Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Бахвалов, О локальном поведении многомерной гармонической вариации, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 4, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/im592>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:30:25

УДК 517.518

А. Н. Бахвалов

О локальном поведении многомерной гармонической вариации

Изучено поведение гармонической вариации в окрестности регулярной точки для функций из некоторых многомерных классов Ватермана. В качестве следствия получены новые результаты о сходимости кратных тригонометрических рядов Фурье для функций из этих классов.

Библиография: 8 наименований.

§ 1. Введение

Введем необходимые обозначения. Положим $T = [-\pi, \pi]$. Через C обозначим абсолютные постоянные, не обязательно одинаковые в различных случаях. Для промежутка I на прямой через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_n\}$ таких, что $\bar{I}_n \subset I$.

Пусть $I^k = (a^k, b^k)$. Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^m$. При $m = 1$ положим $f(I^1) = f(b^1) - f(a^1)$; если для любой функции $m - 1$ переменных уже определено выражение $f(I^1 \times \dots \times I^{m-1})$, то для функции m переменных положим

$$f(I^1 \times \dots \times I^m) = f(I^1 \times \dots \times I^{m-1}, b^m) - f(I^1 \times \dots \times I^{m-1}, a^m). \quad (1)$$

Величину $f(I^1 \times \dots \times I^m)$ будем называть *смешанным приращением функции* f на I . Мы будем пользоваться тем, что смешанное приращение симметрично относительно перестановок переменных. Через $\text{osc}(f, I)$ будем обозначать колебание функции f на I .

Пусть множество $\{1, \dots, m\}$ разбито на два непересекающихся множества α и β , состоящих из p и $m - p$ элементов соответственно. Если $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$, то x^α — элемент $\mathbb{R}^p$, состоящий из компонент x^j , $j \in \alpha$. Для параллелепипеда $I = \bigotimes_{j=1}^m I^j$ обозначим $I^\alpha = \bigotimes_{j \in \alpha} I^j$.

Через $f(I^\alpha, x^\beta)$ обозначим смешанное приращение f как функции аргументов x^j , $j \in \alpha$, на I^α при фиксированных значениях x^k , $k \in \beta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Неубывающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}$ задает *класс функций ограниченной Λ -вариации* (класс Ватермана), если $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Далее будем рассматривать только такие Λ . Множество последовательностей Λ , удовлетворяющих перечисленным условиям, будем обозначать через $\mathbb{L}$. Положим также $H = \{n\}$. Ясно, что $H \in \mathbb{L}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00052) и государственных программ “Ведущие научные школы” (грант НШ-4681.2006.1) и “Молодые кандидаты” (грант МК-6085.2006.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m$ – последовательности из множества $\mathbb{L}$. Тогда $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ относительно переменных $x^1, \dots, x^m$ по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ называется величина

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{x^1, \dots, x^m}(f; \Delta) = V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{\mathbf{x}}(f; \Delta) = \sup_{\{I_{k_j}^j\} \in \Omega(\Delta^j)} \sum_{k_1, \dots, k_m} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m}.$$

Пусть непустое множество $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$ состоит из элементов $j_1 < \dots < j_p$ и $\beta = \{1, \dots, m\} \setminus \alpha$. Через

$$V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta)) = V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta))$$

обозначим $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -вариацию f как функции переменных $x^{j_1}, \dots, x^{j_p}$ по p -мерному параллелепипеду $\Delta^\alpha = \Delta^{j_1} \times \dots \times \Delta^{j_p}$ при фиксированных значениях x^β остальных переменных (если β не пусто). Возникающие при этом параллелепипеды $\bigotimes_{l=1}^p I_{k_{j_l}}^{j_l}$ будем для краткости записывать как $I_{k^\alpha}^\alpha$.

Далее, $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ относительно переменных x^α по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ называется величина

$$V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; \Delta) = V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; \Delta) = \sup_{x^\beta \in \Delta^\beta} V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Величина

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta) = \sum_{\substack{\alpha \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \alpha \neq \emptyset}} V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; \Delta)$$

называется (полной) $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$. Множество функций, для которых она конечна, называется классом $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -ограниченной вариации на Δ и обозначается через $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$. Если все последовательности Λ^j совпадают и равны Λ , то для краткости будем записывать $V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}$, V_Λ , $\Lambda BV(\Delta)$ и λ_{k^α} соответственно. Величину V_H называют гармонической вариацией.

В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые функции измеримы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Точка $\mathbf{x}_0$ называется регулярной точкой функции $f(\mathbf{x})$, если существуют и конечны 2^m пределов

$$f(x_0^1 \pm 0, \dots, x_0^m \pm 0) = \lim_{t^1, \dots, t^m \rightarrow +0} f(x_0^1 \pm t^1, \dots, x_0^m \pm t^m)$$

для всевозможных комбинаций знаков. Для регулярной точки $\mathbf{x}_0$ обозначим $f^*(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2^m} \sum f(x_0^1 \pm 0, \dots, x_0^m \pm 0)$.

Пусть $\delta \in (0, \infty)^m$, а $\sigma \in \{-1; 1\}^m$. Обозначим через $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma\delta)$ параллелепипед $\bigotimes_{j=1}^m I^j$, где $I^j = (x^j, x^j + \delta^j)$ при $\sigma^j = 1$ и $I^j = (x^j - \delta^j, x^j)$ при $\sigma^j = -1$. В качестве нормы в $\mathbb{R}^m$ возьмем $\|\delta\| = \max |\delta^j|$.

Классы ΛBV были определены в одномерном случае Д. Ватерманом [1], в двумерном – А. А. Саакяном [2], а для случая более высоких размерностей – А. И. Саблиным [3], [4]. Ими были установлены следующие результаты о сходимости рядов Фурье (здесь и далее ряды Фурье берутся по (кратной) тригонометрической системе).

ТЕОРЕМА А (Д. Ватерман). Пусть $f \in HBV(T)$ – 2π -периодическая функция. Тогда в каждой точке $x \in T$ ряд Фурье f сходится к величине $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ и сходимость равномерна на любом отрезке, лежащем внутри интервала непрерывности функции. В каждом классе $\Lambda BV(T)$, строго более широком, чем $HBV(T)$, найдется непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в точке.

ТЕОРЕМА В (А. А. Саакян). Пусть f – 2π -периодическая по каждому переменному измеримая функция на плоскости и $f \in HBV(T^2)$. Тогда в каждой регулярной точке $\mathbf{x}$ ряд Фурье $f(\mathbf{x})$ сходится по прямоугольникам (по Прингсхейму) к величине $f^*(\mathbf{x})$. Если функция непрерывна на открытом множестве E , то сходимость равномерна на любом компакте, лежащем в E .

ТЕОРЕМА С (А. И. Саблин). Пусть $f(x) \in HBV(T^m)$ – непрерывная 2π -периодическая по каждому аргументу функция и

$$\lim_{\text{diam } I \rightarrow 0} V_H(f; I) = 0$$

равномерно по всем параллелепипедам I . Тогда ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингсхейму.

Если $f(x) \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$ – непрерывная 2π -периодическая по каждому аргументу функция, причем $\lambda_k^q \leq k$ и для любого $p \in \{1, \dots, t\}$ справедливо условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^m \frac{1}{\lambda_k^q} = \infty, \quad (2)$$

то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингсхейму.

Результат Саблина был усилен автором в работе [6], где доказана

ТЕОРЕМА D. Пусть $f \in HBV(T^m)$ – 2π -периодическая по каждому аргументу функция. Тогда в каждой регулярной точке $\mathbf{x} \in T^m$ функции f , для которой

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} \sum_{\sigma \in \{-1; 1\}^m} V_H(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma\delta)) = 0, \quad (3)$$

ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму к величине $f^*(\mathbf{x})$. Если функция f принадлежит к тому же некоторому классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$ с $\lambda_n^j = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого j , то условие (3) выполнено в каждой регулярной точке функции.

С другой стороны, в работе автора [5] было показано, что условие (3) на локальное поведение вариации нельзя отбросить, точнее, имеет место следующая

ТЕОРЕМА Е. При $m \geq 3$ для любых последовательностей $\Lambda^2, \dots, \Lambda^m$ из $\mathbb{L}$, не удовлетворяющих условию (2) (при $p = 1$), найдется непрерывная 2π -периодическая по каждому аргументу функция из класса $(H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$, ряд Фурье которой расходится по кубам в нуле.

Нетрудно видеть, что уже в трехмерном случае существуют классы Ватермана, не подходящие под условия ни одной из теорем С, D и Е. Например, рассмотрим последовательности $\Lambda^1 = \{n\}$, $\Lambda^2 = \Lambda^3 = \{\sqrt{n}\}$. В настоящей работе изучается поведение гармонической вариации и, как следствие, рядов Фурье для функций из таких классов Ватермана.

Полученные результаты позволяют окончательно определить, гарантирует ли принадлежность измеримой 2π -периодической функции классу Ватермана $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$ сходимость её тригонометрического ряда Фурье по прямоугольникам в каждой регулярной точке в случае, когда при каждом $p = 1, \dots, m$ последовательность Λ^p удовлетворяет одному из следующих условий:

(а) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^p}{n} = 0$;

(б) последовательность $\left\{ \frac{\lambda_n^p}{n} \right\}$ отделена от нуля и от бесконечности, т. е.

$$0 < \inf_n \frac{\lambda_n^p}{n} \leq \sup_n \frac{\lambda_n^p}{n} < \infty;$$

(с) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^p}{n} = \infty$.

А именно:

– если хотя бы при одном p выполнено условие (с), то ряд Фурье может расходиться (теорема А);

– если при всех p выполнено условие (а), то ряд Фурье сходится (теорема D);

– если при некотором $p = p_0$ выполнено условие (б) и для этого p_0 нарушено условие (2) (в частности, если еще для двух значений p выполнено условие (б)), то ряд Фурье может расходиться (теорема E);

– если для некоторого $p = p_0$ выполнено условие (б), а для остальных p выполнено условие (а), и для $p = p_0$ выполнено условие (2), то ряд Фурье сходится (теорема 1 и следствие 2);

– если при двух значениях $p = p_1$ и $p = p_2$ выполнено условие (б), а для остальных p выполнено условие (а) и для $p = p_1$ выполнено условие (2), то ряд Фурье сходится (теорема 2 и следствие 3).

§ 2. Случай одной гармонической последовательности

Отметим вначале некоторые свойства классов Ватермана, которые понадобятся нам ниже.

ЛЕММА 1. Если $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m$, $M^p \in \mathbb{L}$, где $p \in \{1, \dots, m\}$, причем

$$\sup_n \frac{\lambda_n^p}{\mu_n^p} = C < \infty,$$

и Δ – произвольный m -мерный промежуток, то при $C' = \max\{1, C\}$ для любой функции f на Δ выполнена оценка

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^{p-1}, M^p, \Lambda^{p+1}, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta) \leq C' V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^{p-1}, \Lambda^p, \Lambda^{p+1}, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta).$$

В частности,

$$\begin{aligned} & (\Lambda^1, \dots, \Lambda^{p-1}, \Lambda^p, \Lambda^{p+1}, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta) \\ & \subseteq (\Lambda^1, \dots, \Lambda^{p-1}, M^p, \Lambda^{p+1}, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую компоненту вариации $V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; \Delta)$. Если $p \notin \alpha$, то эта компонента не зависит от p -й последовательности из задающих класс Ватермана. Если же $p \in \alpha$, то из неравенства

$$\frac{1}{\mu_n^p} \leq C \frac{1}{\lambda_n^p}$$

следует оценка для вариационных сумм, а из нее при переходе к верхней грани по системам интервалов – оценка для компоненты вариации.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если последовательность Λ^p удовлетворяет условию (b), т. е.

$$0 < \inf_n \frac{\lambda_n^p}{n} \leq \sup_n \frac{\lambda_n^p}{n} < \infty,$$

то при рассмотрении класса Ватермана $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$ можно считать, что $\Lambda^p = H$, поскольку при замене Λ^p на H класс не изменяется, а вариации оцениваются друг через друга: для любого промежутка $\Delta \subseteq T^m$

$$\begin{aligned} C'V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^{p-1}, H, \Lambda^{p+1}, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta) &\leq V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^{p-1}, \Lambda^p, \Lambda^{p+1}, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta) \\ &\leq C''V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^{p-1}, H, \Lambda^{p+1}, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Если функции $f_n(\mathbf{x})$ принадлежат классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$, их $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариации ограничены в совокупности величиной C_0 и функция $f(\mathbf{x})$ является поточечным пределом функций f_n на промежутке Δ , то $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения такое же, как для обычной ограниченной вариации в одномерном случае: любая вариационная сумма для некоторой компоненты вариации функции f является пределом вариационных сумм для функций f_n с теми же системами интервалов и потому не превосходит C_0 .

Сформулируем основную лемму, на которую опирается как доказательство теоремы 1, так и результаты следующего параграфа.

ЛЕММА 3. Пусть даны последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$, причем для некоторого $p_0 \in \{1, \dots, m\}$ при $p = p_0$ выполнено условие (2). Пусть $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$, а $\mathbf{x}_0 \in (-\pi, \pi)^m$ – регулярная точка функции f . Рассмотрим произвольное множество $\alpha \subseteq \{1, \dots, m\} \setminus \{p_0\}$ и положим $\beta = \{1, \dots, m\} \setminus (\alpha \cup \{p_0\})$. Положим для $\delta > 0$

$$\xi_{\beta, p_0}(f, \delta) = \sup_{\substack{x^j \in (x_0^j, x_0^j + \delta), j \in \beta \\ I^j \in (x_0^j, x_0^j + \delta), j \in \alpha}} \sup_{\{I_n^{p_0}\} \in \Omega((x_0^{p_0}, x_0^{p_0} + \delta))} \sum_n \frac{|f(I_n^{p_0} \times I^\alpha, x^\beta)|}{\lambda_n^{p_0}}.$$

Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \xi_{\beta, p_0}(f, \delta) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $\mathbf{x}_0 = 0$ и $p_0 = 1$. При $m = 1$ возможен только случай $\alpha = \beta = \emptyset$ и утверждение становится свойством стремления Λ -вариации к нулю в окрестности регулярной точки, доказанным Ватерманом [7]. Отметим также, что при $m = 2$ доказательство близко к рассуждениям Саакяна [2], рассматривавшего случай $\Lambda^1 = \Lambda^2 = H$.

Проведем доказательство индукцией по числу элементов множества β одновременно для всех $m \geq 2$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\beta = \emptyset$, т. е. $\alpha = \{2, \dots, m\}$. Предположим, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \xi_{\emptyset, 1}(f, \delta) = \eta > 0$$

(предел заведомо существует в силу монотонности функции по δ). Возьмем $\delta_0 = 1$, $n(0) = 0$ и выберем интервалы $I^j(1) = (a^j(1), b^j(1)) \in (0, \delta_0)$, $j \in \alpha$,

и систему $\{I_n^1(1)\}_{n=1}^{n(1)} \in \Omega((0, \delta_0))$, где $I_n^1(1) = (a_n^1(1), b_n^1(1))$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{n=1}^{n(1)} \frac{|f(I_n^1(1) \times I^2(1) \times \cdots \times I^m(1))|}{\lambda_n^1} > \frac{3}{4} \xi_{\beta,1}(f, \delta_0) \geq \frac{3\eta}{4}.$$

Положим

$$\tilde{\delta}_1 = \min \left\{ \min_{j \in \alpha} a^j(1), \min_{n=1, \dots, n(1)} a_n^1(1) \right\}.$$

Затем (опираясь на регулярность точки 0) выберем такое $\delta_1 \in (0, \tilde{\delta}_1)$, чтобы выполнялась оценка

$$\left(\sum_{n=1}^{n(1)} \frac{1}{\lambda_n^1} \right) 2^{m-1} \text{osc}(f, (0, \delta_1)^m) < \frac{\eta}{4}.$$

Далее выберем интервалы $I^j(2) = (a^j(2), b^j(2)) \Subset (0, \delta_1)$, $j \in \alpha$, и систему интервалов $\{I_n^1(2)\}_{n=1}^{n(2)} \in \Omega((0, \delta_1))$, где $I_n^1(2) = (a_n^1(2), b_n^1(2))$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{n=1}^{n(2)} \frac{|f(I_n^1(2) \times I^2(2) \times \cdots \times I^m(2))|}{\lambda_n^1} > \xi_{\beta,1}(f, \delta_1) \geq \frac{3\eta}{4}.$$

Поскольку $|f(I_n^1(2) \times I^2(2) \times \cdots \times I^m(2))| < 2^{m-1} \text{osc}(f, (0, \delta_1)^m)$, то условие, налагаемое на выбор δ_1 , гарантирует, что сумма первых $n(1)$ слагаемых в последней формуле мала, точнее, что

$$\sum_{n=1}^{n(1)} \frac{|f(I_n^1(2) \times I^2(2) \times \cdots \times I^m(2))|}{\lambda_n^1} < \frac{\eta}{4},$$

а тогда

$$\sum_{n=n(1)+1}^{n(2)} \frac{|f(I_n^1(2) \times I^2(2) \times \cdots \times I^m(2))|}{\lambda_n^1} > \frac{\eta}{2}.$$

Затем положим

$$\tilde{\delta}_2 = \min \left\{ \min_{j \in \alpha} a^j(2), \min_{n=n(1)+1, \dots, n(2)} a_n^1(2) \right\}$$

и выберем такое $\delta_2 \in (0, \tilde{\delta}_2)$, чтобы выполнялась оценка

$$\left(\sum_{n=1}^{n(2)} \frac{1}{\lambda_n^1} \right) 2^{m-1} \text{osc}(f, (0, \delta_2)^m) < \frac{\eta}{4}.$$

Отметим, что $I^j(1) \cap I^j(2) = \emptyset$ при каждом $j \in \alpha$ и что $\{I_n^1(1)\}_{n=1}^{n(1)} \sqcup \{I_n^1(2)\}_{n=n(1)+1}^{n(2)} \in \Omega((0, 1))$.

Продолжая этот процесс, мы построим числа δ_s , $n(s)$, интервалы $I^j(s) \Subset (\delta_s, \delta_{s-1})$, $j \in \alpha$, и системы интервалов $\{I_n^1(s)\}_{n=n(s-1)+1}^{n(s)} \in \Omega((\delta_s, \delta_{s-1}))$,

удовлетворяющие соответствующим свойствам пустоты попарных пересечений и условиям

$$\sum_{n=n(s-1)+1}^{n(s)} \frac{|f(I_n^1(s) \times I^2(s) \times \cdots \times I^m(s))|}{\lambda_n^1} > \frac{\eta}{2}.$$

При любом s_0 будут выполняться условия

$$\{I^j(s)\}_{s=1}^{s_0} \in \Omega((0, 1)), \quad \bigsqcup_{s=1}^{s_0} \{I_n^1(s)\}_{n=n(s-1)+1}^{n(s)} \in \Omega((0, 1)). \quad (4)$$

Однако имеет место неравенство

$$\sum_{s=1}^{s_0} \sum_{n=n(s-1)+1}^{n(s)} \frac{|f(I_n^1(s) \times I^2(s) \times \cdots \times I^m(s))|}{\lambda_n^1 \lambda_s^2 \cdots \lambda_s^m} > \frac{\eta}{2} \sum_{s=1}^{s_0} \prod_{j=2}^m \frac{1}{\lambda_s^j}.$$

Сумма в правой части этого неравенства стремится к бесконечности с ростом s_0 , поскольку по условию леммы выполнено соотношение (2). Величина в левой части неравенства при каждом s является частью вариационной суммы для систем интервалов (4), следовательно, существуют сколь угодно большие вариационные суммы. Мы получили противоречие с ограниченностью $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариации функции f . Случай $\beta = \emptyset$ тем самым доказан.

Предположим теперь, что утверждение леммы справедливо для множеств β , состоящих из $m - k$ элементов для некоторого $k = 2, \dots, m$. Докажем его для множеств, состоящих из $m - k + 1$ элементов. Из соображений симметрии достаточно доказать утверждение для множества $\beta = \{k, k + 1, \dots, m\}$. Пусть $\beta' = \{k + 1, \dots, m\}$.

Введем функции

$$f_s(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) = f\left(x_1, \dots, x_{k-1}, \frac{1}{s}, x_{k+1}, \dots, x_m\right).$$

Они принадлежат классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^{k-1}, \Lambda^{k+1}, \dots, \Lambda^m)BV(T^{m-1})$, причем их вариации равномерно ограничены, поскольку

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^{k-1}, \Lambda^{k+1}, \dots, \Lambda^m}(f_s, T^{m-1}) \leq V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f, T^m).$$

При фиксированных значениях переменных x_j , $j \neq k$, функция f принадлежит классу $\Lambda^k BV(T)$ и, как следствие (см. [7]), существует ее предел при $x_k \rightarrow +0$, который мы обозначим через $f_0(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m)$. Функция f_0 является поточечным пределом функций f_s , и по лемме 2

$$f_0 \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^{k-1}, \Lambda^{k+1}, \dots, \Lambda^m)BV(T^{m-1}).$$

Заметим, что точка $0 \in T^{m-1}$ является регулярной точкой функции f_0 . Действительно, повторный предел обязательно существует, если существуют внутренний предел и двойной предел. Допустим, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \xi_{\beta,1}(f, \delta) = \eta > 0,$$

в то время как по предположению

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \xi_{\beta',1}(f, \delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \xi_{\beta',1}(f_0, \delta) = 0$$

(второй предел берется для $(m-1)$ -мерной точки 0). Возьмем $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялись условия $\xi_{\beta,1}(f, \delta) < \frac{\eta}{6}$ и $\xi_{\beta',1}(f_0, \delta) < \frac{\eta}{6}$. Поскольку $\xi_{\beta,1}(f, \delta) \geq \eta$, то найдутся интервалы $\{I_n^1\} \in \Omega((0, \delta))$ и $I^j \subseteq (0, \delta)$, $j = 2, \dots, k-1$, а также точки $b^k \in (0, \delta)$ и $x^{k+1}, \dots, x^m \in (0, \delta)$, для которых выполнено неравенство

$$\sum_{n=1}^N \frac{|f(I_n^1 \times I^2 \times \dots \times I^{k-1}, b^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_n^1} > \frac{5\eta}{6}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^N \frac{|f_0(I_n^1 \times I^2 \times \dots \times I^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_n^1} \leq \xi_{\beta',1}(f_0, \delta) < \frac{\eta}{6}.$$

Функция f_0 есть поточечный предел функций $f_s(x)$ при $x^k \rightarrow +0$. Поэтому найдется достаточно малое $a^k = \frac{1}{s_0} \in (0, \delta)$, для которого выполнена оценка

$$\sum_{n=1}^N \frac{|f(I_n^1 \times I^2 \times \dots \times I^{k-1}, a^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_n^1} < \frac{\eta}{3}.$$

Полагая теперь $I^k = (a^k, b^k)$, получим оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \frac{|f(I_n^1 \times I^2 \times \dots \times I^{k-1} \times I^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_n^1} \\ & \geq \sum_{n=1}^N \frac{|f(I_n^1 \times I^2 \times \dots \times I^{k-1}, b^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_n^1} \\ & \quad - \sum_{n=1}^N \frac{|f(I_n^1 \times I^2 \times \dots \times I^{k-1}, a^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_n^1} \geq \frac{5\eta}{6} - \frac{\eta}{3} = \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

Это противоречит условию $\xi_{\beta',1}(f, \delta) < \frac{\eta}{6}$. Следовательно,

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \xi_{\beta,1}(f, \delta) = 0.$$

Таким образом, утверждение леммы справедливо для любого множества $\beta \subseteq \{2, \dots, m\}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \geq 3$, последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что при некотором $p \in \{1, \dots, m\}$ выполнено соотношение

$$0 < \inf_n \frac{\lambda_n^p}{n} \leq \sup_n \frac{\lambda_n^p}{n} < \infty,$$

и $\lambda_n^k = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$ для $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{p\}$, но они удовлетворяют условию (2) для этого p . Тогда для любой функции $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$ и любой ее регулярной точки $\mathbf{x}_0$ выполнено условие

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^m} V_H(f; (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \sigma\delta)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности положим $p = 1$ и $\mathbf{x}_0 = 0$. Будем считать, что $\lambda_n^j \leq n$ для $j = 2, \dots, m$ и для всех n (иначе домножим последовательность на положительную константу, что по лемме 1 не изменит класс). Кроме того, по следствию 1 можно считать, что $\Lambda^1 = H$.

В силу соображений симметрии достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} V_H(f; (0, \delta)^m) = 0.$$

Рассмотрим некоторую компоненту вариации $V_H^{x^\gamma}(f; (0, \delta)^m)$.

Если $\gamma = \{1\}$, то утверждение непосредственно следует из леммы 3 при $\alpha = \emptyset$.

Пусть $1 \notin \gamma$. В силу соображений симметрии достаточно рассмотреть случай $\gamma = \{2, \dots, k\}$ при некотором k , $2 \leq k \leq m$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем N столь большим, чтобы при каждом $j \in \gamma$ и при всех $n \geq N$ имело место неравенство

$$\frac{\lambda_n^j}{n} < \frac{\varepsilon}{2(k-1)V_{H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m}(f; T^m)}.$$

Затем, опираясь на регулярность точки 0, выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$2^{k-2} \text{osc}(f, (0, \delta)^m) \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^{k-1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь для любых систем $\{I_{n_j}^j\} \in \Omega((0, \delta))$, $j = 2, \dots, k$, и любых точек $x^1, x^{k+1}, \dots, x^m \in (0, \delta)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n_2, \dots, n_k} \frac{|f(x^1, I_{n_2}^2 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_2 \cdots n_k} \\ &\leq \sum_{j=2}^k \sum_{n_j > N} \left(\sum_{n_i, i \in \gamma \setminus \{j\}} \frac{|f(x^1, I_{n_2}^2 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_2 \cdots n_k} \right) \\ &\quad + \sum_{n_2=1}^N \cdots \sum_{n_k=1}^N \frac{|f(x^1, I_{n_2}^2 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_2 \cdots n_k} = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

В силу выбора N и неравенств $\lambda_n^i \leq n$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{j=2}^k \sum_{n_j > N} \left(\sup_{n_j > N} \frac{\lambda_{n_j}^j}{n_j} \right) \left(\sum_{n_i, i \in \gamma \setminus \{j\}} \frac{|f(x^1, I_{n_2}^2 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_{n_2}^2 \cdots \lambda_{n_k}^k} \right) \\ &\leq \sum_{j=2}^k \frac{\varepsilon}{2(k-1)V_{H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m}(f; T^m)} V_{\Lambda^2, \dots, \Lambda^k}^{x^\gamma}(f; T^m) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, для любых интервалов $I_{n_j}^j \Subset (0, \delta)$ и точек $x^j \in (0, \delta)$ справедливо неравенство

$$|f(x^1, I_{n_2}^2 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)| \leq 2^{k-2} \text{osc}(f, (0, \delta)^m).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} S_2 &\leq 2^{k-2} \operatorname{osc}(f, (0, \delta)^m) \sum_{n_2=1}^N \cdots \sum_{n_k=1}^N \frac{1}{n_2 \cdots n_k} \\ &= 2^{k-2} \operatorname{osc}(f, (0, \delta)^m) \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^{k-1} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Объединяя эти неравенства, получим, что $S \leq S_1 + S_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Тогда и рассматриваемая компонента вариации не превосходит ε .

Наконец, рассмотрим случай, когда $1 \in \gamma$ и множество γ содержит и другие элементы. В силу соображений симметрии можно считать, что $\gamma = \{1, \dots, k\}$ при некотором k , $2 \leq k \leq m$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем N столь большим, чтобы при каждом $j \in \gamma \setminus \{1\}$ и при всех $n \geq N$ имело место неравенство

$$\frac{\lambda_n^j}{n} < \frac{\varepsilon}{2(k-1)V_{H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m}(f; T^m)}.$$

Затем, используя лемму 3, выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\xi_{\{k+1, \dots, m\}, 1}(f, \delta) \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^{k-1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь для любых систем $\{I_{n_j}^j\} \in \Omega((0, \delta))$, $j = 1, \dots, k$, и любых точек $x^{k+1}, \dots, x^m \in (0, \delta)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{n_1, \dots, n_k} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times \cdots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_1 n_2 \cdots n_k} \\ &\leq \sum_{j=2}^k \sum_{n_j > N} \left(\sum_{n_i, i \in \gamma \setminus \{j\}} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times \cdots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_1 \cdots n_k} \right) \\ &\quad + \sum_{n_2=1}^N \cdots \sum_{n_k=1}^N \frac{1}{n_2 \cdots n_k} \left(\sum_{n_1} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times \cdots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_1} \right) \\ &= S'_1 + S'_2. \end{aligned}$$

В силу выбора N и неравенств $\lambda_n^i \leq n$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} S'_1 &\leq \sum_{j=2}^k \sum_{n_j > N} \left(\sup_{n_j > N} \frac{\lambda_{n_j}^j}{n_j} \right) \left(\sum_{n_i, i \in \gamma \setminus \{j\}} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times \cdots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_1 \lambda_{n_2}^2 \cdots \lambda_{n_k}^k} \right) \\ &\leq \sum_{j=2}^k \frac{\varepsilon}{2(k-1)V_{H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m}(f; T^m)} V_{H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m}^{x^\gamma}(f; T^m) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, для любых интервалов $I_{n_j}^j \Subset (0, \delta)$ справедливо неравенство

$$\sum_{n_1} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times \cdots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_1} \leq \xi_{\{k+1, \dots, m\}, 1}(f, \delta).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} S'_2 &\leq \xi_{\{k+1, \dots, m\}, 1}(f, \delta) \sum_{n_2=1}^N \cdots \sum_{n_k=1}^N \frac{1}{n_2 \cdots n_k} \\ &= \xi_{\{k+1, \dots, m\}, 1}(f, \delta) \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^{k-1} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Объединяя эти неравенства, получим, что $S' \leq S'_1 + S'_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Тогда и рассматриваемая компонента вариации не превосходит ε . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что при некотором $p \in \{1, \dots, m\}$ выполнено соотношение

$$0 < \inf_n \frac{\lambda_n^p}{n} \leq \sup_n \frac{\lambda_n^p}{n} < \infty,$$

и $\lambda_n^k = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$ для $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{p\}$, причем они удовлетворяют условию (2) для этого p . Тогда для любой функции $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$ и любой ее регулярной точки $\mathbf{x}_0$ ряд Фурье функции f сходится по Прингсстейму в точке $\mathbf{x}_0$ к величине $f^*(\mathbf{x}_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение непосредственно вытекает из теоремы D и теоремы 1.

§ 3. Случай двух гармонических последовательностей

ЛЕММА 4. Пусть $m \geq 2$, даны последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$, причем для некоторых p_1 и p_2 из $\{1, \dots, m\}$, где $p_1 \neq p_2$, выполнено условие (2). Пусть задана функция $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$, а $\mathbf{x}_0 \in (-\pi, \pi)^m$ — ее регулярная точка. Рассмотрим произвольное множество $\alpha \subseteq \{1, \dots, m\} \setminus \{p_1, p_2\}$ и положим $\beta = \{1, \dots, m\} \setminus (\alpha \cup \{p_1, p_2\})$. Положим для $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta, p_1, p_2}(f, \delta) &= \\ &= \sup_{\substack{x^j \in (x_0^j, x_0^j + \delta), j \in \beta \\ I^j \in (x_0^j, x_0^j + \delta), j \in \alpha}} \sup_{\substack{\{I_{n_{p_1}}^{p_1}\} \in \Omega((x_0^{p_1}, x_0^{p_1} + \delta)) \\ \{I_{n_{p_2}}^{p_2}\} \in \Omega((x_0^{p_2}, x_0^{p_2} + \delta))}} \sum_{n_{p_1}, n_{p_2}} \frac{|f(I_{n_{p_1}}^{p_1} \times I_{n_{p_2}}^{p_2} \times I^\alpha, x^\beta)|}{\lambda_{n_{p_1}}^{p_1} \lambda_{n_{p_2}}^{p_2}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi_{\beta, p_1, p_2}(f, \delta) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $\mathbf{x}_0 = 0$, $p_1 = 1$ и $p_2 = 2$. Отметим также, что при $m = 2$ утверждение доказано автором [8] для случая $\Lambda^1 = \Lambda^2$.

Проведем доказательство индукцией по числу элементов множества β одновременно для всех $m \geq 2$. Начнем со случая, когда $\beta = \emptyset$, т.е. $\alpha = \{3, \dots, m\}$, а при $m = 2$ имеет место $\alpha = \emptyset$. Предположим, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi_{\emptyset, 1, 2}(f, \delta) = \eta > 0$$

(предел существует в силу монотонности функции по δ). Возьмем $\delta_0 = 1$ и выберем интервалы $I^j(1) = (a^j(1), b^j(1)) \Subset (0, \delta_0)$, $j \in \alpha$ (если α не пусто),

и системы $\{I_{n_k}^k(1)\}_{n_k=1}^{n(1)} \in \Omega((0, \delta_0))$, где $I_{n_k}^k(1) = (a_{n_k}^k(1), b_{n_k}^k(1))$ при $k = 1, 2$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{n_1=1}^{n(1)} \sum_{n_2=1}^{n(1)} \frac{|f(I_{n_1}^1(1) \times I_{n_2}^2(1) \times I^3(1) \times \cdots \times I^m(1))|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2} > \frac{3}{4} \varphi_{\emptyset,1,2}(f, \delta_0) \geq \frac{3\eta}{4}.$$

Положим

$$\tilde{\delta}_1 = \min \left\{ \min_{j \in \alpha} a^j(1), \min_{n=1, \dots, n(1)} a_n^1(1), \min_{n=1, \dots, n(1)} a_n^2(1) \right\}.$$

Затем, используя лемму 3, выберем такое $\delta_1 \in (0, \tilde{\delta}_1)$, чтобы выполнялись оценки

$$\left(\sum_{n=1}^{n(1)} \frac{1}{\lambda_n^1} \right) \xi_{\emptyset,2}(f, \delta_1) < \frac{\eta}{8}, \quad \left(\sum_{n=1}^{n(1)} \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \xi_{\emptyset,1}(f, \delta_1) < \frac{\eta}{8}.$$

Далее выберем интервалы $I^j(2) = (a^j(2), b^j(2)) \in (0, \delta_1)$, $j \in \alpha$ (если α не пусто), и системы интервалов $\{I_n^k(2)\}_{n=1}^{n(2)} \in \Omega((0, \delta_1))$, где $I_n^k(2) = (a_n^k(2), b_n^k(2))$ при $k = 1, 2$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{n_1=1}^{n(2)} \sum_{n_2=1}^{n(2)} \frac{|f(I_{n_1}^1(1) \times I_{n_2}^2(1) \times I^3(1) \times \cdots \times I^m(1))|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2} > \frac{3\eta}{4}.$$

Условие, налагаемое на выбор δ_1 , гарантирует, что сумма тех слагаемых, у которых хотя бы один из индексов n_1 или n_2 не превосходит $n(1)$, мала, точнее, что

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=1}^{n(1)} \sum_{n_2=1}^{n(2)} \frac{|f(I_{n_1}^1(1) \times I_{n_2}^2(1) \times I^3(1) \times \cdots \times I^m(1))|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2} &\leq \sum_{n_1=1}^{n(1)} \frac{1}{\lambda_{n_1}^1} \xi_{\emptyset,2}(f, \delta_1) < \frac{\eta}{8}, \\ \sum_{n_1=1}^{n(2)} \sum_{n_2=1}^{n(1)} \frac{|f(I_{n_1}^1(1) \times I_{n_2}^2(1) \times I^3(1) \times \cdots \times I^m(1))|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2} &\leq \sum_{n_2=1}^{n(1)} \frac{1}{\lambda_{n_2}^2} \xi_{\emptyset,1}(f, \delta_1) < \frac{\eta}{8}, \end{aligned}$$

а тогда

$$\sum_{n_1=n(1)+1}^{n(2)} \sum_{n_2=n(1)+1}^{n(2)} \frac{|f(I_{n_1}^1(1) \times I_{n_2}^2(1) \times I^3(1) \times \cdots \times I^m(1))|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2} > \frac{\eta}{2}.$$

Затем положим

$$\tilde{\delta}_2 = \min \left\{ \min_{j \in \alpha} a^j(2), \min_{n=n(1)+1, \dots, n(2)} a_n^1(2), \min_{n=n(1)+1, \dots, n(2)} a_n^2(2) \right\}$$

и выберем такое $\delta_2 \in (0, \tilde{\delta}_2)$, чтобы выполнялись оценки

$$\left(\sum_{n=1}^{n(2)} \frac{1}{\lambda_n^1} \right) \xi_{\emptyset,2}(f, \delta_2) < \frac{\eta}{8}, \quad \left(\sum_{n=1}^{n(2)} \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \xi_{\emptyset,1}(f, \delta_2) < \frac{\eta}{8}.$$

Отметим, что $I^j(1) \cap I^j(2) = \emptyset$ при каждом $j = 3, \dots, m$ и что $\{I_n^k(1)\}_{n=1}^{n(1)} \sqcup \{I_n^k(2)\}_{n=n(1)+1}^{n(2)} \in \Omega((0, 1))$ для $k = 1, 2$.

Продолжая этот процесс, мы построим числа δ_s , $n(s)$, интервалы $I^j(s) \in (\delta_s, \delta_{s-1})$, $j \in \alpha$ (если α не пусто), и системы интервалов $\{I_n^k(s)\}_{n=n(s-1)+1}^{n(s)} \in \Omega((\delta_s, \delta_{s-1}))$ для $k = 1, 2$, удовлетворяющие соответствующим условиям пустоты попарных пересечений, для которых выполнены неравенства

$$\sum_{n_1=n(s-1)+1}^{n(s)} \sum_{n_2=n(s-1)+1}^{n(s)} \frac{|f(I_{n_1}^1(s) \times I_{n_2}^2(s) \times I^3(s) \times \dots \times I^m(s))|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2} > \frac{\eta}{2}.$$

При любом s_0 будут выполняться условия $\{I^j(s)\}_{s=1}^{s_0} \in \Omega((0, 1))$ и $\sqcup_{s=1}^{s_0} \{I_n^k(s)\}_{n=n(s-1)+1}^{n(s)} \in \Omega((0, 1))$ для $k = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{n_1=n(s-1)+1}^{n(s)} \sum_{n_2=n(s-1)+1}^{n(s)} \frac{|f(I_{n_1}^1(s) \times I_{n_2}^2(s) \times I^3(s) \times \dots \times I^m(s))|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2 \lambda_s^3 \dots \lambda_s^m} \\ & > \frac{\eta}{2} \sum_{s=1}^{s_0} \prod_{j=3}^m \frac{1}{\lambda_s^j}. \end{aligned}$$

Однако сумма в правой части неравенства стремится к бесконечности с ростом s_0 , что следует из соотношения (2), выполненного по условиям леммы. Но величина в левой части неравенства при каждом s является частью вариационной суммы для построенных систем интервалов. Следовательно, существуют сколь угодно большие вариационные суммы. Мы получили противоречие с ограниченностью $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариации функции f . Таким образом, случай $\beta = \emptyset$ доказан, и полностью доказан случай $m = 2$.

Предположим теперь, что $m \geq 3$ и утверждение леммы справедливо для множеств β , состоящих из $m - k$ элементов для некоторого $k = 3, \dots, m$. Докажем его для множеств, состоящих из $m - k + 1$ элементов. В силу соображений симметрии достаточно доказать утверждение для множества $\beta = \{k, k+1, \dots, m\}$. Пусть $\beta' = \{k+1, \dots, m\}$. Введем функции

$$f_s(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) = f\left(x_1, \dots, x_{k-1}, \frac{1}{s}, x_{k+1}, \dots, x_m\right).$$

Они принадлежат классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^{k-1}, \Lambda^{k+1}, \dots, \Lambda^m)BV(T^{m-1})$, причем их вариации равномерно ограничены, поскольку

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^{k-1}, \Lambda^{k+1}, \dots, \Lambda^m}(f_s; T^{m-1}) \leq V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; T^m).$$

При фиксированных значениях переменных x_j , $j \neq k$, функция f принадлежит классу $\Lambda^k BV(T)$ и, как следствие, существует ее предел при $x_k \rightarrow +0$, который мы обозначим через $f_0(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m)$. Функция f_0 является поточечным пределом функций f_s , а тогда по лемме 2

$$f_0 \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^{k-1}, \Lambda^{k+1}, \dots, \Lambda^m)BV(T^{m-1}).$$

Заметим, что точка $0 \in T^{m-1}$ является регулярной точкой функции f_0 (как и в доказательстве леммы 3). Допустим, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi_{\beta, 1, 2}(f, \delta) = \eta > 0,$$

в то время как по предположению

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi_{\beta',1,2}(f, \delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi_{\beta',1,2}(f_0, \delta) = 0$$

(второй предел берется для $(m-1)$ -мерной точки 0). Возьмем $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялись условия $\varphi_{\beta',1,2}(f, \delta) < \frac{\eta}{6}$ и $\varphi_{\beta',1,2}(f_0, \delta) < \frac{\eta}{6}$. Поскольку $\varphi_{\beta,1,2}(f, \delta) \geq \eta$, то найдутся интервалы $\{I_{n_1}^1\} \in \Omega(0, \delta)$, $\{I_{n_2}^2\} \in \Omega(0, \delta)$ и $I^j \subseteq (0, \delta)$, $j = 3, \dots, k-1$, а также точки $b^k \in (0, \delta)$ и $x^{k+1}, \dots, x^m \in (0, \delta)$, для которых выполнено неравенство

$$\sum_{n_1=1}^{n(1)} \sum_{n_2=1}^{n(2)} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times I^3 \times \dots \times I^{k-1}, b^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2} > \frac{5\eta}{6}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n_1=1}^{n(1)} \sum_{n_2=1}^{n(2)} \frac{|f_0(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times I^3 \times \dots \times I^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2} \leq \varphi_{\beta',1,2}(f_0, \delta) < \frac{\eta}{6}.$$

Функция f_0 есть поточечный предел функций $f_s(x)$. Поэтому найдется достаточно малое $a^k = \frac{1}{s_0} \in (0, \delta)$, для которого выполнена оценка

$$\sum_{n_1=1}^{n(1)} \sum_{n_2=1}^{n(2)} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times I^3 \times \dots \times I^{k-1}, a^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2} < \frac{\eta}{3}.$$

Полагая теперь $I^k = (a^k, b^k)$, получим оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1=1}^{n(1)} \sum_{n_2=1}^{n(2)} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times I^3 \times \dots \times I^{k-1} \times I^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2} \\ & \geq \sum_{n_1=1}^{n(1)} \sum_{n_2=1}^{n(2)} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times I^3 \times \dots \times I^{k-1}, b^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2} \\ & \quad - \sum_{n_1=1}^{n(1)} \sum_{n_2=1}^{n(2)} \frac{|I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times I^3 \times \dots \times I^{k-1}, a^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_{n_1}^1 \lambda_{n_2}^2} \\ & \geq \frac{5\eta}{6} - \frac{\eta}{3} = \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

Это противоречит условию $\varphi_{\beta',1,2}(f, \delta) < \frac{\eta}{6}$. Следовательно,

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi_{\beta,1,2}(f, \delta) = 0.$$

Таким образом, утверждение леммы справедливо для любого множества $\beta \subseteq \{3, \dots, m\}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m \geq 3$, последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что при некоторых p_1 и p_2 из $\{1, \dots, m\}$, где $p_1 \neq p_2$, для $p = p_i$ выполнено соотношение

$$0 < \inf_n \frac{\lambda_n^p}{n} \leq \sup_n \frac{\lambda_n^p}{n} < \infty,$$

и $\lambda_n^k = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$ для $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{p_1, p_2\}$, но они удовлетворяют условию (2) для $p = p_1$ и $p = p_2$. Тогда для любой функции $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$ и любой ее регулярной точки $\mathbf{x}_0 \in (-\pi, \pi)^m$ выполнено условие

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} \sum_{\sigma \in \{-1; 1\}^m} V_H(f; (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \sigma\delta)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности положим $\mathbf{x}_0 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ и $\Lambda^1 = \Lambda^2 = H$ (см. следствие 1). Будем считать, что $\lambda_n^j \leq n$ для $j = 3, \dots, m$ и для всех n (иначе домножим последовательность на положительную константу, что по лемме 1 не изменит класс).

Достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} V_H(f; (0, \delta)^m) = 0.$$

Рассмотрим некоторую компоненту вариации $V_H^{x^\gamma}(f; (0, \delta)^m)$.

Если $\gamma = \{1\}$ или $\gamma = \{2\}$, то утверждение следует из леммы 3 при $\alpha = \emptyset$.

Если $\gamma = \{1, 2\}$, то утверждение следует из леммы 4 при $\alpha = \emptyset$.

Пусть $1, 2 \notin \gamma$. В силу соображений симметрии достаточно рассмотреть случай, когда $\gamma = \{3, \dots, k\}$ при некотором k , $3 \leq k \leq m$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем N столь большим, чтобы при каждом $j \in \gamma$ и при всех $n \geq N$ имело место неравенство

$$\frac{\lambda_n^j}{n} < \frac{\varepsilon}{2(k-2)V_{H, H, \Lambda^3, \dots, \Lambda^m}(f; T^m)}.$$

Затем выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$2^{k-3} \text{osc}(f, (0, \delta)^m) \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^{k-2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь для любых систем $\{I_{n_j}^j\} \in \Omega((0, \delta))$, $j \in \gamma$, и любых точек $x^1, x^2, x^{k+1}, \dots, x^m \in (0, \delta)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n_3, \dots, n_k} \frac{|f(x^1, x^2, I_{n_3}^3 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_3 \cdots n_k} \\ &\leq \sum_{j=3}^k \sum_{n_j > N} \left(\sum_{n_i, i \in \gamma \setminus \{j\}} \frac{|f(x^1, x^2, I_{n_3}^3 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_3 \cdots n_k} \right) \\ &\quad + \sum_{n_3=1}^N \cdots \sum_{n_k=1}^N \frac{|f(x^1, x^2, I_{n_3}^3 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_3 \cdots n_k} = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

В силу выбора N и неравенств $\lambda_n^i \leq n$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{j=3}^k \sum_{n_j > N} \left(\sup_{n_j > N} \frac{\lambda_{n_j}^j}{n_j} \right) \left(\sum_{n_i, i \in \gamma \setminus \{j\}} \frac{|f(x^1, x^2, I_{n_3}^3 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{\lambda_{n_3}^3 \cdots \lambda_{n_k}^k} \right) \\ &\leq \sum_{j=3}^k \frac{\varepsilon}{2(k-2)V_{H, H, \Lambda^3, \dots, \Lambda^m}(f; T^m)} V_{\Lambda^3, \dots, \Lambda^k}^{x^\gamma}(f; T^m) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, для любых интервалов $I_{n_j}^j \in (0, \delta)$, $j \in \gamma$, и для любых точек $x^i \in (0, \delta)$, $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \gamma$, справедливо неравенство

$$|f(x^1, x^2, I_{n_3}^3 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)| \leq 2^{k-3} \text{osc}(f, (0, \delta)^m).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} S_2 &\leq 2^{k-3} \text{osc}(f, (0, \delta)^m) \sum_{n_3=1}^N \dots \sum_{n_k=1}^N \frac{1}{n_3 \dots n_k} \\ &= 2^{k-3} \text{osc}(f, (0, \delta)^m) \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^{k-2} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Объединяя эти неравенства, получим, что $S \leq S_1 + S_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Тогда и рассматриваемая компонента вариации не превосходит ε .

Пусть множество γ содержит ровно один из элементов 1 или 2, а также другие элементы. В силу соображений симметрии можно считать, что $\gamma = \{2, 3, \dots, k\}$ при некотором k , $3 \leq k \leq m$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем N столь большим, чтобы при каждом $j \in \gamma \setminus \{2\}$ и при всех $n \geq N$ имело место неравенство

$$\frac{\lambda_n^j}{n} < \frac{\varepsilon}{2(k-2)V_{H,H,\Lambda^3,\dots,\Lambda^m}(f; T^m)}.$$

Затем, используя лемму 3, выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\xi_{\{k+1,\dots,m\},2}(f, \delta) \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^{k-2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь для любых систем $\{I_{n_j}^j\} \in \Omega((0, \delta))$, $j \in \gamma$, и любых точек $x^1, x^{k+1}, \dots, x^m \in (0, \delta)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{n_2, \dots, n_k} \frac{|f(x^1, I_{n_2}^2 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_2 n_3 \dots n_k} \\ &\leq \sum_{j=3}^k \sum_{n_j > N} \left(\sum_{n_i, i \in \gamma \setminus \{j\}} \frac{|f(x^1, I_{n_2}^2 \times I_{n_3}^3 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_2 \dots n_k} \right) \\ &\quad + \sum_{n_3=1}^N \dots \sum_{n_k=1}^N \frac{1}{n_3 \dots n_k} \left(\sum_{n_2} \frac{|f(x^1, I_{n_2}^2 \times I_{n_3}^3 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_2} \right) \\ &= S'_1 + S'_2. \end{aligned}$$

В силу выбора N и неравенств $\lambda_n^i \leq n$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} S'_1 &\leq \sum_{j=3}^k \sum_{n_j > N} \left(\sup_{n_j > N} \frac{\lambda_{n_j}^j}{n_j} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{n_i, i \in \gamma \setminus \{j\}} \frac{|f(x^1, I_{n_2}^2 \times I_{n_3}^3 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_2 \lambda_{n_3}^3 \dots \lambda_{n_k}^k} \right) \\ &\leq \sum_{j=3}^k \frac{\varepsilon}{2(k-2)V_{H,H,\Lambda^3,\dots,\Lambda^m}(f; T^m)} V_{H,\Lambda^3,\dots,\Lambda^k}^{x^\gamma}(f; T^m) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, для любых интервалов $I_{n_j}^j \in (0, \delta)$ справедливо неравенство

$$\sum_{n_2} \frac{|f(x^1, I_{n_2}^2 \times I_{n_3}^3 \times \cdots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_2} \leq \xi_{\{k+1, \dots, m\}, 2}(f, \delta).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} S'_2 &\leq \xi_{\{k+1, \dots, m\}, 2}(f, \delta) \sum_{n_3=1}^N \cdots \sum_{n_k=1}^N \frac{1}{n_3 \cdots n_k} \\ &= \xi_{\{k+1, \dots, m\}, 2}(f, \delta) \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^{k-2} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Объединяя эти неравенства, получим, что $S' \leq S'_1 + S'_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Тогда и рассматриваемая компонента вариации не превосходит ε .

Пусть, наконец, множество γ содержит оба элемента 1 и 2, а также другие элементы. В силу соображений симметрии можно считать, что $\gamma = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ при некотором k , $3 \leq k \leq m$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем N столь большим, чтобы при каждом $j \in \gamma \setminus \{1, 2\}$ и при всех $n \geq N$ имело место неравенство

$$\frac{\lambda_n^j}{n} < \frac{\varepsilon}{2(k-2)V_{H,H,\Lambda^3, \dots, \Lambda^m}(f; T^m)}.$$

Затем, используя лемму 4, выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\varphi_{\{k+1, \dots, m\}, 1, 2}(f, \delta) \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^{k-2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь для любых систем $\{I_{n_j}^j\} \in \Omega((0, \delta))$, $j = 1, \dots, k$, и любых точек $x^{k+1}, \dots, x^m \in (0, \delta)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{n_1, \dots, n_k} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times \cdots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_1 n_2 \cdots n_k} \\ &\leq \sum_{j=3}^k \sum_{n_j > N} \left(\sum_{n_i, i \in \gamma \setminus \{j\}} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times I_{n_3}^3 \times \cdots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_1 \cdots n_k} \right) \\ &+ \sum_{n_3=1}^N \cdots \sum_{n_k=1}^N \frac{1}{n_3 \cdots n_k} \left(\sum_{n_1} \sum_{n_2} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times I_{n_3}^3 \times \cdots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_1 n_2} \right) \\ &= S'_1 + S'_2. \end{aligned}$$

В силу выбора N и неравенств $\lambda_n^i \leq n$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} S'_1 &\leq \sum_{j=3}^k \sum_{n_j > N} \left(\sup_{n_j > N} \frac{\lambda_{n_j}^j}{n_j} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{n_i, i \in \gamma \setminus \{j\}} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times I_{n_3}^3 \times \cdots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_1 n_2 \lambda_{n_3}^3 \cdots \lambda_{n_k}^k} \right) \\ &\leq \sum_{j=3}^k \frac{\varepsilon}{2(k-2)V_{H,H,\Lambda^3, \dots, \Lambda^m}(f; T^m)} V_{H,H,\Lambda^3, \dots, \Lambda^k}^{x^\gamma}(f; T^m) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, для любых интервалов $I_{n_j}^j \in (0, \delta)$ справедливо неравенство

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} \frac{|f(I_{n_1}^1 \times I_{n_2}^2 \times I_{n_3}^3 \times \dots \times I_{n_k}^k, x^{k+1}, \dots, x^m)|}{n_1 n_2} \leq \varphi_{\{k+1, \dots, m\}, 1, 2}(f, \delta).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} S'_2 &\leq \varphi_{\{k+1, \dots, m\}, 1, 2}(f, \delta) \sum_{n_3=1}^N \dots \sum_{n_k=1}^N \frac{1}{n_3 \dots n_k} \\ &= \varphi_{\{k+1, \dots, m\}, 1, 2}(f, \delta) \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^{k-2} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Объединяя эти неравенства, получим, что $S' \leq S'_1 + S'_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Тогда и рассматриваемая компонента вариации не превосходит ε . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что при некоторых p_1 и p_2 из $\{1, \dots, m\}$ для $p = p_i$ выполнено соотношение

$$0 < \inf_n \frac{\lambda_n^p}{n} \leq \sup_n \frac{\lambda_n^p}{n} < \infty,$$

и $\lambda_n^k = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$ для $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{p_1, p_2\}$, но они удовлетворяют условию (2) для $p = p_1$ и $p = p_2$. Тогда для любой функции $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$ и любой ее регулярной точки $\mathbf{x}_0$ ряд Фурье функции f сходится по Прингсхейму в точке $\mathbf{x}_0$ к величине $f^*(\mathbf{x}_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение непосредственно вытекает из теоремы D и теоремы 2.

Автор благодарит профессора М. И. Дьяченко за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Waterman D., "On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation", *Studia math.*, **44**:1 (1972), 107–117.
2. Саакян А. А., "О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **21**:6 (1986), 517–529.
3. Саблин А. И., "Функции ограниченной Λ -вариации и ряды Фурье", *Дис. ... канд. физ.-матем. наук*, МГУ, М., 1987.
4. Саблин А. И., "А-вариация и ряды Фурье", *Изв. вузов. Математика*, 1987, № 10, 66–68.
5. Бахвалов А. Н., "Непрерывность по Λ -вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье", *Матем. сб.*, **193**:12 (2002), 3–20.
6. Бахвалов А. Н., "Представление непериодических функций ограниченной Λ -вариации интегралом Фурье в многомерном случае", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:6 (2003), 3–22.
7. Waterman D., "On Λ -bounded variation", *Studia math.*, **57**:1 (1976), 33–45.
8. Бахвалов А. Н., "О поведении Λ -вариации функции двух переменных в окрестности регулярной точки", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., Мех.*, 2002, № 1, 3–10.

А. Н. БАХВАЛОВ (A. N. BAKHVALOV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: anbakh@rol.ru

Поступило в редакцию
28.09.2005