Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, Релаксация в управляемых системах
субдифференциального типа, *Изв. РАН. Сер. матем.*,
2006, том 70, выпуск 1, 129–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/im594>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:39:57

УДК 517.988

А. А. Толстоногов

Релаксация в управляемых системах субдифференциального типа

В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается управляемая система с эволюционными операторами, которые являются субдифференциалами зависящей от времени, собственной, выпуклой, полунепрерывной снизу функции. Ограничением на управление является полунепрерывная снизу по переменным состояниям многозначная функция с невыпуклыми значениями. Наряду с исходной системой рассматривается система, ограничение на управление которой представляет собой полунепрерывную сверху выпуклозначную регуляризацию исходного ограничения. Изучается взаимосвязь между множествами решений этих систем. В качестве приложения рассматривается управляемое вариационное неравенство. Приведен пример управляемой системы параболического типа с препятствием.

Библиография: 19 наименований.

§ 1. Постановка задачи

Пусть $T = [0, 1]$ – отрезок числовой полупрямой $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ с мерой Лебега μ и с σ -алгеброй Σ μ -измеримых множеств, $\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ – расширенная числовая прямая, H – сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Функция $\varphi: H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *собственной*, если она не равна тождественно $+\infty$, т. е. если ее эффективная область $\text{dom } \varphi = \{x \in H: \varphi(x) < +\infty\}$ не пуста. Множество всех функций $\varphi: H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, которые являются собственными, выпуклыми и полунепрерывными снизу, будем обозначать через $\Gamma_0(H)$. Субдифференциалом $\partial\varphi(x)$ функции $\varphi \in \Gamma_0(H)$ в точке $x \in H$ называется множество

$$\partial\varphi(x) = \{v \in H: \langle v, y - x \rangle \leq \varphi(y) - \varphi(x) \forall y \in H\}.$$

Известно [1], что $\partial\varphi(x)$ является максимально монотонным оператором,

$$\text{dom } \partial\varphi = \{x \in H: \partial\varphi(x) \neq \emptyset\} \subset \text{dom } \varphi$$

и

$$\overline{\text{dom } (\partial\varphi)} = \overline{\text{dom } \varphi},$$

где черта обозначает замыкание в H .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-00203) и РФФИ-ГФЕН Китая (грант № 02-01-39006).

Пусть Y – сепарабельное, рефлексивное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$, моделирующее пространство управлений. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} -\dot{x}(t) &\in \partial\varphi^t(x(t)) + A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0 \in \text{dom } \varphi^0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

со смешанным ограничением на управление

$$u(t) \in U(t, x(t)). \quad (1.2)$$

Здесь φ^t для каждого $t \in T$ – собственная, выпуклая, полунепрерывная снизу функция, $A: T \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$, где $\mathcal{L}(Y, H)$ – пространство непрерывных линейных операторов из Y в H , $F: T \times H \rightarrow H$ – нелинейное отображение, $U: T \times H \rightarrow Y$ – многозначное отображение с замкнутыми, не обязательно выпуклыми значениями, которое является полунепрерывным снизу по второй переменной.

Пусть $B_Y \subset Y$ – единичный открытый шар с центром в нуле и $C(T, H)$ – пространство всех непрерывных функций из T в H с топологией равномерной сходимости на T . Рассмотрим многозначные отображения

$$U_\delta(t, x) = \overline{\text{co}} \{ \cup U(t, y) : y \in x + \delta B_Y \}, \quad \delta > 0, \quad (1.3)$$

$$V(t, x) = \bigcap_{\delta \downarrow 0} U_\delta(t, x), \quad (1.4)$$

где $\overline{\text{co}}$ обозначает замкнутую выпуклую оболочку множества. Отображение (1.4) обычно называют *выпуклой, полунепрерывной сверху регуляризацией отображения* $U(t, x)$. Наряду с ограничением (1.2) на управление рассмотрим ограничение

$$u(t) \in V(t, x(t)). \quad (1.5)$$

Обозначим через $W^{1,2}(T, H)$ пространство абсолютно непрерывных функций $x: T \rightarrow H$ с производной $\dot{x}(\cdot) \in L^2(T, H)$. Под решением управляемой системы (1.1) с ограничением (1.2) (системы (1.1), (1.2)) понимается пара $(x(\cdot), u(\cdot))$, $x(\cdot) \in W^{1,2}(T, H)$, $u(\cdot) \in L^2(T, Y)$, $x(0) = x_0$, такая, что $x(t) \in \text{dom } \partial\varphi^t$ почти всюду и почти всюду на T имеют место включения (1.1), (1.2). Аналогично определяется решение управляемой системы (1.1), (1.5). Если $(x(\cdot), u(\cdot))$ – решение системы (1.1), (1.2), то $u(\cdot)$ называется *управлением*, а $x(\cdot)$ – *траекторией*, соответствующей управлению $u(\cdot)$.

Множества решений управляемых систем (1.1), (1.2) и (1.1), (1.5) будем обозначать $\mathcal{R}_U(x_0)$ и $\mathcal{R}_V(x_0)$ соответственно. Множества всех траекторий систем (1.1), (1.2) и (1.1), (1.5) обозначаются как $Tr_U(x_0)$ и $Tr_V(x_0)$.

При достаточно общих предположениях мы доказываем, что множество $Tr_V(x_0)$ является компактом в пространстве $C(T, H)$ и имеет место равенство

$$Tr_V(x_0) = \overline{Tr_U(x_0)}, \quad (1.6)$$

где черта обозначает замыкание в $C(T, H)$. Свойство (1.6) называется *релаксацией*. Доказательству свойства релаксации для различных классов управляемых систем посвящено много работ (см., например, [2]–[5]). Во всех этих

работах отображение $x \rightarrow U(t, x)$ предполагается непрерывным, а вместо ограничения (1.5) рассматривается овыпукленное ограничение $\overline{\text{co}} U(t, x)$. В настоящей работе мы предполагаем, что отображение $x \rightarrow U(t, x)$ является полунепрерывным снизу, а вместо овыпукленного ограничения $\overline{\text{co}} U(t, x)$ рассматриваем выпуклую, полунепрерывную сверху регуляризацию $V(t, x)$ отображения $U(t, x)$. Поскольку $\overline{\text{co}} U(t, x) \subset V(t, x)$, то мы расширяем класс ограничений $U(t, x)$, при которых имеет место теорема релаксации.

Кроме того, во всех работах, посвященных этой тематике, одним из условий, гарантирующих выполнение равенства (1.6), является липшицевость отображения $U(t, x)$ по второй переменной, что влечет непрерывность отображения $x \rightarrow U(t, x)$. Наши условия отличаются от традиционных и имеют место для полунепрерывных снизу многозначных отображений, что показано на примере.

Работа состоит из семи параграфов: § 1 является введением, где приведена постановка задачи; в § 2 вводятся основные обозначения, определения и ряд известных результатов; в § 3 доказывается ряд вспомогательных результатов; в § 4 рассматриваются вопросы существования решений управляемой системы; в § 5 дано доказательство теоремы релаксации; в § 6 устанавливается взаимосвязь между решениями управляемой системы и решениями управляемого вариационного неравенства с препятствием; в § 7 рассматривается пример управляемой параболической системы с препятствием.

§ 2. Основные обозначения, определения и предварительные сведения

Пусть X и Z – топологические пространства. Многозначное отображение $F: X \rightarrow Z$ называется *полунепрерывным снизу по Вьеторису* в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $W \subset Z$, $F(x_0) \cap W \neq \emptyset$, существует окрестность $E(x_0)$ точки x_0 такая, что $F(x) \cap W \neq \emptyset$ для любого $x \in E(x_0)$. Многозначное отображение $F: X \rightarrow Z$ называется *полунепрерывным сверху по Вьеторису* в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $W \subset Z$, $F(x_0) \subset W$, существует окрестность $E(x_0)$ точки x_0 такая, что $F(x) \subset W$ для любого $x \in E(x_0)$.

Если X и Z – метрические пространства, то определение полунепрерывности по Вьеторису в точке x_0 многозначного отображения F эквивалентно следующему: для любого $v_0 \in F(x_0)$ и любой последовательности $x_n \in X$, $n \geq 1$, $x_n \rightarrow x_0$, существует последовательность $v_n \in F(x_n)$, $n \geq 1$, сходящаяся к v_0 . Пусть Y – сепарабельное банахово пространство. Следуя работе [6], многозначное отображение $F: T \rightarrow Y$ назовем *измеримым (слабо измеримым)*, если для любого замкнутого (открытого) множества $W \subset Y$ множество $\{t \in T: F(t) \cap W \neq \emptyset\}$ измеримо. Аналогично, если $F: T \times H \rightarrow Y$, то различные определения измеримости F понимаются в терминах σ -алгебры $\Sigma \otimes \mathcal{B}_H$ на $T \times H$, порожденной множествами $A \times D$, где $A \in \Sigma$, $D \in \mathcal{B}_H$ и $\mathcal{B}_H$ – σ -алгебра борелевских множеств из H . В этом случае мы говорим об $\Sigma \otimes \mathcal{B}_H$ -измеримости ($\Sigma \otimes \mathcal{B}_H$ -слабой измеримости). Известно [6], что измеримость ($\Sigma \otimes \mathcal{B}_H$ -измеримость) отображения F влечет слабую измеримость

(слабую $\Sigma \otimes \mathcal{B}_H$ -измеримость). Для отображения $F: T \rightarrow Y$ с замкнутыми значениями понятия измеримости и слабой измеримости совпадают.

Пусть $\mathcal{M}(Y)$ – совокупность всех измеримых функций из T в Y . Множество $K \subset \mathcal{M}(Y)$ называется *разложимым*, если для любых $u, v \in K$ и любого $E \in \Sigma$ имеем $u\chi_E + v\chi_{T \setminus E} \in K$, где χ_E – характеристическая функция множества E . Множество $K \subset L^2(T, Y)$ называется *равномерно интегрируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int_E \|u(t)\|_Y^2 dt \leq \varepsilon$$

для любого $E \in \Sigma$ при $\mu(E) < \delta$ и любого $u \in K$.

Для отделимого локально выпуклого пространства X через ω - X обозначено то, что пространство X наделено слабой $\sigma(X, X^*)$ -топологией [7], где X^* – пространство, топологически сопряженное к X . Такое же обозначение мы используем и для подмножеств из X , наделенных топологией, индуцированной из ω - X .

На пространстве $L^2(T, Y)$, наряду со стандартной нормой, мы рассматриваем так называемую “слабую” норму

$$\|u(\cdot)\|_\omega = \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\| \int u(t) dt \right\|_Y, \quad u(\cdot) \in L^2(T, Y). \quad (2.1)$$

Пространство $L^2(T, Y)$ с нормой (2.1) мы будем обозначать через $L_\omega^2(T, Y)$. Связь между сходимостью в пространствах ω - $L^2(T, Y)$ и $L_\omega^2(T, Y)$ устанавливает следующая лемма [2].

ЛЕММА 2.1. Пусть Y – сепарабельное, рефлексивное, банахово пространство. Если последовательность $u_n \in L^2(T, Y)$, $n \geq 1$, ограничена и сходится к u в $L_\omega^2(T, Y)$, то последовательность u_n , $n \geq 1$, сходится к u в ω - $L^2(T, Y)$.

Функция $\omega: T \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется *интегрально ограниченной* на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^+$, если для любого $m > 0$ существует функция $l_m(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что $\omega(t, r) \leq l_m(t)$ почти всюду (п. в.) для любых r , $0 \leq r \leq m$.

Функция $\omega: T \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется *функцией Камке*, если:

- 1) $\omega(t, r)$ является функцией Каратеодори, интегрально ограниченной на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^+$;
- 2) $\omega(t, 0) = 0$ п. в.;
- 3) единственной непрерывной функцией $r: T \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющей неравенству

$$r(t) \leq \int_0^t \omega(s, r(s)) ds, \quad t \in T,$$

является функция $r(t)$, тождественно равная нулю.

Типичным примером функции Камке является функция $\omega(t, r) = k(t)r$, где $k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$. Другие примеры функций Камке можно найти в работе [8].

Далее нам понадобятся следующие результаты [9], [10].

Пусть $\varphi \in \Gamma_0(H)$. Для каждого $\lambda > 0$ регуляризацией Моро–Иосиды функции $\varphi \in \Gamma_0(H)$ называется функция

$$\varphi_\lambda(x) = \inf \left\{ \varphi(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 : y \in H \right\}.$$

Функция φ_λ является конечной, непрерывной и выпуклой на H , $\partial\varphi_\lambda$ – однозначной функцией с $\text{dom } \partial\varphi_\lambda = H$ для каждого λ . Более того, для любых $x \in H$ и $\lambda > 0$ справедливы следующие соотношения:

$$\varphi_\lambda(x) \leq \varphi(x), \quad \varphi_\lambda(x) \uparrow \varphi(x), \quad \lambda \downarrow 0; \quad (2.2)$$

если $\lambda_n \downarrow 0$ и $x_n \rightarrow x$ в H , то

$$\varphi(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \varphi_{\lambda_n}(x_n). \quad (2.3)$$

Пусть $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$. Сделаем следующие предположения относительно семейства $\{\varphi^t : t \in T\} \subset \Gamma_0(H)$.

ГИПОТЕЗЫ $H(\varphi)$:

(i) для каждого $r > 0$ существуют $a_r \in W^{1,2}(T, \mathbb{R})$, $b_r \in W^{1,1}(T, \mathbb{R})$ такие, что для любых $s, t \in T$, $s \leq t$, и любого $x \in \text{dom } \varphi^s$, $\|x\| \leq r$, найдется элемент $y \in \text{dom } \varphi^t$, удовлетворяющий неравенствам

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq |a_r(t) - a_r(s)| (|\varphi^s(x)|^{1/2} + 1), \\ \varphi^t(y) - \varphi^s(x) &\leq |b_r(t) - b_r(s)| (|\varphi^s(x)| + 1); \end{aligned}$$

(ii) для $r > 0$ и $t \in T$ множество $\{x \in H : \|x\| \leq r, |\varphi^t(x)| \leq r\}$ относительно компактно в H .

Всюду далее считаем, что гипотезы $H(\varphi)$ имеют место.

Рассмотрим включение

$$\begin{aligned} -\dot{x}(t) &\in \partial\varphi^t(x(t)) + f(t), \\ x(0) &= x_0 \in \text{dom } \varphi^0, \quad f \in L^2(T, H) \end{aligned} \quad (2.4)$$

и уравнение

$$\begin{aligned} -\dot{x}_\lambda(t) &= \partial\varphi_\lambda^t(x_\lambda(t)) + f(t), \\ x_\lambda(0) &= x_0 \in \text{dom } \varphi^0, \quad f \in L^2(T, H). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Решением включения (2.4) называется абсолютно непрерывная функция $x : T \rightarrow H$, $x(0) = x_0$, $x(t) \in \text{dom } \partial\varphi^t$ п.в., такая, что п.в. имеет место включение (2.4). Решением уравнения (2.5) называется абсолютно непрерывная функция $x_\lambda : T \rightarrow H$, $x_\lambda(0) = x$, п.в. удовлетворяющая равенству (2.5).

Непосредственно из результатов работы [9, § 1.3, 1.4] вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. Для любых $x_0 \in \text{dom } \varphi^0$, $f \in L^2(T, H)$, $\lambda \in (0, 1]$ включение (2.4) и уравнение (2.5) имеют единственные решения $x \in W^{1,2}(T, H)$, $x_\lambda \in W^{1,2}(T, H)$, $x(0) = x_\lambda(0) = x_0$, такие, что при $\lambda \downarrow 0$

$$\begin{aligned} x_\lambda &\rightarrow x \quad \text{в } C(T, H), \\ \dot{x}_\lambda &\rightarrow \dot{x} \quad \text{в } L^2(T, H). \end{aligned}$$

§ 3. Вспомогательные результаты

Введем следующие предположения.

ГИПОТЕЗЫ $H(A)$. Оператор $A: T \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$ является таким, что:

- 1) отображение $t \rightarrow A(t, x)u$ измеримо для любых $(x, u) \in H \times Y$;
- 2) отображение $x \rightarrow A^*(t, x)h$ непрерывно п. в. для любых $h \in H$, где $A^*(t, x)$ – оператор, сопряженный к $A(t, x)$;
- 3) для почти всех $t \in T$

$$\|A(t, x)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq c, \quad c > 0. \quad (3.1)$$

ГИПОТЕЗЫ $H(F)$. Отображение $F: T \times H \rightarrow H$ типа Каратеодори является таким, что

$$\|F(t, x)\| \leq c_1(t) + d_1(t)\|x\| \quad \text{п. в.}, \quad c_1(\cdot), d_1(\cdot) \in L^2(T, \mathbb{R}^+). \quad (3.2)$$

ГИПОТЕЗЫ $H(U)$. Отображение $U: T \times H \rightarrow Y$ является многозначным с замкнутыми, возможно, невыпуклыми значениями таким, что:

- 1) отображение $x \rightarrow U(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису п. в.;
- 2) отображение $(t, x) \rightarrow U(t, x)$ слабо $\Sigma \otimes \mathcal{B}_H$ -измеримо;
- 3) для почти всех $t \in T$

$$\|U(t, x)\|_Y = \sup\{\|v\|_Y : v \in U(t, x)\} \leq c_2(t) + d_2(t)\|x\|, \quad (3.3)$$

где $c_2, d_2 \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$.

ГИПОТЕЗА $H(\mathbb{R})$. Для любого числа $M > 0$ существует функция Камке $\omega_M: T \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что п. в. для любых $x, y \in H$, $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$, и $u \in U(t, x)$ найдется элемент $v \in U(t, y)$, удовлетворяющий неравенству

$$\begin{aligned} & \langle x - y, A(t, x)u + F(t, x) - A(t, y)v - F(t, y) \rangle \\ & + \omega_M(t, \|x - y\|)\|x - y\| \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Всюду далее считаем, что гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$ имеют место.

Из гипотез $H(A)$ следует, что для каждого $h \in H$ функция $\langle h, A(t, x)u \rangle = \langle A^*(t, x)h, u \rangle$ измерима по t и непрерывна по (x, u) . Поэтому для любых измеримых функций $x: T \rightarrow H$, $u: T \rightarrow Y$ функция $t \rightarrow A(t, x(t))u(t)$ скалярно измерима. Тогда из сепарабельности пространства H вытекает, что функция $t \rightarrow A(t, x(t))u(t)$ измерима. В соответствии с гипотезами $H(F)$ измеримой является и функция $t \rightarrow F(t, x(t))$.

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathcal{R}_V(x_0)$. Положим

$$f_*(t) = A(t, x_*(t))u_*(t) + F(t, x_*(t)). \quad (3.5)$$

Из неравенств (3.1)–(3.3) следует, что

$$\|f_*(t)\| \leq m(t) + n(t)\|x_*(t)\|, \quad (3.6)$$

где

$$m(t) = cc_2(t) + c_1(t), \quad n(t) = cd_2(t) + d_1(t). \quad (3.7)$$

Тогда из (3.6) и (3.7) вытекает, что $f_* \in L^2(T, H)$. Поскольку $f_* \in L^2(T, H)$, то из определения решения управляемой системы следует, что $x_*(t)$ является единственным решением включения (2.4) с функцией $f(t) = f_*(t)$, определенноей равенством (3.5).

Пусть $\lambda_n \in (0, 1]$, $\lambda_n \downarrow 0$, $n \geq 1$. Положим $\Lambda = \{\lambda_n, n \geq 0\}$, где $\lambda_0 = 0$. Согласно теореме 2.1 будет определен оператор $\mathcal{L}: [0, 1] \times L^2(T, H) \rightarrow C(T, H)$, который каждому $\lambda \in (0, 1]$ и функции $f(\cdot) \in L^2(T, H)$ ставит в соответствие единственное решение $x_\lambda(f) = \mathcal{L}(\lambda, f)$, $x_\lambda(f)(0) = x_0$, уравнения (2.5), а при $\lambda = 0$ единственное решение $x(f) = \mathcal{L}(0, f)$, $x(f)(0) = x_0$, включения (2.4).

Хорошо известно [1], что

$$\begin{aligned} \|x(f)(t)\| &\leq \|\mathcal{L}(0, \Theta)\| + \int_0^t \|f(s)\| ds, & t \in T, \\ \|x_\lambda(f)(t)\| &\leq \|\mathcal{L}(\lambda, \Theta)\| + \int_0^t \|f(s)\| ds, & \lambda \in (0, 1], \quad t \in T, \end{aligned}$$

где Θ – нулевой элемент пространства $L^2(T, H)$.

Из этих неравенств и теоремы 2.1 следует, что существует константа $M_1 > 0$ такая, что для любого $\lambda \in \Lambda$ имеет место неравенство

$$\|x_\lambda(f)(t)\| \leq M_1 + \int_0^t \|f(s)\| ds, \quad t \in T, \quad (3.8)$$

где $x_0(f) = x(f)$. Используя неравенства (3.6), (3.8), мы получаем, что для любого $x \in Tr_V(x_0)$ выполнено

$$\|x(t)\| \leq M_1 + \int_0^t (m(s) + n(s)\|x(s)\|) ds, \quad t \in T. \quad (3.9)$$

Из неравенства (3.9) и неравенства Беллмана–Гронуолла вытекает, что

$$\|x(t)\| \leq \left[\int_0^t m(s) ds + M_1 \right] \exp\left(\int_0^t n(s) ds \right) \leq M, \quad t \in T. \quad (3.10)$$

Поскольку $U(t, x) \subset V(t, x)$, то $Tr_U(x_0) \subset Tr_V(x_0)$. Поэтому неравенство (3.10) имеет место и для любого $x(\cdot) \in Tr_U(x_0)$.

Пусть

$$G(t) = \{x \in H: \|x\| \leq m(t) + n(t)(M + 1)\}. \quad (3.11)$$

Из результатов работы [6] следует, что $t \rightarrow G(t)$ является измеримым многозначным отображением с выпуклыми, слабо компактными значениями. Положим

$$S_G = \{f(\cdot) \in \mathcal{M}(H): f(t) \in G(t) \text{ п. в.}\}. \quad (3.12)$$

Поскольку $m, n \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$, то из (3.11) следует, что S_G является выпуклым метризуемым компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}L^2(T, H)$.

Пусть

$$\mathcal{R}_G(\lambda) = \{x_\lambda(f) = \mathcal{L}(\lambda, f): f(\cdot) \in S_G\}, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Из соотношений (3.8), (3.11) вытекает, что для любого $x_\lambda(f) \in \mathcal{R}_G(\lambda)$ имеет место неравенство

$$\|x_\lambda(f)(t)\| \leq M_1 + \int_0^t (m(s) + n(s)(M+1)) ds, \quad t \in T. \quad (3.13)$$

Рассмотрим множество

$$\mathcal{R}_G = \{\cup \mathcal{R}_G(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}.$$

Используя рассуждения, приведенные в работах [11], [12], получим, что множество $\mathcal{R}_G$ является равномерно непрерывным и существует константа $M_2 > 0$ такая, что

$$|\varphi_\lambda^t(x_\lambda(f)(t))| \leq M_2, \quad t \in T, \quad \lambda \in \Lambda, \quad \lambda \neq 0. \quad (3.14)$$

Согласно [10, лемма 2.1] существует константа $K_1 > 0$ такая, что

$$\varphi_\lambda^t(x) \geq -K_1(|x| + 1), \quad t \in T, \quad \lambda \in (0, 1], \quad x \in H.$$

Из этого неравенства, теоремы 2.1 и неравенств (2.2), (2.3), (3.13), (3.14) следует, что существует константа $M_2 > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} \|x(f)(t)\| &\leq M_2, & t \in T, \quad x(f) \in \mathcal{R}_G(0), \\ |\varphi^t(x(f)(t))| &\leq M_2, & t \in T, \quad x(f) \in \mathcal{R}_G(0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Используя (3.5) и гипотезу $H(\varphi)$, (ii), получаем, что для каждого $t \in T$ множество $\{x(f)(t) : x(f) \in \mathcal{R}_G(0)\}$ относительно компактно в H . Следовательно, множество $\mathcal{R}_G(0)$ относительно компактно в $C(T, H)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Оператор $f \rightarrow \mathcal{L}(0, f)$ является непрерывным из $\omega\text{-}S_G$ в $C(T, H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество $\omega\text{-}S_G$ является выпуклым метризуемым компактом в $\omega\text{-}L^2(T, H)$, то нам достаточно доказать секвенциальную непрерывность оператора $f \rightarrow \mathcal{L}(0, f)$. Пусть последовательность $f_n \in S_G$, $n \geq 1$, сходится к f_* в пространстве $\omega\text{-}L^2(T, H)$ и $x(f_n) = \mathcal{L}(0, f_n)$, $x(f_*) = \mathcal{L}(0, f_*)$.

Поскольку $x(f_n) \in \mathcal{R}_G(0)$, $n \geq 1$, то из последовательности $x(f_n)$, $n \geq 1$, можно выбрать подпоследовательность $x(f_{n_k})$, $k \geq 1$, сходящуюся в $C(T, H)$ к некоторому элементу $z \in C(T, H)$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \langle x(f_{n_k})(s) - z(s), f_*(s) - f_{n_k}(s) \rangle ds = 0, \quad t \in T. \quad (3.16)$$

Воспользовавшись монотонностью оператора $\partial\varphi^t$, мы получим

$$\begin{aligned} &\langle x(f_{n_k})(t) - x(f_*)(t), \dot{x}(f_{n_k})(t) - \dot{x}(f_*)(t) \rangle \\ &\leq \langle x(f_{n_k})(t) - x(f_*)(t), f_*(t) - f_{n_k}(t) \rangle \quad \text{п. в.} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|x(f_{n_k})(t) - x(f_*)(t)\|^2 \\ & \leq \int_0^t \langle x(f_{n_k})(s) - x(f_*)(s), f_*(s) - f_{n_k}(s) \rangle ds, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Поскольку

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \langle z(s), f_*(s) - f_{n_k}(s) \rangle ds = 0, \quad t \in T,$$

то из (3.16), (3.17) вытекает, что $x(f_{n_k})(t) \rightarrow x(f_*)(t)$ в H для каждого $t \in T$. Так как $\mathcal{R}_G(0)$ является относительно компактным подмножеством пространства $C(T, H)$ и $x(f_{n_k}) \in \mathcal{R}_G(0)$, $k \geq 1$, то $x(f_{n_k}) \rightarrow x(f_*)$ в $C(T, H)$.

Если мы предположим, что последовательность $x(f_n)$, $n \geq 1$, не сходится к $x(f_*)$, то найдется подпоследовательность $x(f_{n_k})$, $k \geq 1$, последовательности $x(f_n)$, $n \geq 1$, такая, что любая подпоследовательность последовательности $x(f_{n_k})$, $k \geq 1$, не сходится к $x(f_*)$. Повторяя рассуждения, приведенные выше к последовательности $x(f_{n_k})$, $k \geq 1$, мы придем к противоречию. Поэтому $x(f_n) \rightarrow x(f_*)$ в $C(T, H)$ и, следовательно, оператор $(f) \rightarrow \mathcal{L}(0, f)$ является непрерывным из $\omega\text{-}S_G$ в $C(T, H)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Множество $\mathcal{R}_G(0)$ является компактом в $C(T, H)$.*

Следствие 3.1 вытекает из теоремы 3.1 и компактности множества $\omega\text{-}S_G$ в $\omega\text{-}L^2(T, H)$.

ЛЕММА 3.1. *При почти каждом $t \in T$ отображение $V(t, x)$, определенное по формуле (1.4), является полунепрерывным сверху по Вьеторису из H в $\omega\text{-}Y$ с выпуклыми слабо компактными значениями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$V(t, x) = \bigcap_{n \geq 1} U_{1/n}(t, x), \quad (3.18)$$

где

$$U_{1/n}(t, x) = \overline{\text{co}} \left\{ \cup U(t, y) : y \in x + \frac{1}{n} B_Y \right\}. \quad (3.19)$$

Из неравенства (3.3) следует, что при почти каждом $t \in T$ значениями отображения $U_{1/n}(t, x)$ являются выпуклые, слабо компактные подмножества пространства Y . Пусть $x_0 \in H$, W – открытое множество в пространстве $\omega\text{-}Y$ и $V(t, x_0) \subset W$. Согласно (3.18) $V(t, x_0)$ является пересечением убывающей по включению последовательности $U_{1/n}(t, x_0)$ выпуклых, компактных подмножеств пространства $\omega\text{-}Y$. Поэтому найдется $n_0 \geq 1$ такое, что

$$U_{1/n_0}(t, x_0) \subset W. \quad (3.20)$$

Возьмем произвольное $y \in x_0 + (1/n_0)B_Y$. Тогда при некотором $\delta > 0$ будет иметь место включение $y + \delta B_Y \subset x_0 + (1/n_0)B_Y$. Поэтому

$$U_\delta(t, y) \subset U_{1/n_0}(t, x_0). \quad (3.21)$$

Из включений (3.20), (3.21) вытекает, что

$$V(t, y) \subset W \quad \text{для любого } y \in x_0 + \frac{1}{n_0} B_Y.$$

Последнее означает, что отображение $x \rightarrow V(t, x)$ является полунепрерывным сверху по Вьеторису из H в ω - Y . Лемма доказана.

Пусть $C_Y = \{y_k\}_{k \geq 1}$ – счетное плотное подмножество шара B_Y . Положим

$$U_{1/n}^k(t, x) = U\left(t, x + \frac{1}{n} y_k\right), \quad y_k \in C_Y. \quad (3.22)$$

ЛЕММА 3.2. При почти каждом $t \in T$ имеет место равенство

$$U_{1/n}(t, x) = \overline{\text{co}} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/n}^k(t, x) \right\}, \quad (3.23)$$

где $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/n}^k(t, x) \right\}$ обозначает замыкание в пространстве Y множества $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/n}^k(t, x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что при почти каждом $t \in T$ имеет место равенство

$$\left\{ \bigcup U(t, y) : y \in x + \frac{1}{n} B_Y \right\} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/n}^k(t, x)}. \quad (3.24)$$

Включение

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/n}^k(t, x)} \subset \left\{ \bigcup U(t, y) : y \in x + \frac{1}{n} B_Y \right\} \quad (3.25)$$

очевидно.

Пусть $v \in \left\{ \bigcup U(t, y) : y \in x + (1/n)B_Y \right\}$. Тогда $v \in U(t, x + (1/n)z)$ при некотором $z \in B$. Поэтому существует последовательность $z_m \in C_Y$, $m \geq 1$, сходящаяся к z . Поскольку при почти каждом $t \in T$ отображение $y \rightarrow U(t, y)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису в точке $x + (1/n)z$ и $x + (1/n)z_m \rightarrow x + (1/n)z$, то существует последовательность $v_m \in U(t, x + (1/n)z_m)$, $m \geq 1$, сходящаяся к v . Так как $v_m \in \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/n}^k(t, x)$, $m \geq 1$, то $v \in \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/n}^k(t, x)}$. Следовательно,

$$\left\{ \bigcup U(t, y) : y \in x + \frac{1}{n} B_Y \right\} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/n}^k(t, x)}. \quad (3.26)$$

Теперь равенство (3.24) вытекает из включений (3.25), (3.26). Поскольку

$$U_{1/n}(t, x) = \overline{\text{co}} \left\{ \bigcup U(t, y) : y \in x + \frac{1}{n} B \right\}, \quad (3.27)$$

то равенство (3.23) следует из (3.24), (3.27). Лемма доказана.

§ 4. Существование решений

В этом параграфе мы рассмотрим вопросы существования решений управляемых систем (1.1), (1.2) и (1.1), (1.5). Пусть

$$Q = \{x \in H: \|x\| \leq M + 1\}. \quad (4.1)$$

Обозначим через $p_r: H \rightarrow Q$ оператор проектирования на множество Q , который каждой точке $x \in H$ ставит в соответствие единственную точку $p_r x \in Q$ такую, что $\|p_r x - x\| = \min\{\|y - x\|: y \in Q\}$. Хорошо известно, что

$$\|p_r x - p_r y\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in H. \quad (4.2)$$

Пусть

$$S = \{f \in \mathcal{M}(Y): \|f(t)\|_Y \leq c_2(t) + d_2(t)(M + 1) \text{ п. в.}\}. \quad (4.3)$$

Тогда S является выпуклым, компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}L^2(T, Y)$. Как указывалось в § 3, для любых измеримых функций $x: T \rightarrow H$, $u: T \rightarrow Y$ функция $t \rightarrow A(t, x(t))u(t)$ измерима.

Пусть $x(\cdot) \in L^2(T, H)$ и $u(\cdot) \in S$. Тогда из гипотезы $H(F)$ и неравенства (4.2) следует, что функция $t \rightarrow A(t, x(t))u(t) + F(t, p_r x(t))$ измерима. Согласно (3.1), (3.2) и (4.1), (4.2) имеет место неравенство

$$\|A(t, x(t))u(t) + F(t, p_r x(t))\| \leq m(t) + n(t)(M + 1), \quad (4.4)$$

где $m(t)$, $n(t)$ – функции, определенные равенствами (3.7). Поэтому мы можем определить оператор $\mathcal{A}: L^2(T, H) \times S \rightarrow L^2(T, H)$ следующим образом:

$$\mathcal{A}(x, u)(t) = A(t, x(t))u(t) + F(t, p_r x(t)). \quad (4.5)$$

ЛЕММА 4.1. *Оператор $\mathcal{A}$ является непрерывным из $L^2(T, H) \times \omega\text{-}S$ в $\omega\text{-}L^2(T, H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество S является выпуклым метризуемым компактом в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$, то нам достаточно доказать секвенциальную непрерывность оператора $\mathcal{A}$. Пусть $x_n \rightarrow x$ в $L^2(T, H)$ и $u_n \rightarrow u$ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$. Возьмем произвольные $u \in Y$ и $h \in L^2(T, H)$. Тогда из равенства

$$\langle h(t), A(t, x_n(t))u \rangle = \langle A^*(t, x_n(t))h(t), u \rangle$$

следует, что функция $t \rightarrow A^*(t, x_n(t))h(t)$ является скалярно измеримой из T в Y^* и, следовательно, измеримой. Рассмотрим подпоследовательность $x_{n_k}(t)$, $k \geq 1$, последовательности $x_n(t)$, $n \geq 1$, сходящуюся почти всюду к $x(t)$. Тогда из гипотез $H(A)$, $H(F)$ следует

$$A^*(t, x_{n_k}(t))h(t) \rightarrow A^*(t, x(t))h(t) \quad \text{п. в. в } Y^*, \quad (4.6)$$

$$\|A^*(t, x_{n_k}(t))h(t)\|_{Y^*} \leq c\|h(t)\| \quad \text{п. в.}, \quad (4.7)$$

$$F(t, p_r x_{n_k}(t)) \rightarrow F(t, p_r x(t)) \quad \text{п. в. в } H, \quad (4.8)$$

$$\|F(t, p_r x_{n_k}(t))\| \leq c_1(t) + d_1(t)(M + 1) \quad \text{п. в.} \quad (4.9)$$

Используя формулы (4.6)–(4.9) и теорему Лебега об ограниченной сходимости, получим

$$A^*(t, x_{n_k}(t))h(t) \rightarrow A^*(t, x(t))h(t) \quad \text{в } L^2(T, Y^*), \quad (4.10)$$

$$F(t, p_r x_{n_k}(t)) \rightarrow F(t, p_r x(t)) \quad \text{в } L^2(T, H). \quad (4.11)$$

Из (4.10) вытекает, что

$$\int_T \langle A^*(t, x_{n_k}(t))h(t), u_{n_k}(t) \rangle dt \rightarrow \int_T \langle A^*(t, x_n(t))h(t), u(t) \rangle dt. \quad (4.12)$$

Теперь из (4.11), (4.12) и равенства

$$\int_T \langle h(t), A(t, x_{n_k}(t))u_{n_k}(t) \rangle dt = \int_T \langle A^*(t, x_{n_k}(t))h(t), u_{n_k}(t) \rangle dt$$

следует, что

$$\mathcal{A}(x_{n_k}, u_{n_k}) \rightarrow \mathcal{A}(x, u) \quad \text{в } \omega\text{-}L^2(T, H).$$

Согласно (4.4) множество $\{\mathcal{A}(x_n, u_n), n \geq 1\}$ является подмножеством некоторого метризуемого компакта пространства $\omega\text{-}L^2(T, H)$. Если мы предположим, что последовательность $\mathcal{A}(x_n, u_n)$, $n \geq 1$, не сходится к $\mathcal{A}(x, u)$ в $\omega\text{-}L^2(T, H)$, то найдется подпоследовательность $\mathcal{A}(x_{n_k}, u_{n_k})$, $k \geq 1$, последовательности $\mathcal{A}(x_n, u_n)$, $n \geq 1$, такая, что любая подпоследовательность $\mathcal{A}(x_{n_k}, u_{n_k})$, $k \geq 1$, не сходится к $\mathcal{A}(x, u)$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, к последовательности x_{n_k} , $k \geq 1$, мы придем к противоречию. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполняются гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$. Тогда множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ не пусто, а множество $\mathcal{R}_V(x_0)$ является компактом в $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из гипотез $H(U)$ и [13, теорема 2.4] следует, что для любого элемента $x \in C(T, H)$ отображение $t \rightarrow U(t, x(t))$ является измеримым с замкнутыми значениями. Поэтому на пространстве $C(T, H)$ мы можем определить отображение

$$\tilde{U}(x) = \{u \in \mathcal{M}(Y) : u(t) \in U(t, x(t)) \text{ п. в.}\}. \quad (4.13)$$

Согласно (3.3) значениями отображения $\tilde{U}(x)$ являются замкнутые разложимые множества $L^2(T, Y)$. Покажем, что отображение $x \rightarrow \tilde{U}(x)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису из $C(T, H)$ в $L^2(T, Y)$. Пусть $x_* \in C(T, H)$, $v_* \in \tilde{U}(x_*)$ и $x_n \in C(T, H)$, $n \geq 1$, – последовательность, сходящаяся к x_* в $C(T, H)$. Тогда из свойств измеримых многозначных отображений [6] следует, что существует последовательность $v_n \in \tilde{U}(x_n)$, $n \geq 1$, такая, что

$$\|v_*(t) - v_n(t)\|_Y \leq d_Y(v(t), U(t, x_n(t))) + \frac{1}{n}, \quad t \in T, \quad (4.14)$$

где $d_Y(\cdot, \cdot)$ – расстояние от точки до множества в пространстве Y . Поскольку при почти каждом $t \in T$ отображение $x \rightarrow U(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису, то согласно [13, лемма 1.2] при почти всех t функция $y \rightarrow d_Y(v_*(t), U(t, y))$ полунепрерывна сверху. Поэтому из (4.14) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_*(t) - v_n(t)\|_Y = 0 \quad \text{п. в.}$$

Из этого равенства, (3.3) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости вытекает, что $v_n \rightarrow v_*$ в $L^2(T, Y)$. Поэтому отображение $x \rightarrow \tilde{U}(x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису. Тогда согласно [14, утверждение 2.2] существует непрерывная функция $g: \mathcal{R}_G(0) \rightarrow L^2(T, Y)$ такая, что

$$g(x) \in \tilde{U}(x), \quad x \in \mathcal{R}_G(0). \quad (4.15)$$

Пусть $P_r: C(T, H) \rightarrow C(T, H)$ – отображение, определенное по правилу

$$P_r(x)(t) = p_r x(t).$$

Тогда из (4.2) следует, что отображение P_r является непрерывным из $C(T, H)$ в $C(T, H)$ и для любого $x(\cdot) \in C(T, H)$ будет иметь место неравенство

$$\|P_r(x)(t)\| \leq M + 1.$$

Рассмотрим отображение $f \rightarrow g(P_r \mathcal{L}(0, f))$. Согласно теореме 3.1 отображение $f \rightarrow g(P_r \mathcal{L}(0, f))$ будет непрерывным из $\omega\text{-}S_G$ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$. Из (3.3), (4.15) вытекает, что

$$\|g(P_r \mathcal{L}(0, f))(t)\| \leq c_2(t) + d_2(t)(M + 1).$$

Тогда согласно (4.3) $g(P_r \mathcal{L}(0, f)) \in S$, $f \in S_G$. Поэтому на множестве S_G будет определен оператор $\mathcal{A}(\mathcal{L}(0, f), g(P_r \mathcal{L}(0, f)))$, который согласно лемме 4.1 будет непрерывным из $\omega\text{-}S_G$ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$. Поскольку $g(P_r \mathcal{L}(0, f)) \in S$, $f \in S_G$, то из (4.4) следует, что для любого $f \in S_G$

$$\|\mathcal{A}(\mathcal{L}(0, f), g(P_r \mathcal{L}(0, f)))(t)\| \leq m(t) + n(t)(M + 1). \quad (4.16)$$

Теперь из (3.11), (3.12) и (4.16) следует, что оператор $\mathcal{A}(\mathcal{L}(0, f), g(P_r \mathcal{L}(0, f)))$ является непрерывным из $\omega\text{-}S_G$ в $\omega\text{-}S_G$. Так как $\omega\text{-}S_G$ выпуклый метризуемый компакт в $\omega\text{-}L^2(T, H)$, то согласно теореме Шаудера существует неподвижная точка $f_* \in S_G$ этого отображения, т. е.

$$f_* = \mathcal{A}(\mathcal{L}(0, f_*), g(P_r \mathcal{L}(0, f_*))). \quad (4.17)$$

Положим

$$x_* = \mathcal{L}(0, f_*), \quad u_* = g(P_r \mathcal{L}(0, f_*)) = g(P_r x_*). \quad (4.18)$$

Из соотношений (4.13), (4.15), (4.18) следует, что

$$u_*(t) \in U(t, p_r x_*(t)) \quad \text{п. в.} \quad (4.19)$$

Согласно (4.17), (4.18) имеем

$$f_* = \mathcal{A}(x_*, u_*). \quad (4.20)$$

Используя (4.2), (4.5), (4.20) и (3.2), (3.3), (3.7), получим, что

$$\|f_*(t)\| \leq m(t) + n(t)\|x_*(t)\|.$$

Поскольку $x_* = \mathcal{L}(0, f_*)$, то из последнего неравенства и (3.8) следует, что

$$\|x_*(t)\| \leq M_1 + \int_0^t (m(s) + n(s)\|x_*(s)\|) ds, \quad t \in T.$$

Тогда согласно (3.9), (3.10) мы имеем, что $\|x_*(t)\| \leq M$, $t \in T$. Поэтому в соответствии с (4.1) $p_r x_*(t) = x_*(t)$, $t \in T$. Воспользовавшись (4.5), (4.20), мы приходим к равенству

$$f_*(t) = A(t, x_*(t))u_*(t) + F(t, x_*(t)). \quad (4.21)$$

Поскольку $x_* = \mathcal{L}(0, f_*)$, то из последнего равенства и (4.19) следует, что $(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathcal{R}_U(x_0)$. Тем самым множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ не пусто. Таким же является и множество $\mathcal{R}_V(x_0)$.

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathcal{R}_V(x_0)$. Тогда $x_* = \mathcal{L}(0, f_*)$, где функция f_* определяется равенством (4.21). Согласно (3.10) $\|x_*(t)\| \leq M$, $t \in T$. Поэтому

$$\|f_*(t)\| \leq m(t) + n(t)M.$$

Из этого неравенства и (3.11), (3.12) следует, что $x_*(\cdot) \in \mathcal{R}_G(0)$. Поэтому в соответствии с (4.3) $\mathcal{R}_V(x_0) \subset \mathcal{R}_G(0) \times S$. Согласно следствию 3.1 множество $\mathcal{R}_G(0)$ является компактом в $C(T, H)$. Поскольку множество S является метризуемым выпуклым компактом в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$, то $\mathcal{R}_V(x_0)$ является относительно компактным в $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$. Покажем, что множество $\mathcal{R}_V(x_0)$ замкнуто в $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$. Для этого нам достаточно доказать секвенциальную замкнутость $\mathcal{R}_V(x_0)$ в $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$. Пусть последовательность $(x_n(\cdot), u_n(\cdot)) \in \mathcal{R}_V(x_0)$, $n \geq 1$, сходится в $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$ к $(x(\cdot), u(\cdot))$. Положим

$$\begin{aligned} f_n(t) &= A(t, x_n(t))u_n(t) + F(t, x_n(t)), \\ f(t) &= A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Так как $\|x_n(t)\| \leq M$, $n \geq 1$, $t \in T$, то согласно лемме 4.1 последовательность f_n сходится в $\omega\text{-}L^2(T, H)$ к f . Поскольку $f_n \in S_G$ и $x_n = \mathcal{L}(0, f_n)$, $n \geq 1$, то из теоремы 3.1 следует, что

$$x = \mathcal{L}(0, f). \quad (4.23)$$

Согласно лемме 3.1 при почти каждом t отображение $x \rightarrow V(t, x)$ является полунепрерывным сверху по Вьеторису из H в $\omega\text{-}Y$. Выберем $t_* \in T$ так, чтобы отображение $x \rightarrow V(t_*, x)$ было полунепрерывным сверху по Вьеторису из H в $\omega\text{-}Y$.

Пусть W – выпуклая открытая окрестность нуля пространства $\omega\text{-}H$. Тогда найдется $n_0 \geq 1$ такое, что

$$\bigcup_{k \geq n_0} V(t_*, x_k(t_*)) \subset V(t_*, x(t_*)) + W. \quad (4.24)$$

Поскольку множество $V(t_*, x_*(t_*)) + W$ выпукло, то из (4.24) непосредственно следует, что

$$\overline{\text{co}} \left\{ \bigcup_{k \geq n_0} V(t_*, x_k(t_*)) \right\} \subset V(t_*, x(t_*)) + 2W. \quad (4.25)$$

В соответствии с (4.25) имеем

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{co}} \left\{ \bigcup_{k \geq n} V(t_*, x_k(t_*)) \right\} \subset V(t_*, x(t_*)) + 2W. \quad (4.26)$$

Так как W – произвольная выпуклая открытая окрестность нуля пространства ω - Y и множество $V(t_*, x(t_*))$ – выпуклый компакт в ω - Y , то из (4.26) и [15, гл. II, § 4, предложение 4] вытекает, что при почти каждом $t \in T$ имеет место включение

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{co}} \left\{ \bigcup_{k \geq n} V(t, x_k(t)) \right\} \subset V(t, x(t)). \quad (4.27)$$

Из сходимости u_n к u в ω - $L^2(T, Y)$ и теоремы Мазура вытекает, что

$$u(t) \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{co}} \left\{ \bigcup_{k \geq n} u_n(t) \right\} \quad \text{п. в.} \quad (4.28)$$

Поскольку $u_n(t) \in U(t, x_n(t))$, $n \geq 1$, п. в., то из (4.27), (4.28) следует

$$u(t) \in V(t, x(t)) \quad \text{п. в.} \quad (4.29)$$

Воспользовавшись (4.22), (4.23), (4.29), мы получаем, что $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{R}_V(x_0)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть выполняются гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$. Тогда множество $Tr_V(x_0)$ является компактным подмножеством пространства $C(T, H)$ и существует константа $M_2 > 0$ такая, что

$$|\varphi^t(x(t))| \leq M_2, \quad t \in T, \quad x(\cdot) \in Tr_V(x_0). \quad (4.30)$$

Поскольку $Tr_V(x_0) \subset \mathcal{R}_G(0)$, то следствие вытекает из теоремы 4.1 и неравенства (3.15).

§ 5. Теорема релаксации

В этом параграфе мы перейдем к изложению основного результата. Функцию $y: T \rightarrow H$ назовем *этажной*, если существует разбиение отрезка T на конечное число непересекающихся подмножеств $\mathcal{T}_i \in T$, $i = 1, \dots, k$, таких, что на каждом из этих множеств функция $y(t)$ постоянна.

ЛЕММА 5.1. Пусть выполняются гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$ и $(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathcal{R}_V(x_0)$. Тогда существуют последовательность $y_n: T \rightarrow H$, $n \geq 1$, этажных функций и последовательность $v_n \in L^2(T, Y)$, $n \geq 1$, такие, что

$$\|y_n(t)\| \leq \frac{1}{n}, \quad t \in T, \quad n \geq 1, \quad (5.1)$$

$$v_n(t) \in U(t, x_*(t) + y_n(t)), \quad t \in T, \quad (5.2)$$

$$v_n \rightarrow u_* \quad \text{в } \omega\text{-}L^2(T, Y). \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathcal{R}_V(x_0)$. Тогда согласно лемме 3.2 имеем

$$u_*(t) \in \overline{\text{co}} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/n}^k(t, x_*(t)) \right\}, \quad n \geq 1, \quad \text{п. в.} \quad (5.4)$$

Поскольку отображение $t \rightarrow \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/n}^k(t, x_*(t))}$ измеримо, то из (3.3), (5.4) и [16, теорема 2.2] следует, что для каждого $n \geq 1$ существует функция $f_n \in L^2(T, Y)$ такая, что

$$f_n(t) \in \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/n}^k(t, x_*(t))}, \quad t \in T, \quad (5.5)$$

$$\|u_*(\cdot) - f_n(\cdot)\|_{\omega} \leq \frac{1}{n}, \quad (5.6)$$

где $\|\cdot\|_{\omega}$ – норма (2.1).

Так как отображение $t \rightarrow U_{1/n}^k(t, x_*(t))$ измеримо, то существует [6] последовательность измеримых селекторов $f_k^m(t)$, $m \geq 1$, этого отображения такая, что

$$U_{1/n}^k(t, x_*(t)) = U\left(t, x_*(t) + \frac{1}{n} z_k\right) = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} f_k^m(t)}, \quad t \in T, \quad k \geq 1, \quad (5.7)$$

поэтому

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/n}\left(t, x_*(t) + \frac{1}{n} z_k\right)} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} f_k^m(t)}, \quad t \in T. \quad (5.8)$$

Из (5.8) и [17, лемма 1.3] следует, что существует конечное измеримое разбиение $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{l(n)}$ отрезка T такое, что

$$\int_T \left\| f_n(t) - \sum_{i=1}^{l(n)} \chi(\mathcal{T}_i) f_{k_i}^{m_i}(t) \right\| dt \leq \frac{1}{n}, \quad (5.9)$$

где $\chi(\mathcal{T}_i)$ – характеристическая функция множества $\mathcal{T}_i$. Положим

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^{l(n)} \chi(\mathcal{T}_i) \cdot \frac{1}{n} z_{k_i}, \quad v_n(t) = \sum_{i=1}^{l(n)} \chi(\mathcal{T}_i) f_{k_i}^{m_i}(t). \quad (5.10)$$

Из (5.10) следует, что $y_n(t)$ является этажной функцией, $v_n(t) \in L^2(T, Y)$ и справедливы соотношения (5.1), (5.2). Воспользовавшись леммой 2.1 и соотношениями (5.6), (5.9), (5.10), мы получаем, что $v_n \rightarrow u_*$ в ω - $L^2(T, Y)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Пусть выполняются гипотезы $H(A)$, $H(F)$. Тогда для любого $x_*(\cdot) \in C(T, H)$ и $u_*(\cdot) \in L^2(T, Y)$ функция

$$p(t, z, u) = \langle x_*(t) - z, A(t, x_*(t))u_*(t) + F(t, x_*(t)) - A(t, z)u - F(t, z) \rangle,$$

определенная на пространстве $T \times H \times Y$, обладает следующими свойствами:

- 1) функция $t \rightarrow p(t, z, u)$ измерима;
- 2) функция $(z, u) \rightarrow p(t, z, u)$ непрерывна п. в.

Доказательство леммы мы не приводим ввиду его очевидности.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполняются гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$, $H(\mathbb{R})$. Тогда справедливо равенство (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathcal{R}_V(x_0)$. Рассмотрим функции v_n , y_n , $n \geq 1$, фигурирующие в утверждении леммы 5.1. Зафиксируем $n \geq 1$ и рассмотрим множество Q (см. (4.1)) и функцию

$$\begin{aligned} p_n(t, x, u) = & \langle x_*(t) + y_n(t) - x, A(t, x_*(t) + y_n(t))v_n(t) \\ & + F(t, x_*(t) + y_n(t)) - A(t, x)u - F(t, x) \rangle \\ & + \omega_{M+1}(t, \|x_*(t) + y_n(t) - x\|) \|x_*(t) + y_n(t) - x\|. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Из леммы 5.2 следует, что функция $t \rightarrow p_n(t, x, u)$ измерима, а функция $(x, u) \rightarrow p_n(t, x, u)$ непрерывна. Используя [13, теорема 2.4], получаем, что существует возрастающая по включению последовательность замкнутых множеств $T_k \subset T$, $k \geq 1$, $\mu(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k) = 0$, такая, что отображение $(t, x) \rightarrow U(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_k \times Q$, а функция $p_n(t, x, u)$ непрерывна на $T_k \times Q \times Y$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Gamma_n: T \times Q \rightarrow Y$, определенное по правилу

$$\Gamma_n(t, x) = \left\{ u \in Y: p_n(t, x, u) + \frac{1}{n} > 0 \right\}. \quad (5.12)$$

Тогда для каждого $k \geq 1$ график отображения $\Gamma_n(t, x)$ будет открытым подмножеством пространства $T_k \times Q \times Y$. Положим

$$U_n(t, x) = U(t, x) \cap \Gamma_n(t, x), \quad t \in T, \quad x \in Q. \quad (5.13)$$

Из гипотезы $H(\mathbb{R})$ и (5.12) следует, что для почти каждого $t \in T$ множество $U_n(t, x)$ не пусто. Поскольку отображение $U_n(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_k \times Q$, $k \geq 1$, а график отображения $\Gamma_n(t, x)$ является открытым подмножеством в пространстве $T_k \times Q \times Y$, $k \geq 1$, то отображение $U_n(t, x)$ будет полунепрерывным снизу по Вьеторису на $T_k \times Q$, $k \geq 1$. Пусть $\overline{U_n(t, x)}$ – замыкание в Y множества $U_n(t, x)$. Тогда отображение $(t, x) \rightarrow \overline{U_n(t, x)}$ будет полунепрерывным снизу по Вьеторису на $T_k \times Q$, $k \geq 1$. Следовательно, для любой непрерывной функции $x: T \rightarrow Q$ отображение $t \rightarrow U_n(t, x(t))$ измеримо, а отображение $x \rightarrow U_n(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на Q п. в.

Пусть $\overline{\mathcal{T}r_U(x_0)}$ – замыкание в $C(T, H)$ множества $\mathcal{T}r_U(x_0)$. Поскольку для любого $x \in \overline{\mathcal{T}r_U(x_0)}$ имеет место включение $x(t) \in Q$, $t \in T$, то мы можем определить отображение

$$D_n(x) = \{f(\cdot) \in \mathcal{M}(Y): f(t) \in \overline{U_n(t, x(t))} \text{ п. в.}\}, \quad x \in \overline{\mathcal{T}r_U(x_0)}. \quad (5.14)$$

Используя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 4.1, мы получим, что существует непрерывное отображение $g_n: \overline{\mathcal{T}r_U(x_0)} \rightarrow L^2(T, Y)$ такое, что

$$g_n(x) \in D_n(x), \quad x(\cdot) \in \overline{\mathcal{T}r_U(x_0)}. \quad (5.15)$$

Сохраним обозначения, использованные при доказательстве теоремы 4.1. Из (4.13), (5.13)–(5.15) следует, что

$$g_n(x) \in \tilde{U}(x), \quad x \in \overline{\mathcal{T}r_U(x_0)}. \quad (5.16)$$

Пусть $D(x)$ – многозначное отображение, определенное по правилу

$$\begin{aligned} D(x) &= g_n(x), & x \in \overline{\mathcal{T}r_U(x_0)}, \\ D(x) &= \tilde{U}(x), & x \in \mathcal{R}_G(0) \setminus \mathcal{T}r_U(x_0). \end{aligned}$$

Поскольку множество $\overline{\mathcal{T}r_U(x_0)}$ замкнуто в $C(T, H)$, то многозначное отображение $x \rightarrow D(x)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису с замкнутыми, разложимыми значениями в $L^2(T, H)$. Поэтому существует непрерывная функция $\tilde{g}_n: \mathcal{R}_G(0) \rightarrow L^2(T, H)$ такая, что $\tilde{g}_n \in D(x)$, $x \in \mathcal{R}_G(0)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \tilde{g}_n(x) &\in \tilde{U}(x), & x \in \mathcal{R}_G(0), \\ \tilde{g}_n(x) &= g_n(x), & x \in \overline{\mathcal{T}r_U(x_0)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Используя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 4.1, мы получим, что существует пара $(x_n(\cdot), u_n(\cdot)) \in \mathcal{R}_U(x_0)$, $u_n = \tilde{g}_n(x_n)$. Поскольку $x_n \in \mathcal{T}r_U(x_0)$, то согласно (5.17) будет иметь место равенство $u_n = g_n(x_n)$. Теперь из (5.11)–(5.15) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} &\langle x_*(t) + y_n(t) - x_n(t), A(t, x_*(t) + y_n(t))v_n(t) + F(t, x_*(t) + y_n(t)) \\ &\quad - A(t, x_n(t))u_n(t) - F(t, x_n(t)) \rangle + \omega_{M+1}(t, \|x_*(t) + y_n(t) - x_n(t)\|) \\ &\quad \times \|x_*(t) + y_n(t) - x_n(t)\| + \frac{1}{n} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Из монотонности оператора $\partial\varphi^t$ и определения решения управляемой системы следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x_*(t) - x_n(t)\|^2 &\leq \int_0^t \langle x_*(s) - x_n(s), A(s, x_n(s))u_n(s) + F(s, x_n(s)) \\ &\quad - A(s, x_*(s))u_*(s) - F(s, x_*(s)) \rangle ds, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Так как функция $t \rightarrow x_*(t) + y_n(t)$ является измеримой, $\|x_*(t) + y_n(t)\| \leq M+1$, $t \in T$, то из леммы 4.1 следует, что функции $t \rightarrow A(t, x_*(t) + y_n(t))v_n(t) + F(t, x_*(t) + y_n(t))$, $n \geq 1$, являются элементами пространства $L^2(T, H)$. Из неравенств (5.18), (5.19) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x_*(t) - x_n(t)\|^2 &\leq \int_0^t \langle x_*(s) - x_n(s), A(s, x_*(s) + y_n(s))v_n(s) \\ &\quad + F(s, x_*(s) + y_n(s)) - A(s, x_*(s))u_*(s) - F(s, x_*(s)) \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \langle y_n(s), A(s, x_*(s) + y_n(s))v_n(s) + F(s, x_*(s) + y_n(s)) \\ &\quad - A(t, x_n(s))u_n(s) - F(s, x_n(s)) \rangle ds + \int_0^t \omega_{M+1}(s, \|x_*(s) + y_n(s) - x_n(s)\|) \\ &\quad \times \|x_*(s) + y_n(s) - x_n(s)\| ds + \frac{1}{n}, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Поскольку последовательность x_n , $n \geq 1$, относительно компактна в $C(T, H)$, то мы можем считать, что $x_n \rightarrow z$ в $C(T, H)$. Так как $x_n + y_n \rightarrow z$ в $L^2(T, H)$, $\|x_n(t) + y_n(t)\| \leq M + 1$, $t \in T$, и $v_n \rightarrow u_*$ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$, то из леммы 4.1 следует, что

$$\int_0^t \langle x_*(s) - x_n(s), A(s, x_*(s) + y_n(s))v_n(s) + F(s, x_*(s) + y_n(s)) - A(s, x_*(s))u_*(s) - F(s, x_*(s)) \rangle ds \rightarrow 0, \quad t \in T. \quad (5.21)$$

Поскольку

$$\|A(s, x_*(s) + y_n(s))v_n(s) + F(s, x_*(s) + y_n(s)) - A(t, x_n(s))u_n(s) - F(s, x_n(s))\| \leq 2(m(s) + n(s)(M + 1))$$

и $y_n \rightarrow 0$ в $L^2(T, Y)$, то

$$\int_0^t \langle y_n(s), A(s, x_*(s) + y_n(s))v_n(s) + F(s, x_*(s) + y_n(s)) - A(t, x_n(s))u_n(s) - F(s, x_n(s)) \rangle ds \rightarrow 0, \quad t \in T. \quad (5.22)$$

Переходя к пределу в (5.20) при $n \rightarrow \infty$ и учитывая (5.21), (5.22), мы получим

$$\frac{1}{2} \|x_*(t) - y(t)\|^2 \leq \int_0^t \omega_{M+1}(s, \|x_*(s) - z(s)\|) \|x_*(s) - z(s)\| ds, \quad t \in T.$$

Из этого неравенства и [1, с. 157, лемма А.5] вытекает, что

$$\|x_*(t) - z(t)\| \leq \int_0^t \omega(s, \|x_*(s) - z(s)\|) ds, \quad t \in T.$$

Значит, последовательность $x_n(\cdot) \in Tr_U(x_0)$, $n \geq 1$, сходится к $x_*(\cdot) \in Tr_V(x_0)$ в $C(T, H)$. Так как множество $Tr_V(x_0)$ компактно, то теорема доказана.

§ 6. Приложение

Пусть $T = [0, 1]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $H = L^2(\Omega)$ и $2 \leq p < \infty$. Рассмотрим соболевское пространство $X = W_0^{1,p}(\Omega)$. Топологически сопряженным к пространству X будет пространство $X^* = W^{-1,q}(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$. Отождествляя пространство H с его топологически сопряженным, мы получим вложения $X \hookrightarrow H \hookrightarrow X^*$. Из теории соболевских пространств хорошо известно, что эти вложения непрерывны, плотны и компактны. Каноническую билинейную форму, устанавливающую двойственность между X и X^* , мы обозначаем через $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$. Как обычно, мы считаем, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ и скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в H согласованы, т. е. сужение $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ на $X \times H$ совпадает с $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Мы используем следующие обозначения: $D_k = \partial/\partial z_k$, $D = (D_k)_{k=1}^N = \text{grad}$, $\|Dx\|_N^2 = \sum_{i=1}^N |D_i x|^2$. Далее пространство Y и отображения $A(t, x)$, $F(t, x)$, $U(t, x)$ имеют тот же смысл, что и в предыдущих параграфах.

Пусть $\{\Omega(t): t \in T\}$ – семейство непустых подобластей области Ω , $\overline{\Omega(t)} \subset \Omega(t)$, $t \in T$. Семейство $\{\Omega(t): t \in T\}$ назовем *неубывающим по включению*, если $\Omega(s) \subseteq \Omega(t)$, $s \leq t$, $s, t \in T$. Всюду далее мы предполагаем, что семейство $\{\Omega(t): t \in T\}$ является неубывающим по включению.

Пусть

$$K(t) = \{x \in X: x \geq 0 \text{ п. в. на } \Omega, \ x = 0 \text{ п. в. на } \Omega \setminus \overline{\Omega(t)}\}. \quad (6.1)$$

Для функции $g \in W^{1,2}(T, X)$ положим

$$K_g(t) = \{x + g(t): x \in K(t)\}. \quad (6.2)$$

В теории вариационных неравенств [18] функцию $g(t)$ или множество $K_g(t)$ обычно называют *препятствием*.

Рассмотрим управляемое вариационное неравенство

$$\begin{aligned} & \langle x'(t) + A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)), x(t) - y \rangle + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \|D_k x(t)(z)\|_N^{p-2} D_k x(t)(z) \\ & \times (D_k x(t)(z) - D_k y(z)) dz \leq 0 \quad \forall y \in K_g(t) \quad \text{п. в.} \end{aligned} \quad (6.3)$$

с препятствием

$$x(0) = x_0, \quad x(t) \in K_g(t), \quad t \in T, \quad (6.4)$$

и ограничением на управление

$$u(t) \in U(t, x(t)) \quad \text{п. в.} \quad (6.5)$$

Наряду с ограничением (6.5) мы рассмотрим ограничение

$$u(t) \in V(t, x(t)) \quad \text{п. в.,} \quad (6.6)$$

где многозначное отображение определено равенством (1.4).

Далее вариационное неравенство (6.3) с препятствием (6.4) и ограничением (6.5) для краткости будем называть *вариационным неравенством* (6.3)–(6.5).

Под решением вариационного неравенства (6.3)–(6.5) понимается пара $(x(\cdot), u(\cdot))$, $x(\cdot) \in W^{1,2}(T, H) \cap L^\infty(T, X)$, $u(\cdot) \in L^2(T, Y)$, удовлетворяющая неравенству (6.3), условию (6.4) и включению (6.5). Аналогично определяется решение вариационного неравенства (6.3), (6.4), (6.6). Множества решений вариационных неравенств (6.3)–(6.5) и (6.3), (6.4), (6.6) обозначаем через $V\mathcal{R}_U(x_0)$ и $V\mathcal{R}_V(x_0)$ соответственно. Если $(x(\cdot), u(\cdot)) \in V\mathcal{R}_U(x_0)$, то $x(\cdot)$ называется *траекторией* вариационного неравенства (6.3)–(6.5). То же самое относится и к вариационному неравенству (6.3), (6.4), (6.6). Множества траекторий вариационных неравенств (6.3)–(6.5) и (6.3), (6.4), (6.6) обозначаются как $VTr_U(x_0)$ и $VTr_V(x_0)$ соответственно. Нас будут интересовать вопросы существования решений вариационных неравенств (6.3)–(6.5) и (6.3), (6.4), (6.6) и взаимосвязи между множествами решений этих неравенств.

Рассмотрим функции $\varphi^t: H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $t \in T$,

$$\varphi^t(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} \int_{\Omega} \|Dx(z)\|_N^p dz, & \text{если } x \in K_g(t), \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6.7)$$

ЛЕММА 6.1. Семейство $\{\varphi^t: t \in T\} \subset \Gamma_0(H)$ удовлетворяет гипотезам $H(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (6.1), (6.2) непосредственно вытекает, что множества $K_g(t)$, $t \in T$, являются выпуклыми и замкнутыми в X . Поскольку норма элемента x из $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ определяется равенством

$$\|x\|_X^p = \int_{\Omega} \|Dx(z)\|_N^p dz, \quad (6.8)$$

то из замкнутости и выпуклости множеств $K_g(t)$, $t \in T$, в X , рефлексивности пространства X и непрерывности и компактности вложения $X \hookrightarrow H$ непосредственно следует, что $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, и справедлива гипотеза $H(\varphi)$, (ii). Поскольку семейство $\{\Omega \setminus \overline{\Omega}(t), t \in T\}$ является невозрастающим по включению, то из [9, утверждение 3.2.2] вытекает, что существует функция $a \in W^{1,2}(T, \mathbb{R})$ такая, что для любых $s, t \in T$, $s \leq t$, $x \in \text{dom } \varphi^s$ найдется элемент $y \in \text{dom } \varphi^t$, удовлетворяющий неравенствам

$$\begin{aligned} \|y - x\| &\leq |a(t) - a(s)|(|\varphi^s(x)|^{1/2} + 1), \\ |\varphi^t(y) - \varphi^s(x)| &\leq |a(t) - a(s)|(|\varphi^s(x)| + 1). \end{aligned}$$

Из этих неравенств вытекает, что гипотеза $H(\varphi)$, (i) имеет место. Лемма доказана.

Всюду далее под $\mathcal{R}_U(x_0)$, $\mathcal{R}_V(x_0)$ мы понимаем множества решений управляемых систем (1.1), (1.2) и (1.1), (1.5), в которых функции φ^t определены равенством (6.7). Основное содержание данного параграфа составляет следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполняются гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$. Тогда $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{R}_U(x_0) \cap (\mathcal{R}_V(x_0))$, если и только если $(x(\cdot), u(\cdot)) \in V\mathcal{R}_U(x_0) \cap (V\mathcal{R}_V(x_0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 6.1 и теоремы 4.1 следует, что множество $\mathcal{R}_U(x_0) \cap (\mathcal{R}_V(x_0))$ не пусто.

Пусть $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{R}_U(x_0)$. Тогда $x(\cdot) \in W^{1,2}(T, H)$, $u(\cdot) \in L^2(T, Y)$, $x(0) = x_0 \in \text{dom } \varphi^0$ и почти всюду имеет место включение (6.5) ((6.6)).

Используя соотношения (6.7), (6.8) и неравенство (4.30), получим

$$x(0) = x_0, \quad x(t) \in K_g(t), \quad t \in T, \quad (6.9)$$

$$\frac{1}{p} \|x(t)\|_X^p \leq M_2, \quad t \in T. \quad (6.10)$$

Следовательно, $x(t) \in X$, $t \in T$. Поскольку

$$\langle x(t), h \rangle = \langle x(t), h \rangle_X, \quad h \in H \hookrightarrow X^*, \quad (6.11)$$

и вложение $H \hookrightarrow X^*$ плотно и непрерывно, а функция $x: T \rightarrow H$ абсолютно непрерывна, то функция $x: T \rightarrow X$ скалярно измерима. Поскольку пространство X сепарабельно, то функция $x: T \rightarrow X$ измерима. Поэтому согласно (6.10) $x(\cdot) \in W^{1,2}(T, H) \cap L^\infty(T, X)$. Докажем теперь неравенство (6.3). Пусть

$$v(t) = A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)). \quad (6.12)$$

Тогда $v(\cdot) \in L^2(T, H)$ и

$$-\dot{x}(t) - v(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) \quad \text{п. в.} \quad (6.13)$$

Рассмотрим функцию $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(y) = \frac{1}{p} \|y\|_X^p. \quad (6.14)$$

Известно [19], что функция $\Phi(y)$ дифференцируема по Гато, ее производная по Гато совпадает с субдифференциалом $\partial\Phi(y)$ и

$$\langle \partial\Phi(y), v \rangle_X = \int_\Omega \sum_{k=1}^N \|D_k y(z)\|_N^{p-2} D_k y(z) D_k v(z) dz, \quad v \in X. \quad (6.15)$$

Пусть $t \in T$ — точка, для которой имеет место включение (6.13). Возьмем произвольное $y \in K_g(t)$. Поскольку $K_g(t)$ является выпуклым множеством, то

$$x(t) + \lambda(y - x(t)) \in K_g(t), \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (6.16)$$

Теперь из (6.7), (6.13), (6.14), (6.16) следует, что

$$\begin{aligned} & \langle -\dot{x}(t) - v(t), x(t) + \lambda(y - x(t)) - x(t) \rangle \\ & \leq \varphi^t(x(t) + \lambda(y - x(t))) - \varphi^t(x(t)) = \Phi(x(t) + \lambda(y - x(t))) - \Phi(x(t)). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства, определения производной по Гато и (6.15) непосредственно вытекает, что

$$\begin{aligned} \langle -\dot{x}(t) - v(t), y - x(t) \rangle & \leq \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\Phi(x(t) + \lambda(y - x(t))) - \Phi(x(t))}{\lambda} \\ & = \int_\Omega \sum_{k=1}^N \|D_k x(t)(z)\|_N^{p-2} D_k x(t) (D_k y(z) - D_k x(t)(z)) dz \quad \forall y \in K_g(t). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Используя (6.9), (6.12), (6.17), мы получаем, что $(x(\cdot), u(\cdot)) \in V\mathcal{R}_U(x_0) (V\mathcal{R}_V(x_0))$.

Пусть $(x(\cdot), u(\cdot)) \in V\mathcal{R}_U(x_0) (V\mathcal{R}_V(x_0))$. Тогда $x(\cdot) \in W^{1,2}(T, H)$, $u(\cdot) \in L^2(T, H)$ и имеют место соотношения (6.3)–(6.5) ((6.3), (6.4), (6.6)). Рассмотрим функцию $v(t)$, определенную равенством (6.12). Тогда $v \in L^2(T, H)$. Используя равенство (6.15), перепишем неравенство (6.3) в виде

$$\begin{aligned} \langle -\dot{x}(t) - v(t), y - x(t) \rangle & \leq \langle \partial\Phi(x(t), y - x(t)) \rangle_X \\ & \leq \Phi(y) - \Phi(x(t)) = \varphi^t(y) - \varphi^t(x(t)) \quad \forall y \in K_g(t) \quad \text{п. в.} \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi^t(y) = +\infty$, $y \notin K_g(t)$, то из последнего неравенства следует, что

$$\langle -\dot{x}(t) - v(t), y - x(t) \rangle \leq \varphi^t(y) - \varphi^t(x(t)) \quad \forall y \in H \quad \text{п. в.}$$

Так как $-\dot{x}(t) - v(t) \in H$, то последнее неравенство означает, что имеет место включение (6.13). Теперь из (6.5) ((6.6)), (6.12), (6.13) вытекает, что $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{R}_U(x_0) \cap \mathcal{R}_V(x_0)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть выполняются гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$. Тогда множество $V\mathcal{R}_U(x_0)$ не пусто, а множество $V\mathcal{R}_V(x_0)$ является компактом в $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть выполняются гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$, $H(\mathbb{R})$. Тогда

$$VTr_V(x_0) = \overline{VTr_U(x_0)},$$

где черта обозначает замыкание в $C(T, H)$.

Следствия 6.1, 6.2 вытекают из теорем 6.1, 4.1, 5.1.

Далее нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 6.2. Соотношения (6.3), (6.4) эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} & \langle x'(t) + A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)), v \rangle \\ & + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \|D_k x(t)(z)\|_N^{p-2} D_k x(t)(z) D_k v(z) dz \geq 0 \quad \forall v \in K(t) \quad \text{н. в.,} \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} & \langle x'(t) + A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)), x(t) - g(t) \rangle + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \|D_k x(t)(z)\|_N^{p-2} \\ & \times D_k x(t)(z) (D_k x(t)(z) - D_k g(t)(z)) dz = 0 \quad \text{н. в.,} \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(t) \in K_g(t), \quad t \in T. \quad (6.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняются соотношения (6.3), (6.4). Так как $x(t) \in K_g(t)$, то $x(t) = v_1 + g(t)$ для некоторого $v_1 \in K(t)$. Из определения множества $K(t)$ следует, что $v_1 + v \in K(t)$ для любого $v \in K(t)$. Поэтому $x(t) + v \in K_g(t)$ для любого $v \in K(t)$. Теперь неравенство (6.18) вытекает из (6.3). Поскольку $x(t) - g(t) \in K(t)$, то

$$\begin{aligned} & \langle x'(t) + A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)), x(t) - g(t) \rangle + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \|D_k x(t)(z)\|_N^{p-2} \\ & \times D_k x(t)(z) (D_k x(t)(z) - D_k g(t)(z)) dz \geq 0 \quad \text{п. в.} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Так как $g(t) \in K_g(t)$, то из (6.3) следует, что неравенство (6.21) имеет противоположный знак, поэтому справедливо равенство (6.19). Таким образом, соотношения (6.18)–(6.20) вытекают из (6.3), (6.4). Поскольку любой элемент $y \in K_g(t)$ представим в виде $y = v + g(t)$, $v \in K(t)$, то соотношения (6.3), (6.4), очевидно, следуют из (6.18)–(6.20). Лемма доказана.

§ 7. Пример

Прежде чем рассмотреть пример, мы приведем ряд вспомогательных утверждений. Сохраним обозначения, использованные в предыдущем параграфе, и их смысл.

Пусть μ_N – мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^N$. Не нарушая общности, для удобства изложения будем считать, что $\mu(\bar{\Omega}) \leq 1$. Рассмотрим функции $a: T \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f: T \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и многозначное отображение $\tilde{U}: T \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Введем следующие предположения.

ГИПОТЕЗЫ $H(a)$. Функция $a: T \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является такой, что:

- 1) функция $(t, z) \rightarrow a(t, z, x)$ измерима;
- 2) функция $x \rightarrow a(t, z, x)$ непрерывна п. в. в $T \times \bar{\Omega}$;
- 3) $|a(t, z, x)| \leq c$ п. в. в $T \times \bar{\Omega}$, $c > 0$.

ГИПОТЕЗЫ $H(f)$. Функция $f: T \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является такой, что:

- 1) функция $(t, z) \rightarrow f(t, z, x)$ измерима;
- 2) функция $x \rightarrow f(t, z, x)$ непрерывна п. в. в $T \times \bar{\Omega}$;
- 3) $|f(t, z, x)| \leq c_1(t) + d_1(t)|x|$ п. в. в $T \times \bar{\Omega}$, $c_1, d_1 \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$.

ГИПОТЕЗЫ $H(\tilde{U})$. Многозначное отображение $\tilde{U}: T \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с замкнутыми значениями является таким, что:

- 1) отображение $(t, z, x) \rightarrow \tilde{U}(t, z, x)$ является слабо $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{\bar{\Omega} \times \mathbb{R}}$ -измеримым;
- 2) отображение $(z, x) \rightarrow \tilde{U}(t, z, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису п. в. в T ;
- 3) $|\tilde{U}(t, z, x)| \leq c_2(t) + d_2(t)|x|$ п. в. в $T \times \bar{\Omega}$, $c_2, d_2 \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$.

ГИПОТЕЗА $H(r)$. Для почти всех $(t, z) \in T \times \bar{\Omega}$ и любых $x, y \in \mathbb{R}$, $u \in \tilde{U}(t, z, x)$ найдется элемент $v \in \tilde{U}(t, z, y)$, удовлетворяющий неравенству

$$(x - y)(a(t, z, x)u + f(t, z, x) - a(t, z, y)v - f(t, z, y)) + k(t)\|x - y\|^2 \geq 0, \quad (7.1)$$

где $k \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$.

Пусть $Y = L^2(\Omega)$. Как обычно, функцию $x: T \rightarrow H$ мы отождествляем с функцией из $T \times \Omega$ в $\mathbb{R}$, полагая $x(t)(z) = x(t, z)$, $(t, z) \in T \times \Omega$, а пространство $L^2(T, Y)$ отождествляем с пространством $L^2(T \times \Omega)$. На пространстве $T \times H$ рассмотрим оператор $A(t, x)$, определенный по правилу

$$(A(t, x)u)(z) = a(t, z, x(t))u(z), \quad x \in H, \quad u \in Y. \quad (7.2)$$

Из гипотез $H(a)$ и теоремы Фубини следует, что $A(t, x)u \in H$ при почти каждом t , $A(t, x) \in \mathcal{L}(Y, H)$ и

$$\|A(t, x)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq c \quad \text{п. в. в } T. \quad (7.3)$$

ЛЕММА 7.1. Оператор $A(t, x)$, определенный по правилу (7.2), удовлетворяет гипотезам $H(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $H = Y$, то из (7.2) следует, что оператор $A(t, x)$ является самосопряженным. Покажем, что отображение $t \rightarrow A(t, x)u$ измеримо для любых x, u . Для этого достаточно показать, что отображение $t \rightarrow A(t, x)u$ скалярно измеримо. Однако скалярная измеримость этого отображения следует из равенства

$$\langle h, A(t, x)u \rangle = \int_{\Omega} h(z)a(t, z, x(z))u(z) dz, \quad h \in H,$$

и теоремы Фубини.

Пусть $x_n \rightarrow x$ в H . Не нарушая общности, мы можем считать, что $x_n(z) \rightarrow x(z)$ почти всюду. Тогда из гипотезы $H(a), 2)$ следует, что

$$(A(t, x_n)h)(z) = (A^*(t, x_n)h)(z) \rightarrow (A^*(t, x)h)(z) \quad \text{п. в. в } T \times Z, \quad h \in H.$$

Воспользовавшись гипотезой $H(a), 3)$ и теоремой Лебега об ограниченной сходимости, мы получаем, что $A^*(t, x_n)h \rightarrow A^*(t, x)h$ в Y при почти каждом $t \in T$. Таким образом, мы показали, что гипотезы $H(A), 1), 2)$ имеют место. Гипотеза $H(A), 3)$ вытекает из неравенства (7.3). Лемма доказана.

Рассмотрим функцию $F(t, x)$, определенную на $T \times H$, полагая

$$F(t, x)(z) = f(t, z, x(z)). \quad (7.4)$$

Из гипотез $H(f)$ и теоремы Фубини следует, что $F(t, x) \in H$ для почти каждого $t \in T$.

ЛЕММА 7.2. *Отображение $F(t, x)$, определенное формулой (7.4), удовлетворяет гипотезам $H(F)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя аргументы, использованные при доказательстве леммы 7.1, мы получим, что функция $t \rightarrow F(t, x)$ скалярно измерима и, следовательно, измерима. Из гипотезы $H(f), 3)$ и равенства (7.4) вытекает, что

$$\|F(t, x)\| \leq c_1(t) + d_1(t)\|x\| \quad \text{п. в.} \quad (7.5)$$

Покажем, что при почти каждом t функция $x \rightarrow F(t, x)$ непрерывна. Пусть $x_n \rightarrow x$ в H . Как это уже неоднократно отмечалось, мы можем считать, что $x_n(z) \rightarrow x(z)$ почти всюду. Тогда согласно гипотезе $H(f), 2)$ и теореме Фубини для почти каждого $t_* \in T$ имеем

$$F(t_*, x_n)(z) \rightarrow F(t_*, x)(z) \quad \text{п. в. в } \Omega. \quad (7.6)$$

Поскольку последовательность $x_n \rightarrow x$ в H , то она равномерно интегрируема, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_E |x_n(z)|^2 dz \leq \varepsilon, \quad n \geq 1, \quad (7.7)$$

для любого измеримого множества $E \subset \Omega$, $\mu_N(E) \leq \delta$. Из гипотезы $H(f), 3)$ и неравенства (7.7) непосредственно вытекает, что последовательность $F(t_*, x_n)$, $n \geq 1$, равномерно интегрируема. Тогда из (7.6) и [14, утверждение 2.4] следует, что $F(t_*, x_n) \rightarrow F(t_*, x)$ в H . Используя (7.5), мы получаем, что все гипотезы $H(F)$ имеют место. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{M}(\Omega)$ – пространство измеримых функций из Ω в $\mathbb{R}$. Из гипотез $H(\tilde{U})$, 1), 2) и [13, теорема 2.4] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что отображение $\tilde{U}(t, z, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_\varepsilon \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$. Отсюда следует, что для любой измеримой функции $y: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ отображение $(t, z) \rightarrow \tilde{U}(t, z, y(t, z))$ измеримо. Пусть $x \in H$. Тогда отображение $(t, z) \rightarrow \tilde{U}(t, z, x(z))$ является измеримым на $T \times \Omega$. Воспользовавшись гипотезой $H(\tilde{U})$, 3) и [6, теорема 5.6], мы получаем, что существует последовательность $v_n \in L^2(T, \Omega)$, $n \geq 1$, такая, что

$$\tilde{U}(t, z, x(z)) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n(t, z)}, \quad (t, z) \in T \times \Omega.$$

Из теоремы Фубини следует, что при почти всех $t \in T$ функции $z \rightarrow v_n(t, z)$, $n \geq 1$, измеримы. Поэтому согласно [6, теорема 5.6] при почти каждом $t \in T$ многозначное отображение $z \rightarrow \tilde{U}(t, z, x(z))$ измеримо. Следовательно, мы можем рассмотреть многозначное отображение $U(t, x)$, $t \in T$, $x \in H$, определенное по правилу

$$U(t, x) = \{u \in \mathcal{M}(Z): u(z) \in \tilde{U}(t, z, x(z)) \text{ п. в.}\}. \quad (7.8)$$

Из гипотезы $H(\tilde{U})$, 3) следует, что значениями отображения $U(t, x)$ являются непустые замкнутые разложимые множества из пространства Y и

$$\|U(t, x)\|_Y \leq c_2(t) + d_2(t)\|x\| \quad \text{п. в. в } T. \quad (7.9)$$

ЛЕММА 7.3. *Многозначное отображение $U(t, x)$, определенное равенством (7.9), удовлетворяет гипотезам $H(F)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гипотеза $H(F)$, 3) следует из (7.9). Из гипотез $H(\tilde{U})$ 1), 2) и [13, теорема 2.4] следует, что существует возрастающая по включению последовательность замкнутых множеств $T_k \subset T$, $\mu(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k) = 0$, такая, что отображение $(t, z, y) \rightarrow \tilde{U}(t, z, y)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_k \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, а функции $c_2(t)$, $d_1(t)$ непрерывны на T_k , $k \geq 1$.

Покажем, что функция $(t, x) \rightarrow U(t, x)$ полунепрерывна снизу по Вьеторису на $T_k \times H$, $k \geq 1$. Пусть $t_* \in T_k$, $x_* \in H$, $u_* \in U(t_*, x_*)$ и последовательности $t_n \in T_k$, $x_n \in H$, $n \geq 1$, сходятся к t_* и x_* соответственно. Обозначим через $d_{\mathbb{R}}(y, K)$ расстояние от точки $y \in \mathbb{R}$ до множества $K \subset \mathbb{R}$. Поскольку отображение $z \rightarrow \tilde{U}(t_n, z, x_n(z))$ измеримо, то существует последовательность $u_n(z)$, $n \geq 1$, измеримых селекторов отображений $\tilde{U}(t_n, z, x_n(z))$, $n \geq 1$, такая, что

$$|u_*(z) - u_n(z)| \leq d_{\mathbb{R}}(u_*(z), \tilde{U}(t_n, z, x_n(z))) + \frac{1}{n}. \quad (7.10)$$

Ясно, что $u_n \in U(t_n, x_n)$, $n \geq 1$. Поскольку отображение $(t, z, y) \rightarrow \tilde{U}(t, z, y)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_k \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, то функция $(t, y) \rightarrow d_{\mathbb{R}}(u_*(z), \tilde{U}(t, z, y))$ полунепрерывна сверху на $T_k \times \mathbb{R}$ для любого $z \in \Omega$ [13]. Поэтому из (7.10) следует, что последовательность $u_n(z)$, $n \geq 1$, сходится к $u_*(z)$ почти всюду. Так как $x_n \rightarrow x$ в H , то последовательность x_n , $n \geq 1$, равномерно интегрируема. Из гипотезы $H(\tilde{U})$, 3) и ограниченности функций $c_2(t)$, $d_2(t)$

на T_k следует, что последовательность u_n , $n \geq 1$, равномерно интегрируема, поэтому $u_n \rightarrow u_*$ в Y . Следовательно, отображение $U(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_k \times H$, $k \geq 1$. Отсюда непосредственно вытекает, что при почти каждом $t \in T$ отображение $x \rightarrow U(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису. Тем самым гипотеза $H(F)$, 1) имеет место.

Поскольку $U(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_k \times H$, то для любого открытого множества $W \subset Y$ множество

$$\{(t, x) : t \in T_k \times H; U(t, x) \cap W \neq \emptyset\}$$

является открытым в $T_k \times H$ и, следовательно, борелевским в $T \times H$. Поэтому множество $\{(t, x) : t \in \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k, x \in H; U(t, x) \cap W \neq \emptyset\}$ является борелевским в $T \times H$.

Рассмотрим многозначное отображение $U_0 : T \times H \rightarrow Y$, определенное следующим образом:

$$\begin{aligned} U_0(t, x) &= U(t, x), & t \in \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k, & x \in H, \\ U_0(t, x) &= \Theta, & t \in T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k, & x \in H, \end{aligned}$$

где Θ – нулевой элемент пространства Y , рассматриваемый как одноточечное множество. Так как множество $(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k) \times H$ является борелевским в $T \times H$, то для любого открытого множества $W \subset Y$ множество

$$\{(t, x) : (t, x) \in T \times Y; U_0(t, x) \cap W \neq \emptyset\}$$

является борелевским в $T \times H$. Поэтому отображение $(t, x) \rightarrow U_0(t, x)$ является слабо $\Sigma \otimes \mathcal{B}_H$ -измеримым и для каждого $t \in Y$ отображение $x \rightarrow U_0(t, x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису. Очевидно, что отображение $U_0(t, x)$ удовлетворяет неравенству (7.9). Поэтому для отображения $U_0(t, x)$ имеют место гипотезы $H(U)$. Поскольку $\mu(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k) = 0$, то, не нарушая общности, мы можем считать, что отображение $U(t, x)$ является слабо $\Sigma \otimes \mathcal{B}_H$ -измеримым, так как все утверждения предыдущих параграфов будут справедливы и для слабо $\Sigma \otimes \mathcal{B}_H$ -измеримого с точностью до множества нулевой меры из T отображения $U(t, x)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7.4. Пусть выполняются гипотезы $H(a)$, $H(f)$, $H(\tilde{U})$ и $H(r)$. Тогда справедлива гипотеза $H(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in H$, $u \in U(t, x)$. Тогда $u(z) \in \tilde{U}(t, z, x(z))$. Зафиксируем $t \in T$ и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} p(z, v) &= (x(z) - y(z))(a(t, z, x(z))u(z) + f(t, z, x(z)) - a(t, z, y(z))v \\ &\quad - f(t, z, y(z))) + k(t)|x(z) - y(z)|^2. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Тогда при почти каждом t функция $p(z, v)$ будет измеримой по z и непрерывной по v . Рассмотрим многозначное отображение

$$\Gamma(z) = \{v \in \mathbb{R} : p(z, v) \geq 0\}.$$

Из [6, теорема 6.4] следует, что отображение $\Gamma(z)$ является измеримым с замкнутыми значениями. Согласно гипотезе $H(r)$ имеем

$$\tilde{U}(t, z, y(z)) \cap \Gamma(z) \neq \emptyset \quad \text{п. в. в } \Omega.$$

Из свойств измеримых многозначных отображений [6] следует, что существует измеримая функция

$$v(z) \in \tilde{U}(t, z, y(z)) \cap \Gamma(z) \quad \text{п. в. в } \Omega.$$

Тогда $v(z) \in U(t, y)$ и $p(z, v(z)) \geq 0$ п. в. в Ω . Из этого неравенства и (7.11) непосредственно вытекает, что почти для каждого $t \in T$ и любых $x, y \in H$, $u \in U(t, x)$ найдется элемент $v \in U(t, y)$, удовлетворяющий неравенству

$$\langle x - y, A(t, x)u + F(t, x) - A(t, y) - F(t, y) \rangle + k(t)\|x - y\|^2 \geq 0.$$

Лемма доказана.

Пусть $B_{\mathbb{R}} = (-1, 1)$ и

$$\tilde{U}_{\delta}(t, z, x) = \overline{\text{co}} \{ \cup \tilde{U}(t, z, y); y \in x + \delta B_{\mathbb{R}} \}, \quad \delta > 0, \quad (7.12)$$

$$\tilde{V}(t, z, x) = \bigcap_{\delta \downarrow 0} \tilde{U}_{\delta}(t, z, x). \quad (7.13)$$

Ясно, что

$$\tilde{V}(t, z, x) = \bigcap_{n \geq 1}^{\infty} \tilde{U}_{1/n}(t, z, x). \quad (7.14)$$

Тогда из гипотезы $H(\tilde{U})$, 3) и соотношений (7.12), (7.14) следует, что

$$|\tilde{V}(t, z, x)| \leq c_2(t) + d_2(t)|x| \quad \text{п. в. в } T \times \Omega. \quad (7.15)$$

Рассмотрим на $T \times H$ многозначное отображение

$$W(t, x)(z) = \{ v \in \mathcal{M}(Z) : v(z) \in \tilde{V}(t, z, x(z)) \text{ п. в. в } \Omega \}, \quad x \in H. \quad (7.16)$$

Поскольку $\tilde{U}(t, z, x(z)) \subset \tilde{V}(t, z, x(z))$, то $U(t, x) \subset W(t, x)$. Поэтому из (7.15), (7.16) следует, что значениями отображения $W(t, x)$ являются непустые замкнутые разложимые множества из пространства Y и

$$\|W(t, x)\|_Y \leq c_2(t) + d_2(t)\|x\| \quad \text{п. в. в } T. \quad (7.17)$$

Исходя из отображения $U(t, x)$, определенного равенством (7.8), мы можем рассмотреть отображения $U_{\delta}(t, x)$ и $V(t, x)$, определенные равенствами (1.3), (1.4).

ЛЕММА 7.5. Пусть выполняются гипотезы $H(\tilde{U})$. Тогда при почти каждом $t \in T$ отображение $x \rightarrow W(t, x)$ является полунепрерывным сверху по Вьеторису из H в ω - Y и

$$W(t, x) \subset V(t, x). \quad (7.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_* \in T$ фиксировано. Известно [8], что отображение $x \rightarrow W(t_*, x)$ является полунепрерывным сверху по Вьеторису из H в $\omega\text{-}Y$ тогда и только тогда, когда сужение $W(t_*, x)$ на любое компактное множество $Q \subset H$ является полунепрерывным сверху по Вьеторису из Q в $\omega\text{-}Y$. Пусть $Q \subset H$ – компактное множество. Тогда из (7.17) следует, что существует замкнутый шар $B_Y(r) \subset Y$ радиуса $r > 0$ такой, что

$$W(t_*, x) \subset B_Y(r), \quad x \in Q. \quad (7.19)$$

Поскольку $B_Y(r)$ является компактным метризуемым подмножеством пространства $\omega\text{-}Y$, то хорошо известно, что при выполнении включения (7.19) полунепрерывность сверху по Вьеторису отображения $W(t_*, x)$ из Q в $\omega\text{-}Y$ эквивалентна секвенциальной замкнутости в $Q \times \omega\text{-}Y$ графика сужения отображения $W(t_*, x)$ на Q .

Пусть последовательность $x_n \in Q$, $n \geq 1$, сходится к x в H и последовательность $u_n \in W(t_*, x_n)$, $n \geq 1$, сходится к u в $\omega\text{-}Y$. Тогда из теоремы Мазура следует, что

$$u(z) \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{co}} \left\{ \bigcup_{k \geq n} u_k(z) \right\} \quad \text{п. в. в } \Omega. \quad (7.20)$$

Не нарушая общности, будем считать, что $x_n(z) \rightarrow x(z)$ п. в. в Ω . Из гипотезы $H(\tilde{U}), 2)$ следует, что для почти каждого $t \in T$ и любого $z \in \Omega$ отображение $y \rightarrow \tilde{U}(t, z, y)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису. Повторяя доказательство леммы 3.1, мы получим, что для почти каждого $t \in T$ и любого $z \in \Omega$ отображение $y \rightarrow \tilde{V}(t, z, y)$ полунепрерывно сверху по Вьеторису. Тогда

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{co}} \left\{ \bigcup_{k \geq n} \tilde{V}(t_*, z, x_k(z)) \right\} \subset \tilde{V}(t_*, z, x(z)) \quad \text{п. в. в } \Omega.$$

Теперь из (7.20) следует, что $u(z) \in \tilde{V}(t_*, z, x(z))$ п. в. в Ω . Поэтому $u \in W(t_*, x)$. Тем самым отображение $x \rightarrow W(t, x)$ для почти каждого $t \in T$ является полунепрерывным сверху по Вьеторису H в $\omega\text{-}Y$.

Докажем включение (7.18). Пусть $C_{\mathbb{R}}$ – счетное плотное подмножество множества $B_{\mathbb{R}}$. Учитывая гипотезу $H(\tilde{U}), 2)$ и повторяя доказательство леммы 3.1, мы получим, что для почти каждого $t \in T$ и любого $z \in \Omega$ имеет место равенство

$$\tilde{U}_{1/n}(t, z, x) = \overline{\text{co}} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{U} \left(t, z, x + \frac{1}{n} y_k \right) \right\}, \quad y_k \in C_{\mathbb{R}}. \quad (7.21)$$

Пусть $x \in H$. Рассмотрим отображения

$$\tilde{U}_{1/n}^k(t, z, x(z)) = \tilde{U} \left(t, z, x(z) + \frac{1}{n} y_k \right), \quad k \geq 1, \quad n \geq 1, \quad (7.22)$$

$$\tilde{U}_{1/n}^*(t, z, x(z)) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{U}_{1/n}^k(t, z, x(z))}. \quad (7.23)$$

Из рассуждений, предшествующих доказательству леммы 7.3, следует, что отображения $z \rightarrow \tilde{U}_{1/n}^k(t, z, x(z))$, $n \geq 1$, $k \geq 1$, измеримы на Ω при почти каждом $t \in T$. Поэтому, используя свойства измеримых многозначных

отображений с замкнутыми значениями [6], мы получаем, что отображения $z \rightarrow \tilde{U}_{1/n}^*(t, z, x(z))$, $z \rightarrow \overline{\text{co}} \tilde{U}_{1/n}^*(t, z, x(z))$, $n \geq 1$, измеримы на Ω при почти каждом $t \in T$. Из гипотезы $H(\tilde{U})$, 3) и соотношения (7.22) следует, что

$$|\tilde{U}_{1/n}(t, z, x(z))| \leq c_2(t) + d_2(t)(|x(z)| + 1), \quad n \geq 1, \quad k \geq 1, \quad (7.24)$$

п. в. в Ω для почти каждого $t \in T$. Согласно (7.24) значениями отображений $\overline{\text{co}} \tilde{U}_{1/n}^*(t, z, x(z))$ являются компактные множества в $\mathbb{R}$. Тогда из [6, теорема 4.1] и (7.14), (7.21)–(7.23) следует, что отображение $z \rightarrow \tilde{V}(t, z, x(z))$ измеримо на Ω при почти каждом $t \in T$.

Пусть $t_* \in T$, $x_* \in H$ и $u_* \in W(t_*, x_*)$ фиксированы. Тогда $u_*(z) \in \tilde{V}(t_*, z, x_*(z))$ п. в. в Ω и, следовательно, $u_*(z) \in \tilde{U}_{1/n}(t_*, z, x(z))$, $n \geq 1$, п. в. в Ω . Воспользовавшись (7.24), (7.21), компактностью значений отображений $z \rightarrow \tilde{U}_{1/n}(t_*, z, x(z))$ и [16, утверждение 5.1], мы получаем, что существует последовательность $f_n \in Y$, $n \geq 1$, $f_n(z) \in \tilde{U}_{1/n}(t_*, z, x(z))$, сходящаяся к u_* в ω - Y . Повторяя доказательство леммы 5.1, мы получим, что существуют последовательность этажных функций $y_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, и последовательность $v_n \in Y$ такие, что

$$|y_n(z)| \leq \frac{1}{n}, \quad z \in \Omega, \quad n \geq 1, \quad (7.25)$$

$$v_n(z) \in \tilde{U}(t_*, z, x_*(z) + y_n(z)), \quad n \geq 1, \quad (7.26)$$

$$\|f_n - v_n\|_Y \leq \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Поэтому

$$v_n \rightarrow u_* \quad \text{в } \omega\text{-}Y. \quad (7.27)$$

Из неравенства (7.25) следует, что $y_n \in H$ и $\|y_n\| \leq 1/n$. Воспользовавшись (7.8), (7.26), (1.3), мы получаем, что

$$v_n \in U(t_*, x_* + y_n) \subset U_{1/n}(t_*, x_*).$$

Поскольку $U_{1/n}(t_*, x_*)$, $n \geq 1$, является убывающей по включению последовательностью выпуклых компактных подмножеств из ω - Y , то из (7.27) и последнего включения следует, что $u_* \in V(t_*, x_*)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. С помощью рассуждений, использованных выше, можно показать, что для любой функции $x \in L^2(T, \Omega)$ отображения $(t, z) \rightarrow \tilde{U}(t, z, x(z))$, $(t, z) \rightarrow \tilde{V}(t, z, x(z))$ измеримы на $T \times \Omega$.

Теперь мы подготовлены к рассмотрению примера. Сохраним все обозначения, использованные в § 6, и их смысл. Рассмотрим управляемую систему с препятствием вида $x \geq g$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial x}{\partial t} - \Delta x + a(t, z, x(t, z))u(t, z) \right. \\ & \left. + f(t, z, x(t, z)) \right) (x(t, z) - g(t, z)) = 0 \end{aligned} \quad (7.28)$$

на $\Omega(t)$ для почти всех $t \in T$,

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \Delta x + a(t, z, x(t, z))u(t, z) + f(t, z, x(t, z)) \geq 0 \quad (7.29)$$

на $\Omega(t)$ для почти всех $t \in T$,

$$x(t, z) \geq g(t, z) \quad \text{на } \Omega(t), \quad t \in T, \quad (7.30)$$

$$x(t, z) = g(t, z) \quad \text{на } \Omega \setminus \bar{\Omega}(t), \quad t \in T, \quad (7.31)$$

с условиями

$$x|_{T \times \Gamma} = 0, \quad x(0, \cdot) \in H_0^1(\Omega), \quad (7.32)$$

и ограничением на управление

$$u(t, z) \in \tilde{U}(t, z, x(t, z)) \quad \text{п. в. в } T \times \Omega. \quad (7.33)$$

Наряду с ограничением (7.33) рассмотрим ограничение

$$u(t, z) \in \tilde{V}(t, z, x(t, z)) \quad \text{п. в. в } T \times \Omega. \quad (7.34)$$

Пусть $p = 2$, $X = H_0^1(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$. Для того чтобы дать содержательную интерпретацию формально записанных соотношений (7.28)–(7.29), рассмотрим вариационное неравенство (6.3)–(6.5), где $A(t, x)$, $F(t, x)$, $U(t, x)$ определены равенствами (7.2), (7.4), (7.8). Из (7.30)–(7.32) следует, что $x(0)(\cdot) \in K_g(0)$. Воспользовавшись леммами 7.1–7.3, мы получаем, что вариационное неравенство (6.3)–(6.5) имеет решение $(x(\cdot), u(\cdot))$. Тогда $x(\cdot) \in W^{1,2}(T, H) \cap L^\infty(T, X)$, $u(\cdot) \in L^2(T, Y)$,

$$x(t) \in K_g(t), \quad t \in T, \quad (7.35)$$

$$u(t) \in U(t, x(t)) \quad \text{п. в. на } T, \quad (7.36)$$

и согласно лемме 6.2 имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & \langle x'(t) + A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)), v \rangle \\ & + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N D_k x(t)(z) D_k v(z) dz \geq 0 \quad \forall v \in K(t) \quad \text{п. в.}, \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} & \langle x'(t) + A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)), x(t) - g(t) \rangle \\ & + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N D_k x(t)(z) (D_k x(t)(z) - D_k g(t)(z)) dz = 0 \quad \text{п. в.} \end{aligned} \quad (7.38)$$

Из (7.35) и (6.1), (6.2) вытекает, что имеют место соотношения (7.30), (7.31). Поскольку функция $x(t, z) \rightarrow x(t)(z)$ измерима на $T \times \Omega$, то согласно замечанию 7.1 отображение $(t, z) \rightarrow \tilde{U}(t, z, x(t, z))$ измеримо на $T \times \Omega$. Измеримой на $T \times \Omega$ является и функция $u(t, z) \rightarrow u(t)(z)$. Тогда из (7.36), (7.8) и теоремы Фубини вытекает, что имеет место включение (7.33).

Если при почти каждом $t \in T$ функция $z \rightarrow x(t)(z)$ достаточно гладкая, например $x(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, то соотношения (7.37), (7.38) можно переписать в виде

$$\langle x'(t) - \Delta x(t) + A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)), v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K(t) \quad \text{п. в.}, \quad (7.39)$$

$$\langle x'(t) - \Delta x(t) + A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)), x(t) - g(t) \rangle = 0 \quad \text{п. в.} \quad (7.40)$$

Возьмем произвольную функцию $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v(z) \geq 0$, $z \in \Omega$, с носителем в $\Omega(t)$. Тогда из (6.1) следует, что $v \in K(t)$. Поэтому из (7.39) следует, что имеет место неравенство (7.29). Теперь из (7.29)–(7.31) и (7.40) вытекает равенство (7.28). Следовательно, если $(x(\cdot), u(\cdot))$ – решение вариационного неравенства (6.3)–(6.5) и для почти каждого $t \in T$ функция $z \rightarrow x(t)(z)$ достаточно гладкая, то имеют место соотношения (7.28)–(7.33).

Наоборот, если для функций $x(\cdot) \in W^{1,2}(T, H) \cap L^\infty(T, X)$, $u(\cdot) \in L^2(T \times \Omega)$ имеют место соотношения (7.28)–(7.33), то будут иметь место соотношения (7.39), (7.40) и включение (7.36). Соотношения (7.39), (7.40) могут быть переписаны в виде (6.18)–(6.20). Тогда согласно лемме 6.2 пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ является решением вариационного неравенства (6.3)–(6.5). Поэтому под решением управляемой системы (7.28)–(7.31) с условиями (7.32) и ограничением на управление (7.33) мы понимаем решение вариационного неравенства (6.3)–(6.5), в котором отображения $A(t, x)$, $F(t, x)$, $U(t, x)$ определяются равенствами (7.2), (7.4), (7.8). Аналогично, под решением управляемой системы (7.28)–(7.31) с условиями (7.32) и ограничением на управление (7.34) мы понимаем решение вариационного неравенства (6.3), (6.4) с ограничением $W(t, x)$ на управление, где отображение $W(t, x)$ определяется равенством (7.16). Множества решений управляемой системы (7.28)–(7.31) с условиями (7.32) и ограничениями на управление (7.33) и (7.34) мы обозначаем через $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\tilde{V}}(x_0)$ соответственно, а множества их траекторий через $Tr_{\tilde{U}}(x_0)$ и $Tr_{\tilde{V}}(x_0)$ соответственно.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть выполняются гипотезы $H(a)$, $H(f)$, $H(\tilde{U})$. Тогда множества $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\tilde{V}}(x_0)$ не пусты и множество $\mathcal{R}_{\tilde{V}}(x_0)$ является компактным в пространстве $C(T, L^2(\Omega)) \times \omega\text{-}L^2(T \times \Omega)$.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть выполняются гипотезы $H(a)$, $H(f)$, $H(\tilde{U})$, $H(r)$. Тогда

$$Tr_{\tilde{V}}(x_0) = \overline{Tr_{\tilde{U}}(x_0)}, \quad (7.41)$$

где черта обозначает замыкание в пространстве $C(T, L^2(\Omega))$.

Непустота множеств $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$, $\mathcal{R}_{\tilde{V}}(x_0)$ следует из следствия 6.1 и лемм 7.1–7.3. Согласно лемме 7.5 имеет место включение $W(t, x) \subset V(t, x)$. Поэтому $\mathcal{R}_{\tilde{V}}(x_0) \subset V\mathcal{R}_V(x_0)$, где $\mathcal{R}_V(x_0)$ – решение вариационного неравенства (6.3), (6.4), (6.6). Поскольку множество $V\mathcal{R}_V(x_0)$ является компактным в $C(T, L^2(\Omega)) \times \omega\text{-}L^2(T, L^2(\Omega))$, то множество $\mathcal{R}_{\tilde{V}}(x_0)$ будет относительно компактным в пространстве $C(T, L^2(\Omega)) \times \omega\text{-}L^2(T \times \Omega)$. Замкнутость множества $\mathcal{R}_{\tilde{V}}(x_0)$ в пространстве $C(T, L^2(\Omega)) \times \omega\text{-}L^2(T \times \Omega)$ доказывается с помощью

хорошо известных аргументов при использовании леммы 7.5. Так как множество $Tr_{\tilde{V}}(x_0)$ является замкнутым в пространстве $C(T, L^2(\Omega))$ и $Tr_{\tilde{V}}(x_0) \subset VTr_V(x_0)$, то равенство (7.41) вытекает из лемм 7.1–7.4 и следствия 6.2.

В заключение отметим, что примером отображений a , f , $\tilde{U}$, удовлетворяющих гипотезам $H(a)$ – $H(r)$, могут служить отображения:

- 1) $a(t, z) \geq 0$ на $T \times \Omega$, $a(\cdot) \in L^\infty(T \times \Omega)$;
- 2) $f(t, z, x)$ – функция, удовлетворяющая гипотезам $H(f)$ и неравенству

$$(x - y)(f(t, z, x) - f(t, z, y)) \geq -k(t)|x - y|^2 \quad \text{п.в. на } T \times \Omega,$$

$k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$;

3) $\tilde{U}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – многозначное отображение, $\tilde{U}(x) = 0$, $x = 0$; $\tilde{U}(x) = \{\sqrt{|x|}, \sqrt{|x|} + 1\}$, $x > 0$; $\tilde{U}(x) = \{-1 - \sqrt{|x|}, -\sqrt{|x|}\}$, $x < 0$, где $\{a, b\}$ – множество, состоящее из двух точек a и b .

Список литературы

1. Brezis H., *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam–London, 1973.
2. Толстоногов А. А., “Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка”, *Матем. сб.*, **190**:11 (1999), 135–160.
3. Толстоногов А. А., “Свойства множества допустимых пар “траектория-управление” эволюционных управляемых систем первого порядка”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:3 (2001), 201–224.
4. Толстоногов А. А., “Свойства решений эволюционных управляемых систем второго порядка. I”, *Сиб. матем. журн.*, **43**:4 (2002), 907–923.
5. Толстоногов А. А., “Свойства решений эволюционных управляемых систем второго порядка. II”, *Сиб. матем. журн.*, **43**:5 (2002), 1149–1167.
6. Himmelberg C. J., “Measurable relations”, *Fundamenta Math.*, **87** (1975), 53–72.
7. Бурбаки Н., *Топологические векторные пространства*, ИЛ, М., 1959.
8. Толстоногов А. А., *Дифференциальные включения в банаховом пространстве*, Наука, Новосибирск, 1986.
9. Kenmochi N., “Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications”, *Bull. Fac. Educ. Chiba University.*, **30** (1981), 1–87.
10. Kenmochi N., “On the quasi-linear heat equation with time-dependent obstacles”, *Nonlin. Anal., Theory, Meth. Appl.*, **5**:1 (1981), 71–80.
11. Толстоногов А. А., “Аппроксимация множеств достижимости эволюционного включения субдифференциального типа”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:4 (2003), 883–904.
12. Толстоногов А. А., “Свойства множеств достижимости эволюционных включений и управляемых систем субдифференциального типа”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:4 (2004), 920–945.
13. Толстоногов А. А., “К теореме Скорца–Драгоми для многозначных отображений с переменной областью определения”, *Матем. заметки*, **48**:5 (1990), 109–120.
14. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A., “ L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: Existence theorems”, *Set-valued Anal.*, **4** (1996), 173–203.
15. Бурбаки Н., *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968.
16. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A., “ L_p -continuous extreme selectors of multifunction with decomposable values: Relaxation theorems”, *Set-valued Anal.*, **4** (1996), 237–269.

17. Hiai F., Umegaki H., “Integrals, conditional expectations and martingales of multi-valued functions”, *J. Multivariate Anal.*, **7** (1997), 149–182.
18. Фридман А., *Вариационные принципы и задачи со свободными границами*, Наука, М., 1990.
19. Barbu V., *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1976.

А. А. Толстоногов (А. А. Tolstonogov)
Институт динамики систем и теории управления
E-mail: aatol@icc.ru

Поступило в редакцию
01.12.2004