Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Резвякова, О простых нулях производных кси-функции Римана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 2, 57–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/im593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:56:49

УДК 511

И. С. Резвякова

О простых нулях производных кси-функции Римана

Получена нижняя оценка для количества лежащих на критической прямой простых нулей функции $\xi^{(k)}(s)$, $k \geq 1$.

Библиография: 4 наименования.

§ 1. Формулировка основного результата

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Здесь доказана теорема, подобная теореме из [1], но только для однократных нулей производных кси-функции Римана.

Пусть $\xi(s)$ – кси-функция Римана. При любом целом числе $k \geq 0$ все нули функции $\xi^{(k)}(s)$ лежат в полосе $0 < \operatorname{Im} s < 1$; к тому же, если справедлива гипотеза Римана, то все нули $\xi^{(k)}(s)$ лежат на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ (см. [1], [2]). Пусть $N_k(T)$ – количество нулей $\xi^{(k)}(s)$ при $0 < \operatorname{Im} s \leq T$, $N'_k(T)$ – количество простых нулей функции $\xi^{(k)}(s)$ при $0 < \operatorname{Im} s \leq T$, $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$,

$$a'_k(T, U) = \frac{N'_k(T + U) - N'_k(T)}{N_k(T + U) - N_k(T)}.$$

ТЕОРЕМА. Существует положительная постоянная T_1 такая, что для произвольного числа $T \geq T_1$, любого натурального числа k , $1 \leq k \leq \frac{1}{2} \frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}$, и $U = T(\ln \frac{T}{2\pi})^{-10}$ справедлива следующая оценка:

$$a'_k(T, U) \geq 1 - \frac{e^2 + 2}{16} k^{-2}. \quad (1)$$

Заметим, что в работе [2] доказано соотношение

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} a'_k(T, U(T)) = 1 - O(k^{-2}), \quad k \rightarrow +\infty,$$

где $U(T) = T(\ln \frac{T}{2\pi})^{-10}$.

Везде ниже будем использовать следующие обозначения: T_1 – абсолютная положительная постоянная; постоянные в знаках O и знаках Виноградова $\ll$ – абсолютные.

§ 2. Леммы

Для доказательства теоремы потребуется ряд вспомогательных утверждений. Приведенные ниже леммы 1–3, 5 и 6 доказаны в [1].

ЛЕММА 1. Пусть l – натуральное число, x – комплексное число, удовлетворяющее условию $l|x| \leq \frac{1}{2}$. Тогда справедлива оценка

$$|(1+x)^l - 1| \leq 2l|x|.$$

ЛЕММА 2. Положим $H(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$, $\chi(s) = \frac{H(1-s)}{H(s)}$, $F(s) = \frac{H'(s)}{H(s)}$, где $s = \sigma + it$. Тогда:

а) при $t \geq 0$ справедлива формула

$$\arg H\left(\frac{1}{2} + it\right) = \frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} + O(1),$$

где $\arg H(\frac{1}{2} + it)$ получен продолжением вдоль прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ значения $\arg H(\frac{1}{2})$;

б) при $t \geq T_1$, $|\sigma| \leq \ln t$

$$\chi(s) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \exp\left\{\frac{\pi i}{4} - it \ln \frac{t}{2\pi e}\right\} (1 + O((\ln t)^2 t^{-1}));$$

в) если $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg s \leq \frac{3\pi}{4}$ и $|t| \geq 1$, то справедливо равенство

$$F(s) = \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} + O(|t|^{-1}); \quad (2)$$

г) при $|t| \geq T_1$, $|\sigma| \leq 10 \ln |t|$ и произвольном натуральном числе $k \leq \log_2 |t|$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |F^{(k)}(s)| &\leq \frac{(k-1)!}{|t|^k}, \\ H^{(k)}(s) &= H(s)(F^{(k)}(s) + R_k(s)), \end{aligned} \quad (3)$$

где $R_k(s)$ – многочлен от $F(s), F'(s), \dots, F^{(k-1)}(s)$ и

$$|R_k(s)| \leq 16 \left| \ln \frac{s}{2\pi} \right|^{k-2} |t|^{-1}.$$

Отметим, что первая часть утверждения г) доказана в работе [1] как промежуточный результат (формула (7) в [1]). Утверждение б) вытекает из формулы

$$\chi(s) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \exp\left\{\frac{\pi i}{4} - it \ln \frac{t}{2\pi e}\right\} \left(1 + O\left(\frac{\sigma^2 + 1}{t}\right)\right),$$

которая справедлива при $t \geq T_1$, $|\sigma| \leq \ln t$ и доказана в [1].

ЛЕММА 3. При $T \geq T_1$, $0 < U \leq T$ и натуральном числе $k \leq \log_2 T$ имеет место следующее соотношение:

$$N_k(T+U) - N_k(T) = \left(\frac{T+U}{2\pi} \ln \frac{T+U}{2\pi} - \frac{T+U}{2\pi} \right) - \left(\frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} \right) + O(k \ln T).$$

ЛЕММА 4. Через $0 \not\sim 1$ обозначим путь на комплексной плоскости (идущий из первой четверти в третью), который является прямой, пересекающей действительную ось между 0 и 1 под углом $\pi/4$. Справедливо равенство

$$\xi(s) = H(s)f(s) + H(1-s)\overline{f(1-\bar{s})},$$

где

$$f(s) = \int_{0 \not\sim 1} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} dz.$$

Это формула Римана–Зигеля (см. [3]). Заметим, что

$$\overline{f(1-\bar{s})} = \int_{0 \not\sim 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} dz.$$

ЛЕММА 5. Пусть $s = \sigma + it$. Существует абсолютная положительная постоянная T_1 такая, что при $T \geq T_1$, $T \leq t \leq 2T$, $0 \leq \sigma \leq \frac{\ln T}{\ln \ln T}$ и произвольном целом неотрицательном числе $m \leq \frac{\ln T}{(\ln \ln T)^2}$ будут верны следующие формулы:

$$\begin{aligned} \int_{0 \not\sim 1} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (\ln z)^m dz &= \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{-s} \ln^m n + O(T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}}), \\ \int_{0 \not\sim 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (\ln z)^m dz &= \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{s-1} \ln^m n + O(T^{\frac{\sigma-1}{2} + \frac{1}{100}}). \end{aligned}$$

ЛЕММА 6. Пусть $0 < A < B$, $f_n(t)$ – комплекснозначные, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[A, B]$ функции такие, что

$$|f_n(t)| \leq \delta \quad \text{и} \quad \int_A^B |df_n(t)| \leq \delta$$

при некотором $\delta > 0$. Если a_n – комплексные числа, а $N(t)$ – непрерывная, строго монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условиям $N(t) > 0$ при $t > 0$ и $N(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то справедлива оценка

$$\int_A^B \left| \sum_{N_1 \leq n \leq N(t)} a_n f_n(t) n^{-it} \right|^2 dt \ll \delta^2 \sum_{N_1 \leq n \leq N_2} |a_n|^2 (B - A + N_2 \ln(N_2 + 1)),$$

где $N_1 = N(A)$, $N_2 = N(B)$.

ЛЕММА 7. При $|t| \geq T_1$, $|\sigma| \leq 10 \ln |t|$, $1 \leq l \leq \ln \frac{|t|}{2\pi}$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{d^l}{ds^l} \left(\frac{1}{F(s) + F(1-s)} \right) \right| \leq \frac{8}{|t|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой Фаа-ди-Брюно для производной сложной функции. Если $y = G(z)$, $z = g(s)$, то

$$\frac{d^l}{ds^l} G(g(s)) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+lk_l=l \\ k_1, \dots, k_l \geq 0}} \frac{l!}{k_1! \dots k_l!} \frac{d^m G}{dz^m} \left(\frac{g'(s)}{1!} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{g^{(l)}(s)}{l!} \right)^{k_l},$$

где $m = k_1 + \dots + k_l$, а $k_1, \dots, k_l$ — целые неотрицательные числа. Применяя эту формулу при $G(z) = z^{-1}$, $z = F(s) + F(1-s)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^l}{ds^l} \left(\frac{1}{F(s) + F(1-s)} \right) &= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+lk_l=l \\ k_1, \dots, k_l \geq 0}} \frac{l!}{k_1! \dots k_l!} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_l} (k_1 + \dots + k_l)!}{(F(s) + F(1-s))^{k_1+\dots+k_l+1}} \\ &\times \left(\frac{(F(s) + F(1-s))'}{1!} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{(F(s) + F(1-s))^{(l)}}{l!} \right)^{k_l}. \end{aligned}$$

Далее будем полагать, что t , σ и l удовлетворяют условиям леммы. Воспользовавшись формулой (2), найдем

$$F(s) + F(1-s) = \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-s}{2\pi} + O(|t|^{-1}).$$

Таким образом,

$$|F(s) + F(1-s)| \geq |\operatorname{Re}(F(s) + F(1-s))| = \ln \frac{|t|}{2\pi} - O(|t|^{-1}).$$

При $1 \leq j \leq |t|$ из леммы 1 следует оценка

$$\begin{aligned} |F(s) + F(1-s)|^{-j} &\leq \left(\ln \frac{|t|}{2\pi} - O(|t|^{-1}) \right)^{-j} = \left(\ln \frac{|t|}{2\pi} \right)^{-j} \left(1 - O\left(\frac{1}{|t| \ln |t|} \right) \right)^{-j} \\ &\leq 2 \left(\ln \frac{|t|}{2\pi} \right)^{-j}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 2 имеем

$$|F^{(l)}(s) + F^{(l)}(1-s)| \leq 2 \frac{(l-1)!}{|t|^l}.$$

Из полученных оценок последовательно найдем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^l}{ds^l} \left(\frac{1}{F(s) + F(1-s)} \right) \right| &\leq \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+lk_l=l \\ k_1, \dots, k_l \geq 0}} \frac{l!}{k_1! \dots k_l!} \frac{2(k_1 + \dots + k_l)!}{\left(\ln \frac{|t|}{2\pi} \right)^{k_1+\dots+k_l+1}} \\ &\times \left(\frac{2}{|t|} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{2}{|t|^l} \right)^{k_l} \leq 2^{l+1} l! \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+lk_l=l \\ k_1, \dots, k_l \geq 0}} \left(\frac{l}{\ln \frac{|t|}{2\pi}} \right)^{k_1+\dots+k_l+1} \frac{1}{|t|^l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{l+1}l! |t|^{-l} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+lk_l \leq l \\ k_1, \dots, k_l \geq 0}} 1 \\
&\leq 2^{l+1}l! |t|^{-l} \left(\sum_{0 \leq k_1 \leq l} 1 \right) \left(\sum_{0 \leq k_2 \leq l/2} 1 \right) \dots \left(\sum_{0 \leq k_l \leq 1} 1 \right) \\
&\leq 2^{l+1}l! |t|^{-l} \frac{l+1}{1} \frac{l+2}{2} \frac{l+3}{3} \dots \frac{l+l}{l} \leq 2 \left(\frac{4l}{|t|} \right)^l \leq 8|t|^{-1}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 3. Исходное равенство для функции $\xi^{(k)}(s)$

ЛЕММА 8. Справедливо равенство

$$\xi^{(k)}(s) = G_k(s) + (-1)^k G_k(1-s),$$

где

$$\begin{aligned}
G_k(s) &= \xi^{(k)}(s) + \frac{(d^k/ds^k)(H(s)\zeta'(s))}{F(s) + F(1-s)} + \frac{H(s) \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \zeta^{(l)}(s) R_{k,l}(s)}{F(s) + F(1-s)}, \\
R_{k,l}(s) &= R_{k+1-l}(s) - F(s) R_{k-l}(s),
\end{aligned}$$

а функции $H(s)$, $F(s)$, $R_l(s)$ введены в лемме 2; причем также выполнено тождество

$$\xi^{(k+1)}(s) = (F(s) + F(1-s))G_k(s) - F(1-s)\xi^{(k)}(s). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [2].

ЛЕММА 9. Пусть $s = \sigma + it$. При $t \geq T_1$, $0 \leq \sigma \leq \frac{\ln t}{\ln \ln t}$ и $1 \leq k \leq \frac{\ln t}{(\ln \ln t)^2}$ справедлива формула

$$\begin{aligned}
\frac{G_k(s)}{H(s)} &= \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (F(s) - \ln n)^k \left(1 - \frac{\ln n}{\ln(t/(2\pi))} \right) n^{-s} \\
&\quad + \chi(s) \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (\ln n - F(1-s))^k \frac{\ln n}{\ln(t/(2\pi))} n^{s-1} \\
&\quad + O\left(t^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{50}}\right) + O\left(t^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{50}}\right).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции $G_k(s)$ следует, что

$$G_k(s) = \frac{d^k}{ds^k} \left(H(s) \left(\zeta(s) + \frac{\zeta'(s)}{F(s) + F(1-s)} \right) \right) + r_k(s),$$

где

$$\begin{aligned}
r_k(s) &= \frac{H(s) \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \zeta^{(l)}(s) R_{k,l}(s)}{F(s) + F(1-s)} \\
&\quad - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{d^l}{ds^l} (H(s)\zeta'(s)) \frac{d^{k-l}}{ds^{k-l}} \left(\frac{1}{F(s) + F(1-s)} \right).
\end{aligned}$$

Оценим $|\zeta(s)|$ в области $t \geq T_1$, $\sigma \geq -(\ln t)^{-1}$. При $\sigma \geq 1 - \frac{1}{\ln t}$, $t \geq T_1$ справедлива оценка $|\zeta(s)| = O(\ln t)$ (см. [4, с. 114]). При $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 - \frac{1}{\ln t}$, $t \geq T_1$ из приближенного функционального уравнения для дзета-функции Римана и утверждения б) леммы 2 найдем

$$|\zeta(s)| \ll \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{-\sigma} + |\chi(s)| \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{\sigma-1} \ll t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t.$$

Теперь при $-(\ln t)^{-1} \leq \sigma \leq 1/2$ из функционального уравнения $\zeta(s) = \chi(s) \times \zeta(1-s)$ следует оценка

$$|\zeta(s)| \ll t^{\frac{1}{2}-\sigma} t^{\frac{\sigma}{2}} \ln t \ll t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t \ll t^{\frac{1}{2}} \ln t,$$

которая справедлива при всех $t \geq T_1$, $\sigma \geq -(\ln t)^{-1}$. Если $t \geq T_1$, $1 \leq k \leq \frac{\ln t}{(\ln \ln t)^2}$, $\sigma \geq 0$, то из интегральной формулы Коши получим

$$\zeta^{(k)}(s) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|w-s|=(\ln t)^{-1}} \frac{\zeta(w)}{(w-s)^{k+1}} dw \ll k! t^{\frac{1}{2}} \ln t (\ln t)^k \ll t^{\frac{1}{2} + \frac{1}{100}}.$$

Пусть далее t , σ , k удовлетворяют условиям леммы. Из леммы 2 следует, что

$$R_{k,l}(s) \ll t^{-1} \ln^{k-l} t.$$

Используя полученные выше оценки, леммы 2 и 7, найдем

$$\begin{aligned} \frac{r_k(s)}{H(s)} &\ll \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} t^{\frac{1}{2} + \frac{1}{100}} t^{-1} \ln^{k-l} t \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} (\ln t)^m t^{\frac{1}{2} + \frac{1}{100}} t^{-1} \ll t^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{50}}. \end{aligned}$$

Преобразуем главный член в выражении для $G_k(s)$. По лемме 4 имеем

$$\zeta(s) = \int_{0 \searrow 1} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} dz + \chi(s) \int_{0 \searrow 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} dz.$$

Учитывая равенство

$$\chi'(s) = -\chi(s)(F(s) + F(1-s)),$$

получим

$$\begin{aligned} \zeta'(s) &= \int_{0 \searrow 1} (-\ln z) \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} dz + \chi(s) \int_{0 \searrow 1} (\ln z) \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} dz \\ &- \chi(s)(F(s) + F(1-s)) \int_{0 \searrow 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} dz. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} H(s) \left(\zeta(s) + \frac{\zeta'(s)}{F(s) + F(1-s)} \right) &= H(s) \int_{0 \searrow 1} \left(1 - \frac{\ln z}{F(s) + F(1-s)} \right) \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} dz \\ &+ H(1-s) \int_{0 \searrow 1} \frac{\ln z}{F(s) + F(1-s)} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} dz. \end{aligned}$$

Отсюда найдем

$$\begin{aligned}
& \frac{d^k}{ds^k} \left(H(s) \left(\zeta(s) + \frac{\zeta'(s)}{F(s) + F(1-s)} \right) \right) \\
&= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} H^{(m)}(s) \int_{0 \searrow 1} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (-\ln z)^{k-m} \left(1 - \frac{\ln z}{F(s) + F(1-s)} \right) dz \\
&+ \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^m H^{(m)}(1-s) \\
&\times \int_{0 \searrow 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (\ln z)^{k-m} \left(\frac{\ln z}{F(s) + F(1-s)} \right) dz + r(s), \tag{5}
\end{aligned}$$

причем в силу леммы 5 справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\frac{r(s)}{H(s)} &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (F^{(m)}(s) + R_m(s)) \\
&\times \sum_{j=0}^{k-m-1} \binom{k-m}{j} \frac{d^{k-m-j}}{ds^{k-m-j}} \left(\frac{1}{F(s) + F(1-s)} \right) \int_{0 \searrow 1} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (-\ln z)^{j+1} dz \\
&+ \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^m \chi(s) (F^{(m)}(1-s) + R_m(1-s)) \\
&\times \sum_{j=0}^{k-m-1} \binom{k-m}{j} \frac{d^{k-m-j}}{ds^{k-m-j}} \left(\frac{1}{F(s) + F(1-s)} \right) \\
&\times \int_{0 \searrow 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (\ln z)^{j+1} dz \\
&\ll \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (\ln t)^m \sum_{j=0}^{k-m-1} \binom{k-m}{j} t^{-1} \left(\sum_{n \leq \sqrt{t}} \frac{(\ln n)^{j+1}}{n^\sigma} + t^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}} \right) \\
&+ |\chi(s)| \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (\ln t)^m \sum_{j=0}^{k-m-1} \binom{k-m}{j} t^{-1} \\
&\times \left(\sum_{n \leq \sqrt{t}} (\ln n)^{j+1} n^{\sigma-1} + t^{\frac{\sigma-1}{2} + \frac{1}{100}} \right) \ll t^{-\frac{1+\sigma}{2} + \frac{1}{100}}.
\end{aligned}$$

Используя формулу (5), лемму 5 и полученные оценки, будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{G_k(s)}{H(s)} &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{H^{(m)}(s)}{H(s)} \\
&\times \left(\sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (-\ln n)^{k-m} \left(1 - \frac{\ln n}{F(s) + F(1-s)} \right) n^{-s} + O\left(t^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}}\right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^m \frac{H^{(m)}(1-s)}{H(s)} \\
& \times \left(\sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (\ln n)^{k-m} \frac{\ln n}{F(s) + F(1-s)} n^{s-1} + O\left(t^{\frac{\sigma-1}{2} + \frac{1}{100}}\right) \right) \\
& + O\left(t^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{50}}\right).
\end{aligned}$$

Заменим в последнем равенстве $H^{(m)}(s)$ по формуле (3) и получим

$$\begin{aligned}
\frac{G_k(s)}{H(s)} &= \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (F(s) - \ln n)^k \left(1 - \frac{\ln n}{F(s) + F(1-s)}\right) n^{-s} \\
&+ \chi(s) \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (\ln n - F(1-s))^k \frac{\ln n}{F(s) + F(1-s)} n^{s-1} \\
&+ O\left(t^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{50}}\right) + O\left(t^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{50}}\right).
\end{aligned}$$

При выполнении условий леммы справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
F(s) + F(1-s) &= \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-s}{2\pi} + O(t^{-1}) \\
&= \ln \frac{t}{2\pi} + \frac{i}{2} \arg \frac{s}{2\pi} + \frac{i}{2} \arg \frac{1-s}{2\pi} + O(t^{-1}) = \ln \frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{\sigma+1}{t}\right),
\end{aligned}$$

используя которое, найдем

$$\begin{aligned}
\frac{G_k(s)}{H(s)} &= \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (F(s) - \ln n)^k \left(1 - \frac{\ln n}{\ln(t/(2\pi))}\right) n^{-s} \\
&+ \chi(s) \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (\ln n - F(1-s))^k \frac{\ln n}{\ln(t/(2\pi))} n^{s-1} \\
&+ O\left(t^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{50}}\right) + O\left(t^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{50}}\right).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 4. Зависимость $a'_k(T, U)$ от интеграла J_k . Доказательство теоремы

ЛЕММА 10. Пусть $T \geq T_1$, $L = \ln \frac{T}{2\pi}$, $U = TL^{-10}$, $y = T^{\frac{1}{2}}L^{-20}$, $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{L}$, k — произвольное натуральное число, $1 \leq k \leq \frac{1}{2} \frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}$. Справедливо неравенство

$$N'_k(T+U) - N'_k(T) \geq N_k(T+U) - N_k(T) - \frac{UL}{2\pi} \ln \frac{J_k}{U} + O(kU),$$

где

$$\begin{aligned}
 J_k &= \int_T^{T+U} |V_k^* \psi_k(a+it)|^2 dt, \\
 V_k^*(s) &= \sum_{n \leq \sqrt{T/(2\pi)}} \left(1 - \frac{\ln n}{L}\right) \left(1 + \frac{i\pi}{2L} - \frac{2 \ln n}{L}\right)^k n^{-s} \\
 &\quad + e \cdot \exp\left\{\frac{\pi i}{4} - it \ln \frac{t}{2\pi e}\right\} \sum_{n \leq \sqrt{T/(2\pi)}} \frac{\ln n}{L} \left(\frac{2 \ln n}{L} + \frac{i\pi}{2L} - 1\right)^k n^{s-1}, \\
 \psi_k(s) &= \sum_{n \leq y} \frac{\mu(n)}{n^{\frac{1}{2}-a}} \left(\frac{\ln(y/n)}{\ln y}\right)^k n^{-s}, \tag{6}
 \end{aligned}$$

а $\mu(n)$ – функция Мёбиуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 8 и вещественной аналитичности функции $G_k(s)$ имеем

$$\xi^{(k)}(s) = G_k(s) + (-1)^k \overline{G_k(1-\bar{s})}.$$

Отсюда следует, что $\xi^{(k)}(\frac{1}{2}+it)$ есть сумма (если k четное) или разность (если k нечетное) двух комплексно-сопряженных величин. Поэтому $\xi^{(k)}(\frac{1}{2}+it) = 0$ в одном из следующих случаев:

- а) $\arg G_k(\frac{1}{2}+it) \equiv \frac{k+1}{2} \pi \pmod{\pi}$;
- б) $G_k(\frac{1}{2}+it) = 0$.

Формула (4) влечет, что в случае а) при $G_k(\frac{1}{2}+it) \neq 0$ мы имеем простой нуль функции $\xi^{(k)}(\frac{1}{2}+it)$. Определим $\arg G_k(\frac{1}{2}+it)$ при $T \leq t \leq T+U$, непрерывно продолжая значение $\arg G_k(\frac{1}{2}+iT)$ вдоль прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Если $s_1 = \frac{1}{2}+it_1$ является нулем функции $G_k(s)$ порядка n , то положим

$$\begin{aligned}
 \arg G_k\left(\frac{1}{2}+i(t_1+0)\right) &= \arg G_k\left(\frac{1}{2}+i(t_1-0)\right) + \pi n, \\
 \arg G_k\left(\frac{1}{2}+it_1\right) &= \arg G_k\left(\frac{1}{2}+i(t_1+0)\right).
 \end{aligned}$$

Пусть $t_1, \dots, t_{n_1-1}$ – все различные нули функции $G_k(\frac{1}{2}+it)$ при $T < t < T+U$, расположенные в порядке возрастания. Положим $t_0 = T$ и $t_{n_1} = T+U$ и обозначим через T_j интервал (t_{j-1}, t_j) , $j = 1, \dots, n_1$. Тогда, определив через n_2 количество нулей функции $G_k(\frac{1}{2}+it)$ на интервале $(T, T+U]$ с учетом кратности, получим

$$\begin{aligned}
 N'_k(T+U) - N'_k(T) &\geq \sum_{j=1}^{n_1} \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{vararg}_{T_j} G_k\left(\frac{1}{2}+it\right) - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\arg G_k\left(\frac{1}{2}+i(T+U)\right) - \arg G_k\left(\frac{1}{2}+iT\right) \right) - n_1 - n_2.
 \end{aligned}$$

Пользуясь леммами 2 и 3, найдем

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\pi} \left(\arg H\left(\frac{1}{2}+i(T+U)\right) - \arg H\left(\frac{1}{2}+iT\right) \right) \\
 &= N_k(T+U) - N_k(T) + O(k \ln T).
 \end{aligned}$$

Полагая $W_k(s) = G_k(s)/H(s)$, получим следующее соотношение:

$$N'_k(T+U) - N'_k(T) \geq N_k(T+U) - N_k(T) - 2n_2 + O(k \ln T) + \frac{1}{\pi} \left(\arg W_k \left(\frac{1}{2} + i(T+U) \right) - \arg W_k \left(\frac{1}{2} + iT \right) \right). \quad (7)$$

Для оценки $\text{vararg } W_k \left(\frac{1}{2} + it \right) \Big|_{t=T}^{T+U}$ применим принцип аргумента к функции $W_k(s)$ на прямоугольном контуре $\mathcal{D}$ с вершинами в точках $\frac{1}{2} + iT$, $8 + iT$, $8 + i(T+U)$, $\frac{1}{2} + i(T+U)$. Используя приближенную формулу леммы 9 для функции $W_k(s)$ и проводя аналогичные рассуждения, как при доказательстве леммы 31 в работе [1], найдем

$$\frac{1}{\pi} \text{vararg } W_k \left(\frac{1}{2} + it \right) \Big|_{t=T}^{T+U} = -2N + O(\ln T), \quad (8)$$

где N – количество нулей функции $W_k(s)$ внутри контура $\mathcal{D}$ и на его верхней стороне, исключая точку $\frac{1}{2} + i(T+U)$.

Получим верхнюю оценку для N , применяя теорему Литтлвуда к функции $2^k L^{-k} W_k(s) \psi_k(s)$ и прямоугольному контуру $\mathcal{E}$ с вершинами $a + iT$, $\sigma_1 + iT$, $\sigma_1 + i(T+U)$, $a + i(T+U)$, где $\sigma_1 = \ln L / \ln 2$; функция $\psi_k(s)$ определена формулой (6). Будем иметь

$$2\pi i \sum_{\rho=\beta+i\gamma} (\beta - a) = - \int_{\mathcal{E}} \ln \left(\left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k W_k(s) \right) ds,$$

где суммирование ведется по всем нулям ρ функции $W_k(s) \psi_k(s)$ внутри прямоугольного контура $\mathcal{E}$ и на его верхней стороне.

Как и в работе [1], найдем

$$2\pi \sum_{\rho=\beta+i\gamma} (\beta - a) = \int_T^{T+U} \ln \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k W_k(a + it) \right| dt + O(kUL^{-1}).$$

Поскольку множество всех нулей функции $W_k(s) \psi_k(s)$ в прямоугольнике $\mathcal{E}$ содержит нули функции $W_k(s)$ из прямоугольника $\mathcal{D}$ и нули функции $G_k \left(\frac{1}{2} + it \right)$ при $T < t \leq T+U$, то

$$\sum_{\rho=\beta+i\gamma} (\beta - a) \geq \left(\frac{1}{2} - a \right) (N + n_2).$$

Поэтому

$$2\pi \left(\frac{1}{2} - a \right) (N + n_2) \leq \int_T^{T+U} \ln \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k W_k(a + it) \right| dt + O(kUL^{-1}). \quad (9)$$

Из выпуклости функции $\ln t$ следует, что

$$\int_T^{T+U} \ln \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k W_k(a + it) \right| dt \leq U \ln \frac{I_k}{U}, \quad (10)$$

где

$$I_k = \int_T^{T+U} \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k W_k(a+it) \right| dt.$$

Таким образом,

$$2N \leq \frac{UL}{\pi} \ln \frac{I_k}{U} - 2n_2 + O(kU). \quad (11)$$

Из формул (7), (8) и (11) получим неравенство

$$N'_k(T+U) - N'_k(T) \geq N_k(T+U) - N_k(T) - \frac{UL}{\pi} \ln \frac{I_k}{U} - O(kU). \quad (12)$$

Далее преобразуем выражение для интеграла I_k . Будем полагать $s = a + it$, $T \leq t \leq T+U$. Определим

$$c(s) = \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (F(s) - \ln n)^k \left(\frac{\ln n}{L} - \frac{\ln n}{\ln(t/(2\pi))} \right) n^{-s}.$$

Из формулы (2) и леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} (F(s) - \ln n)^k &= \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \ln n + \frac{i\pi}{4} + O(T^{-1}) \right)^k \\ &= \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \ln n + \frac{i\pi}{4} \right)^k (1 + O(kT^{-1})) \ll \left(\frac{L}{2} \right)^k. \end{aligned}$$

Отсюда получим оценку

$$\begin{aligned} &(F(s) - \ln n)^k \left(\frac{\ln n}{L} - \frac{\ln n}{\ln(t/(2\pi))} \right) \\ &\ll \left(\frac{L}{2} \right)^k L \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\ln((T+U)/(2\pi))} \right) \ll \left(\frac{L}{2} \right)^k L^{-11}. \end{aligned}$$

Аналогично, учитывая неравенство $\left| \frac{d}{dt} F(a+it) \right| \leq t^{-1}$ (см. утверждение г) леммы 2), найдем

$$\begin{aligned} &\int_T^{T+U} \left| \frac{d}{dt} \left((F(a+it) - \ln n)^k \left(\frac{\ln n}{L} - \frac{\ln n}{\ln(t/(2\pi))} \right) \right) \right| dt \\ &\ll k \left(\frac{L}{2} \right)^{k-1} L^{-11} \int_T^{T+U} t^{-1} dt + \left(\frac{L}{2} \right)^k L^{-1} \int_T^{T+U} t^{-1} dt \ll \left(\frac{L}{2} \right)^k L^{-11}. \end{aligned}$$

В силу леммы 6, полагая $f_n(t) = (F(s) - \ln n)^k \left(\frac{\ln n}{L} - \frac{\ln n}{\ln(t/(2\pi))} \right)$ и $\delta \ll \left(\frac{L}{2} \right)^k L^{-11}$, получим

$$\int_T^{T+U} \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k c(a+it) \right|^2 dt \ll L^{-22} U \sum_{n \leq \sqrt{(T+U)/(2\pi)}} \frac{1}{n} \ll UL^{-21}.$$

Определим

$$d(s) = \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (\ln n - F(1-s))^k \left(\frac{\ln n}{\ln(t/(2\pi))} - \frac{\ln n}{L} \right) n^{s-1}.$$

Используя лемму 6, найдем

$$\int_T^{T+U} \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \chi(a+it) d(a+it) \right|^2 dt \ll UL^{-21},$$

$$\int_T^{T+U} |\psi_k(a+it)|^2 dt \ll U \sum_{n \leq y} \frac{1}{n} \ll UL.$$

Поскольку левая часть неравенства (9) неотрицательна, то из (10) следует, что $I_k \gg U$. Собирая полученные результаты вместе и применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$I_k = \int_T^{T+U} \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k V_k \psi_k(a+it) \right| dt + O(UL^{-10});$$

здесь

$$V_k(s) = \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (F(s) - \ln n)^k \left(1 - \frac{\ln n}{L} \right) n^{-s}$$

$$+ \chi(s) \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (\ln n - F(1-s))^k \frac{\ln n}{L} n^{s-1}.$$

В работе [1] при доказательстве леммы 31 показано, что

$$I_k \leq U^{\frac{1}{2}} J_k^{\frac{1}{2}} + O(UL^{-\frac{9}{2}}),$$

где интеграл J_k определен в утверждении леммы. Поскольку $I_k \gg U$, то $J_k \gg U$. Теперь из (12) получим требуемое неравенство.

В работе [1] доказано, что при всех натуральных $k \leq \frac{1}{2} \frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}$ имеет место оценка

$$\frac{J_k}{U} \leq 1 + \frac{e^2 + 2}{16k^2} - \frac{1}{4k^3}.$$

Таким образом, из последнего неравенства и лемм 3 и 10 следует результат теоремы (неравенство (1)).

Список литературы

1. Резвякова И. С., “О нулях производных кси-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 109–178.
2. Conrey B., “Zeros of derivatives of Riemann’s ξ -function on the critical line. II”, *J. of Number Theory*, **17** (1983), 71–75.
3. Siegel C. L., “Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie”, *Quellen Stud. Geschichte Math. Astronom. Phys. Abt. B. Stud.* 2, 1932, 45–80.
4. Воронин С. М., Карацуба А. А., *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.

И. С. РЕЗВЯКОВА (I. S. REZVYAKOVA)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: irene@mccme.ru

Поступило в редакцию
 29.09.2005