$

определяется уравнением $\langle l, \varphi \rangle = 0$ и представляет собой неособую гиперповерхность в произведении $\mathbb{P}(L) \times \mathbb{P}(\Phi)$. Гиперповерхность $\mathfrak{V} \subset \mathbb{P}(L) \times \mathbb{P}(\Phi)$ состоит из пар (a, b) таких, что $a \in V_b$. Рассмотрим проекции

$$\pi_L: \mathfrak{V} \rightarrow \mathbb{P}(L), \quad \pi_\Phi: \mathfrak{V} \rightarrow \mathbb{P}(\Phi).$$

Обозначим через $D \subset \mathfrak{V}$ множество точек ветвления второй проекции, т. е. множество точек из $\mathfrak{V}$, в которых отображение касательных пространств $d\pi_\Phi$ не является эпиморфизмом. Множество $D \subset \mathbb{P}(L) \times \mathbb{P}(\Phi)$ состоит из пар (a, b) таких, что a – особая точка гиперповерхности V_b . Поэтому проекция $\pi_L: D \rightarrow \mathbb{P}(L)$ является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathbb{P}^{N-n-1}$, слой которого над точкой $a \in \mathbb{P}(L)$ будем обозначать через D_a . Следовательно, множество D представляет собой неособое $(N-1)$ -мерное многообразие. Пусть $\Delta = \pi_\Phi(D)$; тогда $\Delta \subset \mathbb{P}(\Phi)$ является особой гиперповерхностью в $\mathbb{P}(\Phi)$ и параметризует все особые гиперповерхности $V_b \subset \mathbb{P}(L)$ степени m . Гиперповерхность Δ называется *дискриминантной* гиперповерхностью.

Сформулируем ряд общих утверждений, которые можно вывести из теории двойственности (см., например, [7], [11]), если применить отображение Веронезе $v_m: \mathbb{P}(L) \rightarrow \mathbb{P}(\Phi^\vee)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *отображение $\pi_\Phi: D \rightarrow \Delta$ является бирациональной эквивалентностью;*
- 2) *множество неособых точек $\Delta^* \subset \Delta$ параметризует особые гиперповерхности V_b , имеющие единственную особую точку, которая является простой двойной точкой;*
- 3) *если D^* – прообраз $\pi_\Phi^{-1}(\Delta^*)$ при отображении $\pi_\Phi: D \rightarrow \Delta$, то отображение $\pi_\Phi: D^* \rightarrow \Delta^*$ является изоморфизмом.*

2.2. Кубики с единственной особой точкой. Далее $\dim L = 5$, $m = 3$, следовательно, $\mathbb{P}(\Phi)$ – пространство трехмерных кубик. Если выбраны координаты $X_0, \dots, X_4$ на L , то $\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}_X^4$, $\mathbb{P}(\Phi) = \mathbb{P}_W^{34}$. Напомним, что проективное пространство $\mathbb{P}_W^{34}$, параметризующее кубические тела, обозначено во введении через $\mathcal{B}$.

Итак, пусть теперь V – трехмерное особое комплексное алгебраическое многообразие в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}_X^4$ с однородными координатами $X_0, \dots, X_4$, заданное уравнением

$$\varphi(X_0, \dots, X_4) = 0,$$

где $\varphi(X) = \varphi(X_0, \dots, X_4)$ – однородный многочлен третьей степени с комплексными коэффициентами. Будем предполагать, что точка $a = [1, 0, 0, 0, 0] \in \mathbb{P}_X^4$ – особая точка многообразия V . Тогда в аффинных координатах

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_0}, \quad Y_2 = \frac{X_2}{X_0}, \quad Y_3 = \frac{X_3}{X_0}, \quad Y_4 = \frac{X_4}{X_0}$$

которая равносильна системе уравнений

[illegible]

обратное утверждение. Действительно, если $a \in V$ – единственная особая точка кубики V , причем существуют голоморфные координаты z_1, z_2, z_3, z_4 на $\mathbb{P}_X^4$ в окрестности точки a такие, что кубика V на этой окрестности имеет уравнение $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0$, то кривая C не проходит через особую точку квадрики Q . Применим предложение 2.2, тогда получим, что система уравнений (2.1) определяет кривую C как неособое полное пересечение.

Далее мы хотим описать разрешение единственной особой точки кубики, при этом будем следовать изложению, приведенному в работе [4]. Заметим только, что в [4] рассматривается невырожденная особая двойная точка, а у нас она может быть вырожденной двойной особой точкой, но при дополнительном предположении, что кривая C не содержит особых точек квадрики Q , все рассуждения справедливы и в этом случае. Итак, мы предполагаем, что $a = [1, 0, 0, 0, 0] \in V$ – особая точка кубики V и система уравнений (2.1) определяет кривую C как неособое полное пересечение.

Пусть $\sigma_a: \tilde{\mathbb{P}}_X^4 \rightarrow \mathbb{P}_X^4$ – σ -процесс с центром в точке $a = [1, 0, 0, 0, 0]$, а $\tilde{V}$ – собственный прообраз многообразия V при этом отображении. Тогда непосредственно проверяется, что в обоих случаях (форма $q(X)$ невырожденная или вырожденная) многообразие $\tilde{V}$ неособое, а прообраз $(\sigma_a|_{\tilde{V}})^{-1}(a)$ будет канонически изоморфен квадрике $Q \subset \mathbb{P}(a)$, которая равна проективизации касательного конуса $\hat{\mathbb{T}}_a V$.

Рассмотрим центральную проекцию многообразия V с центром в точке $a = [1, 0, 0, 0, 0]$ на проективное подпространство $\mathbb{P}_X^3 \subset \mathbb{P}_X^4$, заданное уравнением $X_0 = 0$. Эта проекция будет бирациональным отображением $p_a: V \dashrightarrow \mathbb{P}_X^3$, которое в аффинных координатах $Y_1, \dots, Y_4$ на $\mathbb{P}_X^4$ и однородных координатах $X_1, \dots, X_4$ на $\mathbb{P}_X^3$ задается равенствами $X_i = Y_i$, $i = 1, \dots, 4$. Отображение $p_a: V \dashrightarrow \mathbb{P}_X^3$ не определено в точке $a = [1, 0, 0, 0, 0]$, а обратное отображение $p_a^{-1}: \mathbb{P}_X^3 \dashrightarrow V$ не определено на кривой $C_X \subset \mathbb{P}_X^3$, заданной системой уравнений

$$\begin{aligned} q(X) &= 0, \\ c(X) &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Рассмотрим конус $K \subset V$, заданный системой уравнений (2.3), а также обозначим конус без вершины $K \setminus \{a\}$ через K^* . Тогда отображение $p_a: V \dashrightarrow \mathbb{P}_X^3$ переводит конус без вершины K^* на кривую $C_X \subset \mathbb{P}_X^3$, причем каждая прямая

$$l: \begin{cases} Y_1 = a_1 t, \\ \dots\dots\dots \\ Y_4 = a_4 t, \\ q(a_1, \dots, a_4) = 0, \\ c(a_1, \dots, a_4) = 0 \end{cases}$$

конуса отображается в точку $[a_1, \dots, a_4]$ кривой C_X .

Рассмотрим квадрику $Q_X \subset \mathbb{P}_X^3$, заданную уравнением $q(X) = 0$. Тогда отображение

$$p_a: V \setminus K \rightarrow \mathbb{P}_X^3 \setminus Q_X$$

является изоморфизмом, так как прямая в $\mathbb{P}_X^4$, проходящая через точку $a \in V$, но не лежащая на касательном конусе $\widehat{T}_a V$, пересекает многообразие V еще в одной точке, отличной от точки $a \in V$.

Обозначим через $\tilde{p}_a: \tilde{V} \dashrightarrow \mathbb{P}_X^3$ композицию отображений $p_a \circ (\sigma_a|_{\tilde{V}})$. Тогда рациональное отображение $\tilde{p}_a: \tilde{V} \dashrightarrow \mathbb{P}_X^3$ продолжится до регулярного отображения.

Через $\sigma_C: \tilde{\mathbb{P}}_X^3 \rightarrow \mathbb{P}_X^3$ обозначим σ -процесс с центром в кривой $C_X \subset \mathbb{P}_X^3$. Тогда из предыдущих утверждений вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Существует и единствен изоморфизм многообразий $\tilde{V} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbb{P}}_X^3$ такой, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \xrightarrow{\sim} & \tilde{\mathbb{P}}_X^3 \\ \downarrow \tilde{p}_a & & \downarrow \sigma_C \\ \mathbb{P}_X^3 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}_X^3 \end{array}$$

коммутативна, причем для этого изоморфизма выполняется свойство: если $\tilde{Q}_X$ – собственный прообраз квадрики Q_X при отображении $\sigma_C: \tilde{\mathbb{P}}_X^3 \rightarrow \mathbb{P}_X^3$, то квадрика $(\sigma_a|_{\tilde{V}})^{-1}(a)$ изоморфно отображается на квадрiku $\tilde{Q}_X$.

Из предложения 2.3 следует, что многообразие V получается из многообразия $\tilde{\mathbb{P}}_X^3$ стягиванием в точку квадрики $\tilde{Q}_X$. Опишем группы гомологий многообразий, которые появились выше. Род кривой C_X равен 4. Многообразие $\tilde{\mathbb{P}}_X^3$ получается из проективного пространства $\mathbb{P}_X^3$ раздутием кривой C_X , поэтому

$$H_1(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{Z}) = H_5(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{Z}) = 0, \quad H_2(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{Z}) = H_4(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2, \quad H_3(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^8.$$

Поскольку многообразия $\tilde{V}$, $\tilde{\mathbb{P}}_X^3$ изоморфны, то $H_q(\tilde{V}, \mathbb{Z}) = H_q(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{Z})$. Пусть сначала квадрика Q_X неособая. Тогда многообразие V получается из многообразия $\tilde{\mathbb{P}}_X^3$ стягиванием в точку неособой квадрики $\tilde{Q}_X$, поэтому

$$H_1(V, \mathbb{Z}) = H_5(V, \mathbb{Z}) = 0, \quad H_2(V, \mathbb{Z}) = H_4(V, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_3(V, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^9.$$

Эти равенства вытекают из рассмотрения длинной точной последовательности гомологий пары $(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \tilde{Q}_X)$. Если квадрика Q_X является квадратичным конусом, то из рассмотрения этой точной последовательности вытекают равенства

$$H_1(V, \mathbb{Z}) = H_5(V, \mathbb{Z}) = 0, \quad H_2(V, \mathbb{Z}) = H_4(V, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_3(V, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^8.$$

2.3. Пространство кубик с единственной особой точкой. Рассмотрим множество кубик в $\mathbb{P}_X^4$, заданных уравнениями вида

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 4} q_{ij} X_0 X_i X_j + \sum_{1 \leq i, j, k \leq 4} c_{ijk} X_i X_j X_k = 0. \quad (2.4)$$

Множество таких кубик образует проективное пространство $\mathbb{P}^{29}$. Обозначим через $D_0^\bullet \subset \mathbb{P}^{29}$ множество кубик, заданных уравнениями вида (2.4), для которых система уравнений (2.1) задает неособое полное пересечение. Если

$b \in D_0^\bullet$ и V_b – соответствующая кубика, то точка $a = [1, 0, \dots, 0]$ является единственной особой точкой кубики V_b . Это утверждение вытекает из предложения 2.2. С другой стороны, если кубика V_b имеет единственную особую точку $a = [1, 0, \dots, 0]$, которая является двойной, причем кривая C , заданная системой уравнений (2.1), не проходит через особые точки квадрики $q(Y) = 0$, то точка b принадлежит множеству $D_0^\bullet$. Это утверждение также следует из предложения 2.2, причем из предложения 2.2 следует также обратное утверждение. Из определения множества $D_0^\bullet$ вытекает, что оно является открытым множеством в топологии Зариского проективного пространства $\mathbb{P}^{29}$.

Пусть $(a, b) \in D$; тогда точка a является особой точкой кубики V_b . Обозначим через

$$C_{a,b} \subset \mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(\mathbb{T}_a \mathbb{P}_X^4)$$

множество прямых в $\mathbb{P}_X^4$, проходящих через точку a и лежащих на кубике V_b . Если особая точка $a \in V_b$ двойная, то определена квадрика $Q_{a,b} \subset \mathbb{P}(a)$, которая равна проективизации касательного конуса $\hat{\mathbb{T}}_a V_b$. Алгебраическое множество $C_{a,b}$ лежит на этой квадрике. Через $D^\bullet$ обозначим множество пар $(a, b) \in D$, удовлетворяющих одному из следующих трех эквивалентных условий:

- 1) точка $a \in V_b$ является единственной особой точкой кубики V_b , причем она является двойной точкой, а множество $C_{a,b}$ является кривой, не проходящей через особые точки квадрики $Q_{a,b}$;
- 2) множество $C_{a,b}$ является неособой канонической кривой рода 4 в проективном пространстве $\mathbb{P}(a)$;
- 3) точка $a \in V_b$ является единственной особой точкой кубики V_b , причем в окрестности точки $a \in \mathbb{P}_X^4$ существуют голоморфные координаты z_1, z_2, z_3, z_4 такие, что в этой окрестности кубика V_b имеет уравнение $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^k = 0$, где k равно 2 или 3.

Из определений и обозначений множеств $D^\bullet$ и $D_0^\bullet$ следует, что проекция $\pi_X: D^\bullet \rightarrow \mathbb{P}_X^4$ задает локально тривиальное расслоение со слоем $D_0^\bullet$. Это утверждение вытекает из предложения 2.2. Проекция $\pi_X: D \setminus D^\bullet \rightarrow \mathbb{P}_X^4$ задает локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbb{P}^{29} \setminus D_0^\bullet$. Поскольку множество $\mathbb{P}^{29} \setminus D_0^\bullet$ замкнутое, то множество $D \setminus D^\bullet$ также замкнутое в топологии Зариского, а его дополнение $D^\bullet$ является открытым множеством.

Образ множества $D^\bullet$ при проекции $\pi_W: D \rightarrow \Delta$ обозначим через $\Delta^\bullet$. Тогда $\Delta \setminus \Delta^\bullet$ является замкнутым подмножеством в топологии Зариского дискриминантного многообразия Δ , а $\Delta^\bullet$ – открытым множеством. Поэтому доказана

ЛЕММА 2.1. Пусть $\Delta^\bullet \subset \Delta$ – множество точек $b \in \Delta$ таких, что особая кубика V_b имеет такую особую точку $a \in V_b$, что для пары (a, b) выполняется одно из трех предыдущих эквивалентных условий. Тогда множество $\Delta^\bullet$ является открытым множеством в топологии Зариского дискриминантного многообразия Δ .

Далее разности $D^\bullet \setminus D^*$, $\Delta^\bullet \setminus \Delta^*$ будем обозначать через D° , Δ° соответственно. Покажем, что множество D° является неособой гиперповерхностью на многообразии $D^\bullet$. Для этого обозначим через D_0° множество кубик, заданных уравнениями вида (2.4), для которых система уравнений (2.1) задает

неособое полное пересечение, а квадрака

$$q(\xi) = \sum_{i,j=1}^4 q_{ij} X_i X_j$$

имеет ранг 3. Тогда множество D_0° является неособой гиперповерхностью на многообразии $D_0^\bullet$, так как множество квадрик $\mathcal{Q}_3$ является неособой гиперповерхностью на многообразии $\mathcal{Q}_{\geq 3}$. Осталось заметить, что проекция $\pi_X: D^\circ \rightarrow \mathbb{P}_X^4$ задает локально тривиальное расслоение со слоем D_0° .

Рассмотрим дифференциал $d\pi_W: \mathbb{T}_{(a,b)}D \rightarrow \mathbb{T}_b\mathcal{B}$ проекции $\pi_W: D \rightarrow \mathcal{B}$. Касательное пространство $\mathbb{T}_{(a,b)}D$ содержится в произведении $\mathbb{T}_a\mathbb{P}_X^4 \times \mathbb{T}_b\mathcal{B}$, причем ядро дифференциала $\text{Ker}(d\pi_W)$ содержится в пространстве $\mathbb{T}_a\mathbb{P}_X^4 \times 0$. В случае, когда $(a, b) \in D^*$, пространство $\text{Ker}(d\pi_W)$ нулевое. Пусть $(a, b) \in D^\circ$; тогда точка $a \in \mathbb{P}_X^4$ – единственная особая точка кубики V_b . Если $\hat{\mathbb{T}}_a V_b \subset \mathbb{T}_a\mathbb{P}_X^4$ – касательный конус к многообразию V_b в особой точке $a \in V_b$, то он определяется уравнением $q(\xi) = 0$, где $q(\xi)$ – квадратичная форма на касательном пространстве $\mathbb{T}_a\mathbb{P}_X^4$, она определена с точностью до постоянного множителя. Пусть $\mathbf{q}(\xi, \zeta)$ – симметрическая билинейная форма, полученная из квадратичной формы $q(\xi)$. Тогда вектор $h \in \mathbb{T}_a\mathbb{P}_X^4$ по определению принадлежит ядру $\text{Ker}(q)$ квадратичной формы $q(\xi)$, если выполняется равенство $\mathbf{q}(\xi, h) = 0$ при каждом $\xi \in \mathbb{T}_a\mathbb{P}_X^4$.

Покажем, что справедлива

ЛЕММА 2.2. *Выполняется равенство $\text{Ker}(d\pi_W) = \text{Ker}(q) \times 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства рассуждений мы заменим проективное пространство $\mathbb{P}_W^{34} = \mathcal{B}$ на подлежащее аффинное пространство без нуля $\mathbb{C}_W^{35} \setminus \{0\}$. Точками пространства $\mathbb{C}_W^{35} \setminus \{0\}$ являются ненулевые кубические формы на $\mathbb{C}_X^5$. Тогда имеем проекцию

$$\mathbb{C}_W^{35} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_W^{34}.$$

Прообразы многообразий $\Delta, \Delta^\bullet, \Delta^\circ, \dots$ для этой проекции обозначим через $\hat{\Delta}, \hat{\Delta}^\bullet, \hat{\Delta}^\circ, \dots$. Пусть $w \in \hat{\Delta}^\circ$ – фиксированная точка из прообраза точки $b \in \Delta^\circ$, т. е. $b = [w]$. Аналогично, прообразы многообразий $D, D^\bullet, D^\circ, \dots$ для проекции

$$\mathbb{P}_X^4 \times (\mathbb{C}_W^{35} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{P}_X^4 \times \mathbb{P}_W^{34}$$

обозначим через $\hat{D}, \hat{D}^\bullet, \hat{D}^\circ, \dots$.

Без ограничения общности можно считать, что $a = [1, 0, 0, 0, 0]$. Касательное пространство $\mathbb{T}_a\mathbb{P}_X^4$ тогда отождествляется с аффинной картой $\mathbb{C}_Y^4 = \{X_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}_X^4$, а касательное пространство $\mathbb{T}_{(a,w)}\hat{D}$ является подпространством аффинного пространства $\mathbb{C}_Y^4 \times \mathbb{C}_W^{35}$.

Точке $w \in \hat{\Delta}^\circ$ соответствует кубическая форма

$$\varphi = X_0 q(X_1, X_2, X_3, X_4) + c(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_0 q(\xi) + c(\xi),$$

где $q(\xi)$ – квадратичная форма ранга 3, а $c(\xi)$ – кубическая форма, причем система уравнений $q(\xi) = 0, c(\xi) = 0$ определяет неособое полное пересечение в проективном пространстве $\mathbb{P}_X^3$.

Пусть E_W – подпространство пространства $\mathbb{C}_W^{35}$, которое состоит из кубических форм ϕ , включая нулевую форму, вида

$$\sum_{i,j=1}^4 q_{ij} X_0 X_i X_j + \sum_{i,j,k=1}^4 c_{ijk} X_i X_j X_k. \quad (2.5)$$

Тогда касательное пространство $\mathbb{T}_{(a,w)} \hat{D}$ содержит подпространство $F_W = 0 \times E_W$, на котором дифференциал $d\pi_W$ имеет нулевое ядро.

Мы построим подпространство $F_X \subset \mathbb{T}_{(a,w)} \hat{D}$ такое, что имеет место разложение

$$\mathbb{T}_{(a,w)} \hat{D} = F_X \oplus F_W.$$

Для этого рассмотрим отображение $f: U \rightarrow \hat{D}$ окрестности U точки 0 в $\mathbb{C}_Y^4$, заданное правилом: если $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in U$, то $f(u) = (u, \varphi_u)$, где кубическая форма

$$\varphi_u = \varphi_u(X) = \varphi_u(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$$

имеет вид

$$\varphi_u = X_0 q(\xi - X_0 u) + c(\xi - X_0 u).$$

Композиция дифференциалов

$$df: \mathbb{T}_0 U \rightarrow \mathbb{T}_{(0,w)}(U \times \mathbb{C}_W^{35}), \quad d\pi_X: \mathbb{T}_{(0,w)}(U \times \mathbb{C}_W^{35}) \rightarrow \mathbb{T}_0 U$$

равна тождественному отображению, поэтому пространство $F_X = df(\mathbb{T}_0 U)$ является искомым.

Ограничение дифференциала $d\pi_W$ на пространство F_W определяет канонический изоморфизм

$$d\pi_W: F_W \xrightarrow{\cong} E_W,$$

заданный правилом $d\pi_W(0, \phi) = \phi$. Рассмотрим ограничение дифференциала $d\pi_W$ на пространство F_X . Напомним, что через $\mathbf{q}(\xi, \zeta)$ была обозначена симметрическая билинейная форма, определенная квадратичной формой $q(\xi)$. Аналогично, через $\mathbf{c}(\xi, \zeta, \eta)$ обозначим симметрическую 3-линейную форму, определенную кубической формой $c(\xi)$. Тогда для вектора $h \in \mathbb{C}_Y^4 = \mathbb{T}_a U$ кубическая форма

$$\phi_h = -2X_0^2 \mathbf{q}(\xi, h) - 3X_0 \mathbf{c}(\xi, \xi, h) \quad (2.6)$$

равна образу вектора $h \in \mathbb{T}_0 U$ под действием композиции дифференциалов $d\pi_W \circ df$. Это утверждение вытекает из определения отображения f с помощью равенства

$$f(u) = (u, X_0 q(\xi - X_0 u) + c(\xi - X_0 u))$$

и правил дифференцирования квадратичных и кубических форм. Поэтому выполняется равенство $df(h) = (h, \phi_h)$.

Таким образом, каждый вектор из F_X имеет представление (h, ϕ_h) , где $h \in \mathbb{C}_Y^4$, а кубическая форма $\phi_h \in \mathbb{C}_W^{35}$ вычисляется по формуле (2.6). Из этой формулы следует, что если $h \notin \text{Ker}(q)$, то $\phi_h \notin E_W$, в противном случае $\phi_h \in E_W$. Поэтому вектор

$$(h, 0) = (h, \phi_h) - (0, \phi_h)$$

принадлежит касательному пространству $\mathbb{T}_{(0,w)}\hat{D}$ тогда и только тогда, когда $h \in \text{Ker}(q)$. Лемма доказана.

Из леммы 2.2 следует, что $\text{Ker}(d\pi_W)$ задает на D° линейное расслоение, обозначим его через H . Опять из леммы 2.2 следует, что слой этого расслоения H_p над точкой $p = (a, b) \in D^\circ$ равен ядру квадратичной формы $q(\xi)$, определенной особой двойной точкой a кубики V_b . Возникает вопрос: может ли слой H_p содержаться в касательном пространстве $\mathbb{T}_p D^\circ$? Заметим, что аналогичное линейное расслоение определено на $\hat{D}^\circ$. Оно равно $\pi^*(H)$, где $\pi: \hat{D}^\circ \rightarrow D^\circ$ – проекция; обозначим это линейное расслоение через $\hat{H}$. Выясним, может ли слой $\hat{H}_{(a,w)}$ содержаться в касательном пространстве $\mathbb{T}_{(a,w)}\hat{D}^\circ$. Рассмотрим случай, который разбирался при доказательстве леммы 2.2, т. е. полагаем, что $a = [1, 0, 0, 0, 0]$.

Если $(h, 0) \in \hat{H}_{(a,w)}$, то $\mathbf{q}(\xi, h) = 0$. Поэтому из формулы (2.6) получаем равенство

$$\phi_h = -3X_0\mathbf{c}(\xi, \xi, h). \quad (2.7)$$

Найдем пересечение векторных пространств F_W , $\mathbb{T}_{(a,w)}\hat{D}^\circ$. Пространство F_W состоит из векторов $(0, \phi)$, где ϕ – кубическая форма вида (2.5), т. е.

$$\phi = X_0\kappa(\xi) + \gamma(\xi),$$

где $\kappa(\xi)$ – квадратичная форма, $\gamma(\xi)$ – кубическая форма. Чтобы этот вектор принадлежал касательному пространству $\mathbb{T}_{(a,w)}D^\circ$, необходимо и достаточно выполнения условия $\det(q + t\kappa) = o(t)$, а это условие равносильно равенству $\kappa(h) = 0$. Таким образом, пересечение $F_W \cap \mathbb{T}_{(a,w)}\hat{D}^\circ$ состоит из векторов $(0, X_0\kappa(\xi) + \gamma(\xi))$, удовлетворяющих условию $\kappa(h) = 0$.

Отображение $f: U \rightarrow \hat{D}$ определялось равенством

$$f(u) = (u, X_0q(\xi - X_0u) + c(\xi - X_0u)).$$

Поскольку в данном случае квадратичная форма $q(\xi)$ вырожденная, то образ отображения f лежит в $\hat{D}^\circ$. Следовательно, вектор $df(h) = (h, \phi_h)$ принадлежит касательному пространству $\mathbb{T}_{(a,w)}\hat{D}^\circ$. Таким образом, $(h, 0) \in \mathbb{T}_{(a,w)}\hat{D}^\circ$ тогда и только тогда, когда $(0, \phi_h) \in \mathbb{T}_{(a,w)}\hat{D}^\circ$. В силу формулы (2.7) это условие равносильно условию $(0, X_0\mathbf{c}(\xi, \xi, h)) \in \mathbb{T}_{(a,w)}\hat{D}^\circ$. Но вектор $(0, X_0\mathbf{c}(\xi, \xi, h))$ принадлежит касательному пространству $\mathbb{T}_{(a,w)}\hat{D}^\circ$ только в случае, когда $c(h) = \mathbf{c}(h, h, h) = 0$. Поскольку система уравнений $q(\xi) = 0, c(\xi) = 0$ определяет неособое полное пересечение в $\mathbb{P}_X^3$, а точка $[h]$ особая для квадрики $q(\xi) = 0$, то равенство $c(h) = 0$ не выполняется. В итоге доказана

ЛЕММА 2.3. *Если $(a, b) \in D^\circ$, то векторные пространства $\text{Ker}(d\pi_W)|_{(a,b)}$, $\mathbb{T}_{(a,b)}D^\circ$ имеют нулевое пересечение.*

Из леммы 2.3 следует, что в любой точке $(a, b) \in D^\circ$ дифференциал

$$d\pi_W: \mathbb{T}_{(a,b)}D^\circ \rightarrow \mathbb{T}_b\mathbb{P}_W^{34}$$

имеет нулевое ядро. Поскольку, кроме того, отображение $\pi_W: D^\circ \rightarrow \Delta^\circ$ биективно, то получаем, что справедлива

ЛЕММА 2.4. *Отображение $\pi_W: D^\circ \rightarrow \Delta^\circ$ является изоморфизмом алгебраических многообразий.*

Из леммы 2.4 вытекает, что многообразие $\Delta^\circ \subset \mathcal{B}$ неособое. Далее мы опишем касательное пространство многообразия $\hat{\Delta}^\circ \subset \mathbb{C}_W^{35}$. В этом описании касательное пространство $\mathbb{T}_w \mathbb{C}_W^{35}$ канонически отождествляется с векторным пространством $\mathbb{C}_W^{35}$.

ЛЕММА 2.5. *Пусть $(a, w) \in \hat{D}^\circ$, где $a = [1, 0, 0, 0, 0]$, $X_0 q(\xi) + c(\xi)$ – кубическая форма, отвечающая точке $w \in \mathbb{C}_W^{35}$, $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ – базис $\mathbb{C}_Y^4$, причем $h_1 \in \text{Ker}(q)$, а набор квадратичных форм $q_m(\xi)$, $1 \leq m \leq 9$, составляет базис пространства квадратичных форм, обращающихся в нуль на векторе h_1 . Тогда набор векторов из $\mathbb{C}_W^{35}$*

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= X_0^3 \mathbf{c}(h_1, h_1, h_1), & \varphi_2 &= X_0^2 \mathbf{c}(\xi, h_1, h_1), \\ \chi_n &= 2X_0^2 \mathbf{q}(\xi, h_n) + 3X_0 \mathbf{c}(\xi, \xi, h_n), & n &= 1, 2, 3, 4, \\ \psi_m &= X_0 q_m(\xi), & m &= 1, \dots, 9, & \omega_{ijk} &= X_i X_j X_k, & 1 \leq i \leq j \leq k \leq 4, \end{aligned}$$

образует базис пространства $\mathbb{C}_W^{35}$, причем все векторы из этого базиса, за исключением первых двух, принадлежат касательному пространству $\mathbb{T}_w \hat{\Delta}^\circ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что векторы

$$\chi_1, \dots, \chi_4, \psi_1, \dots, \psi_9, \omega_{ijk}$$

образуют базис касательного пространства $\mathbb{T}_w \hat{\Delta}^\circ$. Пусть E_W° – подпространство пространства E_W , состоящее из кубических форм $\phi = X_0 \kappa(\xi) + \gamma(\xi)$ таких, что $\kappa(h_1) = 0$. Тогда пространство E_W° содержится в касательном пространстве $\mathbb{T}_w \hat{\Delta}^\circ$, а векторы

$$\psi_1, \dots, \psi_9, \omega_{ijk}$$

образуют базис этого подпространства. Положим теперь $F_W^\circ = 0 \times E_W^\circ$; тогда получим, что векторы

$$(0, \psi_1), \dots, (0, \psi_9), (0, \omega_{ijk})$$

образуют базис подпространства F_W° касательного пространства $\mathbb{T}_{(a,w)} \hat{D}^\circ$. Рассмотрим затем параметрические кривые

$$\alpha_n(t) = (th_n, X_0 q(\xi + tX_0 h_n) + c(\xi + tX_0 h_n)), \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

на многообразии $\hat{D}^\circ$. Тогда их векторы скорости принадлежат касательному пространству $\mathbb{T}_{(a,w)} \hat{D}^\circ$ и имеют вид

$$\dot{\alpha}_n(0) = (h_n, 2X_0^2 \mathbf{q}(\xi, h_n) + 3X_0 \mathbf{c}(\xi, \xi, h_n)) = (h_n, \chi_n).$$

Поскольку векторы $h_1, \dots, h_4$ линейно независимы, то весь набор векторов

$$(h_1, \chi_1), \dots, (h_4, \chi_4), (0, \psi_1), \dots, (0, \psi_9), (0, \omega_{ijk})$$

линейно независим, а поэтому он образует базис пространства $\mathbb{T}_{(a,w)}\widehat{D}^\circ$. Отображение касательных пространств

$$d\pi_W: \mathbb{T}_{(a,w)}\widehat{D}^\circ \rightarrow \mathbb{T}_w\widehat{\Delta}^\circ$$

является изоморфизмом, следовательно, набор векторов

$$\chi_1, \dots, \chi_4, \psi_1, \dots, \psi_9, \omega_{ijk}$$

образует базис касательного пространства $\mathbb{T}_w\widehat{\Delta}^\circ$.

Покажем теперь, что векторы

$$\varphi_1, \varphi_2, \chi_1, \dots, \chi_4, \psi_1, \dots, \psi_9, \omega_{ijk}$$

линейно независимы. Из структуры этих векторов видно, что линейная зависимость может быть только между векторами $\varphi_2, \chi_1, \dots, \chi_4, \psi_1, \dots, \psi_9$. Пусть имеем нетривиальную линейную комбинацию этих векторов, равную нулю:

$$\lambda\varphi_2 + \sum_{n=1}^4 \nu_n \chi_n + \sum_{m=1}^9 \mu_m \psi_m = 0. \quad (2.8)$$

Тогда из нее получаем равенство

$$\lambda X_0^2 \mathbf{c}(\xi, h_1, h_1) + 2 \sum_{n=1}^4 \nu_n X_0^2 \mathbf{q}(\xi, h_n) = 0.$$

Поскольку $\mathbf{q}(h_1, h_n) = 0$ при каждом $n = 1, \dots, 4$, то из этого равенства следует, что

$$\lambda X_0^2 \mathbf{c}(h_1, h_1, h_1) = 0.$$

Однако это возможно только при $\lambda = 0$. Следовательно, из равенства (2.8) получаем, что векторы $\chi_1, \dots, \chi_4, \psi_1, \dots, \psi_9$ линейно зависимы, но это противоречит утверждению, доказанному ранее. Лемма доказана.

Далее найдем уравнение гиперповерхности $\widehat{\Delta}$ в евклидовой окрестности фиксированной точки $\varphi_0 \in \widehat{\Delta}^\circ$. Уравнение $\varphi_0 = 0$ задает в $\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}_X^4$ особую кубику V_{φ_0} . Кроме фиксированных однородных координат X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 на $\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}_X^4$ таких, что $a_0 = [1, 0, 0, 0, 0]$ – особая точка кубики V_{φ_0} , мы рассмотрим подвижную систему координат

$$\begin{aligned} X_0^a &= X_0, \\ X_1^a &= X_1 - X_0 a_1, \\ X_2^a &= X_2 - X_0 a_2, \\ X_3^a &= X_3 - X_0 a_3, \\ X_4^a &= X_4 - X_0 a_4, \end{aligned}$$

где $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}_Y^4$. Если точка $a \in \mathbb{P}(L) = \mathbb{P}_X^4$ имеет в фиксированных координатах запись $a = [1, a_1, a_2, a_3, a_4]$, то в координатах $X_0^a, X_1^a, X_2^a, X_3^a, X_4^a$ она имеет запись $[1, 0, 0, 0, 0]$. Если теперь кубика V_b имеет особую точку $a \in$

$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}_X^4$, которая в фиксированных координатах X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 имеет запись $a = [1, a_1, a_2, a_3, a_4]$, то уравнение кубики V_b в координатах $X_0^a, X_1^a, X_2^a, X_3^a, X_4^a$ приобретет вид

$$X_0^a q(X_1^a, X_2^a, X_3^a, X_4^a) + c(X_1^a, X_2^a, X_3^a, X_4^a) = 0,$$

где $q(X_1^a, X_2^a, X_3^a, X_4^a)$ – квадратичная форма, $c(X_1^a, X_2^a, X_3^a, X_4^a)$ – кубическая форма.

Если мы возьмем точку $\varphi \in \widehat{\Delta}$ в окрестности точки $\varphi_0 \in \widehat{\Delta}^\circ$, то уравнение $\varphi = 0$ определит особую кубику V_φ с единственной особой точкой $a \in \mathbb{P}(L) = \mathbb{P}_X^4$, которая находится в окрестности точки a_0 . Точка $a \in \mathbb{P}(L) = \mathbb{P}_X^4$ определит систему однородных координат $X_0^a, X_1^a, X_2^a, X_3^a, X_4^a$ на $\mathbb{P}(L)$, а кубическая форма $\varphi \in \Phi = \mathbb{C}_W^{35}$ в этих координатах будет иметь вид

$$\varphi = X_0^a q_\varphi(X_1^a, X_2^a, X_3^a, X_4^a) + c_\varphi(X_1^a, X_2^a, X_3^a, X_4^a).$$

Поскольку $X_0^a = X_0$, то вместо X_0^a будем записывать X_0 . Точка $a \in \mathbb{P}(L) = \mathbb{P}_X^4$ определяется формой $\varphi \in \widehat{\Delta}$, поэтому для краткости записи введем обозначение

$$(X_1^a, X_2^a, X_3^a, X_4^a) = X^\varphi.$$

Тогда получим

$$\varphi = X_0 q_\varphi(X^\varphi) + c_\varphi(X^\varphi).$$

Покажем, что справедлива

ЛЕММА 2.6. *Для каждой точки $\varphi_0 \in \widehat{\Delta}^\circ \subset \Phi$ существуют окрестность в евклидовой топологии на Φ и голоморфные координаты $z_1, \dots, z_{35}$ на этой окрестности такие, что гиперповерхность $\widehat{\Delta} \subset \Phi$ задается в данной окрестности уравнением*

$$\frac{z_1^2}{4} + \frac{z_2^3}{27} = 0. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейное расслоение $\widehat{H} \rightarrow \widehat{D}^\circ$ можно спустить на $\widehat{\Delta}^\circ$, так как проекция $\pi_W: \widehat{D}^\circ \rightarrow \widehat{\Delta}^\circ$ является изоморфизмом. Спущенное на $\widehat{\Delta}^\circ$ расслоение $\widehat{H}$ обозначим через $\widehat{H}_\Delta$. Пусть $h(\varphi)$ – ненулевое сечение расслоения $\widehat{H}_\Delta$ над окрестностью U точки φ_0 в $\widehat{\Delta}^\circ$. Тогда выполняется равенство $\mathbf{q}_\varphi(X^\varphi, h(\varphi)) = 0$, а также определены два трансверсальных к $\widehat{\Delta}^\circ$ векторных поля:

$$v_1(\varphi) = X_0^3 \mathbf{c}_\varphi(h(\varphi), h(\varphi), h(\varphi)), \quad v_2(\varphi) = X_0^2 \mathbf{c}_\varphi(X^\varphi, h(\varphi), h(\varphi)).$$

Трансверсальность этих векторных полей к $\widehat{\Delta}^\circ$ вытекает из леммы 2.5. Рассмотрим отображение $g: U \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \Phi$, определенное правилом

$$g(\varphi, z_1 z_2) = \varphi + z_1 v_1(\varphi) + z_2 v_2(\varphi).$$

Пусть B_ε – множество точек $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ таких, что $|z_1| < \varepsilon$, $|z_2| < \varepsilon$. Тогда можно так уменьшить окрестность U , что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

отображение $g: U \times B_\varepsilon \rightarrow \Phi$ будет биголоморфным отображением на окрестность U_ε точки φ_0 в Φ . Если на окрестности U заданы координаты $z_3, \dots, z_{35}$, то отображение $g: U \times B_\varepsilon \rightarrow U_\varepsilon$ определяет набор координат $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{35}$ на окрестности U_ε . Покажем, что в этих координатах уравнение (2.9) определяет в окрестности точки φ_0 гиперповерхность $\hat{\Delta}$.

Рассмотрим отображение

$$G: U \times \mathbb{C} \rightarrow \hat{D},$$

заданное правилом

$$\begin{aligned} G(\varphi, z) = & (zh(\varphi), X_0 q_\varphi(X^\varphi - zX_0 h(\varphi)) + c_\varphi(X^\varphi - zX_0 h(\varphi)) \\ & + 3zX_0 \mathbf{c}_\varphi(X^\varphi - zX_0 h(\varphi), X^\varphi - zX_0 h(\varphi), h(\varphi))). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Тогда можно так уменьшить окрестность U , что при достаточно малом $\delta > 0$ отображение

$$G: U \times \{|z| < \delta\} \rightarrow \hat{D}$$

будет биголоморфным отображением на окрестность U_δ точки (a_0, φ_0) в $\hat{D}$. Произведем преобразования:

$$\begin{aligned} q_\varphi(X^\varphi - zX_0 h(\varphi)) &= \mathbf{q}_\varphi(X^\varphi - zX_0 h(\varphi), X^\varphi - zX_0 h(\varphi)) \\ &= q_\varphi(X^\varphi) - 2zX_0 \mathbf{q}_\varphi(X^\varphi, h(\varphi)) + z^2 X_0^2 q_\varphi(h(\varphi)) = q_\varphi(X^\varphi), \\ c_\varphi(X^\varphi - zX_0 h(\varphi)) &= \mathbf{c}_\varphi(X^\varphi - zX_0 h(\varphi), X^\varphi - zX_0 h(\varphi), X^\varphi - zX_0 h(\varphi)) \\ &= c_\varphi(X^\varphi) - 3zX_0 \mathbf{c}_\varphi(X^\varphi, X^\varphi, h(\varphi)) \\ &\quad + 3z^2 X_0^2 \mathbf{c}_\varphi(X^\varphi, h(\varphi), h(\varphi)) - z^3 X_0^3 c_\varphi(h(\varphi)), \\ \mathbf{c}_\varphi(X^\varphi - zX_0 h(\varphi), X^\varphi - zX_0 h(\varphi), h(\varphi)) &= \mathbf{c}_\varphi(X^\varphi, X^\varphi, h(\varphi)) - 2zX_0 \mathbf{c}_\varphi(X^\varphi, h(\varphi), h(\varphi)) + z^2 X_0^2 c_\varphi(X^\varphi). \end{aligned}$$

Тогда равенство (2.10) можно записать следующим образом:

$$G(\varphi, z) = (zh(\varphi), \varphi - 3z^2 X_0 \mathbf{c}_\varphi(X^\varphi, h(\varphi), h(\varphi)) + 2z^3 X_0^3 c_\varphi(h(\varphi))).$$

Поэтому отображение $\pi_W \circ G: U_\delta \rightarrow \hat{\Delta}$, дающее параметризацию окрестности точки φ_0 в $\hat{\Delta}$, имеет вид

$$(\pi_W \circ G)(\varphi, z) = \varphi - 3z^2 X_0 \mathbf{c}_\varphi(X^\varphi, h(\varphi), h(\varphi)) + 2z^3 X_0^3 c_\varphi(h(\varphi)).$$

Это означает, что на Δ выполняются равенства

$$\begin{aligned} z_1 &= 2z^3, \\ z_2 &= -3z^2. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется равенство (2.9). Лемма доказана.

Заметим, что из леммы 2.6 вытекает теорема 0.3.

2.4. Расслоение пространства особых кубик. Пусть $b \in \Delta^\bullet$; тогда кубика $V_b \subset \mathbb{P}_X^4$ имеет единственную особую точку $a \in V_b$. Также из этого предположения следует, что особая точка $a \in V_b$ – двойная, а квадрака $Q = Q_{a,b} = \mathbb{P}(\hat{T}_a V)$ или неособая, т.е. $Q \in \mathcal{Q}_4$, или имеет единственную особую точку, т.е. $Q \in \mathcal{Q}_3$. Кроме того, из условия $b \in \Delta^\bullet$ следует, что кривая $C = C_{a,b} \subset \mathbb{P}(a)$, состоящая из прямых, проходящих через точку a и лежащих на кубике V , является неособой канонической кривой рода 4.

Пусть кривая C задается в координатах Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 на $\mathbb{P}(a)$ системой уравнений

$$\begin{aligned} q(Y) &= 0, \\ c(Y) &= 0, \end{aligned}$$

где $q(Y)$ – квадратичная форма на $\mathbb{P}(a)$, а $c(Y)$ – кубическая форма. Обозначим через $I_n(C)$ пространство n -форм на $\mathbb{P}(a)$, обращающихся в нуль на C . Тогда $\dim I_2(C) = 1$, $\dim I_3(C) = 5$. Из равенства $\dim I_2(C) = 1$ следует, что существует единственная квадрака $Q \subset \mathbb{P}(a)$, проходящая через кривую C . Эта квадрака задается уравнением $q(Y) = 0$. Формы $l(Y)q(Y)$, где $l(Y)$ – произвольная линейная форма на $\mathbb{P}(a)$, образуют подпространство $I_3^0(C)$ пространства $I_3(C)$ размерности 4. Поэтому произвольная форма из $I_3(C)$ имеет вид $\lambda c(Y) + l(Y)q(Y)$. Если в уравнении $q(Y) + c(Y) = 0$ многообразие $V = V_b$ в аффинных координатах Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 мы заменим слагаемое $c(Y)$ на форму

$$c_1(Y) = \lambda c(Y) + l(Y)q(Y), \quad \lambda \neq 0,$$

то получим уравнение $q(Y) + c_1(Y) = 0$ нового многообразия третьей степени V_1 с единственной особой точкой a и той же канонической кривой $C = C_{a,b}$.

Поскольку особая точка кубики V_b единственная, то квадраку $Q_{a,b}$ обозначим также через Q_b , а каноническую кривую $C_{a,b}$ – через C_b . Обозначим через $\Delta_{a,C}$ множество точек $b \in \Delta^\bullet$ таких, что кубика V_b имеет фиксированную двойную особую точку a и фиксированную каноническую кривую $C_b = C \subset \mathbb{P}(a)$. Выберем и зафиксируем однородные координаты X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 на $\mathbb{P}_X^4$ такие, что $a = [1, 0, 0, 0, 0]$, и точку $b_0 \in \Delta_{a,C}$, и пусть $X_0 q_0(X) + c_0(X) = 0$ – уравнение кубики V_{b_0} . Тогда определено отображение

$$\delta_{a,C}: I_3(C) \setminus I_3^0(C) \rightarrow \Delta_{a,C}, \quad (2.11)$$

которое кубической форме $c(Y) = \lambda c_0(Y) + l(Y)q_0(Y)$ сопоставляет элемент

$$[\varphi] = [X_0 q_0(X) + c(X)] \in \mathbb{P}(\Phi),$$

где $q_0(X) = q_0(X_1, X_2, X_3, X_4)$, $c(X) = c(X_1, X_2, X_3, X_4)$. Отображение (2.11) является изоморфизмом алгебраических многообразий.

Обозначим через $\Delta_a^\bullet$ подмногообразие многообразия $\Delta^\bullet$, состоящее из точек $b \in \Delta^\bullet$ таких, что кубика V_b имеет фиксированную особую точку a . Это алгебраическое многообразие уже не имеет особых точек, его размерность равна 29. Тогда определено регулярное отображение $\pi_\Delta: \Delta_a^\bullet \rightarrow \mathcal{C}_a$, где $\mathcal{C}_a$ – пространство канонических кривых рода 4 в $\mathbb{P}(a)$. Это отображение сопоставляет точке

$b \in \Delta_a^\bullet$ каноническую кривую $C_b \subset \mathbb{P}(a)$. Из предыдущего рассуждения вытекает, что прообраз $\pi_\Delta^{-1}(C)$ изоморфен $I_3(C) \setminus I_3^0(C)$, а отображение $\pi_\Delta: \Delta_a^\bullet \rightarrow \mathcal{C}_a$ является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathbb{C}^5 \setminus \mathbb{C}^4$.

§ 3. Пространство особых вещественных кубик

Далее мы предполагаем, что если кубика V_b особая, то точка b принадлежит пространству $\Delta^\bullet$. Пусть уравнение

$$X_0 q(X_1, X_2, X_3, X_4) + c(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0$$

особой кубики $V = V_b \subset \mathbb{P}_X^4$ имеет вещественные коэффициенты. Тогда определено множество вещественных решений $\mathbb{R}V \subset \mathbb{RP}_X^4$ этого уравнения. Особая точка $a = [1, 0, 0, 0, 0]$ принадлежит этому множеству. После σ -процесса $\sigma_a: \tilde{\mathbb{P}}_X^4 \rightarrow \mathbb{P}_X^4$ из вещественной части $\mathbb{R}V$ особой кубики V получаем дифференцируемое многообразие $\mathbb{R}\tilde{V}$. Оно диффеоморфно многообразию $\mathbb{RP}_X^3$, которое получается из вещественного проективного пространства $\mathbb{RP}_X^3$ с помощью раздутья кривой $\mathbb{R}C_X$, заданной системой уравнений $q(X) = 0$, $c(X) = 0$.

Квадрика $\mathbb{R}Q_X \subset \mathbb{RP}_X^3$ задается уравнением $q(X) = 0$. Если множество $\mathbb{R}Q_X$ пустое, то множество $\mathbb{R}V$ состоит из многообразия, гомеоморфного проективному пространству $\mathbb{RP}_X^3$, и изолированной точки a , а многообразия $\mathbb{R}\tilde{V}$, $\mathbb{RP}_X^3$ состоят из одной компоненты связности, которая диффеоморфна проективному пространству. Если множество $\mathbb{R}Q_X$ непустое, а множество $\mathbb{R}C_X$ пустое, то множество $\mathbb{R}Q_X$ является эллипсоидом, многообразия $\mathbb{R}\tilde{V}$, $\mathbb{RP}_X^3$ диффеоморфны проективному пространству, а множество $\mathbb{R}V$ получается стягиванием эллипсоида $\mathbb{R}\tilde{Q}_X \subset \mathbb{RP}_X^3$ в точку. Пара $(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{R}\tilde{Q}_X)$ в этом случае гомеоморфна паре $(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{R}Q_X)$. Поэтому топологическое пространство $\mathbb{R}V$ получается из вещественного проективного пространства $\mathbb{RP}_X^3$ стягиванием в точку эллипсоида $\mathbb{R}Q_X$. Следовательно, $\mathbb{R}V$ гомеоморфно букету $\mathbb{RP}^3 \vee S^3$, состоящему из проективного пространства и сферы.

Будем предполагать теперь, что кривая $\mathbb{R}C_X$ непустая; тогда квадрика $\mathbb{R}Q_X$ может быть или гиперboloидом, или эллипсоидом, или квадратичным конусом. Заметим, что класс гомологий $[\mathbb{R}\tilde{Q}_X] \in H_2(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{F}_2)$ не равен нулю, в отличие от класса гомологий $[\mathbb{R}Q_X] \in H_2(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{F}_2)$. Действительно, полный прообраз квадрики $\mathbb{R}Q_X$ при отображении $\sigma_C: \mathbb{RP}_X^3 \rightarrow \mathbb{RP}_X^3$ гомологичен нулю на $\mathbb{RP}_X^3$, но он состоит из собственного прообраза $\mathbb{R}\tilde{Q}_X$ и линейчатой поверхности $(\sigma_C)^{-1}(\mathbb{R}C_X)$. Таким образом, квадрика $\mathbb{R}\tilde{Q}_X$ гомологична линейчатой поверхности $(\sigma_C)^{-1}(\mathbb{R}C_X)$, которая не гомологична нулю.

Рассмотрим сначала случай, когда квадрика $\mathbb{R}Q_X$ является гиперboloидом. Вычислим группы гомологий $H_*(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2)$. Поскольку тело $\mathbb{R}V$ получается из тела $\mathbb{RP}_X^3$ стягиванием в точку квадрики $\mathbb{R}\tilde{Q}_X$, то рассмотрим длинную точную последовательность групп гомологий пары $(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{R}\tilde{Q}_X)$:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{q+1}(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{R}\tilde{Q}; \mathbb{F}_2) &\rightarrow H_q(\mathbb{R}\tilde{Q}_X, \mathbb{F}_2) \\ &\rightarrow H_q(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_q(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{R}\tilde{Q}_X; \mathbb{F}_2) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Заметим, что при $q = 0, 3$ выполняются равенства $H_q(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$. При $q = 0$ равенство следует из связности тела $\mathbb{R}V$, а при $q = 3$ оно следует из того

факта, что квадрака $\mathbb{R}\tilde{Q}_X$ не гомологична нулю на $\mathbb{RP}_X^3$. Так как при $q = 1, 2$ выполняются равенства

$$H_q(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{R}\tilde{Q}; \mathbb{F}_2) = H_q(\mathbb{R}V, \{a\}; \mathbb{F}_2) = H_q(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2),$$

то достаточно вычислить группы $H_q(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{R}\tilde{Q}_X; \mathbb{F}_2)$ при $q = 1, 2$. Группа $H_1(\mathbb{R}\tilde{Q}_X, \mathbb{F}_2)$ равна $(\mathbb{F}_2)^2$ и порождается двумя прямыми l', l'' на гиперboloиде $\mathbb{R}\tilde{Q}_X$. Сумма этих прямых $l' + l''$ гомологична нулю на теле $\mathbb{RP}_X^3$, а каждая из них не гомологична нулю. Поэтому из точной последовательности гомологий (3.1) получаем равенства

$$\dim H_1(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) = \dim H_1(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{R}\tilde{Q}_X; \mathbb{F}_2) = \dim H_1(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{F}_2) - 1.$$

Квадрика $\mathbb{R}\tilde{Q}_X$ не гомологична нулю на теле $\mathbb{RP}_X^3$, поэтому из точной последовательности (3.1) получаем равенства

$$\dim H_2(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) = \dim H_2(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{R}\tilde{Q}_X; \mathbb{F}_2) = \dim H_2(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{F}_2).$$

Таким образом, в случае, когда квадрака $\mathbb{R}\tilde{Q}_X$ является гиперboloидом, выполняется равенство

$$\dim H_*(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) = \dim H_*(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{F}_2) - 1. \quad (3.2)$$

Пусть теперь квадрака $\mathbb{R}\tilde{Q}_X$ является эллипсоидом. Тогда из длинной точной последовательности гомологий (3.1) вытекают равенства

$$\dim H_1(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) = \dim H_1(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{F}_2), \quad \dim H_2(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) = \dim H_2(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{F}_2) - 1.$$

Следовательно, и в этом случае справедливо равенство (3.2).

Наконец, в случае, когда квадрака $\mathbb{R}\tilde{Q}_X$ является квадратичным конусом, группа $H_1(\mathbb{R}\tilde{Q}_X, \mathbb{F}_2)$ равна $\mathbb{F}_2$ и порождается прямой l на конусе $\mathbb{R}\tilde{Q}_X$, которая не гомологична нулю на теле $\mathbb{RP}_X^3$. Поэтому из рассмотрения точной последовательности (3.1) вытекают равенства

$$\begin{aligned} \dim H_1(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) &= \dim H_1(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{F}_2) - 1, \\ \dim H_2(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) &= \dim H_2(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{F}_2) - 1. \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае справедливо равенство

$$\dim H_*(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) = \dim H_*(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{F}_2) - 2. \quad (3.3)$$

Поскольку $\dim H_*(\mathbb{RP}_X^3, \mathbb{F}_2) = 4 + 2k$, где k – число компонент связности топологической кривой $\mathbb{R}C_X$, то доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $b \in \mathbb{R}\Delta^\bullet$, $V_b \subset \mathbb{P}_X^4$ – соответствующая особая вещественная кубика с единственной особой точкой $a \in \mathbb{RP}_X^4$, $Q_b \subset \mathbb{P}(a)$, $S_b \subset \mathbb{P}(a)$ – соответствующие квадрака и каноническая кривая. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если множество $\mathbb{R}Q_b$ пустое, то топологическое пространство $\mathbb{R}V_b$ гомеоморфно несвязной сумме вещественного проективного пространства $\mathbb{RP}^3$ и точки;

2) если множество $\mathbb{R}Q_b$ – эллипсоид, а множество $\mathbb{R}C_b$ пустое, то топологическое пространство $\mathbb{R}V_b$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^3 \vee S^3$ – букету проективного пространства и сферы;

3) если множество $\mathbb{R}C_b$ не пустое и состоит из k компонент, а квадрика Q_b неособая, то выполняется равенство

$$\dim H_*(\mathbb{R}V_b, \mathbb{F}_2) = 3 + 2k;$$

4) если множество $\mathbb{R}C_b$ непустое и состоит из k компонент, а квадрика Q_b особая, то выполняется равенство

$$\dim H_*(\mathbb{R}V_b, \mathbb{F}_2) = 2 + 2k.$$

Теперь выясним, когда класс гомологий $[\mathbb{R}V] \in H_3(V, \mathbb{F}_2)$ равен нулю. Для этого заметим, что гомоморфизм $H_3(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_3(V, \mathbb{F}_2)$, индуцированный стягиванием квадрики $\tilde{Q}_X$ в точку, является мономорфизмом. Это утверждение вытекает из рассмотрения длинной точной последовательности гомологий пары $(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \tilde{Q}_X)$. Поэтому класс гомологий $[\mathbb{R}V] \in H_3(V, \mathbb{F}_2)$ равен нулю тогда и только тогда, когда класс гомологий $[\mathbb{R}\tilde{\mathbb{P}}_X^3] \in H_3(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{F}_2)$ равен нулю.

С другой стороны, покажем, что класс гомологий $[\mathbb{R}\tilde{\mathbb{P}}_X^3]$ равен классу гомологий $[(\sigma_C)^{-1}(\mathbb{R}C_X)] \in H_3(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{F}_2)$, где $\sigma_C: \tilde{\mathbb{P}}_X^3 \rightarrow \mathbb{P}_X^3$ – σ -процесс с центром в C_X .

Для этого рассмотрим гомоморфизм

$$\Sigma: H_1(C_X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_3(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{F}_2),$$

определенный правилом $\Sigma([\Gamma]) = [(\sigma_C)^{-1}(\Gamma)]$, где Γ – контур на C_X . Этот гомоморфизм является изоморфизмом, а также для индексов пересечения со значениями в $\mathbb{F}_2$ выполняется равенство (см., например, [19])

$$\Sigma([\Gamma_1]) \cdot \Sigma([\Gamma_2]) = [\Gamma_1] \cdot [\Gamma_2]. \quad (3.4)$$

На пространствах $H_3(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{F}_2)$, $H_1(C_X, \mathbb{F}_2)$ рассмотрим квадратичные формы

$$\mathcal{Q}(h) = h \cdot \tau_*(h), \quad \mathcal{Q}_C(\gamma) = \gamma \cdot \tau_*(\gamma),$$

где $h \in H_3(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{F}_2)$, $\gamma \in H_1(C_X, \mathbb{F}_2)$. Тогда выполняются равенства (см. [1])

$$\mathcal{Q}(h) = [\mathbb{R}\tilde{\mathbb{P}}_X^3] \cdot h, \quad \mathcal{Q}_C(\gamma) = [\mathbb{R}C_X] \cdot \gamma.$$

Поскольку изоморфизм $\Sigma: H_1(C_X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_3(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \mathbb{F}_2)$ коммутирует с инволюцией комплексного сопряжения τ_* , то из равенства для индексов пересечения (3.4) получаем тождества

$$[\mathbb{R}\tilde{\mathbb{P}}_X^3] \cdot \Sigma(\gamma) = \mathcal{Q}(\Sigma(\gamma)) = \mathcal{Q}_C(\gamma) = [\mathbb{R}C_X] \cdot \gamma = \Sigma([\mathbb{R}C_X]) \cdot \Sigma(\gamma).$$

Поэтому выполняется требуемое равенство классов гомологий

$$[\mathbb{R}\tilde{\mathbb{P}}_X^3] = \Sigma([\mathbb{R}C_X]) = [(\sigma_C)^{-1}(\mathbb{R}C_X)].$$

Таким образом, если множество $\mathbb{R}C_X$ пустое, то класс гомологий $[\mathbb{R}V] \in H_3(V, \mathbb{F}_2)$ равен нулю. Если множество $\mathbb{R}C_X$ не пустое, то класс гомологий $[(\sigma_C)^{-1}(\mathbb{R}C_X)]$ равен нулю тогда и только тогда, когда кривая (C_X, τ) принадлежит типу I. Поэтому справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $b \in \mathbb{R}\Delta^\bullet$, $V_b \subset \mathbb{P}_X^4$ – соответствующая особая вещественная кубика с единственной особой точкой $a \in \mathbb{RP}_X^4$, $C_b \subset \mathbb{P}(a)$ – соответствующая каноническая кривая. Тогда справедливы утверждения:

1) если множество $\mathbb{R}C_b$ пустое, то класс гомологий $[\mathbb{R}V_b] \in H_3(V_b, \mathbb{F}_2)$ всегда равен нулю;

2) если множество $\mathbb{R}C_b$ не пустое, то класс гомологий $[\mathbb{R}V_b] \in H_3(V_b, \mathbb{F}_2)$ равен нулю тогда и только тогда, когда кривая (C_b, τ) принадлежит типу I.

Пусть $\mathbb{R}\Delta_a^\bullet$ – вещественная часть многообразия $\Delta_a^\bullet$, а $\mathbb{R}\mathcal{C}_a$ – вещественная часть многообразия $\mathcal{C}_a$. Тогда определена проекция $\pi_\Delta: \mathbb{R}\Delta_a^\bullet \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}_a$. Прообраз $\pi_\Delta^{-1}(C)$ точки $C \in \mathcal{C}_a$ при этом отображении равен разности $\mathbb{R}I_3(C) \setminus \mathbb{R}I_3^0(C)$, где $\mathbb{R}I_3(C)$ – вещественная часть пятимерного пространства $I_3(C)$, а $\mathbb{R}I_3^0(C)$ – вещественная часть четырехмерного подпространства $I_3^0(C)$. Многообразие $\mathbb{R}I_3(C) \setminus \mathbb{R}I_3^0(C)$ состоит из двух полупространств, на которые гиперплоскость $\mathbb{R}I_3^0(C)$ разбивает пятимерное пространство $\mathbb{R}I_3(C)$. Эти полупространства обозначим через $\mathbb{R}I_3(C)_\pm$, но заметим, что однозначного условия для выбора знака нет.

ЛЕММА 3.1. Отображение $\pi_\Delta: \mathbb{R}\Delta_a^\bullet \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}_a$ индуцирует изоморфизм групп гомологий

$$(\pi_\Delta)_*: H_0(\mathbb{R}\Delta_a^\bullet, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_0(\mathbb{R}\mathcal{C}_a, \mathbb{F}_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\pi_\Delta: \mathbb{R}\Delta_a^\bullet \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}_a$ является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathbb{R}^5 \setminus \mathbb{R}^4$. Поэтому достаточно показать, что существует путь $\alpha(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в многообразии $\mathbb{R}\Delta_a^\bullet$ с началом в точке из полупространства $\mathbb{R}I_3(C)_+$ и с концом в точке из полупространства $\mathbb{R}I_3(C)_-$. Заметим, что если точке $w_+ \in \mathbb{R}I_3(C)_+$ соответствует кубика V_+ , заданная уравнением

$$X_0 q(X_1, \dots, X_4) + c(X_1, \dots, X_4) = 0, \quad (3.5)$$

то уравнение

$$X_0 q(X_1, \dots, X_4) - c(X_1, \dots, X_4) = 0 \quad (3.6)$$

определяет кубик V_- , для которой соответствующая точка w_- принадлежит полупространству $\mathbb{R}I_3(C)_-$. Если в уравнении (3.5) сделаем замену переменных

$$X_0 \rightsquigarrow X_0, \quad X_1 \rightsquigarrow -X_1, \quad \dots, \quad X_4 \rightsquigarrow -X_4,$$

то получим уравнение (3.6). Это означает, что соответствующее вещественное преобразование проективного пространства $\mathbb{P}_X^4$ переводит кубик $V_\pm$ в кубик $V_\mp$. Рассмотрим теперь семейство матриц

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi t) & \sin(\pi t) & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix},$$

где $0 \leq t \leq 1$. Это семейство матриц задает семейство вещественных проективных преобразований $R_t: \mathbb{P}_X^4 \rightarrow \mathbb{P}_X^4$, для которых точка $a = [1, 0, 0, 0, 0]$

неподвижна. Поэтому получаем семейство преобразований $\widehat{R}_t: \mathbb{R}\Delta_a^\bullet \rightarrow \mathbb{R}\Delta_a^\bullet$ многообразия $\mathbb{R}\Delta_a^\bullet$. Положим $\alpha(t) = \widehat{R}_t(w_+)$, тогда $\alpha(t)$ – искомый путь. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *Отображение вложения $i_a: \mathbb{R}\Delta_a^\bullet \hookrightarrow \mathbb{R}\Delta^\bullet$ индуцирует изоморфизм групп гомологий*

$$(i_a)_*: H_0(\mathbb{R}\Delta_a^\bullet, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_0(\mathbb{R}\Delta^\bullet, \mathbb{F}_2). \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $P: \mathbb{R}\Delta^\bullet \rightarrow \mathbb{RP}_X^4$, которое точке $b \in \mathbb{R}\Delta^\bullet$ сопоставляет особую точку $a \in \mathbb{RP}_X^4$ кубики V_b . Отображение P является локально тривиальным расслоением в категории топологических пространств, причем выполняется равенство $P^{-1}(a) = \mathbb{R}\Delta_a^\bullet$. Поскольку пространство $\mathbb{RP}_X^4$ связное, то гомоморфизм (3.7) является эпиморфизмом. Из теоремы 0.2 вытекает, что две канонические кривые $(C_1, \tau), (C_2, \tau) \in \mathbb{RC}_a$ из разных компонент связности пространства $\mathbb{RC}_a$ имеют разные эквивариантные топологические типы. Поэтому из леммы 3.1 следует, что гомоморфизм (3.7) имеет нулевое ядро. Лемма доказана.

Из теоремы 0.2 и лемм 3.1, 3.2 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Топологическое пространство $\mathbb{R}\Delta^\bullet$ состоит из восьми компонент связности.*

Заметим, что в вещественном случае теорема 0.3 приобретает следующий вид.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для каждой точки $b \in \mathbb{R}\Delta^\circ \subset \mathcal{B}$ существует окрестность в евклидовой топологии на $\mathcal{B}$ и голоморфные координаты $z_1, \dots, z_{34}$ на этой окрестности такие, что $z_k(\tau([\varphi])) = \overline{z_k([\varphi])}$, $k = 1, \dots, 34$, где черта обозначает комплексное сопряжение, причем гиперповерхность $\Delta \subset \mathcal{B}$ задается в этой окрестности уравнением $z_1^2 + z_2^2 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью повторяет доказательство теоремы 0.3 с небольшим дополнением.

§ 4. Пространство неособых кубик

В настоящем параграфе мы докажем теорему 0.1. Доказательство проводится по следующей схеме. Сначала мы покажем, что существует не более девяти жестких изотопических классов неособых вещественных кубик. Доказательство этого утверждения основывается на предложении 3.3. Затем построим девять различных эквивариантных топологических типов неособых вещественных кубик, которые перечислены в теореме 0.1, другими словами, покажем, что множества

$$\mathcal{B}(0), \mathcal{B}(1)'_I, \mathcal{B}(1)''_I, \mathcal{B}(1)_{II}, \mathcal{B}(2), \mathcal{B}(3)_I, \mathcal{B}(3)_{II}, \mathcal{B}(4), \mathcal{B}(5)$$

непустые. Для краткости формулировок примем следующее соглашение. Если точка $b \in \mathbb{R}\mathcal{B}^*$ принадлежит одному из этих множеств, мы будем считать, что соответствующая кубика V_b также принадлежит этому множеству.

Верхняя оценка числа жестких изотопических классов неособых вещественных кубик получается из предложения 3.3 с помощью следующих рассуждений. Обозначим через Ω разность $\Delta \setminus \Delta^\bullet$ и рассмотрим длинную точную последовательность гомологий тройки топологических пространств $(\mathbb{R}P_W^{34}, \mathbb{R}\Delta, \mathbb{R}\Omega)$:

$$0 \rightarrow H_{34}(\mathbb{R}P_W^{34}, \mathbb{R}\Omega; \mathbb{F}_2) \rightarrow H_{34}(\mathbb{R}P_W^{34}, \mathbb{R}\Delta; \mathbb{F}_2) \rightarrow H_{33}(\mathbb{R}\Delta, \mathbb{R}\Omega; \mathbb{F}_2) \rightarrow \dots$$

Поскольку $\dim \mathbb{R}\Omega \leq 32$, то из этой точной последовательности вытекает неравенство

$$\dim H_{34}(\mathbb{R}P_W^{34}, \mathbb{R}\Delta; \mathbb{F}_2) \leq 1 + \dim H_{33}(\mathbb{R}\Delta, \mathbb{R}\Omega; \mathbb{F}_2). \quad (4.1)$$

Применим двойственность Александера–Понтрягина к паре $(\mathbb{R}P_W^{34}, \mathbb{R}\Delta)$; тогда получим равенства

$$\begin{aligned} H_{34}(\mathbb{R}P_W^{34}, \mathbb{R}\Delta; \mathbb{F}_2) &= \dim H^0(\mathbb{R}P_W^{34} \setminus \mathbb{R}\Delta, \mathbb{F}_2) \\ &= \dim H^0(\mathbb{R}\mathcal{B}^*, \mathbb{F}_2) = \dim H_0(\mathbb{R}\mathcal{B}^*, \mathbb{F}_2). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что из теоремы 3.1 следует, что мы можем применить двойственность Александера–Понтрягина к паре $(\mathbb{R}\Delta, \mathbb{R}\Omega)$. Тогда получим равенства

$$H_{33}(\mathbb{R}\Delta, \mathbb{R}\Omega; \mathbb{F}_2) = \dim H^0(\mathbb{R}\Delta \setminus \mathbb{R}\Omega, \mathbb{F}_2) = \dim H^0(\mathbb{R}\Delta^\bullet, \mathbb{F}_2) = \dim H_0(\mathbb{R}\Delta^\bullet, \mathbb{F}_2).$$

Применим предложение 3.3; тогда из неравенства (4.1) получим нужную оценку

$$\dim H_0(\mathbb{R}\mathcal{B}^*, \mathbb{F}_2) \leq 9.$$

Построение неособых вещественных кубик с нужными эквивариантными топологическими свойствами будет проводиться с помощью метода возмущения особых кубик.

Пусть $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$ – фиксированная точка. Тогда в $\mathcal{B}$ существует неособая комплексно-аналитическая параметрическая кривая $b = b(t)$, $|t| < 1$, удовлетворяющая свойствам:

- 1) $b(0) = b_0$, $b(t) \notin \Delta$ при $t \neq 0$;
- 2) кривая $b = b(t)$ проходит через точку b_0 трансверсально к Δ ;
- 3) кривая $b = b(t)$ эквивариантная, т. е. выполняется равенство $b(\bar{t}) = \tau(b(t))$,

где черта означает комплексное сопряжение.

Через V_t обозначим семейство кубик $V_{b(t)}$. Кубика V_0 особая, имеющая единственную особую точку $a \in V_0$, которая является простой двойной точкой. Через Q обозначим квадрику $Q_{b_0} \subset \mathbb{P}(a)$, а через C – каноническую кривую $C_{b_0} \subset Q$. При $t \neq 0$ кубики V_t неособые. Полное пространство этого семейства кубик

$$\mathfrak{V} = \bigcup_{|t| < 2} V_t \times t \subset \mathbb{P}_X^4 \times \{|t| < 1\}$$

является неособым комплексно-аналитическим четырехмерным многообразием с вещественной структурой $\tau: \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{V}$, заданной инволюцией комплексного сопряжения.

Пусть точка $t \neq 0$ вещественная. Тогда существует непрерывное отображение

$$\varrho: V_t \rightarrow V_0,$$

удовлетворяющее следующим свойствам (см., например, [17], [3]):

- 1) прообраз особой точки a гомеоморфен трехмерной сфере Σ_t ;
- 2) отображение $\varrho: V_t \setminus \Sigma_t \rightarrow V_0 \setminus \{a\}$ является гомеоморфизмом;
- 3) отображение $\varrho: V_t \rightarrow V_0$ эквивариантное, т. е. коммутирует с комплексным сопряжением.

Заметим, что с помощью отображения $\varrho: V_t \rightarrow V_0$ получается следующая короткая точная последовательность:

$$0 \rightarrow H_3(\Sigma_t, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_3(V_t, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\varrho_*} H_3(V_0, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0.$$

Сферу $\Sigma_t \subset V_t$ будем называть *исчезающей сферой*. Она инвариантна относительно инволюции τ . Далее мы будем рассматривать число $0 < \varepsilon < 1$, которое будем уменьшать, если потребуется. Заметим, что многообразия $(V_{\pm t}, \tau)$, $(V_{\pm \varepsilon}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны при $0 < t < 1$. Обозначим кубики $V_{\pm \varepsilon}$ кратко через $V_{\pm}$, а исчезающие сферы на них обозначим через $\Sigma_{\pm}$. Эти сферы можно задать в специальных координатах уравнениями, к описанию которых мы сейчас приступаем.

В окрестности $\mathcal{A}$ точки $a \in \mathfrak{V}$ существуют голоморфные координаты w_1, w_2, w_3, w_4 такие, что пересечение $V_t \cap \mathcal{A}$ задается уравнением

$$\pm w_1^2 \pm w_2^2 \pm w_3^2 \pm w_4^2 = t,$$

где знаки $\pm$ определяются сигнатурой квадратичной формы, определяющей квадрику Q , причем координаты

$$w_1 = u_1 + iv_1, \quad w_2 = u_2 + iv_2, \quad w_3 = u_3 + iv_3, \quad w_4 = u_4 + iv_4$$

являются вещественными в обобщенном смысле, т. е. удовлетворяют условию

$$w_k(\tau(p)) = \overline{w_k(p)}, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Таким образом, можно считать, что пересечение $V_t \cap \mathcal{A}$ задается одним из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} (4, 0) \quad & w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = t, \\ (3, 1) \quad & w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - w_4^2 = t, \\ (2, 2) \quad & w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 - w_4^2 = t, \\ (1, 3) \quad & w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 - w_4^2 = t, \\ (0, 4) \quad & -w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 - w_4^2 = t, \end{aligned}$$

где нумерация производится с помощью значения сигнатуры, которая состоит из двух чисел, первое означает число плюсов, а второе – минусов. В каждом

из этих случаев исчезающая сфера Σ_+ на $V_+ = V_\varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} (4, 0)_+ & \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \varepsilon, \quad v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0, \\ (3, 1)_+ & \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_4^2 = \varepsilon, \quad v_1 = v_2 = v_3 = u_4 = 0, \\ (2, 2)_+ & \quad u_1^2 + u_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \varepsilon, \quad v_1 = v_2 = u_3 = u_4 = 0, \\ (1, 3)_+ & \quad u_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \varepsilon, \quad v_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0, \\ (0, 4)_+ & \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \varepsilon, \quad u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0. \end{aligned}$$

В этих случаях множество вещественных точек $\mathbb{R}\Sigma_+$ может быть: трехмерной сферой; двумерной сферой; одномерной сферой (окружностью); нульмерной сферой (состоять из двух точек); пустым множеством.

Соответственно, исчезающая сфера Σ_- на $V_- = V_{-\varepsilon}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} (4, 0)_- & \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \varepsilon, \quad u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0, \\ (3, 1)_- & \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + u_4^2 = \varepsilon, \quad u_1 = u_2 = u_3 = v_4 = 0, \\ (2, 2)_- & \quad v_1^2 + v_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \varepsilon, \quad u_1 = u_2 = v_3 = v_4 = 0, \\ (1, 3)_- & \quad v_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \varepsilon, \quad u_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0, \\ (0, 4)_- & \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \varepsilon, \quad v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0. \end{aligned}$$

В этих случаях множество вещественных точек $\mathbb{R}\Sigma_-$ может быть: пустым множеством; нульмерной сферой (состоять из двух точек); одномерной сферой (окружностью); двумерной сферой; трехмерной сферой.

Прежде чем построить вещественные кубики с нужными свойствами, мы сначала докажем несколько лемм, а затем из них выведем предложение, с помощью которого будем строить требуемые кубики.

ЛЕММА 4.1. *Пусть множество $\mathbb{R}Q$ непустое. Тогда справедливы утверждения:*

1) *если $\mathbb{R}Q$ – эллипсоид, причем $\mathbb{R}\Sigma_+$ – двумерная сфера, а $\mathbb{R}\Sigma_-$ – нульмерная сфера, то класс гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_+] \in H_2(\mathbb{R}V_+, \mathbb{F}_2)$ не равен нулю, а $[\mathbb{R}\Sigma_-] \in H_0(\mathbb{R}V_-, \mathbb{F}_2)$ равен нулю;*

2) *если $\mathbb{R}Q$ – гиперболоид, то один из классов гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_\pm] \in H_1(\mathbb{R}V_\pm, \mathbb{F}_2)$ не равен нулю, а другой равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1) рассмотрим спектральную последовательность Лере отображения $\varrho: \mathbb{R}V_+ \rightarrow \mathbb{R}V_0$:

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{R}V_0, R^q \varrho_*(\mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbb{R}V_+, \mathbb{F}_2).$$

Поскольку

$$R^q \varrho_*(\mathbb{F}_2) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{при } q = 0, \\ (\mathbb{F}_2)|_{p_0} & \text{при } q = 2, \\ 0 & \text{при } q \neq 0, 2, \end{cases}$$

то выполняются равенства

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) & \text{при } q = 0, \\ \mathbb{F}_2 & \text{при } p = 0, \quad q = 2, \\ 0 & \text{при остальных } p, q. \end{cases}$$

Поверхность $\mathbb{R}\tilde{Q}_X$ не гомотопична нулю на теле $\mathbb{R}\tilde{\mathbb{P}}_X^4$, поэтому выполняются равенства

$$H^3(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = H^3(\mathbb{R}\tilde{\mathbb{P}}_X^4, \mathbb{R}\tilde{Q}; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2.$$

Следовательно, дифференциал $d_3^{0,2}$ равен нулю, а поэтому класс когомологий $[\mathbb{R}\Sigma_+]^*$ не равен нулю. Осталось заметить, что равенство нулю класса когомологий $[\mathbb{R}\Sigma_-]$ следует из связности многообразия $\mathbb{R}V_-$.

Докажем утверждение 2). Заметим, что тогда $\mathbb{R}\Sigma_{\pm}$ – окружности и отображения размерности, которые применялись в предыдущем случае, уже не достаточны. Прежде всего опишем перестройку, с помощью которой из особого многообразия $\mathbb{R}V_0$ получаются неособые многообразия $\mathbb{R}V_{\pm}$ (см., например, [16]). Удалим из особого многообразия $\mathbb{R}V_0$ точки, удовлетворяющие неравенству

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 < 2r^2,$$

где r – малое положительное число, причем $\varepsilon \ll r$. Полученное многообразие с краем обозначим через M . Поскольку в окрестности точки $a \in \mathbb{R}V_0$ особое многообразие $\mathbb{R}V_0$ задается в координатах u_1, u_2, u_3, u_4 с помощью уравнения $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0$, то край многообразия M является тором T , заданным системой уравнений

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 &= r^2, \\ u_3^2 + u_4^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Обозначим через $T_{\pm}$ полнотория в пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами u_1, u_2, u_3, u_4 , заданные соответственно системами, состоящими из уравнения и неравенства:

$$\begin{aligned} T_+ : \quad & \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 = r^2, \\ u_3^2 + u_4^2 \leq r^2, \end{cases} \\ T_- : \quad & \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 \leq r^2, \\ u_3^2 + u_4^2 = r^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда многообразия $\mathbb{R}V_{\pm}$ гомеоморфны топологическим многообразиям, которые получаются из многообразия с краем M с помощью объединения соответственно с полноторием $T_{\pm}$. Полученные из M с помощью объединения с полноториями топологические многообразия обозначим через $M_{\pm}$. Заметим, что они получаются из особого многообразия $\mathbb{R}V_0$ заменой конуса

$$K : \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \leq 2r^2, \\ u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0 \end{cases}$$

полноториями $T_{\pm}$. При отождествлении многообразий $\mathbb{R}V_{\pm}$ с топологическими многообразиями $M_{\pm}$ вещественные исчезающие сферы $\mathbb{R}\Sigma_{\pm}$ отождествляются с окружностями

$$S_+^1: \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 = r^2, \\ u_3 = u_4 = 0, \end{cases}$$

$$S_-^1: \begin{cases} u_1 = u_2 = 0, \\ u_3^2 + u_4^2 = r^2. \end{cases}$$

Благодаря произведенным отождествлениям достаточно проверить, что один из классов гомологий

$$[S_+^1] \in H_1(M_+, \mathbb{F}_2), \quad [S_-^1] \in H_1(M_-, \mathbb{F}_2)$$

равен нулю, а другой не равен. Введем еще две окружности на крае многообразия M :

$$s_1: \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 = r^2, \\ u_3 = r, u_4 = 0, \end{cases}$$

$$s_2: \begin{cases} u_1 = r, u_2 = 0, \\ u_3^2 + u_4^2 = r^2. \end{cases}$$

Эти окружности лежат на торе T и задают образующие группы $H_1(T, \mathbb{F}_2)$. Тор T является общей границей полноторий $T_{\pm}$, причем окружность s_1 является параллелью полнотория T_+ и меридианом полнотория T_- , а окружность s_2 является параллелью полнотория T_- и меридианом полнотория T_+ . Поэтому равенство нулю класса гомологий $[S_+^1] \in H_1(M_+, \mathbb{F}_2)$ равносильно равенству нулю класса гомологий $[s_1] \in H_1(M, \mathbb{F}_2)$, а равенство нулю класса гомологий $[S_-^1] \in H_1(M_-, \mathbb{F}_2)$ равносильно равенству нулю класса гомологий $[s_2] \in H_1(M, \mathbb{F}_2)$. Следовательно, достаточно показать, что один из классов гомологий $[s_1], [s_2] \in H_1(M, \mathbb{F}_2)$ равен нулю, а другой не равен. Для проверки этого утверждения рассмотрим длинную точную последовательность гомологий пары топологических пространств (M, T)

$$\dots \rightarrow H_2(M, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_2(M, T; \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(T, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(M, \mathbb{F}_2) \rightarrow \dots \quad (4.2)$$

Заметим, что если число компонент связности на топологической кривой $\mathbb{R}C$ равно k , то имеют место равенства

$$\begin{aligned} \dim H_2(M, T; \mathbb{F}_2) &= \dim H_2(\mathbb{R}V_0, \{a\}; \mathbb{F}_2) \\ &= \dim H_2(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = \dim H_2(\mathbb{R}\tilde{P}_X^3, \mathbb{F}_2) = k + 1. \end{aligned}$$

Поскольку класс гомологий $[\mathbb{R}\tilde{Q}_X] \in H_2(\mathbb{R}\tilde{P}_X^3, \mathbb{F}_2)$ не равен нулю, то выполняются также следующие равенства:

$$\dim H_2(M, \mathbb{F}_2) = \dim H_2(\mathbb{R}V_0 \setminus \{a\}, \mathbb{F}_2) = \dim H_2(\mathbb{R}\tilde{P}_X^3 \setminus \mathbb{R}\tilde{Q}_X, \mathbb{F}_2) = k.$$

Поэтому из точной последовательности (4.2) следует, что элементы $[s_1], [s_2] \in H_1(M, \mathbb{F}_2)$ линейно зависимы, причем имеется только одно соотношение. Таким соотношением может быть только одно из следующих:

$$[s_1] = 0, \quad [s_2] = 0, \quad [s_1] + [s_2] = 0.$$

Мы должны показать, что третье соотношение не возможно. Для доказательства этого утверждения рассмотрим отображение $\sigma_a: \tilde{V}_0 \rightarrow V_0$, которое возникает из σ -процесса $\tilde{\mathbb{P}}_X^4 \rightarrow \mathbb{P}_X^4$ с центром в точке $a \in V_0$. Обозначим через $\tilde{Q}$ квадрику $\sigma_a^{-1}(a)$; тогда пара $(\tilde{V}_0, \tilde{Q})$ канонически изоморфна паре $(\tilde{\mathbb{P}}_X^3, \tilde{Q}_X)$ и мы не будем различать эти пары вещественных алгебраических многообразий.

Заметим, что имеется каноническое отображение $\pi: T \rightarrow \mathbb{R}\tilde{Q}$, которое является двулистным накрытием. Оно устроено следующим образом. Квадрика $\mathbb{R}\tilde{Q}$ – это множество прямых, удовлетворяющих однородному уравнению

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0.$$

Если $u \in T$, то прямая $\overline{Ou}$ определяет точку $\pi(u) \in \mathbb{R}\tilde{Q}$. Непосредственно проверяются равенства

$$\pi_*([s_1]) = [l'] + [l''], \quad \pi_*([s_2]) = [l'] + [l''].$$

Заметим также, что $\pi^{-1}(\pi(u)) = \pm u$, поэтому если на краю многообразия M , т. е. на торе T , произвести отождествление симметричных точек (отождествить точки $\pm u \in T$), то получим пару топологических пространств, гомеоморфную паре $(\mathbb{R}\tilde{V}_0, \mathbb{R}\tilde{Q})$. Обозначим полученную пару пространств через $(\overline{M}, \overline{T})$. Заметим, что имеется канонический гомеоморфизм $\mathbb{R}\tilde{Q} \xrightarrow{\sim} \overline{T}$, который продолжается до гомеоморфизма пар $(\mathbb{R}\tilde{V}_0, \mathbb{R}\tilde{Q}) \xrightarrow{\sim} (\overline{M}, \overline{T})$. Естественное отображение пар $(M, T) \rightarrow (\overline{M}, \overline{T})$, индуцированное отождествлением точек, задает коммутативную диаграмму из точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(M, T; \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_1(T, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_1(M, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_1(M, T; \mathbb{F}_2) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \approx & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \approx \\ H_2(\overline{M}, \overline{T}; \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_1(\overline{T}, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_1(\overline{M}, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_1(\overline{M}, \overline{T}; \mathbb{F}_2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Пусть $\bar{l}', \bar{l}''$ – кривые на торе $\overline{T}$, которые являются образами прямых l', l'' на квадрике $\mathbb{R}\tilde{Q}$ при каноническом отображении $\mathbb{R}\tilde{Q} \rightarrow \overline{T}$. Тогда каждый класс гомологий $[s_1], [s_2]$ при гомоморфизме $H_1(T, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(\overline{T}, \mathbb{F}_2)$ отображается в класс гомологий $[\bar{l}'] + [\bar{l}'']$. Поскольку прямые l', l'' гомологичны друг другу на многообразии $\mathbb{R}\tilde{V}_0$, а сами не гомологичны нулю, то сумма $[l'] + [l''] \in H_1(\overline{M}, \mathbb{F}_2)$ равна нулю, а слагаемые $[\bar{l}'], [\bar{l}''] \in H_1(\overline{M}, \mathbb{F}_2)$ не равны нулю. Поэтому класс гомологий $[\bar{l}'] + [\bar{l}''] \in H_1(\overline{T}, \mathbb{F}_2)$ лежит в образе гомоморфизма $H_2(\overline{M}, \overline{T}; \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(\overline{T}, \mathbb{F}_2)$. Тогда из коммутативной диаграммы вытекает, что класс гомологий $[s_1] + [s_2] \in H_1(T, \mathbb{F}_2)$ не может лежать в образе гомоморфизма $H_2(M, T; \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(T, \mathbb{F}_2)$, следовательно, соотношение $[s_1] + [s_2] = 0$ не выполняется. Лемма доказана.

Далее без ограничения общности можно считать, что класс гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_+]$ не равен нулю, а класс гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_-]$ равен нулю. Если квадрика Q принадлежит компоненте $\mathcal{Q}_0^4$, то множество вещественных точек $\mathbb{R}V_0$ гомеоморфно несвязной сумме проективного пространства $\mathbb{R}P^3$ и точки. В этом случае одна из вещественных исчезающих сфер $\mathbb{R}\Sigma_{\pm}$ представляет собой пустое множество, а другая совпадает со всей сферой $\Sigma_{\pm}$. Таким образом, в случае, когда квадрика Q не имеет вещественных точек, мы считаем, что вещественная исчезающая сфера $\mathbb{R}\Sigma_+$ совпадает с комплексной исчезающей сферой Σ_+ , а множество $\mathbb{R}\Sigma_-$ пустое.

ЛЕММА 4.2. *При данных предположениях выполняются соотношения*

$$[\Sigma_+] \notin (1 + \tau_*)H_3(V_+, \mathbb{F}_2), \quad [\Sigma_-] \in (1 + \tau_*)H_3(V_-, \mathbb{F}_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем применять эквивариантные коомологии $H^n(V_{\pm}, G; \mathbb{F}_2)$, где $G = \{1, \tau\}$ – группа второго порядка. Определение и основные свойства этих коомологий приведены в [8], [13]. Поскольку сфера $\Sigma_{\pm}$ инвариантна относительно инволюции комплексного сопряжения, то определен эквивариантный класс коомологий $[\Sigma_{\pm}, G]^* \in H^3(V_{\pm}, G; \mathbb{F}_2)$. Если мы рассмотрим гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^3(V_{\pm}, G; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(\mathbb{R}V_{\pm}, G; \mathbb{F}_2) = H^{\leq 3}(\mathbb{R}V_{\pm}, \mathbb{F}_2) = \sum_{n=0}^3 H^n(\mathbb{R}V_{\pm}, \mathbb{F}_2),$$

то получим равенство (см. [15])

$$\beta([\Sigma_{\pm}, G]^*) = [\mathbb{R}\Sigma_{\pm}]^*. \quad (4.3)$$

Поскольку кубика $(V_{\pm}, \tau)$ является ГМ-многообразием, то справедливы следующие утверждения (см. [15]):

1) соотношение $[\Sigma_{\pm}] \in (1 + \tau_*)H_3(V_{\pm}, \mathbb{F}_2)$ равносильно соотношению

$$[\Sigma_{\pm}, G]^* \in \theta \cup H^2(\mathbb{R}V_{\pm}, G; \mathbb{F}_2),$$

где θ – образующая группы $H^1(\text{pt}, G; \mathbb{F}_2) \approx \mathbb{F}_2$, а pt – одноточечное G -пространство;

2) гомоморфизм

$$\beta: \theta \cup H^2(V_{\pm}, G; \mathbb{F}_2) \rightarrow \theta \cup H^2(\mathbb{R}V_{\pm}, G; \mathbb{F}_2) = H^{\leq 2}(\mathbb{R}V_{\pm}, \mathbb{F}_2) = \sum_{n=0}^2 H^n(\mathbb{R}V_{\pm}, \mathbb{F}_2)$$

является мономорфизмом.

Если H – вещественное гиперплоское сечение кубики $V_{\pm}$, то элементы θ^2 , $[H, G]^*$ образуют базис пространства $H^2(V_{\pm}, G; \mathbb{F}_2)$. Класс коомологий $[\mathbb{R}H]^* \in H^1(\mathbb{R}V_{\pm}, \mathbb{F}_2)$ обозначим через ω . Тогда справедливы соотношения (см. [15])

$$\beta(\theta^3) = 1 \in H^0(\mathbb{R}V_{\pm}, \mathbb{F}_2), \quad \beta(\theta \cup [H, G]^*) = \omega + \omega^2.$$

Применив равенство (4.3), получим, что справедливо утверждение: *соотношение $[\Sigma_{\pm}] \in (1 + \tau_*)H_3(V_{\pm}, \mathbb{F}_2)$ равносильно принадлежности элемента $[\mathbb{R}\Sigma_{\pm}]^*$ линейной оболочке элементов*

$$1 \in H^{\leq 2}(\mathbb{R}V_{\pm}, \mathbb{F}_2), \quad \omega + \omega^2 \in H^{\leq 2}(\mathbb{R}V_{\pm}, \mathbb{F}_2).$$

Остается заметить, что разложение

$$[\mathbb{R}\Sigma_{\pm}]^* = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot (\omega + \omega^2), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{F}_2,$$

имеет место только в случае, когда $[\mathbb{R}\Sigma_{\pm}]^* = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. *Выполняется соотношение $[\mathbb{R}V_{\pm}] \in (1 + \tau_*)H_3(V_{\pm}, \mathbb{F}_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим квадратичную форму $\mathcal{Q}(h)$ на $H_3(V_{\pm}, \mathbb{F}_2)$, определенную равенством $\mathcal{Q}(h) = h \cdot \tau_*(h)$, где точка обозначает индекс пересечения со значениями в поле $\mathbb{F}_2$. Тогда класс гомологий $[\mathbb{R}V_{\pm}]$ является характеристическим элементом этой квадратичной формы (см. [1]), т.е. выполняется равенство $\mathcal{Q}(h) = [\mathbb{R}V_{\pm}] \cdot h$. Квадратичная форма $\mathcal{Q}(h)$ обращается в нуль на подпространстве $H_3(V_{\pm}, \mathbb{F}_2)^{\tau_*}$, состоящем из инвариантных элементов относительно инволюции τ_* . Поэтому выполняется соотношение $[\mathbb{R}V_{\pm}] \in (1 + \tau_*)H_3(V_{\pm}, \mathbb{F}_2)$. Лемма доказана.

С помощью этих лемм мы докажем предложение, которое будем использовать для построения неособых кубик с нужными свойствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *если $\mathbb{R}Q$ – эллипсоид, причем $\mathbb{R}\Sigma_+$ – двумерная сфера, а $\mathbb{R}\Sigma_-$ – нульмерная сфера, то класс гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_+] \in H_2(\mathbb{R}V_+, \mathbb{F}_2)$ не равен нулю, а $[\mathbb{R}\Sigma_-] \in H_0(\mathbb{R}V_-, \mathbb{F}_2)$ равен нулю;*
- 2) *если $\mathbb{R}Q$ – гиперboloид, то один из классов гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_{\pm}] \in H_1(\mathbb{R}V_{\pm}, \mathbb{F}_2)$ не равен нулю, а другой равен нулю;*
- 3) *пусть $C \in \mathcal{C}(k)$, и предположим, что класс гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_+]$ не равен нулю, а $[\mathbb{R}\Sigma_-]$ равен нулю; тогда выполняются равенства*

$$\dim H_*(\mathbb{R}V_+, \mathbb{F}_2) = 4 + 2k, \quad \dim H_*(\mathbb{R}V_-, \mathbb{F}_2) = 2 + 2k;$$

4) *пусть выполняется предположение из п. 3) на классы гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_{\pm}]$ и вещественная кривая (C, τ) принадлежит типу I или множество $\mathbb{R}C$ пусто; тогда кубика (V_+, τ) принадлежит типу I;*

5) *если хотя бы одна из кубик $(V_{\pm}, \tau)$ принадлежит типу I, то вещественная кривая (C, τ) принадлежит типу I или множество $\mathbb{R}C$ пусто;*

6) *хотя бы одна из кубик $(V_{\pm}, \tau)$ не принадлежит типу I.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два утверждения составляют лемму 4.1. Третье утверждение следует из первых двух и равенства

$$\dim H_*(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = 3 + 2k$$

в предложении 3.1. Для доказательства четвертого утверждения применим предложение 3.2; тогда получим, что особое многообразие (V_0, τ) принадлежит

типу I. Поэтому классы гомологий $[\mathbb{R}V_{\pm}] \in H_3(V_{\pm}, \mathbb{F}_2)$ принадлежат одномерным пространствам с базисными элементами $[\Sigma_{\pm}]$. Используя лемму 4.2, получим, что класс гомологий $[\Sigma_+]$ не принадлежит пространству $(1+\tau_*)H_3(V_+, \mathbb{F}_2)$. Следовательно, в силу леммы 4.3 равенство $[\mathbb{R}V_+] = [\Sigma_+]$ не выполняется. Поэтому имеем равенство $[\mathbb{R}V_+] = 0$.

Для доказательства пятого утверждения заметим, что из его условия следуют равенства $[\mathbb{R}V_0] = \varrho_*([\mathbb{R}V_{\pm}]) = 0$. Следовательно, особое многообразие (V_0, τ) принадлежит типу I. Применяя предложение 3.2, получим, что вещественная кривая (C, τ) принадлежит типу I или множество $\mathbb{R}C$ пустое.

Для доказательства шестого утверждения рассмотрим оператор монодромии

$$T: H_3(V_+, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_3(V_+, \mathbb{F}_2),$$

индуцированный движением по окружности $|t| = \varepsilon$ в положительном направлении (против часовой стрелки). Из формулы Пикара–Лефшеца (см., например, [3]) следует, что выполняется равенство

$$T(h) = h + ([\Sigma_+] \cdot h) [\Sigma_+]. \quad (4.4)$$

Класс гомологий $[\Sigma_+] \in H_3(V_+, \mathbb{F}_2)$ не равен нулю, следовательно, существует элемент $h_0 \in H_3(V_+, \mathbb{F}_2)$ такой, что $[\Sigma_+] \cdot h_0 = 1$. Используя формулу (4.4), получим равенство

$$T(h_0) = h_0 + [\Sigma_+]. \quad (4.5)$$

Инволюции

$$\tau_*: H_3(V_{\pm}, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_3(V_{\pm}, \mathbb{F}_2)$$

обозначим через $\tau_{\pm}$ соответственно. Отождествим пространство $H_3(V_+, \mathbb{F}_2)$ с пространством $H_3(V_-, \mathbb{F}_2)$ с помощью движения по нижней полуокружности в отрицательном направлении. Тогда получим, что инволюция τ_- действует на пространстве $H_3(V_+, \mathbb{F}_2)$, а классы гомологий $[\Sigma_+]$, $[\Sigma_-]$ равны. Таким образом, на пространстве $H_3(V_+, \mathbb{F}_2)$ действуют три оператора: T , τ_+ , τ_- . Между этими операторами выполняется следующее соотношение (см., например, [14]):

$$T = \tau_- \circ \tau_+. \quad (4.6)$$

Поскольку $\tau_-([\Sigma_-]) = [\Sigma_-]$, $[\Sigma_-] = [\Sigma_+]$, то из равенств (4.5), (4.6) получаем следующие равенства:

$$\tau_+(h_0) + \tau_-(h_0) = [\Sigma_+], \quad h_0 \cdot \tau_+(h_0) + h_0 \cdot \tau_-(h_0) = 1, \quad [\mathbb{R}V_+] \cdot h_0 + [\mathbb{R}V_-] \cdot h_0 = 1.$$

Следовательно, один из индексов пересечения $[\mathbb{R}V_{\pm}] \cdot h_0$ не равен нулю.

Итак, шестое утверждение проверено, следовательно, предложение доказано полностью.

Теперь мы можем приступить к построению вещественных кубик с нужными свойствами. Будем следовать предыдущим обозначениям и предположениям.

Если квадрика Q принадлежит компоненте $\mathcal{Q}_0^4$, то множество вещественных точек $\mathbb{R}V_0$ гомеоморфно несвязной сумме проективного пространства $\mathbb{R}P^3$ и точки. В этом случае вещественная исчезающая сфера $\mathbb{R}\Sigma_-$ представляет

собой пустое множество, а $\mathbb{R}\Sigma_+$ совпадает со всей сферой Σ_+ . Поэтому множество $\mathbb{R}V_-$ гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{RP}^3$, а множество $\mathbb{R}V_+$ гомеоморфно несвязной сумме проективного пространства $\mathbb{RP}^3$ и сферы S^3 . Применим утверждение 4) предложения 4.1 и получим, что $V_- \in \mathcal{B}(0)$, $V_+ \in \mathcal{B}(1)''_1$.

Теперь мы можем предполагать, что квадрака Q принадлежит $\mathcal{Q}^3_1$ или $\mathcal{Q}^2_2$, а множество $\mathbb{R}C$ не пустое, т. е. $C \in \mathcal{C}(k)$, где $1 \leq k \leq 5$.

Построим сначала кубiku, принадлежащую множеству $\mathcal{B}(1)'_1$. Для этого возьмем точку $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$ такую, что квадрака $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом, а кривая C принадлежит компоненте $\mathcal{C}((3, 1))$. Один из классов гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_{\pm}]$ не равен нулю. Пусть класс гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_+]$ не равен нулю. Тогда кубика V_+ принадлежит множеству $\mathcal{B}(1)'_1$. Все эти утверждения вытекают из предложения 4.1.

Построим кубiku, принадлежащую множеству $\mathcal{B}(1)_{\text{II}}$. Возьмем точку $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$ такую, что квадрака $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом, а кривая C принадлежит компоненте $\mathcal{C}^3_1(1)$. Тогда кубика V_+ принадлежит множеству $\mathcal{B}(1)_{\text{II}}$. Это утверждение вытекает из предложения 4.1. Аналогично строятся кубики, принадлежащие множествам $\mathcal{B}(2)$, $\mathcal{B}(3)_{\text{I}}$, $\mathcal{B}(3)_{\text{II}}$, $\mathcal{B}(4)$, $\mathcal{B}(5)$. Для этого берется точка $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$ такая, что квадрака $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом, а кривая C принадлежит соответственно компонентам $\mathcal{C}^3_1(2)$, $\mathcal{C}^3_1(3)_{\text{I}}$, $\mathcal{C}^3_1(3)_{\text{II}}$, $\mathcal{C}^3_1(4)$, $\mathcal{C}^3_1(5)$. Тогда соответствующая кубика V_+ принадлежит соответственно множествам $\mathcal{B}(2)$, $\mathcal{B}(3)_{\text{I}}$, $\mathcal{B}(3)_{\text{II}}$, $\mathcal{B}(4)$, $\mathcal{B}(5)$. Теорема 0.1 доказана.

Список литературы

1. Арнольд В. И., “О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм”, *Функц. анализ и его прилож.*, **5:3** (1971), 1–9.
2. Арнольд В. И., “Нормальные формы функций вблизи вырожденных точек, группы Вейля A_k , D_k , E_k и лагранжевы особенности”, *Функц. анализ и его прилож.*, **6:4** (1972), 3–25.
3. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М., *Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотика интегралов*, Наука, М., 1984.
4. Clemens C. H., Griffiths P. A., “The intermediate Jacobian of the cubic threefold”, *Ann. of Math.* (2), **95:2** (1972), 281–356.
5. Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V., *Real Enriques surfaces*, Lecture Notes in Math., **1746**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
6. Дегтярев А. И., Звонилов В. И., “Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени $(3, 3)$ на квадраках”, *Матем. заметки*, **66:6** (1999), 810–815.
7. Griffiths Ph., Harris J., “Algebraic geometry and local differential geometry”, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4), **12:3** (1979), 355–432.
8. Гротендик А., *О некоторых вопросах гомологической алгебры*, ИЛ, М., 1961.
9. Звонилов В. И., “Комплексные топологические инварианты вещественных алгебраических кривых на гиперboloиде и эллипсоиде”, *Алгебра и анализ*, **3:5** (1991), 88–108.
10. Гудков Д. А., Усачев А. К., “Неособые кривые младших порядков на гиперboloиде”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, Горьк. гос. ун-т, Горький, 1980, 96–103.
11. Клейман С. Л., “Численная теория особенностей”, *УМН*, **35:6** (1980), 69–148.
12. Klein F., “Ueber Flächen dritter Ordnung”, *Math. Ann.*, **6:4** (1873), 551–581.

13. Краснов В. А., “Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:2 (1983), 268–297.
14. Краснов В. А., “Вырождения вещественных алгебраических многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:4 (1985), 798–827.
15. Краснов В. А., “Вещественные алгебраические GM-многообразия”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 39–66.
16. Милнор Дж., *Теория Морса*, Мир, М., 1965.
17. Милнор Дж., “Особые точки комплексных гиперповерхностей”, , 1971.
18. Рохлин В. А., “Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых”, *УМН*, **33**:5 (1978), 77–89.
19. Тюрин А. Н., “Пять лекций о трехмерных многообразиях”, *УМН*, **27**:5 (1972), 3–50.

В. А. КРАСНОВ (V. A. KRASNOV)

Ярославский государственный университет

E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию

07.06.2005