Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вик. С. Куликов, Полугруппы разложений на множители и неприводимые компоненты пространства Гурвица. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 2, 151–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/im5886>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:38:12

УДК 512.53+512.544+512.772.5

Вик. С. Куликов

Полугруппы разложений на множители и неприводимые компоненты пространства Гурвица. II

Продолжены исследования, начатые в статье [1]. Рассматривается пространство Гурвица $\text{HUR}_{d,t}^{\mathcal{S}_d}(\mathbb{P}^1)$ накрытий степени d проективной прямой $\mathbb{P}^1$ с группой Галуа $\mathcal{S}_d$, имеющих фиксированный тип монодромии t , состоящий из набора локальных типов монодромий (т.е. набора классов сопряженности перестановок σ из симметрической группы $\mathcal{S}_d$, которая действует на множестве $I_d = \{1, \dots, d\}$). Доказано, что если тип t содержит достаточно большое число локальных монодромий, принадлежащих классу сопряженности C нечетной перестановки σ , которая оставляет неподвижными $fc \geq 2$ элементов из I_d , то пространство Гурвица $\text{HUR}_{d,t}^{\mathcal{S}_d}(\mathbb{P}^1)$ является неприводимым многообразием.

Библиография: 2 наименования.

Ключевые слова: полугруппа, разложения на множители элемента группы, неприводимые компоненты пространства Гурвица.

Введение

Настоящая статья является продолжением статьи [1]. Чтобы сформулировать результаты, содержащиеся в данной статье, напомним основные определения и обозначения, использовавшиеся в [1]. Набор (S, G, α, ρ) , где S – полугруппа, G – группа и $\alpha: S \rightarrow G$, $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(S)$ – гомоморфизмы, называется *полугруппой S над группой G* , если для всех $s_1, s_2 \in S$ выполнены соотношения

$$s_1 \cdot s_2 = \rho(\alpha(s_1))(s_2) \cdot s_1 = s_2 \cdot \lambda(\alpha(s_2))(s_1), \quad (1)$$

где $\lambda(g) = \rho(g^{-1})$. Пусть $(S_1, G, \alpha_1, \rho_1)$ и $(S_2, G, \alpha_2, \rho_2)$ – две полугруппы над группой G . Скажем, что гомоморфизм полугрупп $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ *определен над группой G* , если $\alpha_1(s) = \alpha_2(\varphi(s))$ и $\rho_2(g)(\varphi(s)) = \varphi(\rho_1(g)(s))$ для всех $s \in S_1$ и всех $g \in G$.

Пара (G, O) , в которой O – некоторое подмножество группы G , инвариантное относительно всех внутренних автоморфизмов группы G , называется *оснащенной группой*. Каждой оснащенной группе (G, O) сопоставляется полугруппа $S_O = S(G, O)$ над группой G (называемая *полугруппой разложений на множители элементов группы G с множителями из O*), порожденная элементами алфавита $X = X_O = \{x_g \mid g \in O\}$, которые связаны соотношениями

$$x_{g_1} \cdot x_{g_2} = x_{g_2} \cdot x_{g_2^{-1} g_1 g_2} = x_{g_1 g_2 g_1^{-1}} \cdot x_{g_1} \quad (2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 11-01-00185), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-4713.2010.1) и Лаборатории алгебраической геометрии ГУ-ВШЭ по гранту Правительства РФ (договор № 11.G34.31.0023).

для всех $x_{g_1}, x_{g_2} \in X$, и если $g_2 = \mathbf{1}$, то $x_{g_1} \cdot x_{\mathbf{1}} = x_{g_1}$. Отображение $\alpha: X \rightarrow G$, заданное для каждого $x_g \in X$ формулой $\alpha(x_g) = g$, индуцирует гомоморфизм $\alpha: S_O \rightarrow G$, который называется *гомоморфизмом произведения*. Действие ρ (слева) группы G на полугруппе S_O индуцируется действием на алфавите X

$$x_a \in X \mapsto \rho(g)(x_a) = x_{gag^{-1}} \in X$$

для каждого $g \in G$. Заметим, что $\alpha(\rho(g)(s)) = g\alpha(s)g^{-1}$ для всех $s \in S_O$ и всех $g \in G$.

Пусть $O \setminus \{\mathbf{1}\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_m$ – разложение множества O в несвязное объединение классов сопряженности элементов группы G . Для каждого элемента $s = x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n} \in S_O$ определен элемент $\tau(s) = n_1 C_1 + \dots + n_m C_m$ свободной абелевой полугруппы, порожденной символами $C_1, \dots, C_m$ (элемент $\tau(s)$ называется *типом* элемента s), где n_i – число множителей x_{g_j} , входящих в произведение $s = x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n}$, для которых $g_j \in C_i$. Число $n = \sum_{i=1}^m n_i$ называется *длиной* элемента s и обозначается через $\ln(s)$. Подполугруппа S полугруппы S_G называется *стабильной*, если существует элемент $s \in S$ (так называемый *стабилизирующий элемент* полугруппы S) такой, что $s_1 \cdot s = s_2 \cdot s$ для любых $s_1, s_2 \in S$ таких, что $\alpha(s_1) = \alpha(s_2)$ и $\tau(s_1) = \tau(s_2)$.

Каждому элементу $s = x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n} \in S_O$ сопоставляется подгруппа $G_s = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ группы G , порожденная элементами $g_1, \dots, g_n$. Для каждой двух (не обязательно собственных) подгрупп H и Γ группы G определены подполугруппы $S_O^H = \{s \in S(G, O) \mid G_s = H\}$ и $S_{O, \Gamma} = \{s \in S(G, O) \mid \alpha(s) \in \Gamma\}$. Если H и Γ – нормальные подгруппы группы G , то $S_{O, \Gamma}$ и S_O^H являются полугруппами над группой G . Положим $S_{O, \Gamma}^H = S_{O, \Gamma} \cap S_O^H$.

Пусть $\mathcal{S}_d$ – симметрическая группа, действующая на множестве $I_d = \{1, \dots, d\}$, и пусть $T_d \subset \mathcal{S}_d$ – подмножество, состоящее из транспозиций. Полугруппа $S_{\mathcal{S}_d}$ обозначается через Σ_d . Согласно [1, теорема 2.3] элемент

$$h = \left(\prod_{i=1}^{d-1} x_{(i, i+1)} \right)^3$$

является стабилизирующим элементом полугруппы Σ_d , где $(i, i+1) \in T_d$ – транспозиция, переставляющая элементы i и $i+1$ множества I_d .

Цель настоящей статьи – доказать, что аналогичный результат верен для почти всех нечетных перестановок симметрической группы $\mathcal{S}_d$. Более точно, пусть $C = C_\sigma$ – класс сопряженности перестановки $\sigma \in \mathcal{S}_d$. Обозначим через n_C порядок перестановки $\sigma \in C$, через $k_C = |C|$ – число перестановок, принадлежащих C , и через f_C – число элементов множества I_d , остающихся неподвижными при действии перестановки $\sigma \in C$ на множестве I_d .

Как известно, если σ – нечетная перестановка, то элементы из C порождают всю группу $\mathcal{S}_d$ и, в частности, каждая транспозиция $(i, j) \in \mathcal{S}_d$ может быть представлена в виде произведения некоторых перестановок, принадлежащих классу сопряженности C . В случае, когда $f_C \geq 2$, обозначим через m_C минимальное число перестановок из $C \cap \mathcal{S}_{d-2}$ (считаемых с кратностями), необходимое для представления транспозиции $(1, 2)$ в виде произведения перестановок,

принадлежащих $C \cap \mathcal{S}_{d-2}$, и зафиксируем одно из таких представлений:

$$(1, 2) = \sigma_1 \dots \sigma_{m_C}, \quad \sigma_i \in C \cap \mathcal{S}_{d-2}. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть C – класс сопряженности нечетной перестановки $\sigma \in \mathcal{S}_d$. Если $f_C \geq 2$, то существует константа

$$N = N_C < 3^{d-3}(2d-1)(d-1)m_C + n_C k_C + 1$$

такая, что любой элемент $s = \tilde{s} \cdot \bar{s} \in \Sigma_d^{S_d}$, где $\bar{s} \in S_C$, однозначно определяется своими значениями $\tau(s)$ и $\alpha(s)$, если $\ln(\bar{s}) \geq N$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть оснащенная группа $(\mathcal{S}_d, O)$ такова, что множество O содержит класс сопряженности C нечетной перестановки σ , $f_C \geq 2$. Тогда $S_O = S(\mathcal{S}_d, O)$ является стабильной полугруппой.

Отметим, что в общем случае константа N_C , существование которой утверждается в теореме 1, больше единицы. Например, как показано в [2], это так в случае, когда C – класс сопряженности перестановки $\sigma = (1, 2)(3, 4, 5) \in \mathcal{S}_8$.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 2.3 из [1] и базируется на следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть C – класс сопряженности нечетной перестановки $\sigma \in \mathcal{S}_d$, и пусть элемент $\bar{s}_{(i_1, i_2)} \in S_C$ таков, что:

- (i) $\alpha(\bar{s}_{(i_1, i_2)}) = (i_1, i_2)$;
- (ii) существуют $i_3, i_4 \in I_d \setminus \{i_1, i_2\}$ такие, что $\rho((i_3, i_4))(\bar{s}_{(i_1, i_2)}) = \bar{s}_{(i_1, i_2)}$.

Тогда существует вложение над $\mathcal{S}_d$ полугруппы $S_{T_d}^{S_d}$ в полугруппу S_C .

Пусть $\text{HUR}_{d,b}(\mathbb{P}^1)$ (соответственно, $\text{HUR}_{d,b}^G(\mathbb{P}^1)$) – пространство Гурвица накрытий проективной прямой $\mathbb{P}^1$ (определенных над $\mathbb{C}$) степени d , разветвленных над b точками (соответственно, накрытий с группой Галуа G). В [1] было показано, что неприводимые компоненты пространства $\text{HUR}_{d,b}(\mathbb{P}^1)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами действия группы $\mathcal{S}_d$ одновременно сопряжениями (т.е. действия, определенного гомоморфизмом ρ) на множестве $\Sigma_{d,1,b} = \{s \in \Sigma_{d,1} \mid \ln(s) = b\}$, и если $G = \mathcal{S}_d$, то неприводимые компоненты пространства $\text{HUR}_{d,b}^{S_d}(\mathbb{P}^1)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами полугруппы $\Sigma_{d,1}^{S_d}$ длины b . Если неприводимая компонента пространства $\text{HUR}_{d,b}^{S_d}(\mathbb{P}^1)$ соответствует элементу $s \in \Sigma_{d,1}^{S_d}$, то $\tau(s)$ называется *типом разложения монодромии* накрытий, принадлежащих этой неприводимой компоненте.

Обозначим через $\text{HUR}_{d,t}^{S_d}(\mathbb{P}^1)$ объединение неприводимых компонент, соответствующих элементам $s \in \Sigma_{d,1}^{S_d}$, $\tau(s) = t$.

В качестве следствия из теоремы 1 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пространство $\text{HUR}_{d,t}^{S_d}(\mathbb{P}^1)$ неприводимо, если тип разложения монодромии t содержит более чем N_C множителей, принадлежащих классу сопряженности C нечетной перестановки $\sigma \in \mathcal{S}_d$ такой, что $f_C \geq 2$, где число N_C определено в теореме 1.

Отметим, что для пространств Гурвица d -листных накрытий диска $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ (соответственно, d -листных накрытий аффинной прямой $\mathbb{C}^1$) также имеет место утверждение, аналогичное теореме 3.

§ 1. Доказательство теоремы 2

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $(i_1, i_2) = (1, 2)$ и $(i_3, i_4) = (3, 4)$.

Для каждой транспозиции $(i, j) \in T_d$ выберем такую перестановку $\sigma_{i,j} \in \mathcal{S}_d$, что $(i, j) = \sigma_{i,j}(1, 2)\sigma_{i,j}^{-1}$, и положим

$$c = \bar{s}_{(1,2)}^2 \cdot \bar{s}_{(2,3)}^2 \cdot \dots \cdot \bar{s}_{(d-1,d)}^2,$$

где $\bar{s}_{(i,j)} = \rho(\sigma_{i,j})(\bar{s}_{(1,2)})$.

Очевидно, что $\alpha(\bar{s}_{(i,j)}) = (i, j)$ и $\alpha(c) = 1$, а так как транспозиции $(1, 2), \dots, (d-1, d)$ порождают всю группу $\mathcal{S}_d$, то $c \in S_{C,1}^{S_d}$. Поэтому согласно [1, предложение 1.1, 2)] элемент c является неподвижным при действии сопряжениями группы $\mathcal{S}_d$ на полугруппе S_C .

При $k \geq 4$ обозначим через $Z_k \simeq \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_{k-2}$ подгруппу группы $\mathcal{S}_d$, порожденную транспозициями $(1, 2)$ и (i, j) , $3 \leq i < j \leq k$. Отметим, что Z_d является центролизатором в группе $\mathcal{S}_d$ транспозиции $(1, 2)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Существует элемент $z_{(1,2)} \in S_C$ такой, что $\alpha(z_{(1,2)}) = (1, 2)$ и $\rho(\sigma)(z_{(1,2)}) = z_{(1,2)}$ для каждой перестановки $\sigma \in Z_d$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по k покажем, что существует элемент $y_{(1,2),k} \in S_C^{S_d}$ такой, что $\alpha(y_{(1,2),k}) = (1, 2)$ и $\rho(\sigma)(y_{(1,2),k}) = y_{(1,2),k}$ для каждой перестановки $\sigma \in Z_k$. Тогда $z_{(1,2)} = y_{(1,2),d}$ является искомым элементом.

Положим $y_{(1,2),4} = \bar{s}_{(1,2)} \cdot c$. Если переставить первый множитель $\bar{s}_{(1,2)}$ направо, то получим

$$\begin{aligned} y_{(1,2),4} &= \bar{s}_{(1,2)} \cdot \bar{s}_{(1,2)} \cdot \bar{s}_{(1,2)} \cdot \bar{s}_{(2,3)}^2 \cdot \dots \cdot \bar{s}_{(d-1,d)}^2 \\ &= \rho((1, 2))(\bar{s}_{(1,2)}) \cdot \bar{s}_{(1,2)} \cdot \bar{s}_{(1,2)} \cdot \bar{s}_{(2,3)}^2 \cdot \dots \cdot \bar{s}_{(d-1,d)}^2 \\ &= \rho((1, 2))(\bar{s}_{(1,2)}) \cdot c = \rho((1, 2))(\bar{s}_{(1,2)}) \cdot \rho((1, 2))(c) \\ &= \rho((1, 2))(\bar{s}_{(1,2)} \cdot c) = \rho((1, 2))(y_{(1,2),4}), \end{aligned}$$

так как элемент c является неподвижным при действии группы $\mathcal{S}_d$ сопряжениями.

Аналогично, согласно предположениям в теореме 2 имеем

$$\begin{aligned} \rho((3, 4))(y_{(1,2),4}) &= \rho((3, 4))(\bar{s}_{(1,2)} \cdot c) = \rho((3, 4))(\bar{s}_{(1,2)}) \cdot \rho((3, 4))(c) \\ &= \bar{s}_{(1,2)} \cdot c = y_{(1,2),4}, \end{aligned}$$

и поэтому $\rho(\sigma)(y_{(1,2),4}) = y_{(1,2),4}$ для всех $\sigma \in Z_4$.

Предположим, что для некоторого $k \geq 4$, $k < d$, мы построили элемент $y_{(1,2),k} \in S_C^{S_d}$ такой, что $\alpha(y_{(1,2),k}) = (1, 2)$ и $\rho(\sigma)(y_{(1,2),k}) = y_{(1,2),k}$ для всех $\sigma \in Z_k$. Рассмотрим элемент $y'_{(1,2),k} = \rho((k, k+1))(y_{(1,2),k})$. Очевидно, элемент

$y'_{(1,2),k}$ принадлежит полугруппе $S_C^{\mathcal{S}_d}$, и легко видеть, что $\alpha(y'_{(1,2),k}) = (1, 2)$. Поэтому элемент $y_{(1,2),k} \cdot y'_{(1,2),k}$ принадлежит полугруппе $S_{C,1}^{\mathcal{S}_d}$ и, следовательно, он неподвижен при действии группы $\mathcal{S}_d$ сопряжениями. Кроме того, элемент $y'_{(1,2),k}$ является неподвижным при действии группы Z'_k , порожденной транспозициями $(i, j) \in Z_{k+1}$, $i, j \neq k$. Действительно, если $(i, j) \in Z'_k$ и $i, j \neq k+1$, имеем

$$\begin{aligned} \rho((i, j))(y'_{(1,2),k}) &= \rho((i, j))(\rho((k, k+1))(y_{(1,2),k})) \\ &= \rho((i, j)(k, k+1))(y_{(1,2),k}) = \rho((k, k+1)(i, j))(y_{(1,2),k}) \\ &= \rho((k, k+1))(\rho((i, j))(y_{(1,2),k})) = \rho((k, k+1))(y_{(1,2),k}) = y'_{(1,2),k}. \end{aligned}$$

Если $(i, k+1) \in Z'_k$, то

$$\begin{aligned} \rho((i, k+1))(y'_{(1,2),k}) &= \rho((i, k+1))(\rho((k, k+1))(y_{(1,2),k})) \\ &= \rho((i, k+1)(k, k+1))(y_{(1,2),k}) = \rho((k, k+1)(i, k))(y_{(1,2),k}) \\ &= \rho((k, k+1))(\rho((i, k))(y_{(1,2),k})) = \rho((k, k+1))(y_{(1,2),k}) = y'_{(1,2),k}, \end{aligned}$$

так как $(i, k) \in Z_k$.

Более того, элементы $y_{(1,2),k}$, $y'_{(1,2),k}$ коммутируют друг с другом. Действительно,

$$\begin{aligned} y'_{(1,2),k} \cdot y_{(1,2),k} &= \rho(\alpha(y'_{(1,2),k}))(y_{(1,2),k}) \cdot y'_{(1,2),k} \\ &= \rho((1, 2))(y_{(1,2),k}) \cdot y'_{(1,2),k} = y_{(1,2),k} \cdot y'_{(1,2),k}. \end{aligned}$$

Положим $y_{(1,2),k+1} := y_{(1,2),k}^2 \cdot y'_{(1,2),k}$. Легко видеть, что $y_{(1,2),k+1} \in S_C^{\mathcal{S}_d}$ и $\alpha(y_{(1,2),k+1}) = (1, 2)$. Покажем, что $\rho(\sigma)(y_{(1,2),k+1}) = y_{(1,2),k+1}$ для каждой перестановки $\sigma \in Z_{k+1}$. Для этого заметим, что группа Z_{k+1} порождена элементами групп Z_k и Z'_k . Для каждой перестановки $\sigma \in Z_k$ имеем

$$\begin{aligned} \rho(\sigma)(y_{(1,2),k+1}) &= \rho(\sigma)(y_{(1,2),k} \cdot y_{(1,2),k} \cdot y'_{(1,2),k}) \\ &= \rho(\sigma)(y_{(1,2),k}) \cdot \rho(\sigma)(y_{(1,2),k} \cdot y'_{(1,2),k}) = y_{(1,2),k} \cdot y_{(1,2),k} \cdot y'_{(1,2),k}, \end{aligned}$$

так как элемент $y_{(1,2),k} \cdot y'_{(1,2),k} \in S_{C,1}^{\mathcal{S}_d}$ является неподвижным при действии группы $\mathcal{S}_d$ сопряжениями.

Аналогично, для каждой перестановки $\sigma \in Z'_k$ имеем

$$\begin{aligned} \rho(\sigma)(y_{(1,2),k+1}) &= \rho(\sigma)(y_{(1,2),k}^2 \cdot y'_{(1,2),k}) \\ &= \rho(\sigma)(y_{(1,2),k}^2) \cdot \rho(\sigma)(y'_{(1,2),k}) = y_{(1,2),k}^2 \cdot y'_{(1,2),k} = y_{(1,2),k+1}, \end{aligned}$$

так как элемент $y_{(1,2),k} \cdot y_{(1,2),k} \in S_{C,1}^{\mathcal{S}_d}$ является неподвижным при действии группы $\mathcal{S}_d$ сопряжениями. Утверждение доказано.

Рассмотрим орбиту $X_{T_{C,d}}$ элемента $z_{(1,2)}$ при действии группы $\mathcal{S}_d$ сопряжениями на полугруппе S_C , где $z_{(1,2)}$ – элемент, построенный в доказательстве утверждения 1 с помощью элемента $\bar{s}_{(1,2)}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Отображение $\bar{\alpha}: X_{T_{C,d}} \rightarrow X_{T_d} = \{x_{(i,j)} \mid (i,j) \in T_d\}$, заданное формулой*

$$\bar{\alpha}(\rho(\sigma)(z_{(1,2)})) = x_{\sigma(1,2)\sigma^{-1}},$$

является взаимно однозначным соответствием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\bar{\alpha}: X_{T_{C,d}} \rightarrow X_{T_d}$ сюръективно, так как для каждой транспозиции $(i,j) \in T_d$ существует перестановка $\sigma \in S_d$ такая, что $(i,j) = \sigma(1,2)\sigma^{-1}$, и для этой перестановки σ имеем

$$\begin{aligned} \alpha(\rho(\sigma)(z_{(1,2)})) &= \sigma(1,2)\sigma^{-1} = (i,j), \\ \alpha(\bar{\alpha}(\rho(\sigma)(z_{(1,2)}))) &= \alpha(x_{\sigma(1,2)\sigma^{-1}}) = \sigma(1,2)\sigma^{-1} = (i,j). \end{aligned}$$

Порядок группы Z_d равен $2(d-2)!$. Следовательно, согласно утверждению 1 число $|X_{T_{C,d}}|$ элементов множества $X_{T_{C,d}}$ не превосходит $\frac{d!}{2(d-2)!} = \frac{d(d-1)}{2} = |T_d|$, и поэтому отображение $\bar{\alpha}: X_{T_{C,d}} \rightarrow X_{T_d}$ является взаимно однозначным соответствием. Утверждение доказано.

Обозначим через $z_{(i,j)}$ элемент $z \in X_{T_{C,d}}$ такой, что $\alpha(z) = (i,j)$, и через $S_{T_{C,d}}$ – подполугруппу полугруппы S_C , порожденную элементами $z_{(i,j)}$, $1 \leq i, j \leq d$, $i \neq j$. Из построения элементов $z_{(i,j)}$ следует, что $S_{T_{C,d}}$ является полугруппой над группой S_d .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Подполугруппа $S_{T_{C,d}}$ полугруппы S_C является полугруппой над S_d . Элементы $z_{(i,j)} \in S_{T_{C,d}}$, $1 \leq i, j \leq d$, $i \neq j$, удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} z_{(i,j)} &= z_{(j,i)} \quad \forall \{i,j\}_{\text{ord}} \subset I_d, \\ z_{(i_1,i_2)} \cdot z_{(i_1,i_3)} &= z_{(i_2,i_3)} \cdot z_{(i_1,i_2)} = z_{(i_1,i_3)} \cdot z_{(i_2,i_3)} \quad \forall \{i_1,i_2,i_3\}_{\text{ord}} \subset I_d, \\ z_{(i_1,i_2)} \cdot z_{(i_3,i_4)} &= z_{(i_3,i_4)} \cdot z_{(i_1,i_2)} \quad \forall \{i_1,i_2,i_3,i_4\}_{\text{ord}} \subset I_d. \end{aligned} \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из построения элементов $z_{(i,j)}$ и в силу [1, утверждение 1.1].

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Отображение $\bar{\alpha}^{-1}: X_{T_d} \rightarrow X_{T_{C,d}}$ продолжается до сюръективного гомоморфизма $\bar{\alpha}^{-1}: S_{T_d} \rightarrow S_{T_{C,d}}$ полугрупп над группой S_d .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если в соотношения (4) подставить $x_{(i,j)}$ вместо $z_{(i,j)}$, то получим определяющие соотношения в полугруппе S_{T_d} . Поэтому из утверждения 3 следует, что $\bar{\alpha}^{-1}$ продолжается до сюръективного гомоморфизма полугрупп над группой S_d . Утверждение доказано.

Для элемента $s \in S_{T_{C,d}}$, где s – произведение n порождающих элементов $z_{(i,j)}$ полугруппы $S_{T_{C,d}}$, определим T -длину, положив $\ln_T(s) = n$. Имеем $\ln(s) = \ln_T(\bar{\alpha}^{-1}(s))$ для $s \in S_{T_d}$.

Отметим, что из утверждения 4 следует, что всякое утверждение в [1], если некоторый элемент из S_{T_d} может быть представлен в виде некоторого произведения порождающих элементов $x_{i,j}$, имеет место и для элементов из $S_{T_{C,d}}$, если в данном утверждении заменить $x_{(i,j)}$ на $z_{(i,j)}$ и длины на T -длины.

Определим подполугруппу $S_{T_{C,d}}^{S_d,T}$ полугруппы $S_{T_{C,d}}$ следующим образом:

$$S_{T_{C,d}}^{S_d,T} := \bar{\alpha}^{-1}(S_{T_d}^{S_d}).$$

Теорема 2 вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Ограничение гомоморфизма $\bar{\alpha}^{-1}: S_{T_d} \rightarrow S_{T_{C,d}}$ на $S_{T_d}^{S_d}$,*

$$\bar{\alpha}^{-1}: S_{T_d}^{S_d} \rightarrow S_{T_{C,d}}^{S_d,T},$$

является изоморфизмом полугрупп над группой $\mathcal{S}_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инъективность гомоморфизма $\bar{\alpha}^{-1}: S_{T_d}^{S_d} \rightarrow S_{T_{C,d}}^{S_d,T}$ является следствием из теоремы 2.1 в [1].

Отметим, что из теоремы 2.1 в [1] и утверждения 5 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Элементы s полугруппы $S_{T_{C,d}}^{S_d,T}$ однозначно определяются своими значениями $\alpha(s)$ и $\ln_T(s)$.*

§ 2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим элемент $\bar{s}_{(1,2)} = x_{\sigma_1} \cdots x_{\sigma_{m_C}}$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_{m_C} \in C$ – множители в представлении (3).

Если $f_C \geq 2$, то мы можем и будем предполагать, что все перестановки σ_i , входящие в разложение (3), принадлежат подгруппе $\mathcal{S}_d^{\{3,4\}} \simeq \mathcal{S}_{d-2}$ симметрической группы $\mathcal{S}_d$, элементы которой оставляют неподвижными элементы $3, 4 \in I_d$. В этом случае элемент $\bar{s}_{(1,2)} = x_{\sigma_1} \cdots x_{\sigma_{m_C}}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Следовательно, элементы $z_{(i,j)}$, построенные в § 1 с помощью элемента $\bar{s}_{(1,2)} = x_{\sigma_1} \cdots x_{\sigma_{m_C}}$, однозначно определяют в S_C полугруппу $S_{T_{C,d}}^{S_d,T}$, изоморфную над $\mathcal{S}_d$ полугруппе $S_{T_d}^{S_d}$.

Отметим, что длина элемента $z_{(1,2)}$, построенного в доказательстве утверждения 1, есть $\ln(z_{(1,2)}) = 3^{d-4}(2d-1)m_C$, если мы начнем построение с элемента $\bar{s}_{(1,2)} = x_{\sigma_1} \cdots x_{\sigma_{m_C}}$.

Обозначим

$$h_C = (z_{(1,2)} \cdot z_{(2,3)} \cdots z_{(d-1,d)})^3.$$

Элемент h_C принадлежит полугруппе $S_{T_{C,d}}^{S_d,T}$. Запишем элемент h_C в виде произведения

$$h_C = x_{\sigma_1} \cdots x_{\sigma_L}, \quad \sigma_i \in C, \quad i = 1, \dots, L.$$

Легко видеть, что элемент h_C имеет длину

$$\ln(h_C) = 3^{d-3}(2d-1)(d-1)m_C := L.$$

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1, и пусть $s = \tilde{s} \cdot \bar{s} \in \Sigma_d^{S_d}$, где элемент $\bar{s} \in S_C$ имеет длину*

$$\ln(\bar{s}) := M \geq 3^{d-3}(2d-1)(d-1)m_C + n_C k_C.$$

Тогда элемент s может быть представлен в виде произведения: $s = \tilde{s}' \cdot h_C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\bar{s} = x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_M}, \quad \sigma_i \in C. \quad (5)$$

Поскольку $M = \ln(\bar{s}) \geq 3^{d-3}(2d-1)(d-1)m_C + n_C k_C > n_C k_C$, для некоторой перестановки $\sigma \in C$ найдется по крайней мере $n_C + 1$ множителей, входящих в разложение (5) и равных x_σ . Следовательно, элемент $\bar{s}$ может быть записан в виде $\bar{s} = \tilde{s}' \cdot x_\sigma^{n_C}$, где элемент $\tilde{s}' \in S_C$ таков, что $\tilde{s} \cdot \tilde{s}' \in \Sigma_d^{S_d}$. Согласно [1, лемма 1.1] имеем

$$s = \tilde{s} \cdot \tilde{s}' \cdot x_\sigma^{n_C} = \tilde{s} \cdot \tilde{s}' \cdot x_{\sigma_L}^{n_C} = \tilde{s} \cdot \bar{s}_L \cdot x_{\sigma_L},$$

где $\bar{s}_L = \tilde{s}' \cdot x_{\sigma_L}^{n_C-1}$. Отметим, что $\tilde{s} \cdot \bar{s}_L \in \Sigma_d^{S_d}$ и $\ln(\bar{s}_L) > n_C k_C$. Следовательно, используя те же аргументы, элемент $\tilde{s} \cdot \bar{s}_L$ можем записать в виде $\tilde{s} \cdot \bar{s}_L = \tilde{s} \cdot \tilde{s}'_L \cdot x_{\sigma_{L-1}}^{n_C-1} \cdot x_{\sigma_{L-1}}$. Положим $\bar{s}_{L-1} = \tilde{s}'_L \cdot x_{\sigma_{L-1}}^{n_C-1}$. Используя те же самые аргументы для $\tilde{s} \cdot \bar{s}_{L-1}$, получим, что $\tilde{s} \cdot \bar{s}_{L-1} = \tilde{s} \cdot \bar{s}_{L-2} \cdot x_{\sigma_{L-1}}$, и т.д. Окончательно, на L -м шаге мы получим, что

$$s = \tilde{s} \cdot \bar{s} = \tilde{s} \cdot \bar{s}_0 \cdot (x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_L}) = \tilde{s} \cdot \bar{s}_0 \cdot h_C.$$

Утверждение доказано.

Теперь, чтобы завершить доказательство теоремы 1, напомним, что доказательство теоремы 2.3 в [1] состоит из двух частей. В первой части доказательства для элемента $s = \tilde{s} \cdot \bar{s} \in \Sigma_d^{S_d}$, где $\bar{s} \in S_{T_d}$ имеет длину $\ln(\bar{s}) \geq 3(d-1)$, было доказано существование другого разложения на множители элемента s : $s = \tilde{s}_1 \cdot \bar{s}_1$, в котором элемент $\bar{s}_1 \in S_{T_d}^{S_d}$ имеет длину $\ln(\bar{s}_1) = 3(d-1)$. В этом случае элемент $\bar{s}_1$ однозначно определяется своим произведением $\alpha(\bar{s}_1) = \alpha(\tilde{s}_1)^{-1} \alpha(s)$.

Во второй части доказательства теоремы 2.3 в [1] было показано, что для такого разложения на множители $s = \tilde{s}_1 \cdot \bar{s}_1$ существует другое разложение $s = \tilde{s}_2 \cdot \bar{s}_2$, в котором $\bar{s}_2 \in S_{T_d}^{S_d}$ также имеет длину $\ln(\bar{s}_2) = 3(d-1)$, а элемент $\tilde{s}_2$ однозначно определяется типом $\tau(\tilde{s}_1)$. При этом использовались только свойства полугруппы S_{T_d} и соотношения (1) в полугруппах разложений на множители. Поэтому ввиду утверждений 5, 6 конец доказательства теоремы 1 почти дословно совпадает со второй частью доказательства теоремы 2.3 в [1]. Необходимо сделать только следующие замены: элементы $x_{(i,j)}$ заменяются на $z_{(i,j)}$, длины элементов – на T -длины, элемент $h_{d,g}$ – на $\bar{\alpha}^{-1}(h_{d,g})$, полугруппа $S_{T_d}^{S_d}$ – на $S_{T_{C,d}}^{S_d,T}$ и гомоморфизм r – на $\bar{r} = \bar{\alpha}^{-1} \circ r$.

Однако, по требованию рецензента, мы еще раз приведем полностью это доказательство. Для этого обозначим через $h_{C,d,g} = \bar{\alpha}^{-1}(h_{d,g})$ образ элемента Гурвица $h_{d,g} = x_{(1,2)}^{2g} \cdot x_{(1,2)}^2 \cdot \dots \cdot x_{(d-1,d)}^2$.

ЛЕММА 1. Для любого несвязного объединения $\{i_{1,1}, \dots, i_{k_1,1}\} \sqcup \dots \sqcup \{i_{1,n}, \dots, i_{k_n,n}\}$ упорядоченных подмножеств множества I_d элемент Гурвица $h_{C,d,0}$ может быть представлен как произведение:

$$h_{C,d,0} = (z_{(i_{1,1}, i_{2,1})} \cdot \dots \cdot z_{(i_{k_1-1,1}, i_{k_1,1})}) \cdot \dots \cdot (z_{(i_{1,n}, i_{2,n})} \cdot \dots \cdot z_{(i_{k_n-1,n}, i_{k_n,n})}) \cdot \bar{h},$$

где $\bar{h}$ – некоторый элемент полугруппы $S_{T_{C,d}}^{S_d,T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из [1, лемма 2.9] и утверждения 5.

Согласно утверждению 6 элемент s может быть представлен в виде произведения: $s = \tilde{s}' \cdot \bar{s}$, где $\bar{s}$ – некоторый элемент полугруппы $S_{T_{C,d}}^{S_d, T}$, имеющих T -длину $k \geq 3(d-1)$ (в нашем случае $\bar{s} = h_C$ и $k = 3(d-1)$), и пусть $\tilde{s}' = x_{\sigma'_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma'_m}$. Согласно [1, предложение 2.4] и в силу утверждения 5 имеем $\bar{s} = h_{C,d,0} \cdot \bar{s}'$.

Чтобы завершить доказательство теоремы 1, используем индукцию по m . Если $m = 0$ (т.е. если $s \in S_{T_{C,d}}$), то теорема 1 следует из [1, предложение 2.4] и утверждения 5.

Пусть $m = 1$. Для канонического представителя $\sigma_{m,0}$ типа $t(\sigma_m)$ (определение канонического представителя см. в [1]) существует элемент $\bar{\sigma}_m \in \mathcal{S}_d$ такой, что $\sigma_{m,0} = \bar{\sigma}_m^{-1} \sigma'_m \bar{\sigma}_m$. Перестановка $\bar{\sigma}_m$ может быть разложена в произведение циклических перестановок, и каждая из циклических перестановок может быть разложена в произведение транспозиций:

$$\bar{\sigma}_m = ((i_{1,1}, i_{2,1}) \dots (i_{k_1-1,1}, i_{k_1,1})) \dots ((i_{1,n}, i_{2,n}) \dots (i_{k_n-1,n}, i_{k_n,n})).$$

Рассмотрим элемент

$$\bar{r}(x_{\bar{\sigma}_m}) = (z_{(i_{1,1}, i_{2,1})} \dots z_{(i_{k_1-1,1}, i_{k_1,1})}) \dots (z_{(i_{1,n}, i_{2,n})} \dots z_{(i_{k_n-1,n}, i_{k_n,n})}) \in S_{T_{C,d}}.$$

Согласно лемме 1 имеем

$$h_{C,d,0} = \bar{r}(x_{\bar{\sigma}_m}) \cdot \bar{h}_m,$$

где $\bar{h}_m$ – некоторый элемент из $S_{T_{C,d}}^{S_d, T}$. Поэтому

$$\begin{aligned} s &= x_{\sigma'_m} \cdot h_{d,0} \cdot \bar{s}' = x_{\sigma'_m} \cdot \bar{r}(x_{\bar{\sigma}_m}) \cdot \bar{h}_m \cdot \bar{s}' \\ &= \bar{r}(x_{\bar{\sigma}_m}) \cdot x_{\sigma_{m,0}} \cdot \bar{h}_m \cdot \bar{s}' = x_{\sigma_{m,0}} \cdot \bar{r}(x_{\bar{\sigma}'_m}) \cdot \bar{h}_m \cdot \bar{s}', \end{aligned}$$

где $x_{\bar{\sigma}'_m} = \lambda(\sigma_{m,0})(x_{\bar{\sigma}_m})$. Имеем элемент $\bar{s}'_1 = \bar{r}(x_{\bar{\sigma}'_m}) \cdot \bar{h}_m \cdot \bar{s}' \in S_{T_{C,d}}^{S_d, T}$ и его произведение $\alpha(\bar{s}'_1) = \sigma_{m,0}^{-1} \alpha(s)$. Следовательно, согласно [1, теорема 2.4] и утверждению 5 получаем $\bar{s}'_1 = \bar{r}(x_\sigma) \cdot h_{C,d,g}$, где $\sigma = \alpha(\bar{s}'_1) = \sigma_{m,0}^{-1} \alpha(s)$ и $g = \frac{k - \ln_t(x_\sigma)}{2} - d + 1$.

Теперь предположим, что теорема 1 доказана для всех $m < m_0$, и рассмотрим элемент

$$s = x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_{m_0}} \cdot \bar{s}_1,$$

где элемент $\bar{s}_1 \in S_{T_{C,d}}^{S_d, T}$ имеет T -длину $k \geq 3(d-1)$. Имеем

$$\begin{aligned} s &= x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_{m_0}} \cdot \bar{s}_1 = x_{\sigma'_2} \cdot \dots \cdot x_{\sigma'_{m_0}} \cdot x_{\sigma_1} \cdot \bar{s}_1 \\ &= x_{\sigma'_2} \cdot \dots \cdot x_{\sigma'_{m_0}} \cdot x_{\sigma_{1,0}} \cdot \bar{s}'_1 = x_{\sigma_{1,0}} \cdot x_{\sigma''_2} \cdot \dots \cdot x_{\sigma''_{m_0}} \cdot \bar{s}'_1, \end{aligned}$$

где $\sigma'_j = \sigma_1 \sigma_j \sigma_1^{-1}$ и $\sigma''_j = \sigma_{1,0}^{-1} \sigma'_j \sigma_{1,0}$ для $j = 2, \dots, m$ и элемент $\bar{s}'_1 \in S_{T_{C,d}}^{S_d, T}$ такой, что $\ln_T(\bar{s}'_1) = k$. Следовательно, согласно индуктивному предположению имеем

$$s = x_{\sigma_{1,0}} \cdot (x_{\sigma''_2} \cdot \dots \cdot x_{\sigma''_{m_0}} \cdot \bar{s}'_1) = x_{\sigma_{1,0}} \cdot (x_{\sigma_{2,0}} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_{m_0,0}} \cdot \bar{s}''_1),$$

где элемент $\bar{s}_1'' \in S_{T_{C,d}}^{S_d, T}$ такой, что $\ln_T(\bar{s}_1'') = k$. Согласно [1, предложение 2.4] и утверждению 5 имеем $\bar{s}_1'' = \bar{r}(x_\sigma) \cdot h_{C,d,g}$, где $\sigma = \alpha(\bar{s}_1'') = (\sigma_{1,0} \dots \sigma_{m,0})^{-1} \alpha(s)$ и $g = \frac{k - \ln_t(x_\sigma)}{2} - d + 1$.

Список литературы

1. Вик. С. Куликов, “Полугруппы разложений на множители и неприводимые компоненты пространства Гурвица”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:4 (2011), 49–90; англ. пер.: V. S. Kulikov, “Factorization semigroups and irreducible components of the Hurwitz space”, *Izv. Math.*, **75**:4 (2011), 711–748.
2. B. Wajnryb, “Orbits of Hurwitz action for coverings of a sphere with two special fibers”, *Indag. Math. (N.S.)*, **7**:4 (1996), 549–558.

Вик. С. Куликов (Vik. S. Kulikov)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
 16.11.2010
 23.08.2011