Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Топологическая классификация поверхностей Фано вещественных трехмерных кубик, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 5, 3–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/im586>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 09:17:08

УДК 512.7

В. А. Краснов

Топологическая классификация поверхностей Фано вещественных трехмерных кубик

Рассматриваются поверхности, точками которых являются прямые на вещественных трехмерных многообразиях третьей степени. Такие поверхности называются поверхностями Фано. Работа посвящена нахождению топологических типов, т.е. топологической классификации, вещественных поверхностей Фано. Кроме этого доказывается, что эквивариантный топологический тип соответствующей комплексной поверхности Фано с инволюцией комплексного сопряжения определяет жесткий изотопический класс соответствующей трехмерной вещественной кубики.

Библиография: 13 наименований.

Введение

Чтобы сформулировать рассматриваемые задачи и полученные результаты, необходимо ввести несколько обозначений и дать некоторые определения.

Далее V – трехмерное комплексное алгебраическое многообразие в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^4$, заданное уравнением

$$\varphi(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) = 0, \quad (0.1)$$

где $\varphi(X) = \varphi(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ – однородный многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами, а X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 – однородные координаты в $\mathbb{P}^4$. Мы будем предполагать, что многообразие V – неособое. Через $\mathbb{R}V$ будем обозначать множество вещественных решений уравнения (0.1), оно всегда непустое и состоит из одной или двух компонент связности в евклидовой топологии. Через $F_V = F$ будем обозначать комплексную поверхность Фано кубики V , которая параметризует множество прямых на многообразии V . Она будет также неособым многообразием, определенным над полем вещественных чисел, так как многочлен $\varphi(X)$ имеет вещественные коэффициенты. Поэтому определено множество вещественных точек $\mathbb{R}F$ комплексной поверхности Фано F , параметризующее множество прямых на $\mathbb{R}V$. Это множество также всегда непустое, так как на вещественной кубике всегда имеются вещественные прямые. Таким образом, с точки зрения дифференциальной топологии $\mathbb{R}F$ – компактная дифференцируемая поверхность, которая может быть неориентируемой и несвязной.

На комплексных алгебраических многообразиях V, F определена инволюция комплексного сопряжения τ . Пары $(V, \tau), (F, \tau)$ будем называть *Вещественными* (с большой буквы) алгебраическими многообразиями, а множества вещественных точек $\mathbb{R}V, \mathbb{R}F$ будем называть *вещественными* (с малой буквы) алгебраическими многообразиями.

Заметим, что множества вещественных точек $\mathbb{R}V$, $\mathbb{R}F$ совпадают со множествами неподвижных точек инволюции комплексного сопряжения τ , т.е. выполняются равенства $\mathbb{R}V = V^\tau$, $\mathbb{R}F = F^\tau$. Поэтому имеют место неравенства Гарнака–Тома

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^*(V, \mathbb{F}_2), \quad (0.2)$$

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^*(F, \mathbb{F}_2), \quad (0.3)$$

где $H^*(\cdot, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_q H^q(\cdot, \mathbb{F}_2)$ и $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ – поле из двух элементов. Напомним, что каждое из Вещественных алгебраических многообразий (V, τ) , (F, τ) называется M -многообразием, если соответствующее ему неравенство (0.2) или (0.3) становится равенством. В заметке [1] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 0.1. *Поверхность Фано (F, τ) будет M -поверхностью тогда и только тогда, когда кубика (V, τ) является M -многообразием.*

С другой стороны, возникал вопрос о том, как устроена топологическая поверхность $\mathbb{R}F$ в случае, когда Вещественная кубика (V, τ) является M -многообразием. Конечно, аналогичный вопрос можно задать для произвольной Вещественной кубики, но первоначально мы ограничились M -кубикой, так как этот случай наиболее интересен, а добиться ответа можно с меньшими трудностями. Статья [2] посвящена ответу на данный вопрос.

Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, введем следующие обозначения для топологических поверхностей. Через S_g^2 обозначается связная компактная ориентируемая поверхность без края рода g , т.е. топологическая поверхность, гомеоморфная сфере с g ручками, в частности, S_1^2 – тор, он также обозначается через T^2 . Через ${}_gS^2$ обозначается связная компактная неориентируемая поверхность без края рода g , т.е. топологическая поверхность, гомеоморфная сфере с g пленками Мёбиуса, в частности, ${}_1S^2$ – вещественная проективная плоскость, она также обозначается через $\mathbb{R}P^2$. Кроме этого, если S – топологическая поверхность, а n – натуральное число, то через nS обозначается несвязная сумма n экземпляров поверхности S .

В статье [2] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 0.2. *Вещественная часть $\mathbb{R}F$ поверхности Фано (F, τ) неособой M -кубики (V, τ) может иметь только следующий топологический тип: ${}_5S^2 \sqcup 15T^2$.*

А настоящая статья посвящена вычислению топологического типа вещественной части $\mathbb{R}F$ поверхности Фано (F, τ) произвольной неособой Вещественной кубики (V, τ) . Здесь мы используем жесткую изотопическую классификацию Вещественных трехмерных кубик, полученную в работе [3]. Чтобы сформулировать основной результат из статьи [3], нам потребуется привести несколько обозначений и определений.

Любая комплексная кубическая форма от переменных $X_0, \dots, X_4$

$$\sum_{i_0 + \dots + i_4 = 3} w_{i_0 \dots i_4} X_0^{i_0} \dots X_4^{i_4} = \sum_{|I|=3} w_I X^I,$$

где

$$I = (i_0, \dots, i_4), \quad |I| = i_0 + \dots + i_4 = 3,$$

определяется своими комплексными коэффициентами $w_{i_0 \dots i_4}$, число которых равно 35. Через $\mathcal{B}$ обозначим комплексное проективное пространство $\mathbb{P}_W^{34}$ с однородными координатами $W_I = W_{i_0 \dots i_4}$. Для любой точки $b = [w_I] \in \mathcal{B} = \mathbb{P}_W^{34}$ обозначим через V_b тело в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}_X^4$ с однородными координатами $X_0, \dots, X_4$, заданное уравнением

$$\sum_{|I|=3} w_I X^I = 0.$$

А через $\mathcal{B}^*$ обозначим множество точек $b \in \mathcal{B}$ таких, что кубика V_b неособая. Множество $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ является дополнением дискриминантной гиперповерхности $\Delta \subset \mathcal{B}$, параметризующей множество особых кубик V_b в $\mathbb{P}_X^4$. Через $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ обозначим множество вещественных точек из $\mathcal{B}^*$, оно совпадает со множеством неособых Вещественных кубик. Действительно, если $b \in \mathbb{R}\mathcal{B}^* = \mathbb{RP}_W^{34}$, то на комплексной кубике V_b определена инволюция комплексного сопряжения $\tau: V_b \rightarrow V_b$. Пара (V_b, τ) является Вещественной (с большой буквы) кубикой (которую мы будем также обозначать через V_b), так как инволюция $\tau: V_b \rightarrow V_b$ однозначно восстанавливается из инволюции комплексного сопряжения $\tau: \mathbb{P}_X^4 \rightarrow \mathbb{P}_X^4$ и канонического вложения $V_b \hookrightarrow \mathbb{P}_X^4$. Множество вещественных точек $\mathbb{R}V_b$ является вещественной (с малой буквы) кубикой.

Множество $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ будет несвязным в евклидовой топологии. Компоненты связности топологического пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ называются *жесткими изотопическими классами* неособых Вещественных кубик в $\mathbb{P}_X^4$ (см. аналогичное понятие для кривых в [4]). Оказывается, что жесткий изотопический класс Вещественной кубики $V = (V, \tau)$ определяется топологическим типом вещественной части $\mathbb{R}V$ и принадлежностью кубики V к типу I или II. Напомним, что *Вещественная кубика V принадлежит типу I, если класс гомологий $[\mathbb{R}V] \in H_3(V, \mathbb{F}_2)$ равен нулю. В противном случае Вещественная кубика V принадлежит типу II.* Чтобы сформулировать соответствующий результат более точно, нужно сделать несколько замечаний и ввести дополнительные обозначения.

Прежде всего заметим, что если V – неособая Вещественная кубика и

$$\beta_*(\mathbb{R}V) = \sum_{q=0}^3 \dim_{\mathbb{F}_2} H_q(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2)$$

– полное $\mathbb{F}_2$ -число Бетти ее вещественной части, то $\beta_*(\mathbb{R}V)$ четное и выполняется двойное неравенство

$$4 \leq \beta_*(\mathbb{R}V) \leq 14.$$

В [3] показано, что при каждом $0 \leq k \leq 5$ существует неособая Вещественная кубика V такая, что $\beta_*(\mathbb{R}V) = 4 + 2k$. Обозначим через $\mathcal{B}(k)$ множество точек $b \in \mathbb{R}\mathcal{B}^*$, для которых выполняется равенство $\beta_*(\mathbb{R}V_b) = 4 + 2k$. Множество $\mathcal{B}(k)$ непусто при $0 \leq k \leq 5$, причем оно состоит из целых компонент связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$.

Мы показываем в [3], что при $k \neq 1, 3$ множество $\mathcal{B}(k)$ связное. Через $\mathcal{B}(k)_I$, $\mathcal{B}(k)_{II}$ будем обозначать множества точек $b \in \mathcal{B}(k)$, для которых кубика V_b принадлежит типу I, II соответственно. Тогда оказывается, что $\mathcal{B}(k) = \mathcal{B}(k)_{II}$

при $k = 0, 2, 4$, $\mathcal{B}(5) = \mathcal{B}(5)_I$, а множества $\mathcal{B}(3)_I$, $\mathcal{B}(3)_{II}$ непустые и связные. Множество $\mathcal{B}(1)$ состоит из трех компонент связности, одна из которых равна $\mathcal{B}(1)_{II}$, а две другие компоненты – которые мы обозначаем через $\mathcal{B}(1)'_I$, $\mathcal{B}(1)''_I$ – определяются следующими условиями. Точка $b \in \mathcal{B}(1)$ принадлежит множеству $\mathcal{B}(1)'_I$ тогда и только тогда, когда кубика V_b принадлежит типу I, а множество вещественных точек $\mathbb{R}V_b$ связное. Точка $b \in \mathcal{B}(1)$ принадлежит множеству $\mathcal{B}(1)''_I$ тогда и только тогда, когда кубика V_b принадлежит типу I, а вещественная часть $\mathbb{R}V_b$ кубики V_b состоит из двух компонент связности. На самом деле, $b \in \mathcal{B}(1)''_I$ тогда и только тогда, когда вещественная кубика $\mathbb{R}V_b$ гомеоморфна несвязной сумме сферы S^3 и проективного пространства $\mathbb{RP}^3$. Во всех остальных случаях вещественная кубика $\mathbb{R}V_b$ связная.

Таким образом, в статье [3] доказана

ТЕОРЕМА 0.3. *Для топологического пространства неособых Вещественных кубик $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ имеет место следующее разложение на связные компоненты в евклидовой топологии:*

$$\mathbb{R}\mathcal{B}^* = \mathcal{B}(0) \sqcup \mathcal{B}(1)'_I \sqcup \mathcal{B}(1)''_I \sqcup \mathcal{B}(1)_{II} \sqcup \mathcal{B}(2) \sqcup \mathcal{B}(3)_I \sqcup \mathcal{B}(3)_{II} \sqcup \mathcal{B}(4) \sqcup \mathcal{B}(5).$$

Пусть $b \in \mathcal{B}^*$, тогда через F_b будем обозначать комплексную поверхность Фано кубики V_b . Заметим, что если точки b' , b'' принадлежат одной компоненте связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$, то Вещественные поверхности Фано $(F_{b'}, \tau)$, $(F_{b''}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны. Действительно, полное тело поверхностей Фано неособых кубик

$$\mathfrak{F}^* = \bigcup_{b \in \mathcal{B}^*} F_b$$

является неособым многообразием, а проекция $\mathfrak{F}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ является локально тривиальным дифференцируемым расслоением (см. [5]). Положим

$$\mathfrak{F}_{\mathbb{R}}^* = \bigcup_{b \in \mathbb{R}\mathcal{B}^*} F_b.$$

Тогда получим, что проекция $\mathfrak{F}_{\mathbb{R}}^* \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{B}^*$ является локально тривиальным эквивариантным расслоением. Поэтому Вещественные поверхности Фано $(F_{b'}, \tau)$, $(F_{b''}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны, если точки b' , b'' принадлежат одной компоненте связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$. Следовательно, вещественные части $\mathbb{R}F_{b'}$, $\mathbb{R}F_{b''}$ диффеоморфны.

В данной статье доказывается

ТЕОРЕМА 0.4. *Справедливы следующие утверждения:*

0) если $b \in \mathcal{B}(0)$ или $b \in \mathcal{B}(1)''_I$, то поверхность $\mathbb{R}F_b$ имеет топологический тип ${}_5S^2$;

1_I) если $b \in \mathcal{B}(1)'_I$, то поверхность $\mathbb{R}F_b$ имеет топологический тип ${}_6S^2 \sqcup \mathbb{RP}^2$;

1_{II}) если $b \in \mathcal{B}(1)_{II}$, то поверхность $\mathbb{R}F_b$ имеет топологический тип ${}_5S^2 \sqcup T^2$;

2) если $b \in \mathcal{B}(2)$, то поверхность $\mathbb{R}F_b$ имеет топологический тип ${}_5S^2 \sqcup 3T^2$;

3) если $b \in \mathcal{B}(3)_I$ или $b \in \mathcal{B}(3)_{II}$, то поверхность $\mathbb{R}F_b$ имеет топологический тип ${}_5S^2 \sqcup 6T^2$;

4) если $b \in \mathcal{B}(4)$, то поверхность $\mathbb{R}F_b$ имеет топологический тип ${}_5S^2 \sqcup 10T^2$;

5) если $b \in \mathcal{B}(5)$, то поверхность $\mathbb{R}F_b$ имеет топологический тип ${}_5S^2 \sqcup 15T^2$.

В силу этой теоремы поверхность $\mathbb{R}F_b$ имеет одинаковый топологический тип ${}_5S^2$, если $b \in \mathcal{B}(0)$ или $b \in \mathcal{B}(1)''_I$. Но оказывается, что при $b \in \mathcal{B}(0)$ поверхность (F_b, τ) является GM -поверхностью, а при $b \in \mathcal{B}(1)''_I$ нет. Напомним, что поверхность (F_b, τ) называется GM -поверхностью, если выполняется равенство

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(\mathbb{R}F_b, \mathbb{F}_2) = \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^*(F_b, \mathbb{F}_2)),$$

где $G = \{1, \tau\}$ – группа второго порядка, порожденная инволюцией τ (см. [6]). А в общем случае выполняется только неравенство:

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(\mathbb{R}F_b, \mathbb{F}_2) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^*(F_b, \mathbb{F}_2)).$$

Также вещественная поверхность $\mathbb{R}F_b$ имеет одинаковый топологический тип ${}_5S^2 \sqcup 6T^2$, если $b \in \mathcal{B}(3)_I$ или $b \in \mathcal{B}(3)_{II}$. Но оказывается, что при $b \in \mathcal{B}(3)_I$ шесть торов, которые входят в состав вещественной части $\mathbb{R}F_b$, определяют линейно зависимую систему классов гомологий в $\mathbb{F}_2$ -пространстве $H_2(F_b, \mathbb{F}_2)$, а при $b \in \mathcal{B}(3)_{II}$ аналогичная система классов гомологий линейно независимая. Таким образом, *эквивариантный топологический тип поверхности Фано (F_b, τ) определяет жесткий изотопический класс кубики (V_b, τ)* .

Скажем несколько слов о структуре статьи и о доказательстве теоремы 0.4. Статья состоит из четырех параграфов. Сначала мы рассматриваем компоненты связности пространства $\mathbb{R}\Delta^*$, где Δ^* обозначает множество неособых точек дискриминантной гиперповерхности Δ , а $\mathbb{R}\Delta^*$ – множество вещественных точек на Δ^* . Компоненты связности пространства $\mathbb{R}\Delta^*$ называются *стенками*, к ним примыкают компоненты связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$, которые называются *камерами*. Фактически, устройство стенок и камер было изучено в статье [3], здесь мы почти ничего не доказываем, а только формулируем соответствующие результаты из [3] в виде графа примыканий камер к стенкам. Этот граф примыканий изображен на рис. 1, а определения стенок

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^4, \quad \mathcal{D}_1^3(0), \quad \mathcal{D}_1^3(1), \quad \mathcal{D}_1^3(2), \quad \mathcal{D}_1^3(3)_I, \quad \mathcal{D}_1^3(3)_{II}, \quad \mathcal{D}_1^3(4), \quad \mathcal{D}_1^3(5), \\ \mathcal{D}\langle(1,1)\rangle, \quad \mathcal{D}\langle(3,1)\rangle, \quad \mathcal{D}_2^2(2), \quad \mathcal{D}\langle(1,1),2\rangle_I, \\ \mathcal{D}\langle(1,1),2\rangle_{II}, \quad \mathcal{D}\langle 3(1,1)\rangle, \quad \mathcal{D}_2^2(4), \quad \mathcal{D}_2^2(5) \end{aligned}$$

приведены в § 1.

Второй параграф посвящен изложению общих свойств поверхности Фано неособой Вещественной кубики. Основная задача, которой посвящен этот параграф, заключается в изучении второй спектральной последовательности для эквивариантных когомологий поверхности Фано (определение эквивариантных когомологий и второй спектральной последовательности см. в [7])

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(F, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(F, G; \mathbb{F}_2). \quad (0.4)$$

Рис. 1. Граф примыканий

С помощью результатов о кольце когомологий комплексной поверхности Фано F , изложенных в [8], мы показываем, что все дифференциалы вида $d_2^{p,q}$ в этой спектральной последовательности равны нулю. В § 2 не будет получен окончательный результат о спектральной последовательности (0.4), но в § 4 мы покажем, что она почти всегда вырождается. Исключительным случаем является поверхность Фано (F_b, τ) Вещественной кубики (V_b, τ) , у которой множество вещественных точек $\mathbb{R}V_b$ состоит из двух компонент связности, т.е. когда $b \in \mathcal{B}(1)'_I$. Для такой поверхности Фано дифференциалы $d_3^{p,3}$ не равны нулю, а остальные дифференциалы нулевые.

В § 3 мы изучаем Вещественные поверхности Фано особых кубик (V_b, τ) , где $b \in \mathbb{R}\Delta^*$. Соответствующие результаты будут применяться в § 4 для доказательства теоремы 0.4 с помощью метода возмущения. А теперь заметим, что если $b \in \Delta^*$, то особая кубика V_b имеет единственную особую точку, которая является простой двойной точкой. Через C_b будем обозначать каноническую кривую рода 4, которая параметризует множество прямых на особой кубике V_b , проходящих через особую точку этой кубики. Каждая такая каноническая кривая $C_b \subset \mathbb{P}^3$ является пересечением квадрики Q_b и кубики, причем квадрика Q_b определяется кривой C_b однозначно. На самом деле квадрика Q_b является проективизацией касательного конуса к кубике V_b в ее особой точке. Для изучения Вещественных поверхностей Фано особых кубик мы используем конструкцию, с помощью которой получается комплексная поверхность Фано F_b особой комплексной кубики V_b из симметрического квадрата кривой C_b . Соответствующая конструкция изложена в [8].

Если не учитывать одного исключительного случая, то мы можем ограничиться особыми кубиками V_b , для которых каноническая кривая $C_b \subset \mathbb{P}^3$ лежит на эллипсоиде, т.е. на Вещественной квадрике Q_b , у которой множество вещественных точек $\mathbb{R}Q_b$ является эллипсоидом. Дело в том, что в большинстве случаев для дальнейшего применения метода возмущения достаточно рассмотреть только такие особые кубики. Но имеется один исключительный изотопический класс неособых кубик – это класс $\mathcal{B}(1)'_I$. Кубики из этого класса нельзя получить методом возмущения из особых кубик с канонической кривой C_b , лежащей на эллипсоиде. Для получения кубик из класса $\mathcal{B}(1)'_I$ нужно рассматривать особые кубики с канонической кривой C_b , лежащей на гиперboloиде. В этом случае множество вещественных точек $\mathbb{R}C_b$ канонической кривой C_b состоит

из одной компоненты связности, которая имеет индексы пересечения с двумя образующими гиперboloида, равные соответственно ± 3 , ± 1 или ± 1 , ± 3 . Поэтому пришлось также рассмотреть особые поверхности Фано для кубик из этого исключительного класса.

В § 4 доказывается теорема 0.4. Как уже отмечалось, при ее доказательстве используется метод возмущения. В данной ситуации он состоит в следующем. Пусть $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$ – фиксированная точка. Тогда в $\mathcal{B}$ существует эквивариантная, неособая, комплексно-аналитическая параметрическая кривая $b = \beta(t)$, $|t| < 1$, со следующими свойствами:

- 1) $\beta(0) = b_0$, $\beta(t) \notin \Delta$ при $t \neq 0$;
- 2) кривая $b = \beta(t)$ проходит через точку b_0 трансверсально к Δ .

Через V_t будем обозначать семейство кубик $V_{\beta(t)}$. Кубика V_0 особая, имеющая единственную особую точку $a \in V_0$, которая является простой двойной точкой. Кубики V_t неособые при $t \neq 0$. Полное пространство этого семейства кубик

$$\mathfrak{V}_\beta = \bigcup_{|t| < 1} V_t \times t \subset \mathbb{P}^4 \times \{|t| < 1\}$$

является неособым комплексно-аналитическим четырехмерным многообразием с вещественной структурой $\tau: \mathfrak{V}_\beta \rightarrow \mathfrak{V}_\beta$, индуцированной комплексным сопряжением. Через F_t будем обозначать семейство поверхностей Фано кубик V_t . Поверхность Фано F_0 особая, причем особые точки на ней образуют простую двойную кривую C , которая параметризует множество прямых на кубике V_0 , проходящих через особую точку $a \in V_0$. Поверхности Фано F_t неособые при $t \neq 0$. Через $\mathcal{G}$ обозначим многообразие Грассмана, точками которого являются прямые в $\mathbb{P}_X^4$. Рассмотрим полное пространство семейства поверхностей Фано F_t

$$\mathfrak{F}_\beta = \bigcup_{|t| < 1} F_t \times t \subset \mathcal{G} \times \{|t| < 1\}.$$

Оно является неособым комплексно-аналитическим трехмерным многообразием с вещественной структурой $\tau: \mathfrak{F}_\beta \rightarrow \mathfrak{F}_\beta$, индуцированной комплексным сопряжением. В зависимости от того, из какой стенки мы возьмем точку $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$, будет ясно, в какие камеры попадают точки $\beta(t)$ при $t > 0$ или при $t < 0$. Тогда остается понять, как перестраивается особая поверхность Фано $\mathbb{R}F_0$ в неособую $\mathbb{R}F_t$.

При доказательстве теоремы 0.4 мы доводим до конца изучение спектральной последовательности (0.4). Кроме теоремы 0.4 мы доказываем в § 4 два предложения, из которых вытекает, что эквивариантный топологический тип поверхности Фано F_b , $b \in \mathbb{R}\Delta^*$, определяет жесткий изотопический класс соответствующей Вещественной кубики V_b .

§ 1. Пространство Вещественных особых трехмерных кубик

Напомним, что через $\mathcal{B}$ обозначается комплексное проективное пространство $\mathbb{P}_W^{34}$ с однородными координатами $W_{i_0 \dots i_4}$, параметризующее множество трехмерных кубик в проективном пространстве $\mathbb{P}_X^4$ с однородными координатами $X_0, \dots, X_4$. А через $\mathcal{B}^*$ обозначается множество точек $b \in \mathcal{B}$ таких,

что соответствующая кубика V_b неособая; это множество является дополнением дискриминантной гиперповерхности $\Delta \subset \mathcal{B}$, параметризующей множество особых кубик V_b . Через Δ^* обозначается множество неособых точек на дискриминантной гиперповерхности $\Delta \subset \mathcal{B}$. Если $b \in \Delta^*$, то соответствующая кубика V_b имеет единственную особую точку $a \in V_b$, которая является простой двойной точкой. Заметим, что точка $a \in V_b$ однозначно определяется точкой $b \in \Delta^*$. Пусть $T_a \mathbb{P}_X^4$ – касательное пространство к исходному проективному пространству $\mathbb{P}_X^4$ в точке $a \in \mathbb{P}_X^4$, а $\mathbb{P}(a)$ – проективизация этого касательного пространства, т.е. $\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(T_a \mathbb{P}_X^4)$. Проективное пространство $\mathbb{P}(a)$ канонически отождествляется с пространством прямых в $\mathbb{P}_X^4$, проходящих через точку a . Если теперь $\hat{T}_a V_b \subset T_a \mathbb{P}_X^4$ – касательный конус к многообразию V_b в особой точке $a \in V_b$, то определена неособая квадрика $Q_b \subset \mathbb{P}(a)$ как проективизация касательного конуса, т.е. $Q_b = \mathbb{P}(\hat{T}_a V_b)$. На квадрике $Q_b \subset \mathbb{P}(a)$ лежит неособая каноническая кривая рода 4, точками которой являются прямые в $\mathbb{P}_X^4$, проходящие через особую точку $a \in V_b$ и лежащие на кубике V_b . Эту каноническую кривую рода 4 будем обозначать через C_b , она является кубическим сечением квадрики $Q_b \subset \mathbb{P}(a)$.

В этом параграфе мы опишем без доказательства компоненты связности в евклидовой топологии множества вещественных точек $\mathbb{R}\Delta^*$. Соответствующие результаты вытекают из жесткой изотопической классификации Вещественных кубических сечений фиксированной квадрики, изложенной в статье [9], а соответствующие дополнительные рассуждения содержатся в работе [3].

Прежде всего заметим, что вещественная часть $\mathbb{R}Q_b$ квадрики Q_b может быть пустым множеством, эллипсоидом, гиперболоидом. Обозначим через $\mathcal{D}_0^4$, $\mathcal{D}_1^3$, $\mathcal{D}_2^2$ множество точек $b \in \mathbb{R}\Delta^*$, для которых вещественная часть $\mathbb{R}Q_b$ квадрики Q_b является соответственно пустым множеством, эллипсоидом, гиперболоидом. Индексы p и n в обозначении $\mathcal{D}_n^p$ указывают на число положительных и отрицательных квадратов в каноническом представлении квадратичной формы, определяющей квадрику Q_b , причем мы предполагаем, без ограничения общности, что $p \geq n$. Каждое из этих множеств $\mathcal{D}_n^p$ состоит из целых компонент связности пространства $\mathbb{R}\Delta^*$ в евклидовой топологии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Множество $\mathcal{D}_0^4$ является связным в евклидовой топологии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение, $\pi: \mathcal{D}_0^4 \rightarrow \mathbb{RP}^4$, которое особой кубике V_b , $b \in \mathcal{D}_0^4$, сопоставляет ее особую точку $a \in \mathbb{RP}^4$. Это отображение определяет локально тривиальное расслоение. Зафиксируем точку $a \in \mathbb{RP}^4$ и рассмотрим слой $\pi^{-1}(a)$ этого расслоения, будем его обозначать через $\mathcal{E}_0^4$. Достаточно показать, что пространство $\mathcal{E}_0^4$ связное.

Обозначим через $\mathcal{C}$ пространство Вещественных канонических кривых рода 4 в $\mathbb{P}(a)$. Тогда через $\mathcal{C}_0^4$ будем обозначать подпространство пространства $\mathcal{C}$, состоящее из Вещественных канонических кривых, лежащих на квадриках, имеющих сигнатуру $(4, 0)$. Пространство $\mathcal{C}_0^4$ связное в евклидовой топологии (см., например, [3]). Рассмотрим проекцию $p: \mathcal{E}_0^4 \rightarrow \mathcal{C}_0^4$, которая особой кубике V_b сопоставляет каноническую кривую C_b . Эта проекция определяет локально тривиальное расслоение, причем его слой – связное пространство (см. [3]). Следовательно, пространство $\mathcal{E}_0^4$ связное. Предложение доказано.

Заметим, что если вещественная часть $\mathbb{R}C_b$ кривой C_b не пустая, то она может состоять из k компонент связности $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, где число k удовлетворяет неравенству Гарнака: $k \leq 5$. Через $\mathcal{D}_n^p(k)$ будем обозначать множество точек $b \in \mathcal{D}_n^p$, для которых вещественная часть $\mathbb{R}C_b$ кривой C_b состоит ровно из k компонент связности. В частности, через $\mathcal{D}_n^p(0)$ обозначается множество точек $b \in \mathcal{D}_n^p$, для которых вещественная часть $\mathbb{R}C_b$ кривой C_b пустая. Тогда оказывается, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Множества $\mathcal{D}_1^3(k)$ связны при $k \neq 3$, а множество $\mathcal{D}_1^3(3)$ состоит из двух компонент связности $\mathcal{D}_1^3(3)_I$, $\mathcal{D}_1^3(3)_{II}$, где индексы I, II указывают на принадлежность кривой C_b типу I, II соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение, $\pi: \mathcal{D}_1^3 \rightarrow \mathbb{RP}^4$, которое особой кубике V_b , $b \in \mathcal{D}_1^3$, сопоставляет ее особую точку $a \in \mathbb{RP}^4$. Это отображение определяет локально тривиальное расслоение. Зафиксируем точку $a \in \mathbb{RP}^4$ и рассмотрим слой $\pi^{-1}(a)$ этого расслоения, будем его обозначать через $\mathcal{E}_1^3$. А через $\mathcal{E}_1^3(k)$, $\mathcal{E}_1^3(3)_I$, $\mathcal{E}_1^3(3)_{II}$ будем обозначать пересечения

$$\mathcal{E}_1^3 \cap \mathcal{D}_1^3(k), \quad \mathcal{E}_1^3 \cap \mathcal{D}_1^3(3)_I, \quad \mathcal{E}_1^3 \cap \mathcal{D}_1^3(3)_{II}.$$

Эти пространства будут слоями над точкой $a \in \mathbb{RP}^4$ локально тривиальных расслоений

$$\pi: \mathcal{D}_1^3(k) \rightarrow \mathbb{RP}^4, \quad \pi: \mathcal{D}_1^3(3)_I \rightarrow \mathbb{RP}^4, \quad \pi: \mathcal{D}_1^3(3)_{II} \rightarrow \mathbb{RP}^4.$$

Поэтому достаточно доказать связность пространств $\mathcal{E}_1^3(k)$ ($k \neq 3$), $\mathcal{E}_1^3(3)_I$, $\mathcal{E}_1^3(3)_{II}$.

Через $\mathcal{C}_1^3$ будем обозначать подпространство пространства $\mathcal{C}$, состоящее из Вещественных канонических кривых, лежащих на квадриках, имеющих сигнатуру $(3, 1)$. А через $\mathcal{C}_1^3(k)$ обозначим подпространство пространства $\mathcal{C}_1^3$, состоящее из канонических кривых C_b , для которых множество вещественных точек $\mathbb{R}C_b$ имеет ровно k компонент связности. Кроме этого, через $\mathcal{C}_1^3(3)_I$, $\mathcal{C}_1^3(3)_{II}$ обозначим подпространства пространства $\mathcal{C}_1^3(3)$, состоящие из кривых типа I, II соответственно. В [3] показано, что пространства $\mathcal{C}_1^3(k)$ ($k \neq 3$), $\mathcal{C}_1^3(3)_I$, $\mathcal{C}_1^3(3)_{II}$ связны.

Рассмотрим теперь проекции

$$p: \mathcal{E}_1^3(k) \rightarrow \mathcal{C}_1^3(k) \quad (k \neq 3), \quad p: \mathcal{E}_1^3(3)_I \rightarrow \mathcal{C}_1^3(3)_I, \quad p: \mathcal{E}_1^3(3)_{II} \rightarrow \mathcal{C}_1^3(3)_{II},$$

которые особой кубике V_b сопоставляют каноническую кривую C_b . Они являются локально тривиальными расслоениями над связными базами, со связными слоями (см. [3]). Следовательно, пространства $\mathcal{E}_1^3(k)$ ($k \neq 3$), $\mathcal{E}_1^3(3)_I$, $\mathcal{E}_1^3(3)_{II}$ связны. Предложение доказано.

Таким образом, для пространства $\mathcal{D}_1^3$ имеем разложение на семь компонент связности:

$$\mathcal{D}_1^3 = \mathcal{D}_1^3(0) \sqcup \mathcal{D}_1^3(1) \sqcup \mathcal{D}_1^3(2) \sqcup \mathcal{D}_1^3(3)_I \sqcup \mathcal{D}_1^3(3)_{II} \sqcup \mathcal{D}_1^3(4) \sqcup \mathcal{D}_1^3(5).$$

Чтобы описать компоненты связности пространства $\mathcal{D}_2^2$, нам нужно сначала описать *вещественные схемы* кубических сечений гиперболоида $\mathbb{R}Q_b$ (см. подробности в [9]).

На гиперboloиде $\mathbb{R}Q_b$ имеются два семейства прямых, выберем по представителю l', l'' из каждого семейства. Зафиксируем на прямых l', l'' ориентацию, тогда получим ориентацию и на гиперboloиде $\mathbb{R}Q_b$. Среди компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ кривой $\mathbb{R}C_b \subset \mathbb{R}Q_b$ могут быть стягиваемые на гиперboloиде $\mathbb{R}Q_b$ и нестягиваемые компоненты. Стягиваемые компоненты называются *овалами*. Оказывается, что на нестягиваемых компонентах можно так выбрать ориентацию, что они станут гомологичными между собой на гиперboloиде $\mathbb{R}Q_b$. Поэтому после такого выбора ориентации индексы пересечения $\Gamma_i \cdot l', \Gamma_i \cdot l''$ не зависят от номера i нестягиваемой компоненты Γ_i . Оба индекса пересечения $\Gamma_i \cdot l', \Gamma_i \cdot l''$ ненулевые, поэтому можно считать, что индекс пересечения $\Gamma_i \cdot l'$ больше нуля, в противном случае изменим ориентацию всех нестягиваемых компонент. Набор чисел $\Gamma_i \cdot l', \Gamma_i \cdot l''$ определяет *вещественный тип* нестягиваемой компоненты Γ_i , он обозначается через $(\Gamma_i \cdot l', \Gamma_i \cdot l'')$. Оказывается, что возможны следующие вещественные схемы расположения компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ на гиперboloиде $\mathbb{R}Q_b$:

- 1) $^\pm_k$ $\langle (1, \pm 1), k - 1 \rangle$, где $1 \leq k \leq 5$, т.е. имеется одна нестягиваемая компонента типа $(1, \pm 1)$ и $k - 1$ овалов;
- 2) $_\pm$ $\langle 3(1, \pm 1) \rangle$, т.е. имеются три нестягиваемых компоненты типа $(1, \pm 1)$, а овалов совсем нет;
- 3) $'_\pm$ $\langle (3, \pm 1) \rangle$, т.е. имеется только одна нестягиваемая компонента типа $(3, \pm 1)$, а других компонент нет;
- 3) $''_\pm$ $\langle (1, \pm 3) \rangle$, т.е. имеется только одна нестягиваемая компонента типа $(1, \pm 3)$, а других компонент нет.

Обозначим через $\mathcal{D}\langle (1, 1) \rangle$ и $\mathcal{D}\langle (3, 1) \rangle$ подпространства пространства $\mathcal{D}_2^2(1)$, которые состоят из точек $b \in \mathcal{D}_2^2(1)$ таких, что кривая $\mathbb{R}C_b$ имеет на гиперboloиде $\mathbb{R}Q_b$ вещественную схему $\langle (1, \pm 1) \rangle$ и $\langle (3, \pm 1) \rangle$ или $\langle (1, \pm 3) \rangle$ соответственно. А через $\mathcal{D}\langle (1, 1), 2 \rangle_I$, $\mathcal{D}\langle (1, 1), 2 \rangle_{II}$ обозначим подпространства пространства $\mathcal{D}_2^2(3)$, которые состоят из точек $b \in \mathcal{D}_2^2(3)$ таких, что кривая $\mathbb{R}C_b$ имеет на гиперboloиде $\mathbb{R}Q_b$ вещественную схему $\langle (1, \pm 1), 2 \rangle$ и тип I, II соответственно. Кроме этого, через $\mathcal{D}\langle 3(1, 1) \rangle$ обозначим подпространство пространства $\mathcal{D}_2^2(3)$, которое состоит из точек $b \in \mathcal{D}_2^2(3)$ таких, что кривая $\mathbb{R}C_b$ имеет на гиперboloиде $\mathbb{R}Q_b$ вещественную схему $\langle 3(1, \pm 1) \rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Все восемь следующих пространств особых кубик*

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}\langle (1, 1) \rangle, \quad \mathcal{D}\langle (3, 1) \rangle, \quad \mathcal{D}_2^2(2), \quad \mathcal{D}\langle (1, 1), 2 \rangle_I, \\ &\mathcal{D}\langle (1, 1), 2 \rangle_{II}, \quad \mathcal{D}\langle 3(1, 1) \rangle, \quad \mathcal{D}_2^2(4), \quad \mathcal{D}_2^2(5) \end{aligned}$$

связные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\pi: \mathcal{D}_2^2 \rightarrow \mathbb{RP}^4$, которое особой кубике V_b , $b \in \mathcal{D}_2^2$, сопоставляет ее особую точку $a \in \mathbb{RP}^4$. Это отображение определяет локально тривиальное расслоение. Зафиксируем точку $a \in \mathbb{RP}^4$ и рассмотрим слой $\pi^{-1}(a)$ этого расслоения, будем его обозначать через $\mathcal{E}_2^2$. А через

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}\langle (1, 1) \rangle, \quad \mathcal{E}\langle (3, 1) \rangle, \quad \mathcal{E}_2^2(2), \quad \mathcal{E}\langle (1, 1), 2 \rangle_I, \\ &\mathcal{E}\langle (1, 1), 2 \rangle_{II}, \quad \mathcal{E}\langle 3(1, 1) \rangle, \quad \mathcal{E}_2^2(4), \quad \mathcal{E}_2^2(5) \end{aligned}$$

будем обозначать пересечения

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2^2 \cap \mathcal{D}\langle(1,1)\rangle, & \quad \mathcal{E}_2^2 \cap \mathcal{D}\langle(3,1)\rangle, & \quad \mathcal{E}_2^2 \cap \mathcal{D}_2^2(2), & \quad \mathcal{E}_2^2 \cap \mathcal{D}\langle(1,1),2\rangle_I, \\ \mathcal{E}_2^2 \cap \mathcal{D}\langle(1,1),2\rangle_{II}, & \quad \mathcal{E}_2^2 \cap \mathcal{D}\langle 3(1,1)\rangle, & \quad \mathcal{E}_2^2 \cap \mathcal{D}_2^2(4), & \quad \mathcal{E}_2^2 \cap \mathcal{D}_2^2(5). \end{aligned}$$

Эти пространства будут слоями над точкой $a \in \mathbb{RP}^4$ локально тривиальных расслоений

$$\begin{aligned} \pi: \mathcal{D}\langle(1,1)\rangle &\rightarrow \mathbb{RP}^4, & \pi: \mathcal{D}\langle(3,1)\rangle &\rightarrow \mathbb{RP}^4, \\ \pi: \mathcal{D}_2^2(2) &\rightarrow \mathbb{RP}^4, & \pi: \mathcal{D}\langle(1,1),2\rangle_I &\rightarrow \mathbb{RP}^4, \\ \pi: \mathcal{D}\langle(1,1),2\rangle_{II} &\rightarrow \mathbb{RP}^4, & \pi: \mathcal{D}\langle 3(1,1)\rangle &\rightarrow \mathbb{RP}^4, \\ \pi: \mathcal{D}_2^2(4) &\rightarrow \mathbb{RP}^4, & \pi: \mathcal{D}_2^2(5) &\rightarrow \mathbb{RP}^4. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно доказать связность пространств

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\langle(1,1)\rangle, & \quad \mathcal{E}\langle(3,1)\rangle, & \quad \mathcal{E}_2^2(2), & \quad \mathcal{E}\langle(1,1),2\rangle_I, \\ \mathcal{E}\langle(1,1),2\rangle_{II}, & \quad \mathcal{E}\langle 3(1,1)\rangle, & \quad \mathcal{E}_2^2(4), & \quad \mathcal{E}_2^2(5). \end{aligned}$$

Через $\mathcal{C}_2^2$ будем обозначать подпространство пространства $\mathcal{C}$, состоящее из вещественных канонических кривых, лежащих на квадраках, имеющих сигнатуру $(2,2)$. А через

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\langle(1,1)\rangle, & \quad \mathcal{C}\langle(3,1)\rangle, & \quad \mathcal{C}_2^2(2), & \quad \mathcal{C}\langle(1,1),2\rangle_I, \\ \mathcal{C}\langle(1,1),2\rangle_{II}, & \quad \mathcal{C}\langle 3(1,1)\rangle, & \quad \mathcal{C}_2^2(4), & \quad \mathcal{C}_2^2(5) \end{aligned}$$

обозначим подпространства пространства $\mathcal{C}_2^2$, состоящие из канонических кривых C_b , имеющих следующую вещественную схему на гиперboloиде Q_b и следующий тип, т.е. комплексную схему,

$$\begin{aligned} \langle(1,\pm 1)\rangle, & \quad \langle(3,\pm 1)\rangle \text{ или } \langle(1,\pm 3)\rangle, & \quad \langle(1,\pm 1),1\rangle, & \quad \langle(1,\pm 1),2\rangle_I, \\ \langle(1,\pm 1),2\rangle_{II}, & \quad \langle 3(1,\pm 1)\rangle, & \quad \langle(1,\pm 1),4\rangle, & \quad \langle(1,\pm 1),5\rangle \end{aligned}$$

соответственно. В [3] показано, что эти пространства связные.

Рассмотрим теперь проекции

$$\begin{aligned} p: \mathcal{E}\langle(1,1)\rangle &\rightarrow \mathcal{C}\langle(1,1)\rangle, & p: \mathcal{E}\langle(3,1)\rangle &\rightarrow \mathcal{C}\langle(3,1)\rangle, \\ p: \mathcal{E}_2^2(2) &\rightarrow \mathcal{C}_2^2(2), & p: \mathcal{E}\langle(1,1),2\rangle_I &\rightarrow \mathcal{C}\langle(1,1),2\rangle_I, \\ p: \mathcal{E}\langle(1,1),2\rangle_{II} &\rightarrow \mathcal{C}\langle(1,1),2\rangle_{II}, & p: \mathcal{E}\langle 3(1,1)\rangle &\rightarrow \mathcal{C}\langle 3(1,1)\rangle, \\ p: \mathcal{E}_2^2(4) &\rightarrow \mathcal{C}_2^2(4), & p: \mathcal{E}_2^2(5) &\rightarrow \mathcal{C}_2^2(5), \end{aligned}$$

которые особой кубике V_b сопоставляют каноническую кривую C_b . Они являются локально тривиальными расслоениями над связными базами, со связными слоями (см. [3]). Следовательно, пространства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\langle(1,1)\rangle, & \quad \mathcal{E}\langle(3,1)\rangle, & \quad \mathcal{E}_2^2(2), & \quad \mathcal{E}\langle(1,1),2\rangle_I, \\ \mathcal{E}\langle(1,1),2\rangle_{II}, & \quad \mathcal{E}\langle 3(1,1)\rangle, & \quad \mathcal{E}_2^2(4), & \quad \mathcal{E}_2^2(5) \end{aligned}$$

связные. Предложение доказано.

Таким образом, для пространства $\mathcal{D}_2^2$ имеем разложение на восемь компонент связности:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2^2 = & \mathcal{D}\langle(1, 1)\rangle \sqcup \mathcal{D}\langle(3, 1)\rangle \sqcup \mathcal{D}_2^2(2) \sqcup \mathcal{D}\langle(1, 1), 2\rangle_I \sqcup \\ & \sqcup \mathcal{D}\langle(1, 1), 2\rangle_{II} \sqcup \mathcal{D}\langle 3(1, 1)\rangle \sqcup \mathcal{D}_2^2(4) \sqcup \mathcal{D}_2^2(5). \end{aligned}$$

Компоненты связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ будем называть *камерами*, а компоненты связности пространства $\mathbb{R}\Delta^*$ – *стенками*. Камеры примыкают друг к другу по стенкам. Рис. 1 показывает граф таких примыканий. Эта схема вытекает из результатов работы [3] о перестройках особых кубик при малом возмущении. Сформулируем эти результаты.

Пусть $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$ – фиксированная точка. Тогда в $\mathcal{B}$ существует неособая комплексно-аналитическая параметрическая кривая $b = \beta(t)$, $|t| < 1$, со следующими свойствами:

- 1) $\beta(0) = b_0$, $\beta(t) \notin \Delta$ при $t \neq 0$;
- 2) кривая $b = \beta(t)$ проходит через точку b_0 трансверсально к Δ ;
- 3) кривая $b = \beta(t)$ эквивариантная, т.е. выполняется равенство $\beta(\bar{t}) = \tau(\beta(t))$, где черта означает комплексное сопряжение.

Через V_t будем обозначать семейство кубик $V_{\beta(t)}$. Кубика V_0 особая, имеющая единственную особую точку $a \in V_0$, которая является простой двойной точкой. Через Q будем обозначать квадрику $Q_{b_0} \subset \mathbb{P}(a)$, а через C обозначим каноническую кривую $C_{b_0} \subset Q$. При $t \neq 0$ кубики V_t неособые. Полное пространство этого семейства кубик

$$\mathfrak{V} = \bigcup_{|t| < 1} V_t \times t \subset \mathbb{P}_X^4 \times \{|t| < 1\}$$

является неособым комплексно-аналитическим четырехмерным многообразием с вещественной структурой $\tau: \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{V}$, заданной инволюцией комплексного сопряжения.

Пусть точка $t \neq 0$ – вещественная. Тогда существует непрерывное отображение

$$\varrho: V_t \rightarrow V_0,$$

обладающее следующими свойствами (см., например, [10], [11]):

- 1) прообраз особой точки a гомеоморфен трехмерной сфере Σ_t ;
- 2) отображение $\varrho: V_t \setminus \Sigma_t \rightarrow V_0 \setminus \{a\}$ является гомеоморфизмом;
- 3) отображение $\varrho: V_t \rightarrow V_0$ – эквивариантное, т.е. коммутирует с комплексным сопряжением.

Заметим, что с помощью отображения $\varrho: V_t \rightarrow V_0$ получается следующая короткая точная последовательность групп гомологий:

$$0 \rightarrow H_3(\Sigma_t, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_3(V_t, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\varrho_*} H_3(V_0, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0.$$

Сферу $\Sigma_t \subset V_t$ будем называть *исчезающей сферой*. Она инвариантна относительно инволюции τ . Далее мы будем рассматривать маленькое число $0 < \varepsilon < 1$, которое будем уменьшать, если потребуется. Заметим, что многообразия $(V_{\pm t}, \tau)$, $(V_{\pm \varepsilon}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны при $0 < t < 1$. Обозначим кубики $V_{\pm \varepsilon}$ кратко через $V_{\pm}$, а исчезающие сферы на них обозначим

через $\Sigma_{\pm}$. Эти сферы инвариантны относительно инволюции комплексного сопряжения $\tau: V_{\pm} \rightarrow V_{\pm}$. Множества точек на них, неподвижных относительно инволюции τ , т.е. множества вещественных точек, будем обозначать через $\mathbb{R}\Sigma_{\pm}$ и называть *вещественными исчезающими сферами*. Заметим, что мы можем считать все сферы $\Sigma_{\pm}$, $\mathbb{R}\Sigma_{\pm}$ дифференцируемыми подмногообразиями кубик $V_{\pm}$, $\mathbb{R}V_{\pm}$. Комплексные исчезающие сферы $\Sigma_{\pm}$ можно выбрать так, что будут справедливы следующие утверждения.

0) Если квадрика Q не имеет вещественных точек, то одна из вещественных исчезающих сфер $\mathbb{R}\Sigma_{\pm}$ совпадает с комплексной исчезающей сферой $\Sigma_{\pm}$, а другая пустая. (Мы считаем, что вещественная исчезающая сфера $\mathbb{R}\Sigma_{+}$ совпадает с комплексной исчезающей сферой Σ_{+} , а множество $\mathbb{R}\Sigma_{-}$ пустое.)

1) Если множество $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом, то одна из вещественных исчезающих сфер $\mathbb{R}\Sigma_{\pm}$ гомеоморфна двумерной сфере, а другая гомеоморфна нульмерной сфере, т.е. состоит из двух точек. (Мы считаем, что вещественная исчезающая сфера $\mathbb{R}\Sigma_{+}$ является двумерной сферой Σ_{+} , а множество $\mathbb{R}\Sigma_{-}$ состоит из двух точек.)

2) Если множество $\mathbb{R}Q$ является гиперболоидом, то вещественные исчезающие сферы $\mathbb{R}\Sigma_{\pm}$ гомеоморфны одномерной сфере, т.е. окружности.

А теперь мы сформулируем предложение из [3], из утверждений которого вытекает схема примыканий камер по стенкам друг к другу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Справедливы следующие утверждения:*

0) *если квадрика Q не имеет вещественных точек, причем $\mathbb{R}\Sigma_{+}$ – трехмерная сфера, а $\mathbb{R}\Sigma_{-}$ – пустое множество, то множество вещественных точек $\mathbb{R}V_{-}$ гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{R}P^3$, а $\mathbb{R}V_{+}$ гомеоморфно несвязному объединению $\mathbb{R}P^3 \sqcup S^3$ проективного пространства и трехмерной сферы;*

1) *если $\mathbb{R}Q$ – эллипсоид, причем $\mathbb{R}\Sigma_{+}$ – двумерная сфера, а $\mathbb{R}\Sigma_{-}$ – нульмерная сфера, то класс гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_{+}] \in H_2(\mathbb{R}V_{+}, \mathbb{F}_2)$ не равен нулю, а $[\mathbb{R}\Sigma_{-}] \in H_0(\mathbb{R}V_{-}, \mathbb{F}_2)$ равен нулю;*

2) *если $\mathbb{R}Q$ – гиперболоид, то один из классов гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_{\pm}] \in H_1(\mathbb{R}V_{\pm}, \mathbb{F}_2)$ не равен нулю, а другой равен нулю;*

3) *пусть $C \in \mathcal{C}(k)$ и предположим, что класс гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_{+}]$ не равен нулю, а $[\mathbb{R}\Sigma_{-}]$ равен нулю; тогда выполняются равенства*

$$\dim H_*(\mathbb{R}V_{+}, \mathbb{F}_2) = 4 + 2k, \quad \dim H_*(\mathbb{R}V_{-}, \mathbb{F}_2) = 2 + 2k;$$

4) *пусть выполняется предположение п. 3) на классы гомологий $[\mathbb{R}\Sigma_{\pm}]$ и Вещественная кривая (C, τ) принадлежит типу I или множество $\mathbb{R}C$ пустое; тогда кубика (V_{+}, τ) принадлежит типу I;*

5) *если хотя бы одна из кубик $(V_{\pm}, \tau)$ принадлежит типу I, то Вещественная кривая (C, τ) принадлежит типу I или множество $\mathbb{R}C$ пустое;*

6) *хотя бы одна из кубик $(V_{\pm}, \tau)$ не принадлежит типу I.*

§ 2. Общие свойства Вещественной поверхности Фано

Сначала мы сформулируем общие свойства комплексной поверхности Фано неособой комплексной кубики, которые потребуются для изучения Вещественной поверхности Фано Вещественной кубики.

Пусть F – комплексная поверхность Фано неособой комплексной кубики V , тогда выполняются равенства

$$H^0(F, \mathbb{Z}) = H^4(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H^1(F, \mathbb{Z}) = H^3(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{10}, \quad H^2(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{45}.$$

Зафиксируем точку $p_0 \in F$, тогда определено отображение Альбанезе $\alpha: F \rightarrow A$, где $A = A(F)$ – многообразие Альбанезе неособой поверхности F . Многообразие A является пятимерным комплексным тором, на нем определена главная поляризация с помощью следующей конструкции. Рассмотрим отображение $\alpha_2: F \times F \rightarrow A$, определенное равенством $\alpha_2(p_1, p_2) = \alpha(p_2) - \alpha(p_1)$. Образ этого отображения является гиперповерхностью, которая обозначается через Θ и называется *тета-дивизором* поверхности Фано F . Он определяет унимодулярную целочисленную билинейную кососимметрическую форму на решетке $H_1(F, \mathbb{Z}) = H_1(A, \mathbb{Z})$ с помощью индекса пересечения восьмимерного цикла с двумерным

$$([\gamma_1], [\gamma_2]) = \Theta \cdot ([\gamma_1] \otimes [\gamma_2]),$$

где γ_1, γ_2 – ориентированные контуры на торе A , $[\gamma_1] \otimes [\gamma_2]$ – произведение Понтрягина классов гомологий $[\gamma_1], [\gamma_2] \in H_1(A, \mathbb{Z})$.

Класс когомологий $\alpha^*([\Theta]^*) \in H^2(F, \mathbb{Z})$ делится на 2, половинку его обозначим через Ω . Элемент $\Omega \in H^2(F, \mathbb{Z})$ уже является неделимым, причем $\Omega^2 = 5$.

Гомоморфизм

$$\alpha^*: H^2(A, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(F, \mathbb{Z})$$

является мономорфизмом, причем имеет место разложение

$$H^2(F, \mathbb{Z}) = \alpha^*(H^2(A, \mathbb{Z})) + \mathbb{Z} \cdot \Omega. \quad (2.1)$$

Если K – линейное каноническое расслоение на поверхности F , то выполняется равенство $c(K) = 3\Omega$, где $c(K)$ – характеристический класс расслоения K .

Рассмотрим отображение цилиндра

$$\Phi: H_1(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(V, \mathbb{Z}),$$

которое определяется с помощью равенства

$$\Phi([\gamma]) = \left[\bigcup_{p \in \gamma} L_p \right],$$

где γ – ориентированный контур на F , а L_p – прямая на кубике V , отвечающая точке $p \in F$. Это отображение является изоморфизмом, кроме того, выполняется равенство

$$([\gamma_1], [\gamma_2]) = \Phi([\gamma_1]) \cdot \Phi([\gamma_2]),$$

где справа стоит индекс пересечения на кубике V .

Теперь мы будем предполагать, что кубика $V \subset \mathbb{P}_X^4$ задана уравнением

$$\varphi(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) = 0$$

с вещественными коэффициентами. Тогда на ней определена вещественная структура, т.е. антиголоморфная инволюция $\tau: V \rightarrow V$. А на поверхности

Фано F индуцируется вещественная структура, т.е. на ней индуцируется антиголоморфная инволюция $\tau: F \rightarrow F$. Множество неподвижных точек F^τ будем также обозначать через $\mathbb{R}F$ и называть множеством вещественных точек. Это множество состоит из Вещественных прямых на Вещественной кубике (V, τ) и совпадает со множеством вещественных прямых на вещественной кубике $\mathbb{R}V$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Множество вещественных точек $\mathbb{R}F$ является неориентируемой дифференцируемой поверхностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D_K – Вещественный канонический дивизор на Вещественной поверхности (F, τ) и $(\mathbb{R}D_K)^2$ – индекс самопересечения на поверхности $\mathbb{R}F$ со значением в поле $\mathbb{F}_2$, а $(D_K)^2$ – индекс самопересечения на комплексной поверхности F со значением в кольце $\mathbb{Z}$. Тогда выполняются равенства

$$(\mathbb{R}D_K)^2 = (D_K)^2 \bmod 2 = (3\Omega)^2 \bmod 2 = 45 \bmod 2.$$

Поэтому $(\mathbb{R}D_K)^2 \neq 0$, следовательно, поверхность $\mathbb{R}F$ неориентируемая. Предложение доказано.

Будем предполагать, что фиксированная точка $p_0 \in F$ – вещественная. Тогда отображение Альбанезе $\alpha: F \rightarrow A$ будет вещественным отображением, т.е. оно коммутирует с инволюцией комплексного сопряжения. Следовательно, дивизор $\Theta \subset A$ будет Вещественным дивизором. Он задает инвариантный класс гомологий $[\Theta] \in H_8(A, \mathbb{Z})$ относительно инволюции $\tau_*: H_8(A, \mathbb{Z}) \rightarrow H_8(A, \mathbb{Z})$.

ЛЕММА 2.2. *Класс гомологий $[\Theta]$ не принадлежит пространству $(1 + \tau_*)H_8(A, \mathbb{Z})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\vartheta \in H_8(A, \mathbb{F}_2)$ класс гомологий $[\Theta] \bmod 2$. Тогда утверждение леммы равносильно утверждению, что класс гомологий $\vartheta \in H_8(A, \mathbb{F}_2)$ не принадлежит пространству $(1 + \tau_*)H_8(A, \mathbb{F}_2)$. Будем рассуждать от противного. Тогда получим, что для каждого инвариантного класса гомологий $\eta \in H_2(A, \mathbb{F}_2)^{\tau*}$ выполняется равенство $\vartheta \cdot \eta = 0$. Следовательно, из равенства

$$\Theta \cdot ([\alpha(\gamma_1)] \otimes [\alpha(\gamma_2)]) = \Phi([\gamma_1]) \cdot \Phi([\gamma_2]),$$

где γ_1, γ_2 – контуры на поверхности Фано F , вытекает, что для каждого класса гомологий $h \in H_3(V, \mathbb{F}_2)$, $h_1, h_2 \in H_3(V, \mathbb{F}_2)^{\tau*}$ выполняются равенства

$$(h, \tau_*(h)) = 0, \quad (h_1, h_2) = 0,$$

где $(\cdot, \cdot)$ – билинейная форма на $H_3(V, \mathbb{F}_2)$, определенная с помощью индекса пересечения. Равенство $(h, \tau_*(h)) = 0$, где $h \in H_3(V, \mathbb{F}_2)$ – произвольный элемент, означает, что класс гомологий $[\mathbb{R}V] \in H_3(V, \mathbb{F}_2)$ равен нулю, т.е. кубика (V, τ) принадлежит типу I. Поэтому если $V = V_b$, то

$$b \in \mathcal{B}(1)_I \cup \mathcal{B}(3)_I \cup \mathcal{B}(5).$$

Но равенство $(h_1, h_2) = 0$, где $h_1, h_2 \in H_3(V, \mathbb{F}_2)^{\tau*}$ – произвольные элементы, означает, что

$$H_3(V, \mathbb{F}_2)^{\tau*} = (1 + \tau_*)H_3(V, \mathbb{F}_2).$$

Следовательно, $H^1(G, H_3(V, \mathbb{F}_2)) = 0$, где G – группа второго порядка $\{1, \tau\}$. Так кубика (V, τ) является GM -многообразием (см. [6]), то из равенств

$$\dim H^1(G, H_3(V, \mathbb{F}_2)) = 0, \quad \dim H^*(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) = \dim H^1(G, H^*(V, \mathbb{F}_2))$$

вытекает следующее равенство: $\beta_*(\mathbb{R}V) = 4$, т.е. $b \in \mathcal{B}(0)$. Получили противоречие. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $\dim H^*(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) = 4 + 2k$. Тогда выполняется неравенство

$$\dim H^*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \leq 2k^2 + 2k + 7. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что размерность $\mathbb{F}_2$ -пространства

$$H^1(G, H^1(F, \mathbb{F}_2)) = H^1(G, H^1(A, \mathbb{F}_2)) = H^1(G, H^3(V, \mathbb{F}_2))$$

равна $2k$. Действительно, кубика V является GM -многообразием, поэтому выполняются равенства

$$\dim H^*(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) = \dim H^1(G, H^*(V, \mathbb{F}_2)) = 4 + \dim H^1(G, H^3(V, \mathbb{F}_2)) = 4 + 2k$$

и, следовательно, $\dim H^1(G, H^3(V, \mathbb{F}_2)) = 2k$.

Для Вещественной поверхности Фано (F, τ) выполняется неравенство (см. [6])

$$\dim H^*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \leq \dim H^1(G, H^*(F, \mathbb{F}_2)).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \dim H^1(G, H^0(F, \mathbb{F}_2)) &= \dim H^1(G, H^4(F, \mathbb{F}_2)) = 1, \\ \dim H^1(G, H^1(F, \mathbb{F}_2)) &= \dim H^1(G, H^3(F, \mathbb{F}_2)) = 2k, \end{aligned}$$

для доказательства неравенства (2.2) достаточно установить равенство

$$\dim H^1(G, H^2(F, \mathbb{F}_2)) = 2k^2 - 2k + 5.$$

Так как отображение Альбанезе $\alpha: F \rightarrow A$ является вещественным отображением, то разложение (2.1) инвариантно относительно инволюции τ^* . Следовательно, получаем разложение

$$H^1(G, H^2(F, \mathbb{F}_2)) = H^1(G, \alpha^*(H^2(A, \mathbb{F}_2))) \oplus \mathbb{F}_2 \cdot c(K). \quad (2.3)$$

Рассмотрим короткую точную последовательность G -пространств

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_2 \cdot [\Theta]^* \rightarrow H^2(A, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha^*} \alpha^*(H^2(A, \mathbb{F}_2)) \rightarrow 0.$$

Из нее получаем длинную последовательность когомологий группы G

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^1(G, \mathbb{F}_2 \cdot [\Theta]^*) &\rightarrow H^1(G, H^2(A, \mathbb{F}_2)) \xrightarrow{\alpha^*} H^1(G, \alpha^*(H^2(A, \mathbb{F}_2))) \rightarrow \\ &\rightarrow H^2(G, \mathbb{F}_2 \cdot [\Theta]^*) \rightarrow H^2(G, H^2(A, \mathbb{F}_2)) \xrightarrow{\alpha^*} H^2(G, \alpha^*(H^2(A, \mathbb{F}_2))) \rightarrow \cdots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Применим лемму 2.2, тогда получим, что гомоморфизмы

$$\begin{aligned} H^1(G, \mathbb{F}_2 \cdot [\Theta]^*) &= \mathbb{F}_2 \rightarrow H^1(G, H^2(A, \mathbb{F}_2)), \\ H^2(G, \mathbb{F}_2 \cdot [\Theta]^*) &= \mathbb{F}_2 \rightarrow H^2(G, H^2(A, \mathbb{F}_2)) \end{aligned}$$

мономорфны. Следовательно, из разложения (2.3) и точной последовательности (2.4) вытекает равенство

$$\dim H^1(G, H^2(F, \mathbb{F}_2)) = \dim H^1(G, H^2(A, \mathbb{F}_2)).$$

Осталось заметить, что из равенства $H^1(G, H^1(A, \mathbb{F}_2)) = 2k$ следует равенство

$$H^1(G, H^2(A, \mathbb{F}_2)) = 2k^2 - 2k + 5.$$

Предложение доказано. Заметим, что при доказательстве этого предложения мы установили также следующее утверждение: *неравенство (2.2) тогда и только тогда становится равенством, когда поверхность (F, τ) является GM -поверхностью.*

Рассмотрим эквивариантные когомологии $H^q(F, G; \mathbb{F}_2)$. Для них определены две спектральные последовательности (см. [7]), мы будем изучать вторую из них:

$$\Pi_2^{p,q} = H^q(G, H^p(F, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(F, G; \mathbb{F}_2). \quad (2.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Дифференциалы $d_2^{p,q}$ в спектральной последовательности (2.5) равны нулю для любых p, q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что равен нулю дифференциал $d_2^{1,2}$ (см., например, [12]). Вторая спектральная последовательность для тора A

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(A, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(A, G; \mathbb{F}_2)$$

вырождается (см. [6]). Поэтому рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^1(G, H^2(A, \mathbb{F}_2)) & \xrightarrow{d_2^{1,2}} & H^3(G, H^1(A, \mathbb{F}_2)) \\ \downarrow \alpha^* & & \downarrow \alpha^* \\ H^1(G, H^2(F, \mathbb{F}_2)) & \xrightarrow{d_2^{1,2}} & H^3(G, H^1(F, \mathbb{F}_2)) \end{array} \quad (2.6)$$

а также разложение (2.3). Дифференциал $d_2^{1,2}$ на одномерном пространстве

$$\mathbb{F}_2 \cdot c(K) \subset H^1(G, H^2(F, \mathbb{F}_2))$$

всегда равен нулю, поскольку $c(K) = [D_K]^*$, а D_K – инвариантный цикл относительно инволюции τ . Из точной последовательности

$$0 \rightarrow H^1(G, \mathbb{F}_2 \cdot [\Theta]^*) \rightarrow H^1(G, H^2(A, \mathbb{F}_2)) \xrightarrow{\alpha^*} H^1(G, \alpha^*(H^2(A, \mathbb{F}_2))) \rightarrow 0$$

следует, что выполняется равенство

$$\alpha^*(H^1(G, H^2(A, \mathbb{F}_2))) = H^1(G, \alpha^*(H^2(A, \mathbb{F}_2))).$$

Поэтому из коммутативной диаграммы (2.6) и разложения (2.3) получаем равенство нулю дифференциала $d_2^{1,2}$ на всем пространстве $H^1(G, H^2(F, \mathbb{F}_2))$. Предложение доказано.

Мы доказали, что дифференциалы $d_2^{p,q}$ равны нулю. Вопрос о дифференциалах $d_3^{p,q}$ будет обсуждаться в § 4. Заметим только, что если неравенство (2.2) станет равенством, то поверхность F будет являться GM -поверхностью, поэтому в этом случае все дифференциалы $d_r^{p,q}$ равны нулю, а также верно обратное утверждение.

§ 3. Поверхность Фано особой Вещественной кубики

Сначала мы приведем без доказательства основные факты о поверхности Фано трехмерной комплексной кубики с единственной особой точкой, которая является простой двойной точкой (см. подробности в [8]).

Пусть $b_0 \in \Delta^*$ и $F_0 = F_{b_0}$ – поверхность Фано особой кубики $V_0 = V_{b_0} \subset \mathbb{P}^4$ с простой особой точкой $a \in \mathbb{P}^4$. Тогда каноническая кривая $C = C_{b_0} \subset \mathbb{P}(a)$, которая параметризует множество прямых на кубике V_0 , проходящих через точку $a \in V_0$, лежит на поверхности Фано F_0 , причем ее точки являются единственными особыми точками этой поверхности. Кривая $C \subset F_0$ является простой двойной кривой на поверхности F_0 .

Далее через $C^{(2)}$ обозначается симметрический квадрат кривой C . Если $p_1, p_2 \in C$, то соответствующая точка на поверхности $C^{(2)}$ обозначается формальной суммой $p_1 + p_2$. Каноническая кривая C лежит также на неособой квадрике $Q = Q_b$, поэтому через каждую точку $p \in C$ проходят две прямые L'_p, L''_p из двух семейств прямых на квадрике Q . Заметим, что индексы пересечения $(C, L'_p), (C, L''_p)$ равны 3, т.е. кривая C на квадрике Q имеет бистепень $(3, 3)$. Поэтому определены канонические отображения

$$\lambda': C \rightarrow C^{(2)}, \quad \lambda'': C \rightarrow C^{(2)}, \quad (3.1)$$

которые устроены следующим образом. Прямые L'_p, L''_p имеют с кривой C кроме точки p еще две общие точки (с учетом кратности пересечений), т.е. для циклов пересечения имеем равенства

$$C \cdot L'_p = p + p'_1 + p'_2, \quad C \cdot L''_p = p + p''_1 + p''_2.$$

Тогда по определению полагаем

$$\lambda'(p) = p'_1 + p'_2, \quad \lambda''(p) = p''_1 + p''_2.$$

Образы отображений (3.1) обозначим через C', C'' соответственно. Тогда кривые C', C'' не пересекаются и отображения

$$\lambda': C \rightarrow C', \quad \lambda'': C \rightarrow C''$$

являются изоморфизмами комплексных алгебраических кривых.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Отображения (3.1) гомотопны в классе дифференцируемых отображений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{C}$ комплексное пространство канонических кривых рода 4 в $\mathbb{P}(a)$. Оно является неособым многообразием. Если $\alpha \in \mathcal{C}$, то через C_α обозначаем соответствующую каноническую кривую

рода 4. Через каждую кривую C_α проходит единственная квадрака Q_α , где $\alpha \in \mathcal{C}$. Выберем в пространстве канонических кривых $\mathcal{C}$ дифференцируемый путь $\alpha(t)$, $0 \leq t \leq 1$, где $C_{\alpha(1)} = C$, квадрака $Q_{\alpha(t)} = Q_t$ неособая при $t > 0$, а квадрака $Q_{\alpha(0)} = Q_0$ – квадратичный конус. Такой путь существует, так как пространство канонических кривых $\mathcal{C}$ связное. Кривая $C_0 = C_{\alpha(0)}$ лежит на конусе Q_0 , на котором имеется только одно семейство прямых L_p . Оно задает отображение

$$\lambda_0: C_0 \rightarrow (C_0)^{(2)},$$

причем отображение на образ $\lambda_0: C_0 \rightarrow \lambda_0(C_0)$ является изоморфизмом комплексных алгебраических кривых.

Семейство канонических кривых $C_t = C_{\alpha(t)}$ задает тривиальное дифференцируемое расслоение над отрезком $[0; 1]$ со слоем C . Зафиксируем тривиализацию $c_t: C_t \rightarrow C$ этого расслоения, где $c_1: C_1 = C \rightarrow C$ – тождественное отображение. Это семейство диффеоморфизмов определяет семейство диффеоморфизмов симметрических квадратов $(c_t)^{(2)}: (C_t)^{(2)} \rightarrow C^{(2)}$. Рассмотрим теперь два дифференцируемых семейства дифференцируемых отображений

$$\Lambda'_t = (c_t)^{(2)} \circ \lambda'_t \circ c_t^{-1}: C \rightarrow C^{(2)}, \quad \Lambda''_t = (c_t)^{(2)} \circ \lambda''_t \circ c_t^{-1}: C \rightarrow C^{(2)},$$

где $\lambda'_0 = \lambda''_0 = \lambda_0$. Эти семейства отображений задают гомотопии отображения

$$\Lambda_0 = (c_0)^{(2)} \circ \lambda_0 \circ c_0^{-1}: C \rightarrow C^{(2)}$$

с отображениями (3.1). Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Классы гомологий $[C']$, $[C''] \in H_2(C^{(2)}, \mathbb{Z})$ равны.*

Каноническая кривая C является простой двойной кривой особой поверхности Фано F_0 . Существует регулярное отображение $\lambda: C^{(2)} \rightarrow F_0$, разрешающее особенности поверхности Фано F_0 . Оно устроено следующим образом. Пусть $p_1 + p_2 \in C^{(2)}$, тогда точки $p_1, p_2 \in C$ определяют прямые L_{p_1} , L_{p_2} на кубике V_0 , проходящие через особую точку $a \in V_0$. Проведем через прямые L_{p_1} , L_{p_2} плоскость $(L_{p_1} L_{p_2})$. Эта плоскость пересекает кубик V_0 по трем прямым, две из них – это прямые L_{p_1} , L_{p_2} , а третью прямую обозначим через $L_{\lambda(p_1, p_2)}$, она определяет точку $\lambda(p_1, p_2)$ на поверхности Фано F_0 . Построенное отображение $\lambda: C^{(2)} \rightarrow F_0$ обладает следующими свойствами (см. [8]):

- 1) отображение $\lambda: C^{(2)} \setminus \lambda^{-1}(C) \rightarrow F_0 \setminus C$ является изоморфизмом;
- 2) прообраз $\lambda^{-1}(C)$ кривой C состоит из двух непересекающихся кривых C' , C'' , причем отображения $\lambda: C' \rightarrow C$, $\lambda: C'' \rightarrow C$ являются изоморфизмами;
- 3) кривые C' , C'' совпадают с одноименными кривыми, определенными ранее, причем обратные отображения к отображениям $\lambda: C' \rightarrow C$, $\lambda: C'' \rightarrow C$ совпадают с отображениями $\lambda': C \rightarrow C'$, $\lambda'': C \rightarrow C''$;
- 4) обратное рациональное отображение $\lambda^{-1}: F_0 \dashrightarrow C^{(2)}$ – это нормализация поверхности F_0 .

Таким образом, поверхность Фано F_0 получается из симметрического квадрата $C^{(2)}$ отождествлением кривых C' , C'' , которое производится с помощью отображения

$$\lambda'' \circ (\lambda')^{-1}: C' \rightarrow C''.$$

Пусть теперь точка b_0 принадлежит $\mathbb{R}\Delta^*$, тогда кубика $V_0 = V_{b_0}$ – Вещественная. Точка $a \in V_0$ – единственная особая точка кубики V_0 , поэтому эта точка – вещественная. Следовательно, каноническая кривая C будет Вещественной кривой. Так как на комплексной кривой C определена вещественная структура, т.е. антиголоморфная инволюция $\tau: C \rightarrow C$, то на симметрическом квадрате $C^{(2)}$ индуцируется вещественная структура по правилу

$$\tau(p_1 + p_2) = \tau(p_1) + \tau(p_2),$$

где точка на $C^{(2)}$ записывается в виде формальной суммы $p_1 + p_2$ двух точек p_1, p_2 из кривой C . Поэтому симметрический квадрат $C^{(2)}$ является Вещественным алгебраическим многообразием. Множество вещественных точек $\mathbb{R}C$ комплексной кривой C представляет собой, с точки зрения топологии, несвязное объединение k окружностей, где число k удовлетворяет неравенству Гарнака $k \leq 5$. Мы опишем топологическое строение множества вещественных точек $\mathbb{R}C^{(2)}$ симметрического квадрата $C^{(2)}$.

Рассмотрим сначала случай, когда множество $\mathbb{R}C$ пустое. Тогда множество $\mathbb{R}C^{(2)}$ состоит из сумм вида $p + \tau(p)$, где p – произвольная точка кривой C . Следовательно, в этом случае множество вещественных точек $\mathbb{R}C^{(2)}$ гомеоморфно неориентируемой факторповерхности $\bar{C} = C/\tau$ и выполняется равенство

$$\dim H^1(\mathbb{R}C^{(2)}, \mathbb{F}_2) = 5,$$

т.е. $\mathbb{R}C^{(2)} = {}_5S^2$.

Рассмотрим теперь случай, когда множество $\mathbb{R}C$ непустое. Пусть оно состоит из топологических окружностей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$. Тогда множество вещественных точек $\mathbb{R}C^2$ декартова квадрата C^2 представляет собой несвязную сумму торов $\Gamma_i \times \Gamma_j$, где $1 \leq i, j \leq k$. Симметрический квадрат $C^{(2)}$ кривой C получается из декартова квадрата C^2 с помощью факторизации по инволюции $\sigma: C^2 \rightarrow C^2$, переставляющей сомножители. Пусть $i < j$, тогда после факторизации два тора $\Gamma_i \times \Gamma_j$, $\Gamma_j \times \Gamma_i$ отождествляются в один тор, который будем обозначать через T_{ij} . Торы T_{ij} , $i < j$, будут входить во множество вещественных точек $\mathbb{R}C^{(2)}$ симметрического квадрата $C^{(2)}$. Объединение этих торов обозначим через T , т.е.

$$T = \bigcup_{i < j} T_{ij}.$$

Из каждого тора $\Gamma_i \times \Gamma_i$, $i = 1, \dots, k$, после факторизации получается лист Мёбиуса M_i . Эти листы Мёбиуса также входят во множество $\mathbb{R}C^{(2)}$. Кроме этого туда входят точки вида $p + \tau(p)$, которые образуют множество, гомеоморфное факторповерхности $\bar{C} = C/\tau$. Она представляет собой поверхность с краем, причем край состоит из k компонент, каждая из которых является краем одного листа Мёбиуса M_i . Таким образом, объединение $\Pi = \bar{C} \cup M_1 \cup \dots \cup M_k$ представляет собой связную компактную дифференцируемую поверхность, которая гомеоморфна поверхности, полученной из факторповерхности $\bar{C} = C/\tau$ с помощью заклеивания дыр листами Мёбиуса. Поверхность Π неориентируемая и гомеоморфна ${}_5S^2$. В итоге получаем, что *множество вещественных*

точек $\mathbb{R}C^{(2)}$ в случае, когда множество $\mathbb{R}C$ состоит из k компонент связности, представляет собой несвязное объединение:

$$\mathbb{R}C^{(2)} = T \sqcup \Pi,$$

где T – несвязное объединение торов T_{ij} , $1 \leq i < j \leq k$, а Π – неориентируемая поверхность рода 5 без края, т.е. $\Pi = {}_5S^2$.

Посмотрим теперь, как получается вещественная часть $\mathbb{R}F_0$ поверхности Фано F_0 . Если множество $\mathbb{R}C$ пустое, то после склейки комплексных кривых $C', C'' \subset C^{(2)}$ вещественных точек не добавится. Поэтому вещественная часть $\mathbb{R}F_0$ гомеоморфна поверхности ${}_5S^2$. Если $\mathbb{R}Q$ эллипсоид, то множества $\mathbb{R}C', \mathbb{R}C''$ пустые, а поэтому после склейки комплексных кривых C', C'' получаем равенство $\mathbb{R}F_0 = \mathbb{R}C^{(2)} \sqcup \mathbb{R}C$. В этом случае вещественная кривая $\mathbb{R}C$ на особой вещественной поверхности $\mathbb{R}F_0$ является изолированной кривой, конечно, при условии, что она непустая.

Если $\mathbb{R}Q$ гиперboloид, то множества $\mathbb{R}C', \mathbb{R}C''$ непустые, а потому вещественная поверхность $\mathbb{R}F_0$ получается из поверхности $\mathbb{R}C^{(2)}$ с помощью отождествления кривых $\mathbb{R}C', \mathbb{R}C''$, которое дает гомеоморфизм

$$\lambda'' \circ (\lambda')^{-1}: \mathbb{R}C' \rightarrow \mathbb{R}C''.$$

В этом случае вещественная кривая $\mathbb{R}C$ на особой вещественной поверхности $\mathbb{R}F_0$ является обыкновенной двойной кривой.

Для доказательства теоремы 0.4 нам потребуется разобрать расположение кривых $\mathbb{R}C', \mathbb{R}C''$ на поверхности $\mathbb{R}C^{(2)}$ только в случае, когда кривая C принадлежит пространству $\mathcal{C}\langle(3,1)\rangle$. Кривая $\mathbb{R}C$ состоит из одной компоненты, мы можем считать, что она имеет на гиперboloиде $\mathbb{R}Q$ вещественную схему $\langle(3,1)\rangle$. Для этого нужно в качестве первого семейства прямых на гиперboloиде $\mathbb{R}Q$ взять то семейство, прямые из которого имеют индекс пересечения с кривой $\mathbb{R}C$, равный ± 3 , а затем выбрать соответствующие ориентации на кривой $\mathbb{R}C$ и на фиксированных представителях из семейств прямых.

В этом случае выполняется равенство $\mathbb{R}C^{(2)} = \Pi$, поскольку кривая $\mathbb{R}C$ состоит из одной компоненты. Далее кривую $\mathbb{R}C$ будем обозначать через Γ , она разбивает топологическую поверхность C на две половинки, каждая из которых имеет род 2. Кривая Γ ориентированная, поэтому для одной из половинок поверхности C она является ориентированной границей, эту половинку мы обозначим через C_+ , а другую половинку обозначим через C_- . Заметим также, что тогда выполняется равенство $\Pi = \overline{C} \cup M$, где факторповерхность $\overline{C} = C/\tau$ канонически гомеоморфна поверхности C_+ , а поверхность M является листом Мёбиуса $\Gamma^{(2)}$. Край листа Мёбиуса $M = \Gamma^{(2)}$ состоит из точек $p + p$, где $p \in \Gamma$, а край поверхности C_+ состоит из точек $p \in \Gamma$. Заметим, что поверхность Π получается склейкой поверхности C_+ с листом Мёбиуса $M = \Gamma^{(2)}$ с помощью отождествления точек $p \in \Gamma \subset C_+$ с точками $p + p \in \partial M$. Ориентация кривой Γ индуцирует ориентацию края листа Мёбиуса M . Кривые $\mathbb{R}C', \mathbb{R}C''$ на поверхности $\mathbb{R}C^{(2)}$ обозначим через Γ', Γ'' соответственно. Так как кривая Γ ориентированная, то на кривых Γ', Γ'' имеется каноническая ориентация, полученная с помощью гомеоморфизмов

$$\lambda': \Gamma \rightarrow \Gamma', \quad \lambda'': \Gamma \rightarrow \Gamma''.$$

На самом деле, если зафиксировать на топологической окружности Γ параметризацию $S^1 = \{e^{it}\} \xrightarrow{\sim} \Gamma$, то эти гомеоморфизмы определяют параметризации на топологических окружностях Γ' , Γ'' . Кроме этого каноническое отображение $\Gamma \rightarrow \partial M$, заданное правилом $p \mapsto p + p$, определит параметризацию края листа Мёбиуса.

Мы покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть кривая C принадлежит пространству $\mathcal{C}\langle(3, 1)\rangle$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) параметрическая топологическая кривая Γ' на топологической поверхности

$$\mathbb{R}C^{(2)} = \Pi = \overline{C} \cup M$$

гомотопна параметризованному краю ∂M листа Мёбиуса M ;

2) параметрическая топологическая кривая Γ'' стягивается на поверхности Π в точку;

3) если вырезать из поверхности Π лист Мёбиуса, ограниченный кривой Γ' , а также вырезать диск, ограниченный кривой Γ'' , то получится ориентируемая поверхность с краем рода 2, на которой можно так выбрать ориентацию, что ее ориентированный край будет равняться формальной сумме ориентированных контуров $\Gamma' + \Gamma''$.

Доказательству этого предложения мы предпошлим несколько лемм. Заметим, что кривая Γ' лежит на листе Мёбиуса M . Действительно, цикл пересечения $C \cdot L'_p$ является суммой трех вещественных точек $p + p'_1 + p'_2$, если $p \in \Gamma = \mathbb{R}C$. Поэтому точка $\lambda'(p) = p'_1 + p'_2$ лежит на листе Мёбиуса $M = \Gamma^{(2)}$.

ЛЕММА 3.4. Параметрическая топологическая кривая $\Gamma' \subset M$ гомотопна на листе Мёбиуса M параметризованному краю ∂M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гиперболоид $\mathbb{R}Q$ канонически изоморфен произведению двух прямых $l' \times l''$, где l' , l'' – фиксированные прямые из разных семейств прямых на гиперboloиде. Рассмотрим проекцию $\pi: \Gamma \rightarrow l''$ на второй сомножитель. Если $p \in l''$, то ее прообраз $\pi^{-1}(p)$ состоит из трех разных точек $p_1, p_2, p_3 \in \Gamma$, которые лежат на одной прямой из первого семейства. Это утверждение вытекает из следующих двух фактов:

- 1) степень отображения ориентированных топологических окружностей $\pi: \Gamma \rightarrow l''$ равна 3;
- 2) если учитывать кратности точек, то прообраз $\pi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in l''$ состоит из трех точек.

Таким образом, проекция $\pi: \Gamma \rightarrow l''$ является трехлистным неразветвленным накрытием. Заметим также, что выполняются равенства

$$\lambda'(p_1) = p_2 + p_3, \quad \lambda'(p_2) = p_1 + p_3, \quad \lambda'(p_3) = p_1 + p_2.$$

Мы можем выбрать такие параметры t , t'' на топологических окружностях Γ , l'' , что отображение $\pi: \Gamma \rightarrow l''$ будет задаваться равенством $t'' = 3t$. Следовательно, после соответствующего отождествления кривой Γ с окружностью, мы получаем, что точки p_1, p_2, p_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность, причем при отображении $\lambda': \Gamma \rightarrow \Gamma' \subset M$

каждая вершина переводится в формальную сумму двух других вершин. Из этого описания отображения λ' вытекает утверждение о гомотопности параметрических топологических кривых Γ' и ∂M . Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. *Классы гомологий $[\Gamma']$, $[\Gamma''] \in H_1(\Pi, \mathbb{F}_2)$ равны нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть t – фиксированная точка на кривой C , тогда рассмотрим кривую E_t на симметрическом квадрате $C^{(2)}$, которая состоит из точек вида $t+p$, где p – произвольная точка на кривой C . Кривые E_t , $t \in C$, образуют алгебраическое семейство кривых на симметрическом квадрате. В [8] показано, что существует алгебраическое семейство дивизоров $D_{t'+t''}$, $t' + t'' \in C^{(2)}$, на симметрическом квадрате $C^{(2)}$ такое, что выполняются равенства для дивизоров

$$C' + E_t = D_{\lambda''(t)}, \quad C'' + E_t = D_{\lambda'(t)}. \quad (3.2)$$

Семейство дивизоров $D_{t'+t''}$, $t' + t'' \in C^{(2)}$, является Вещественным алгебраическим семейством, это утверждение вытекает из его построения (см. [8]). При $t \in \mathbb{R}C$ левые части в равенствах (3.2) инвариантны относительно комплексного сопряжения. Следовательно, получаем равенства для классов гомологий из группы $H_1(\mathbb{R}C^{(2)}, \mathbb{F}_2)$:

$$[\mathbb{R}C'] + [\mathbb{R}E_t] = [\mathbb{R}D_{\lambda''(t)}], \quad [\mathbb{R}C''] + [\mathbb{R}E_t] = [\mathbb{R}D_{\lambda'(t)}].$$

А поскольку точки $\lambda'(t)$, $\lambda''(t)$ лежат на связной поверхности $\mathbb{R}C^{(2)} = \Pi$, то классы гомологий

$$[\mathbb{R}D_{\lambda'(t)}], [\mathbb{R}D_{\lambda''(t)}] \in H_1(\Pi, \mathbb{F}_2)$$

совпадают. Следовательно, классы гомологий $[\Gamma']$, $[\Gamma''] \in H_1(\Pi, \mathbb{F}_2)$ совпадают. Но из предыдущей леммы следует, что класс гомологий $[\Gamma'] \in H_1(\Pi, \mathbb{F}_2)$ равен нулю. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. *Параметрическая топологическая кривая $\Gamma'' \subset \Pi$ стягивается на поверхности Π в точку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пространство $\mathcal{C}\langle(3,1)\rangle$ связное, достаточно доказать утверждение леммы для какой-нибудь одной кривой из этого пространства. Мы построим специальную кривую C , для которой будем проверять утверждение леммы. Для построения нужной кривой C рассмотрим неособую Вещественную кватрику $E \subset \mathbb{P}^2$ такую, что множество вещественных точек $\mathbb{R}E$ состоит из двух выпуклых овалов O' , O'' , причем овал O'' содержит овал O' . Выберем точки $p' \in O'$, $p'' \in O''$ и сделаем σ -процессы с центрами в этих точках. А затем стянем в точку собственный прообраз прямой $\overline{O'O''}$. После этих преобразований из проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ получается квадрика Q , причем множество вещественных точек $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом. А из кватрики E получается особая кривая C_0 на квадрике Q , которая имеет бистепень $(3,3)$. Кривая C_0 имеет единственную особую точку, которая является простой двойной точкой. Эта точка получается из собственного прообраза прямой $\overline{O'O''}$ после его стягивания. Особая кривая C_0 включается в семейство Вещественных кривых C_t бистепени $(3,3)$ на квадрике Q , где $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, причем при $t < 0$ кривая C_t принадлежит пространству $\mathcal{C}\langle(1,1)\rangle$, а при $t > 0$ кривая C_t

Рис. 2

принадлежит пространству $\mathcal{C}\langle(3,1)\rangle$ (см. [9]). Положим теперь, что $C = C_\delta$, где $0 < \delta \ll \varepsilon$.

Заметим, что семейство прямых L'_p на построенной квадрике Q состоит из собственных прообразов прямых на плоскости $\mathbb{P}^2$, проходящих через точку p' , а кроме этого в семейство L'_p входит прямая L' , полученная из точки p' после ее раздутия. Аналогично устроено семейство прямых L''_p , оно состоит из собственных прообразов прямых на плоскости $\mathbb{P}^2$, проходящих через точку p'' , а кроме этого в семейство L''_p входит прямая L'' , полученная из точки p'' после ее раздутия. Вещественные части прямых L' , L'' обозначим через l' , l'' соответственно. Тогда гиперболоид $\mathbb{R}Q$ канонически изоморфен произведению $l' \times l''$.

Рассмотрим проекцию $\pi: \Gamma \rightarrow l'$, она изображена на рис. 2. (Заметим, что на поверхностях в левой части рисунка ориентация задается с помощью внешней нормали, а на правой части рисунка проекция $\pi: \Gamma \rightarrow l'$ индуцируется проекцией плоскости в центр окружности l' , а направление на контурах против часовой стрелки.) Из предыдущего построения кривой C вытекает, что эта проекция удовлетворяет следующим условиям.

- 1) Имеются две точки $s, t \in l'$ такие, что прообразы этих точек

$$\pi^{-1}(s) \subset \Gamma, \quad \pi^{-1}(t) \subset \Gamma$$

состоят из пары точек, причем каждая пара имеет по одной двойной точке. Полагаем, что $\pi^{-1}(s) = \{a, c\}$, $\pi^{-1}(t) = \{b, d\}$, причем точки b, c двойные (см. рис. 2).

- 2) Точки a, b, c, d разбивают ориентированный контур Γ на четыре дуги ab, bc, cd, da (порядок букв указывает на направление движения от начала к концу согласно ориентации контура Γ), причем проекция $\pi: \Gamma \rightarrow l'$ отображает каждую из дуг ab, bc, cd гомеоморфно на дугу $st \subset l'$, а дуга da гомеоморфно

Рис. 3

отображается на дугу ts (см. рис. 2). Заметим, что при отображении дуги bc на дугу st ориентация меняется.

Рассмотрим отображение $\lambda'': \Gamma \rightarrow \Gamma''$. Образы точек a, b, c, d при этом отображении будем обозначать через a'', b'', c'', d'' . Заметим, что дуга $a''d''$ на контуре Γ'' является образом дуги ad и лежит на листе Мёбиуса $M = \Gamma^{(2)}$, а дуга $d''a''$ лежит на поверхности $\bar{C} = C/\tau = C_+$. Дугу $a''d''$ обозначим через S , она находится на симметрическом квадрате $(ad)^{(2)}$ дуги ad . Если дугу ad отождествить с отрезком, то симметрический квадрат $(ad)^{(2)}$ отождествляется с треугольником XYZ , который изображен на рис. 3. Заметим, что для точек и отрезков этого треугольника выполняются равенства

$$\begin{aligned} X &= a + a, & Y &= d + d, & Z &= a + d, \\ U &= c + c = \lambda''(a) = a'', & V &= b + b = \lambda''(d) = d'', \\ XY &= \{p + p \mid p \in ad\}, & XZ &= \{a + p \mid p \in ad\}, \\ YZ &= \{d + p \mid p \in ad\}, & UV &= \{p + p \mid p \in bc\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь проекцию $\pi: C \rightarrow L'$ (см. левую часть рис. 2). Прообраз дуги $ts \subset L'$ при этом отображении состоит из трех дуг, одна из которых равна дуге $da \subset \Gamma$, а две другие находятся на поверхностях $C_{\pm}$, будем их обозначать через $S_{\pm}$ соответственно. Дуга S_+ находится на поверхности C_+ , причем если отождествить поверхности $C_+, \bar{C}$, то дуга S_+ отождествится с дугой $d''a''$ на поверхности $\bar{C}$.

Замкнутый контур Γ'' на топологической поверхности Π разбивает ее на две части Π_1, Π_2 , это утверждение вытекает из лемм 3.4, 3.5. Нам нужно показать, что одна из частей Π_1, Π_2 гомеоморфна кругу. Пересечения этих частей с листом Мёбиуса M будем обозначать через M_1, M_2 , они разделяются дугой S . Одна из частей M_1, M_2 листа Мёбиуса M лежит на симметрическом квадрате $(ad)^{(2)}$, т.е. на треугольнике XYZ , она гомеоморфна кругу, тогда другая часть листа Мёбиуса M гомеоморфна листу Мёбиуса. Будем полагать, что первая

Рис. 4

часть, т.е. M_1 , гомеоморфна кругу, в противном случае изменим нумерацию частей Π_1, Π_2 . Пересечения $\Pi_1 \cap \overline{C}$, $\Pi_2 \cap \overline{C}$ обозначим через C_1, C_2 , они разделяются дугой S_+ . Одна из этих частей имеет общую дугу с поверхностью M_1 (см. рис. 3, на котором изображено объединение половинки C_+ и симметрического квадрата $(ad)^{(2)}$), этой частью является C_1 . Тогда достаточно показать, что поверхность C_1 гомеоморфна кругу. Сфера Римана L' разделяется прямой l' на две половинки, которые являются полусферами. Поверхность S состоит из четырех частей $C_1, C_2, \tau(C_1), \tau(C_2)$. При проекции $\pi: S \rightarrow L'$ край каждой из этих частей отображается на окружность l' . С другой стороны, для каждой точки $p \in l'$ все три точки (с учетом кратности) ее прообраза $\pi^{-1}(p)$ содержатся в объединении $\Gamma \cup S_+ \cup S_-$. Поэтому внутренние точки частей $C_1, C_2, \tau(C_1), \tau(C_2)$ отображаются в дополнение к окружности l' . Следовательно, каждая из частей $C_1, C_2, \tau(C_1), \tau(C_2)$ отображается на половинку сферы Римана L' . Обозначим образ поверхности C_1 через L'_+ , он совпадает с одной из половинок сферы Римана L' . Край части C_1 состоит из дуг S_+, cb , поэтому он отображается на окружность l' со степенью 1. Следовательно, пара $(C_1, \partial C_1)$ отображается на пару $(L'_+, \partial L'_+)$ также со степенью 1. Поэтому из голоморфности отображения $\pi: C_1 \rightarrow L'_+$ следует, что это отображение является гомеоморфизмом. Лемма доказана.

Заметим теперь, что леммы 3.4, 3.6 совпадают с первыми двумя утверждениями предложения 3.3, поэтому остается доказать только третье утверждение этого предложения. Контуры Γ', Γ'' на поверхности $\Pi = M \cup C_+$ не пересекаются, причем контур Γ' лежит на листе Мёбиуса M . В силу леммы 3.4 контур Γ' гомотопен краю ∂M листа Мёбиуса M , поэтому он сам ограничивает лист Мёбиуса, после вырезания которого из поверхности Π получится ориентируемая поверхность рода 2, обозначим ее через Π' . Край поверхности Π' состоит из контура Γ' , выберем ориентацию на поверхности Π' таким образом, чтобы индуцированная ориентация на крае совпадала с ориентацией контура Γ' . Заметим, что существует ретракция r_t , $0 \leq t \leq 1$, поверхности Π' на поверхность C_+ , причем такая, что отображение r_1 отображает гомеоморфно

с сохранением ориентации контур Γ' на контур Γ , а дуга S контура Γ'' отображится на дугу контура Γ с изменением ориентации (см. рис. 4). Следовательно, после вырезания из поверхности Π' диска, ограниченного контуром Γ'' , получается ориентируемая поверхность с краем рода 2, удовлетворяющая условиям третьего утверждения.

Предложение 3.3 доказано.

§ 4. Доказательство основной теоремы

Через $\mathcal{G}$ обозначим многообразие Грассмана, точками которого являются прямые в $\mathbb{P}_X^4$. Если $p \in \mathcal{G}$, то через L_p обозначается соответствующая прямая в $\mathbb{P}_X^4$. Через $\mathfrak{F} \subset \mathcal{G} \times \mathcal{B}$ обозначим полное пространство поверхностей Фано всех кубик, т.е.

$$\mathfrak{F} = \{(p, b) \in \mathcal{G} \times \mathcal{B} \mid L_p \subset V_b\}.$$

Рассмотрим проекцию $\pi_{\mathcal{G}}: \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{G}$. Если $p \in \mathcal{G}$, то ее прообраз $\pi_{\mathcal{G}}^{-1}(p)$ состоит из точек (p, b) таких, что кубика V_b проходит через прямую L_p . Поэтому прообраз $\pi_{\mathcal{G}}^{-1}(p)$ изоморфен проективному пространству $\mathbb{P}^{30}$. Следовательно, проекция $\pi_{\mathcal{G}}: \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{G}$ является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathbb{P}^{30}$. В частности, получаем, что $\mathfrak{F}$ – неособое 36-мерное многообразие. Для каждой точки $b \in \Delta^*$ определена двойная кривая C_b на особой поверхности F_b . Полное пространство этих кривых

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{b \in \Delta^*} C_b \times b \subset \mathcal{G} \times \Delta^*$$

образует неособое 34-мерное многообразие, которое является подмногообразием в $\mathfrak{F}$.

Пусть $b_0 \in \Delta^*$ – фиксированная точка. Тогда в $\mathcal{B}$ существует неособая комплексно-аналитическая параметрическая кривая $b = \beta(t)$, $|t| < 1$, со следующими свойствами:

- 1) $\beta(0) = b_0$, $\beta(t) \notin \Delta$ при $t \neq 0$;
- 2) кривая $b = \beta(t)$ проходит через точку b_0 трансверсально к Δ .

Через V_t будем обозначать семейство кубик $V_{\beta(t)}$. Кубика V_0 особая, имеющая единственную особую точку $a \in V_0$, которая является простой двойной точкой. Кубики V_t неособые при $t \neq 0$. Полное пространство этого семейства кубик V_t

$$\mathfrak{V}_{\beta} = \bigcup_{|t| < 1} V_t \times t \subset \mathbb{P}^4 \times \{|t| < 1\}$$

является неособым комплексно-аналитическим четырехмерным многообразием. Через F_t будем обозначать семейство поверхностей Фано кубик $V_{\beta(t)}$. Поверхность Фано F_0 особая, причем особые точки на ней образуют простую двойную кривую C , которая параметризует множество прямых на кубике V_0 , проходящих через особую точку $a \in V_0$. Поверхности Фано F_t неособые при $t \neq 0$.

Рассмотрим полное пространство семейства поверхностей Фано F_t

$$\mathfrak{F}_{\beta} = \bigcup_{|t| < 1} F_t \times t \subset \mathcal{G} \times \{|t| < 1\}.$$

Покажем, что справедлива

ЛЕММА 4.1. *Пространство $\mathfrak{F}_\beta$ является неособым комплексно-аналитическим трехмерным многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что пространство $\mathfrak{F}_\beta$ неособое в точках из кривой $C \times 0$. Рассмотрим проекцию $\pi_\Delta: \mathfrak{C} \rightarrow \Delta^*$. Тогда для каждой точки $c \in C \times b_0$ касательное отображение

$$(\pi_\Delta)_*: \mathbb{T}_c \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{T}_{b_0} \Delta^*$$

эпиморфно. Следовательно, образ касательного отображения

$$(\pi_{\mathcal{B}})_*: \mathbb{T}_c \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{T}_{b_0} \mathcal{B}$$

проекции $\pi_{\mathcal{B}}: \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{B}$ равен касательному пространству $\mathbb{T}_{b_0} \Delta$. Поэтому из трансверсальности кривой $\beta(t)$ к гиперповерхности Δ вытекает, что пространство $\mathfrak{F}_\beta$ неособое в точках из кривой $C \times 0$. Лемма доказана.

Кривые $C', C'' \subset C^{(2)}$ не пересекаются, а классы гомологий $[C'], [C''] \in H_2(C^{(2)}, \mathbb{Z})$ равны в силу следствия 3.2. Обозначим через $\pi': N' \rightarrow C'$, $\pi'': N'' \rightarrow C''$ нормальные комплексные линейные расслоения к кривым C', C'' в $C^{(2)}$. Тогда эти расслоения тривиальны в категории дифференцируемых комплексных векторных расслоений, поскольку индексы пересечений $(C', C') = (C'', C'') = (C', C'')$ равны нулю. Обозначим через N_C нормальное векторное расслоение к C в $\mathfrak{F}_\beta$; покажем, что выполняется равенство

$$N_C = (\lambda')^*(N') \oplus (\lambda'')^*(N'').$$

Расслоения $(\lambda')^*(N')$, $(\lambda'')^*(N'')$ будем обозначать через N'_C , N''_C соответственно, тогда предыдущее равенство запишется следующим образом:

$$N_C = N'_C \oplus N''_C. \quad (4.1)$$

Пусть U' , U'' – замкнутые окрестности кривых C' , C'' в $C^{(2)}$. Образы этих окрестностей при отображении $\lambda: C^{(2)} \rightarrow F_0$ обозначим через U'_C , U''_C соответственно и назовем *ветвями* поверхности F_0 . Заметим, что C – это кривая самопересечения особой поверхности F_0 , через эту кривую трансверсально проходят две неособые ветви U'_C , U''_C поверхности F_0 , а расслоения N'_C , N''_C являются нормальными расслоениями к кривой C на этих ветвях. Эти ветви трансверсально пересекаются в $\mathfrak{F}_\beta$ по кривой C , поэтому выполняется равенство (4.1).

Расслоения N'_C , N''_C , N_C тривиальны в категории дифференцируемых комплексных векторных расслоений. Следовательно, при $t \neq 0$ существует непрерывное отображение $\varrho_t: F_t \rightarrow F_0$, разрешающее особенности F_0 и удовлетворяющее следующим свойствам (см. [8]):

1) прообраз $\varrho_t^{-1}(C)$ гомеоморфен произведению $C \times S^1$ кривой C на окружность S^1 , причем существует такой гомеоморфизм $h: C \times S^1 \rightarrow \varrho_t^{-1}(C)$, что отображение

$$\varrho_t \circ h: C \times S^1 \rightarrow C$$

является проекцией;

2) отображение $\varrho_t: F_t \setminus \varrho_t^{-1}(C) \rightarrow F_0 \setminus C$ является гомеоморфизмом.

На расслоении N_C имеется вещественная структура $\varphi: N_C \rightarrow N_C$. Это антилинейная инволюция, которая индуцирована антилинейной инволюцией касательных расслоений $\tau_*: T\mathfrak{F}_\beta \rightarrow T\mathfrak{F}_\beta$, для нее коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N_C & \xrightarrow{\varphi} & N_C \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\tau} & C \end{array}$$

Таким образом, пара (N_C, φ) является *Вещественным* векторным расслоением в терминологии статьи [13]. Через $\mathbb{R}N_C$ обозначим вещественную часть расслоения N_C , т.е. множество неподвижных точек расслоения N_C относительно инволюции φ . Тогда $\mathbb{R}N_C$ является нормальным расслоением к кривой $\mathbb{R}C$ на теле $\mathbb{R}\mathfrak{F}_\beta$.

ЛЕММА 4.2. *Пусть квадрика $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом. Тогда Вещественное расслоение (N_C, φ) тривиально в категории Вещественных дифференцируемых расслоений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что расслоение (N_C, φ) изоморфно расслоению $(C \times \mathbb{C}^2, \varphi)$, на котором инволюция

$$\varphi: C \times \mathbb{C}^2 \rightarrow C \times \mathbb{C}^2$$

задается правилом: $\varphi(p, z) = (\tau(p), \bar{z})$, где черта означает комплексное сопряжение. Касательное отображение $\tau_*: T\mathfrak{F} \rightarrow T\mathfrak{F}$ для инволюции $\tau: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ отображает расслоение N'_C на расслоение N''_C , а расслоение N''_C на расслоение N'_C . Выберем какую-нибудь тривиализацию $\nu': N'_C \rightarrow C \times \mathbb{C}$. Пусть $\theta: C \times \mathbb{C} \rightarrow C \times \mathbb{C}$ – антилинейное отображение, заданное правилом $\theta(p, z) = (\tau(p), \bar{z})$. Тогда в качестве тривиализации расслоения N''_C возьмем отображение $\nu'': N''_C \rightarrow C \times \mathbb{C}$, где $\nu'' = \theta \circ \nu' \circ \tau_*$. Положим теперь $\nu = \sigma \circ (\nu' \oplus \nu'')$, где отображение $\sigma: C \times \mathbb{C}^2 \rightarrow C \times \mathbb{C}^2$ задается правилом $\sigma(p, (z_1, z_2)) = (p, (z_2, z_1))$, т.е. переставляет координаты. Тогда непосредственно проверяется, что отображение $\nu: N_C \rightarrow C \times \mathbb{C}^2$ является искомой тривиализацией. Лемма доказана.

На самом деле Вещественное расслоение (N_C, φ) тривиально и в случае, когда квадрика $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом. Нам это утверждение не потребуется, поэтому мы его не доказываем.

Из леммы 4.2 вытекает, что замкнутая окрестность кривой $\mathbb{R}C$ на теле $\mathbb{R}\mathfrak{F}_\beta$ представляет собой произведение $\mathbb{R}C \times D$, где $D = \{x^2 + y^2 \leq r\}$ – двумерный замкнутый диск. Окрестность $\mathbb{R}C \times D$ кривой $\mathbb{R}C$ является объединением непересекающихся окрестностей $\Gamma_i \times D$ кривых Γ_i , $i = 1, \dots, k$. Мы можем считать, что кривая $b = \beta(t)$ – вещественная, т.е. выполняется равенство $\beta(\bar{t}) = \tau(\beta(t))$. Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R}\mathfrak{F}_\beta \rightarrow (-1, 1)$, которая является ограничением проекции $\mathfrak{F}_\beta \rightarrow \{|t| < 1\}$. Ее ограничение на диск $D_p = p \times D$, где $p \in \mathbb{R}C$, имеет единственную невырожденную критическую точку $p = (p, 0)$, которая является или точкой минимума, или точкой максимума. Это утверждение справедливо в силу изолированности кривой $\mathbb{R}C$ на $\mathbb{R}F_0$. Поэтому можно выбрать такую

замкнутую окрестность кривой Γ_i и построить на ней такую структуру прямого произведения $\Gamma_i \times D$, что функция f на этой окрестности примет вид $f = x^2 + y^2$ или $f = -x^2 - y^2$.

Если $f = x^2 + y^2$, то при $0 < t < 1$ пересечение $\mathbb{R}F_t \cap (\Gamma_i \times D)$ представляет собой двумерный тор, а при $-1 < t < 0$ это пересечение пустое. А если $f = -x^2 - y^2$, то при $-1 < t < 0$ пересечение $\mathbb{R}F_t \cap (\Gamma_i \times D)$ представляет собой двумерный тор, а при $0 < t < 1$ это пересечение пустое.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 0.4. Возьмем точку $b_0 \in \mathcal{D}_1^3(k)$, где $k = 1, \dots, 5$ (при $k = 3$ нужно брать точку b_0 из $\mathcal{D}_1^3(3)_I$ или $\mathcal{D}_1^3(3)_{II}$; см. рис. 1, на котором изображен граф примыканий камер). Тогда можно считать, что при $0 < t < 1$ точка $\beta(t)$ принадлежит $\mathcal{B}(k)$, а при $-1 < t < 0$ точка $\beta(t)$ принадлежит $\mathcal{B}(k-1)$. Пусть $\varepsilon > 0$ – маленькое число. Тогда введем обозначения: $V_{\pm\varepsilon} = V_{\pm}$, $F_{\pm\varepsilon} = F_{\pm}$. Применяя предложение 2.3, получим неравенства

$$\dim H_*(\mathbb{R}F_+, \mathbb{F}_2) \leq 2k^2 + 2k + 7, \quad \dim H_*(\mathbb{R}F_-, \mathbb{F}_2) \leq 2k^2 - 2k + 7. \quad (4.2)$$

Поверхность $\mathbb{R}F_0$ представляет собой несвязное объединение

$$\mathbb{R}F_0 = \bigsqcup_{i < j} T_{ij} \sqcup \Pi \sqcup \mathbb{R}C.$$

При перестройке этой особой поверхности в неособые поверхности $\mathbb{R}F_{\pm}$ объединение $\bigsqcup_{i < j} T_{ij} \sqcup \Pi$ не меняется, а каждая из компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ заменяется на тор или пустое множество. Причем если в $\mathbb{R}F_+$ из компоненты Γ_i появляется тор, то в $\mathbb{R}F_-$ компонента Γ_i заменяется на пустое множество. В принципе, перестройка могла бы произойти наоборот, т.е. если в $\mathbb{R}F_-$ из компоненты Γ_i появляется тор, то в $\mathbb{R}F_+$ компонента Γ_i заменяется на пустое множество, но этого не может произойти в силу неравенств (4.2). Таким образом, выполняются равенства

$$\mathbb{R}F_+ = \Pi \sqcup 2k(k+1)T^2, \quad \mathbb{R}F_- = \Pi \sqcup 2k(k-1)T^2. \quad (4.3)$$

Следовательно, если $b \notin \mathcal{B}(1)'_I \cup \mathcal{B}(1)''_I$, то утверждения теоремы 0.4 доказаны.

Заметим также, что из равенств (4.3) следует, что при $b \notin \mathcal{B}(1)'_I \cup \mathcal{B}(1)''_I$ поверхность F_b является GM -поверхностью, поэтому для нее вырождается спектральная последовательность

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(F_b, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(F_b, G; \mathbb{F}_2). \quad (4.4)$$

Пусть теперь $b_0 \in \mathcal{D}_1^3(0)$, тогда мы можем взять кривую $b = \beta(t)$ такую, что при $0 < t < 1$ точка $\beta(t)$ принадлежит $\mathcal{B}(1)''_I$, а при $-1 < t < 0$ точка $\beta(t)$ принадлежит $\mathcal{B}(0)$. В этом случае множество $\mathbb{R}C$ пустое, поверхность $\mathbb{R}F_0$ неособая и гомеоморфна ${}_5S^2$. Тогда поверхности $\mathbb{R}F_{\pm}$ также гомеоморфны ${}_5S^2$. Таким образом, утверждение теоремы 0.4 при $b \in \mathcal{B}(1)''_I$ доказано. Заметим также, что в этом случае неравенство (2.2) строгое, поэтому поверхность F_b при $b \in \mathcal{B}(1)''_I$ не является GM -поверхностью, а точнее, дифференциалы $d_3^{p,3}$ во второй спектральной последовательности (4.4) не равны нулю.

Нам остается рассмотреть случай, когда $b \in \mathcal{B}(1)'_I$. Тогда мы должны взять точку $b_0 \in \mathcal{D} \langle (3, 1) \rangle$. Следовательно, множество $\mathbb{R}Q$ будет гиперboloидом,

а кривая $\mathbb{R}C$ является простой двойной кривой на особой поверхности $\mathbb{R}F_0$. Возьмем кривую $b = \beta(t)$ такую, что при $0 < t < 1$ точка $\beta(t)$ принадлежит $\mathcal{B}(1)'_I$, а при $-1 < t < 0$ точка $\beta(t)$ принадлежит $\mathcal{B}(0)$. Нам нужно понять, как устроена особая поверхность $\mathbb{R}F_0$ и как она перестраивается в неособую поверхность $\mathbb{R}F_+$.

Из предложения 3.3 следует, что тривиальны нормальные расслоения $\mathbb{R}N'$, $\mathbb{R}N''$ к кривым $\mathbb{R}C' = \Gamma'$, $\mathbb{R}C'' = \Gamma''$ на поверхности $\mathbb{R}C^{(2)} = \Pi$. Поэтому из равенства

$$\mathbb{R}N_C = (\lambda')^*(\mathbb{R}N') \oplus (\lambda'')^*(\mathbb{R}N'')$$

следует, что окрестность кривой $\mathbb{R}C = \Gamma$ на теле $\mathbb{R}\mathfrak{F}_\beta$ представляет собой произведение $\Gamma \times D$, а пересечение $\mathbb{R}F_0 \cap \Gamma \times D$ представляет собой произведение кривой Γ на крест $\{x^2 - y^2 = 0\} \cap D$. Также из предложения 3.3 следует, что после склейки кривых Γ' , Γ'' на поверхности Π получается поверхность $\bar{\Pi}$ с двойной кривой Γ , причем поверхность $\bar{\Pi}$ состоит из двух поверхностей Π_1 , Π_2 , пересекающихся по кривой Γ , где поверхность Π_1 гомеоморфна проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, а поверхность Π_2 гомеоморфна ${}_6S^2$. Тогда особая поверхность $\mathbb{R}F_0 = \bar{\Pi}$ может перестроиться в неособую поверхность $\mathbb{R}F_+$ одним из следующих способов: или поверхности Π_1 , Π_2 разойдутся, или мы вернемся к поверхности, гомеоморфной Π . Аналогичное утверждение справедливо для перестройки поверхности $\mathbb{R}F_0$ в поверхность $\mathbb{R}F_-$. Применим теперь неравенства из предложения 2.3

$$\dim H_*(\mathbb{R}F_+, \mathbb{F}_2) \leq 11, \quad \dim H_*(\mathbb{R}F_-, \mathbb{F}_2) \leq 7,$$

тогда получим, что при перестройке поверхности $\mathbb{R}F_0$ в поверхность $\mathbb{R}F_+$ возможен только первый способ, т.е. поверхности Π_1 , Π_2 разойдутся. В этом случае будет выполняться равенство

$$\dim H_*(\mathbb{R}F_+, \mathbb{F}_2) = \dim H^1(G, H_*(F_+, \mathbb{F}_2)),$$

т.е. поверхность F_+ является GM -поверхностью.

Теорема 0.4 полностью доказана. Эта теорема показывает, что топологический тип вещественной части $\mathbb{R}F_b$ поверхности Фано F_b не определяет жесткий изотопический класс кубики V_b . Действительно, если $b \in \mathcal{B}(0)$ или $b \in \mathcal{B}(1)''_I$, то поверхность $\mathbb{R}F_b$ имеет одинаковый топологический тип ${}_5S^2$. Аналогично, если $b \in \mathcal{B}(3)_I$ или $b \in \mathcal{B}(3)_{II}$, то поверхность $\mathbb{R}F_b$ имеет одинаковый топологический тип ${}_5S^2 \sqcup 6T^2$. В остальных случаях топологический тип вещественной части $\mathbb{R}F_b$ поверхности Фано F_b определяет жесткий изотопический класс кубики V_b . Мы сейчас сформулируем и докажем два предложения, из которых будет вытекать, что эквивариантный топологический тип поверхности Фано (F_b, τ) определяет жесткий изотопический класс кубики V_b . Прежде всего заметим, что мы уже доказали

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Поверхность Фано F_b не является GM -поверхностью только при $b \in \mathcal{B}(1)''_I$.*

Пусть $b \notin \mathcal{B}(0) \cup \mathcal{B}(1)'_I \cup \mathcal{B}(1)''_I$, тогда вещественная часть $\mathbb{R}F_b$ представляет собой несвязную сумму неориентируемой поверхности ${}_5S^2$ и нескольких торов, число которых обозначим через $n(b)$, а сами торы обозначим через $T_1^2, \dots, T_{n(b)}^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $b \notin \mathcal{B}(0) \cup \mathcal{B}(1)'_I \cup \mathcal{B}(1)''_I$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если кубика V_b имеет тип I, то классы гомологий

$$[T_1^2], \dots, [T_{n(b)}^2] \in H_2(F_b, \mathbb{F}_2)$$

линейно зависимы;

2) если кубика V_b имеет тип II, то классы гомологий

$$[T_1^2], \dots, [T_{n(b)}^2] \in H_2(F_b, \mathbb{F}_2)$$

линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что кубика V_b совпадает с кубикой V_+ , которую мы рассматривали при доказательстве теоремы 0.4; далее мы используем обозначения из этого доказательства. Тогда для поверхности Фано $F_+ = F_b$ определено непрерывное эквивариантное отображение $\varrho: F_+ \rightarrow F_0$, обладающее следующими свойствами:

1) прообраз $\varrho^{-1}(C)$ эквивариантно гомеоморфен произведению $C \times S^1$ кривой C на окружность S^1 , где инволюция на произведении $C \times S^1$ индуцирована инволюцией комплексного сопряжения на римановой поверхности C и тривиальной инволюцией на окружности S^1 ;

2) отображение $\varrho: F_+ \setminus \varrho^{-1}(C) \rightarrow F_0 \setminus C$ является эквивариантным гомеоморфизмом (далее прообраз $\varrho^{-1}(C)$ обозначается через $C \times S^1$).

Для доказательства первого утверждения предложения 4.4 мы должны предполагать, что $b \in \mathcal{B}(3)_I$ или $b \in \mathcal{B}(5)$. В этом случае мы брали точку b_0 , принадлежащую стенке $\mathcal{D}_1^3(3)_I$ или соответственно стенке $\mathcal{D}_1^3(5)$. Следовательно, вещественная алгебраическая кривая C имеет тип I, т.е. вещественная часть $\mathbb{R}C$ разбивает риманову поверхность C на две половинки. Поэтому класс гомологий

$$[\mathbb{R}(C \times S^1)] = [\mathbb{R}C \times S^1] \in H_2(C \times S^1, \mathbb{F}_2)$$

равен нулю. Но поверхность $\mathbb{R}(C \times S^1)$ является объединением торов $T_{i_1}^2, \dots, T_{i_k}^2$ из набора $T_1^2, \dots, T_{n(b)}^2$, где $k = 3$, если $b_0 \in \mathcal{D}_1^3(3)_I$, и $k = 5$ при $b_0 \in \mathcal{D}_1^3(5)$. Следовательно, линейная комбинация

$$[T_{i_1}^2] + \dots + [T_{i_k}^2] \in H_2(F_+, \mathbb{F}_2)$$

равна нулю.

Итак, первое утверждение доказано, переходим к доказательству второго. В этом случае мы берем точку b_0 , принадлежащую стенкам $\mathcal{D}_1^3(1)$, $\mathcal{D}_1^3(2)$, $\mathcal{D}_1^3(3)_{II}$, $\mathcal{D}_1^3(4)$. Тогда вещественная алгебраическая кривая C имеет тип II, т.е. вещественная часть $\mathbb{R}C$ не разбивает риманову поверхность C на две половинки. Следовательно, если

$$\Gamma_1, \dots, \Gamma_k, \quad 1 \leq k \leq 4,$$

— компоненты связности множества $\mathbb{R}C$, то классы гомологий

$$[\Gamma_1], \dots, [\Gamma_k] \in H_1(C, \mathbb{F}_2)$$

линейно независимы. Поэтому классы гомологий

$$[\Gamma_i \times \Gamma_j] \in H_2(C^2, \mathbb{F}_2), \quad i \neq j,$$

линейно независимы.

Вещественная часть $\mathbb{R}C^{(2)}$ симметрического квадрата $C^{(2)}$ содержит торы T_{ij} , где $1 \leq i < j \leq k$. Соответствующие классы гомологий

$$[T_{ij}] \in H_2(C^{(2)}, \mathbb{F}_2)$$

будут также линейно независимыми. Для доказательства этого факта рассмотрим проекцию $\pi: C^2 \rightarrow C^{(2)}$, она определяет гомоморфизм Гизина

$$\pi^!: H_2(C^{(2)}, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_2(C^2, \mathbb{F}_2),$$

для которого выполняется равенство

$$\pi^!([T_{ij}]) = [\Gamma_i \times \Gamma_j] + [\Gamma_j \times \Gamma_i].$$

Следовательно, из линейной зависимости классов гомологий $[T_{ij}]$, $1 \leq i < j \leq k$, на симметрическом квадрате $C^{(2)}$ вытекала бы линейная зависимость классов гомологий $[\Gamma_i \times \Gamma_j]$, $i \neq j$, на декартовом квадрате C^2 .

Вещественная часть $\mathbb{R}F_0$ особой поверхности Фано F_0 содержит торы $\lambda(T_{ij})$. Поскольку гомоморфизм

$$\lambda_*: H_2(C^{(2)}, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_2(F_0, \mathbb{F}_2)$$

является мономорфизмом (см. [8]), то классы гомологий $[\lambda(T_{ij})]$ на особой поверхности Фано F_0 будут также линейно независимыми.

Вещественная часть $\mathbb{R}F_+$ неособой поверхности Фано F_+ содержит торы $T_1^2, \dots, T_{n(b)}^2$ двух типов: $\rho^{-1}(\lambda(T_{ij}))$ и $\Gamma_i \times S^1$. Классы гомологий

$$[\Gamma_i \times S^1] \in H_2(C \times S^1, \mathbb{F}_2)$$

линейно независимы, поэтому из точной последовательности (см. [8])

$$0 \rightarrow H_2(C \times S^1, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_2(F_+, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\varrho_*} H_2(F_0, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0$$

получаем линейную независимость классов гомологий

$$[T_1^2], \dots, [T_{n(b)}^2] \in H_2(F_+, \mathbb{F}_2).$$

Предложение доказано.

Список литературы

1. В. А. Краснов, “О поверхности Фано вещественной трехмерной M -кубики”, *Матем. заметки*, **78**:5 (2005), 710–717; англ. пер.: V. A. Krasnov, “On the Fano surface of a real cubic M -threefold”, *Math. Notes*, **78**:5–6 (2005), 662–668.

2. В. А. Краснов, “Топологический тип поверхности Фано вещественной трехмерной M -кубик”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 61–94; англ. пер.: V. A. Krasnov, “The topological type of the Fano surface of a real three-dimensional M -cubic”, *Izv. Math.*, **69**:6 (2005), 1137–1167.
3. В. А. Краснов, “Жесткая изотопическая классификация вещественных трехмерных кубик”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:4 (2006), 91–134; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Rigid isotopy classification of real three-dimensional cubics”, *Izv. Math.*, **70**:4 (2006), 731–768.
4. В. А. Рохлин, “Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых”, *УМН*, **33**:5 (1978), 77–89; англ. пер.: V. A. Rokhlin, “Complex topological characteristics of real algebraic curves”, *Russian Math. Surveys*, **33**:5 (1978), 85–98.
5. А. В. Altman, S. I. Kleiman, “Foundations of the theory of Fano schemes”, *Compositio Math.*, **34**:1 (1977), 3–47.
6. В. А. Краснов, “Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:2 (1983), 268–297; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Harnack–Thom inequalities for mappings of real algebraic varieties”, *Izv. Math.*, **22**:2 (1984), 247–275.
7. А. Гротендик, *О некоторых вопросах гомологической алгебры*, ИЛ, М., 1961; пер. с фр.: A. Grothendieck, “Sur quelques points d’algèbre homologique”, *Tohoku Math. J.* (2), **9** (1957), 119–221.
8. С. Н. Clemens, P. A. Griffiths, “The intermediate Jacobian of the cubic threefold”, *Ann. of Math.* (2), **95**:2 (1972), 281–356.
9. А. И. Дегтярев, В. И. Звонилов, “Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени $(3, 3)$ на квадраках”, *Матем. заметки*, **66**:6 (1999), 810–815; англ. пер.: A. I. Degtyarev, V. I. Zvonilov, “Rigid isotopy classification of real algebraic curves of bidegree $(3, 3)$ on quadrics”, *Math. Notes*, **66**:5–6 (2000), 670–674.
10. Дж. Милнор, *Особые точки комплексных гиперповерхностей*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Stud., **61**, Princeton Univ. Press, Princeton; Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1968.
11. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотика интегралов*, Наука, М., 1984; англ. пер.: V. I. Arnol’d, S. M. Gusejn-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. II. Monodromy and asymptotics of integrals*, Monogr. Math., **83**, Birkhäuser, Boston, 1988.
12. В. А. Краснов, “Вещественные алгебраические GM -многообразия”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 39–66; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Real algebraic GM -varieties”, *Izv. Math.*, **62**:3 (1998), 465–491.
13. М. Ф. Atiyah, “ K -theory and reality”, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2), **17**:1 (1966), 165–193.

В. А. КРАСНОВ (V. A. KRASNOV)
 Ярославский государственный университет
 E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
 07.06.2005