Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Лысенко, Эффективные оценки производных обратной функции, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 4, 141–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/im597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:07:24

УДК 517.9

Ю. В. Лысенко

Эффективные оценки производных обратной функции

При помощи “графового” метода получены оценки производных произвольного порядка обратной функции через оценки производных исходной функции. Построена в явном виде асимптотика полученных оценок с ростом порядка производной; для аналитических функций и функций из класса Жевре получены явные оценки всех производных обратной функции.

Библиография: 12 наименований.

Введение

Пусть X и Y – банаховы пространства, x_0 – фиксированная точка из X . Как известно [1], если отображение $f: X \rightarrow Y$ определено в окрестности V_0 точки x_0 , n раз дифференцируемо в этой окрестности и производная $f'(x_0)$ является обратимым оператором, то существует такая окрестность V точки x_0 , что f гомеоморфно отображает эту окрестность на некоторую окрестность W точки $y_0 = f(x_0)$, на W определено обратное отображение $g: W \rightarrow V$ и данное отображение является n раз дифференцируемым. При этом первая производная обратного отображения выражается простой формулой

$$g' = (f')^{-1}. \quad (1)$$

Последующие производные могут быть вычислены рекуррентно с помощью дифференцирования равенства (1), после m дифференцирований можно получить некоторые выражения производной порядка m обратной функции через производные исходной функции вида

$$g^{(m)} = G_m((f')^{-1}, f'', \dots, f^{(m)}).$$

С ростом m вид выражений G_m существенно усложняется и непосредственные вычисления для больших m делаются необозримыми, становится неясным вид и даже число соответствующих слагаемых, входящих в выражение G_m . Уже для четвертой производной выражение G_4 содержит 26 разных слагаемых и, как отмечено в [2, гл. III, § 8], “вычисление в общем случае производной порядка m функции g , исходя из частных производных функции f , приводит к чрезвычайно сложным алгебраическим выражениям”.

В работах [3], [4] был предложен подход к получению явного выражения для высших производных обратной функции в банаховых пространствах, базирующийся на установлении связи слагаемых, входящих в такие выражения, с графами специального вида. В терминах графов многие вопросы, возникающие

при описании высших производных, оказались более наглядными и доступными для исследования. Один из таких вопросов – вопрос об оценках производных произвольного порядка обратного отображения – рассмотрен в настоящей работе.

По известным оценкам производных исходного отображения вида

$$\|(f'(x_0))^{-1}\| \leq H, \quad \|f^{(m)}(x_0)\| \leq b_m, \quad m = 2, 3, \dots, \quad (2)$$

построены оценки производных обратного отображения, имеющие достаточно простой вид. Исследования в работе базируются на описанной в [3], [4] структуре выражений для производных обратной функции. Ввиду того, что структура выражений для таких производных ранее не была явно описана, аналогичные оценки не получены даже для частных случаев. С этой точки зрения результаты работы являются качественно новыми.

Необходимость в получении оценок производных обратной функции естественно возникает в ряде задач, причем часто существенным является не явный вид производных, а именно их оценки или асимптотическое поведение. Приведем два примера таких задач.

Многие классы бесконечно дифференцируемых функций задаются обычно с помощью оценок норм производных. При исследовании различного рода уравнений для каждого из таких классов возникает естественный общий вопрос: в какой класс попадает решение уравнения определенного типа, заданного с помощью функций из заданного класса? Одним из классических результатов в этом направлении является теорема Коши–Ковалевской об аналитических решениях уравнения с частными производными, которая обычно доказывается с помощью получения оценок производных искомого решения. Частным случаем этого общего вопроса является следующий: в какой класс попадает обратная функция к функции из заданного класса? Именно этот вопрос является основным в нашем исследовании.

Из других задач, в которых нужны оценки производных обратной функции, укажем исследование сходимости метода Ньютона–Канторовича и более общих итерационных методов чебышевского типа для уравнений вида $f(x) = a$. Для таких методов область сходимости и скорость сходимости определяются через нормы нескольких высших производных обратной функции [1], [5].

В случае аналитических функций одной комплексной переменной исследование обратной функции является одной из классических задач, которая считается решенной. Еще Лагранжем был предложен способ вычисления производных обратной функции и получения оценок радиуса сходимости R ряда Тейлора обратной функции. Приведем основные результаты в этом направлении, следуя классическим источникам [6]–[8].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $w = f(z)$ – аналитическая функция комплексной переменной и $f'(z_0) \neq 0$, $f(z_0) = w_0$. Тогда производные обратной функции $z = g(w)$ в точке w_0 могут быть найдены по формуле

$$g^{(n)}(w_0) = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z - z_0}{f(z)} \right)^n \Big|_{z=z_0}. \quad (3)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $w = f(z)$ – аналитическая функция комплексной переменной и $f'(z_0) \neq 0$, $f(z_0) = w_0$. Пусть окружность $|z - z_0| = d$ лежит в круге с центром в точке z_0 , в котором функция $f(z)$ аналитична и в котором точка z_0 является единственным нулем функции $f(z) - w_0$. Тогда для радиуса сходимости R ряда Тейлора обратной функции в точке w_0 имеет место оценка

$$R \geq \delta = \min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = d\}. \quad (4)$$

Для получения наилучшей оценки вида (4) следует выбрать d так, чтобы δ было максимальным.

Утверждения 1 и 2 для ряда примеров приводят к эффективным формулам для вычисления производных и иногда позволяют найти точную величину радиуса сходимости ряда Тейлора обратной функции. Однако приходится отметить, что формула (3) позволяет эффективно находить производные в том случае, когда функция $(z - z_0) \frac{1}{f(z)}$ имеет простое аналитическое выражение. Если же функция f достаточно общего вида, то вычисления по формуле (2) приводят к сложным выражениям, совпадающим с приведенной ниже формулой Островского (9), а получение оценок производных требует дополнительных исследований. Из формулы Островского следует также, что формула Лагранжа (3) справедлива для любых бесконечно дифференцируемых функций и в действительности не использует аналитичности функции.

В § 3 работы показано, что рассматриваемая общая задача сводится к исследованию обратной функции к так называемой *производящей* скалярной функции. Однако производящая функция в общем случае задается в виде ряда, поэтому не удастся применить к ее исследованию утверждения 1 и 2 или аналогичные и требуются другие подходы. Примеры, когда для производящей функции получается явное аналитическое выражение и удастся применить классические методы, приведены в теореме 11.

Следует отметить также, что формула вида (3) принципиально не переносится на случай отображений банаховых пространств, даже конечномерных, поскольку она использует операции деления и возведения в степень, не определенные в банаховом пространстве. Оценка (4) радиуса сходимости существенно использует специфику одномерного случая и аналитичность.

Получение оценок коэффициентов разложения (метод мажорант) для конкретных классов функций является стандартным методом, и такие оценки в той или иной форме содержатся практически во всех работах по теории аналитических функций. Многочисленные тонкие исследования относятся к явно заданным конкретным аналитическим функциям, например эллиптическим интегралам, с задачей об обращении которых связаны имена Н. Абеля, К. Якоби, К. Вейерштрасса и других выдающихся математиков.

Однако классические результаты обычно формулируются в других терминах и мало помогают в исследовании поставленной задачи о получении оценок производных обратной для целого класса функций, производные которых допускают оценки вида (2).

Опишем соотношение полученных результатов с классическими.

Оценки, полученные для целого класса функций, должны выполняться для функций с самым “плохим” поведением. Поэтому для конкретных функций из

данного класса полученные в работе оценки могут оказаться слишком грубыми, а другими методами для них могут быть получены более точные оценки.

Вместе с тем, в работе приведено некоторое семейство явно заданных скалярных аналитических функций (появляющихся как специальный подкласс производящих функций), для которых на основании результатов работы получены простые явные выражения для производных обратных функций и явная точная формула для радиуса сходимости R ряда Тейлора обратной функции (предложение 1). Получить такие формулы, применив непосредственно классические утверждения, затруднительно.

Заметим, что в круг рассматриваемых в работе вопросов входит и ситуация, когда ряд для производящей функции оказывается расходящимся (например, для классов Жевре). Тогда методы теории аналитических функций не могут быть применены, в то время как результаты работы позволяют получить искомые оценки.

Таким образом, результаты настоящей работы дополняют классические результаты и не являются их следствием.

§ 1. Композиционные графы

В данном параграфе приведены сведения из теории графов (см., например, [9]) и доказанные в [4] леммы, необходимые для последующего изложения. Напомним, что *деревом* называется связный граф, не содержащий циклов. Дерево называется *ориентированным*, если его ребра (дуги) ориентированы, т. е. указаны начало и конец дуги. Дерево называется *корневым*, если оно имеет одну вершину (его *корень*), выделенную из всех остальных. Вершины дерева могут быть *отмеченными* (им присвоены некоторые номера или пометки) и могут не быть отмеченными.

Два ориентированных дерева с частично отмеченными вершинами называются *эквивалентными*, если существует биекция между вершинами, сохраняющая дуги и их ориентацию, при которой отмеченные вершины одного дерева переходят в отмеченные вершины второго дерева с теми же номерами. Эквивалентные деревья отождествляются, т. е. *деревом* называется фактически класс эквивалентных деревьев. Ориентированное корневое дерево называется *растущим*, если все его дуги направлены от корня и в каждую вершину (кроме корня) входит только одна дуга.

Вершину растущего дерева будем называть *висячей*, если из нее не выходит дуг.

Рассмотрим множество растущих деревьев, имеющих m висячих вершин, у которых все висячие вершины отмечены номерами i , $i = 1, 2, \dots, m$; остальные вершины не отмечены. Будем называть такие деревья *растущими деревьями m -го порядка*.

Множество классов эквивалентных деревьев указанного типа обозначим Deg_m . Как принято в теории графов, далее деревом будем называть элемент множества Deg_m , т. е. класс эквивалентных деревьев.

Из различных численных характеристик графа в исследуемом вопросе наиболее существенную информацию о дереве содержит его характеристический вектор, определяемый следующим образом.

Будем говорить, что вершина дерева *имеет тип* F_k , если число дуг, выходящих из данной вершины, равно k . Обозначим количество вершин типа F_k в дереве T через α_k . Так как отмеченные вершины имеют тип F_0 , для рассматриваемых деревьев из Der_m имеем $\alpha_0 = m$. Очевидно, что $\alpha_k = 0$ при $k > m$.

Полным характеристическим вектором дерева T будем называть вектор $\alpha = \alpha(T) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, координаты которого принадлежат множеству $\mathbb{N}_+$ неотрицательных целых чисел. Так как для деревьев из множества Der_m имеем по определению $\alpha_0 = m$, для сокращения записи будем, как правило, не использовать координату α_0 в записи характеристического вектора.

Рассмотрим следующее множество целочисленных векторов:

$$\text{ADer}_m = \{\alpha \in (\mathbb{N}_+)^{m+1} : \alpha_0 = m, \alpha_2 + 2\alpha_3 + \dots + (m-1)\alpha_m = m-1\}.$$

Используя известную теорему (см., например, [9]) о связи числа вершин и числа дуг в любом дереве, получаем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Целочисленный вектор $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ является полным характеристическим вектором дерева из множества Der_m тогда и только тогда, когда он принадлежит ADer_m .*

Заметим, что согласно лемме 1 условие, наложенное на характеристический вектор, приводит к ограничениям на числа $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ и не дает ограничения на значение α_1 . Поэтому множество ADer_m бесконечно и общее количество деревьев в множестве Der_m также бесконечно.

Обозначим через Inv_m подмножество в Der_m , состоящее из растущих деревьев m -го порядка, не содержащих ни одной вершины типа F_1 , т.е. тех деревьев, для полного характеристического вектора которых выполнено условие $\alpha_1 = 0$. Такой вектор будем, как правило, записывать в сокращенном виде $\alpha = (\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m)$, не выписывая координаты α_0 и α_1 . Деревья из множества Inv_m будем называть *композиционными деревьями m -го порядка* (связанными с задачей вычисления обратной функции).

Обозначим через AInv_m множество характеристических векторов, соответствующих деревьям из Inv_m . Согласно лемме 1 имеем

$$\text{AInv}_m = \{\alpha \in (\mathbb{N}_+)^{m+1} : \alpha_0 = m, \alpha_1 = 0, \alpha_2 + 2\alpha_3 + \dots + (m-1)\alpha_m = m-1\}.$$

Здесь мы имеем ограничение на все координаты характеристического вектора, откуда следует, что множество AInv_m и множество Inv_m конечны.

Заметим, что общее количество вершин у дерева $T \in \text{Inv}_m$ зависит от характеристического вектора и равно числу $\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m + m$. Наибольшее число вершин, равное $2m-1$, имеют деревья с характеристическим вектором $\alpha = (m-1, 0, \dots, 0)$. Наименьшее число вершин, равное $m+1$, имеют деревья с характеристическим вектором $\alpha = (0, 0, \dots, 1)$.

ЛЕММА 2 [4]. *Количество различных деревьев из Inv_m , соответствующих характеристическому вектору α , задается выражением*

$$c(\alpha) := \frac{(2\alpha_2 + \dots + m\alpha_m)!}{(2!)^{\alpha_2} \alpha_2! \dots (m!)^{\alpha_m} \alpha_m!}, \quad (5)$$

а количество деревьев в множестве Inv_m задается формулой

$$\nu_m := \text{card } \text{Inv}_m = \sum_{\alpha \in A\text{Inv}_m} \frac{(2\alpha_2 + \dots + m\alpha_m)!}{(2!)^{\alpha_2} \alpha_2! \dots (m!)^{\alpha_m} \alpha_m!}. \quad (6)$$

На множестве Inv_m задается операция вариации первого типа Var_1 , которая каждому дереву T ставит в соответствие множество деревьев (лес), принадлежащих Inv_{m+1} , построенных по следующему правилу: берем неотмеченную вершину дерева T и “навешиваем” на нее новую отмеченную висячую вершину, остальные вершины остаются без изменения. Это означает, что выбранная неотмеченная вершина соединяется дугой с новой висячей вершиной, имеющей пометку $m+1$. Если выбранная неотмеченная вершина имеет тип F_k , то характеристический вектор β вновь построенного дерева связан с характеристическим вектором исходного дерева T соотношением $\beta_0 = \alpha_0 + 1$, $\beta_k = \alpha_k - 1$, $\beta_{k+1} = \alpha_{k+1} + 1$, $\alpha_i = \beta_i$ при $i \neq 0, k, k+1$, откуда следует, что количество неотмеченных вершин сохраняется. Повторяя эту процедуру для каждой неотмеченной вершины дерева T , получим $\sum_{k=2}^m \alpha_k$ новых деревьев.

Зададим на множестве Inv_m еще одну операцию – вариацию второго типа Var_2 , которая дереву T ставит в соответствие множество деревьев из Inv_{m+1} , построенных по правилу Var_2 : берем произвольную вершину b дерева T и вставляем над ней блок из новой неотмеченной вершины c типа F_2 и еще одной новой вершины, отмеченной индексом $m+1$, остальные вершины остаются без изменения. Это означает, что если b не является корнем, то вместо дуги, соединяющей некоторую вершину a с вершиной b , вставляем три дуги (a, c) , $(c, b)(c, m+1)$; если b является корнем, то добавляется новая вершина c и добавляются две дуги (c, b) и $(c, m+1)$, добавленная вершина c становится корнем нового дерева. Характеристический вектор β построенного дерева связан с характеристическим вектором α исходного дерева соотношением $\beta_0 = \alpha_0 + 1$, $\beta_2 = \alpha_2 + 1$, при этом количество неотмеченных вершин и количество отмеченных вершин увеличивается на 1. Количество новых деревьев, построенных из дерева T с помощью вариации второго типа, есть $\sum_{k=2}^m \alpha_k + m$.

Обозначим через Var операцию варьирования, которая ставит в соответствие дереву T множество из $2 \sum_{k=2}^m \alpha_k + m$ новых деревьев (лес), построенных по правилам Var_1 и Var_2 . В дальнейшем существенно, что все эти деревья различны.

ЛЕММА 3 [4]. *Образы различных деревьев при отображении Var не пересекаются, при этом $\text{Inv}_{m+1} = \bigcup_{T \in \text{Inv}_m} \text{Var}(T)$.*

§ 2. Производные обратного отображения

Пусть $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in Y^m$. Обозначим через Z_0 (линейное непрерывное) отображение из Y в X , заданное формулой $Z_0 h = (f')^{-1} h$. Пусть

$$Z_k(h_1, \dots, h_k) = -(f')^{-1} \circ f^{(k)}(Z_0 h_1, \dots, Z_0 h_k),$$

где $k = 2, 3, \dots, n$. Отображение Z_k есть k -линейное отображение из Y^k в X (см., например, [10]).

По дереву $T \in \text{Inv}_m$ построим m -линейное отображение $\pi(T)$ из Y^m в X .

Значение отображения $\pi(T)$ на векторе h задаем по следующему правилу. Каждой вершине типа F_k , $k > 0$, поставим в соответствие отображение Z_k , висячей вершине с пометкой i – выражение $Z_0 h_i$.

Рассмотрим вершину типа F_k , $k > 0$, из нее выходит ровно k дуг. Описанные выше соответствия позволяют корректно определить сложную функцию, полученную подстановкой в отображение Z_k отображений, соответствующих тем вершинам, в которые идут дуги из заданной вершины. Построенное таким образом отображение $\pi(T): Y^m \rightarrow X$ будем называть *композиционным мономом* порядка m , соответствующим композиционному дереву T . Иногда, чтобы отметить зависимость композиционного монома от функции f , будем для него использовать обозначение $\pi(T; f)$.

Характеристическим вектором композиционного монома $\pi(T)$ будем называть вектор $\alpha(T)$ – характеристический вектор дерева T . Координата α_k этого вектора есть число вхождений отображения Z_k в выражение для π .

Например, при $m = 3$ множество AInv_m состоит из двух векторов: $(0, 0, 1)$ и $(0, 2, 0)$. Вектору $(0, 0, 1)$ соответствует только одно дерево и один композиционный моном вида $Z_3(Z_0 h_1, Z_0 h_2, Z_0 h_3)$. Вектору $(0, 2, 0)$ соответствуют три дерева и три композиционных монома вида $Z_2(Z_2(Z_0 h_1, Z_0 h_2), Z_0 h_3)$, $Z_2(Z_2(Z_0 h_2, Z_0 h_3), Z_0 h_1)$, $Z_2(Z_2(Z_0 h_1, Z_0 h_3), Z_0 h_2)$.

Заметим, что в случае скалярных функций каждый композиционный моном порядка m имеет вид $C h_1 h_2 \dots h_m$, где C – некоторое число. Поэтому в одномерном случае можем отождествлять композиционный моном с этим числом.

Множество композиционных мономов может быть описано независимо от понятия дерева в следующих терминах. Композиционным мономом порядка m будем называть любое отображение из пространства Y^m в пространство X , которое каждому вектору h ставит в соответствие композицию заданного числа отображений $Z_m, Z_{m-1}, \dots, Z_2$, с аргументами $Z_0 h_1, \dots, Z_0 h_m$; такое отображение автоматически является m -линейным. Заметим, что при этом композиционные мономы мы считаем различными и в том случае, если они совпадают как отображения из Y^m в X , но правила составления композиции разные. Выражаясь более точно, можно сказать, что композиционным мономом является выражение, задающее указанное отображение. Это замечание особенно существенно в случае скалярных функций, так как в этом случае отображения Z_k коммутируют и многие композиционные мономы совпадают как отображения.

При построении композиционных мономов согласно последнему определению возникает большое число возможных вариантов составления указанных композиций, при этом явная запись и непосредственное описание множества всех композиционных мономов становятся достаточно сложными.

Наиболее существенным моментом нашего исследования является следующий факт.

ЛЕММА 4. *Отображение π устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством Inv_m и множеством композиционных мономов порядка m , причем при этом отображении характеристические векторы сохраняются.*

После установления этого факта вопросы, связанные с описанием композиционных мономов, сводятся к соответствующим вопросам о множестве деревьев, что позволяет применить наглядные соображения и хорошо развитые методы теории графов.

Композиционным полиномом порядка m (порожденным функцией f) будем называть m -линейное симметричное отображение из Y^m в X , являющееся суммой всех композиционных мономов порядка m , т. е. определяемое равенством

$$G_m(f) = \sum_{T \in \text{Inv}_m} \pi(T; f). \quad (7)$$

Следующая теорема анонсирована в работе [3], ее подробное доказательство приведено в [4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть X и Y – банаховы пространства, функция f определена и m раз дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in X$ и оператор $f'(x_0)$ непрерывно обратим. Тогда производная порядка m обратного отображения g в точке y_0 задается выражением

$$g^{(m)}(y_0) = G_m(f(x_0)). \quad (8)$$

Основным шагом доказательства этой теоремы является следующая лемма.

ЛЕММА 5. Для производной композиционного монома $\pi(T)$ имеет место формула

$$\frac{d}{dy} \pi(T) = \sum_{T' \in \text{Var}(T)} \pi(T').$$

Как уже отмечалось, в случае скалярных функций все композиционные мономы, соответствующие фиксированному характеристическому вектору α , совпадают. Поэтому в скалярном случае формула (8) превращается в известную формулу Островского [11]:

$$g^{(m)}(y_0) = \sum_{\alpha \in \text{AInv}_m} (-1)^{|\alpha|} \frac{(2\alpha_2 + \dots + m\alpha_m)!}{(2!)^{\alpha_2} \alpha_2! \dots (m!)^{\alpha_m} \alpha_m!} \times (f'(x_0))^{-m-|\alpha|} (f''(x_0))^{\alpha_2} (f^{(3)}(x_0))^{\alpha_3} \dots (f^{(m)}(x_0))^{\alpha_m}, \quad (9)$$

где $|\alpha| = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m$.

§ 3. Оценки производных обратной функции

Через $\Phi_n(X, Y)$ обозначим множество, состоящее из n раз дифференцируемых отображений f , определенных на окрестности U фиксированной точки x_0 из банахова пространства X , отображающих эту окрестность в банахово пространство Y и удовлетворяющих условию $f(x_0) = y_0$. Без ограничения общности будем в дальнейшем считать, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Через $\Phi(X, Y)$ обозначим подмножество в $\Phi_n(X, Y)$, состоящее из бесконечно дифференцируемых отображений.

Многие классы дифференцируемых функций задаются с помощью оценок норм производных следующим образом. Пусть задана последовательность положительных чисел $B = (b_1, b_2, b_3, \dots)$, $b_1 := 1/H$. Через $\Phi_n(B)$ обозначим подмножество в Φ_n , состоящее из функций, для которых имеют место оценки

$$\|(f'(x_0))^{-1}\| \leq H, \quad \|f^{(m)}(x_0)\| \leq b_m, \quad m = 2, 3, \dots, n. \quad (10)$$

Через $\Phi(B)$ обозначим подмножество в $\Phi(X, Y)$, состоящее из функций, для которых оценки (10) выполнены при всех натуральных m .

Напомним, что нормой полилинейного отображения $G: Y^m \rightarrow X$ называется наименьшая из постоянных C , при которых для всех $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in Y^m$ выполнено неравенство ограниченности

$$\|G(h_1, h_2, \dots, h_m)\| \leq C \|h_1\| \|h_2\| \dots \|h_m\|.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для любой функции $f \in \Phi_n(B)$ имеет место следующая оценка нормы производной порядка m , $m \leq n$, обратной функции g в точке y_0 :*

$$\begin{aligned} \|g^{(m)}(y_0)\| &\leq W_m(B) := \\ &:= \sum_{\alpha \in A_{\text{Inv}_m}} \frac{(2\alpha_2 + \dots + m\alpha_m)!}{(2!)^{\alpha_2} \alpha_2! \dots (m!)^{\alpha_m} \alpha_m!} H^{m+|\alpha|} b_2^{\alpha_2} b_3^{\alpha_3} \dots b_m^{\alpha_m}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $|\alpha| = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m$. Для функции $f \in \Phi(B)$ оценка (11) имеет место для всех m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in \Phi_n(B)$ и $T \in \text{Inv}_m$, то для нормы композиционного монома $\pi(T)$ имеет место оценка

$$\|\pi(T)\| \leq H^m (Hb_2)^{\alpha_2} (Hb_3)^{\alpha_3} \dots (Hb_m)^{\alpha_m} = H^{m+|\alpha|} b_2^{\alpha_2} b_3^{\alpha_3} \dots b_m^{\alpha_m},$$

где α – характеристический вектор дерева T . Утверждение следует непосредственно из определения нормы и определения композиционного монома.

Согласно теореме 1 производная $g^{(m)}$ есть сумма всех композиционных мономов и норма этой суммы оценивается через сумму норм этих мономов. Так как полученная выше оценка нормы монома определяется его характеристическим вектором, в оценке возникают одинаковые слагаемые, число которых $s(\alpha)$ равно количеству деревьев, соответствующих характеристическому вектору α . Это число описано в лемме 2 и задается выражением (5). Теорема доказана.

Экспоненциальной производящей функцией $f_B(z)$ для заданной последовательности B будем называть формальный степенной ряд

$$f_B(z) = -\frac{1}{H}z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k. \quad (12)$$

Заметим, что согласно теореме Бореля для каждого формального степенного ряда существует бесконечно дифференцируемая функция, для которой данный ряд является рядом Тейлора (даже если этот ряд расходится). Поэтому можем отождествлять ряд (12) с обычной бесконечно дифференцируемой функцией (определенной с точностью до функции, все производные которой обращаются в нуль в данной точке).

ТЕОРЕМА 3. Для любой экспоненциальной производящей функции $f_B(z)$ существует обратная (в смысле операции композиции формальных рядов) функция

$$g_B(z) = -Hz + \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{W_m(B)}{m!} z^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{f}(z)$ – бесконечно дифференцируемая функция такая, что $\tilde{f}^{(m)}(0) = b_m$ при $m \geq 2$, $\tilde{f}'(0) = -1/H$. Как уже отмечалось, такая функция существует согласно теореме Бореля. Для этой функции существует обратная $\tilde{g}$, производные которой совпадают с производными функции g_B . Применим формулу (7) к функции $\tilde{f}$. Получаем, что композиционный моном $\pi(T)$, $T \in \text{Inv}_m$, соответствующий дереву с характеристическим вектором α , задается числом $(-1)^m H^{m+|\alpha|} b_2^{\alpha_2} b_3^{\alpha_3} \dots b_m^{\alpha_m}$. Заметив, что все композиционные мономы заданного порядка имеют одинаковый знак, получаем

$$\tilde{g}^{(m)}(0) = (-1)^m W_m(B),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, если для производящей функции удастся найти в явном виде производные обратной функции, то получаем оценки производных обратных функций для всего класса $\Phi(B)$. Однако построить обратную функцию удастся лишь в исключительных случаях, и с этой точки зрения полученный результат не является эффективным.

Если ряд (12) сходящийся, то производящая функция $f_B(z)$ является аналитической. Для аналитических функций одной из характеристик скорости возрастания последовательности b_k является радиус сходимости этого ряда или обратная к нему величина

$$\chi(B) = \limsup \left(\frac{b_k}{k!} \right)^{1/k}.$$

Число $\chi(B)$ есть показатель экспоненциальной скорости роста коэффициентов ряда Тейлора экспоненциальной производящей функции. Обратная функция также является аналитической, и возникает задача: найти или оценить радиус сходимости ряда Тейлора обратной функции. Полученные ниже результаты позволяют получить информацию о скорости роста производных обратной функции в общем случае и, в частности, оценить радиус сходимости ряда Тейлора обратной к аналитической функции.

Для аналитической производящей функции иногда удастся получить явное выражение и построить обратную функцию в явном виде. Пример такого построения приведен ниже в теореме 11.

Полученная оценка (11) имеет также достаточно сложный вид. Обратим внимание на то, что выражение в правой части формулы (11) является полиномом от переменных $H, b_2, b_3, \dots, b_m$. Но суммирование в (11) ведется по сложно описываемому множеству AInv_m и в выражение входят коэффициенты $s(\alpha)$. Поэтому с помощью полинома из (11) трудно, например, непосредственно увидеть, в какой класс попадает обратная функция.

Основным результатом данной работы является получение более эффективных, хотя и более грубых оценок для норм производных обратной функции. Как показано ниже, такие оценки позволяют получать достаточно конкретную информацию о поведении производных. Получение этих оценок существенно опирается на установленную выше связь производных обратной функции с композиционными деревьями.

Для всех вершин дерева $T \in \text{Inv}_m$ зададим вес (порожденный заданной последовательностью B): при $k \geq 2$ вершине типа F_k припишем вес Hb_k , висаящим вершинам припишем вес H . Весом $W(T)$ композиционного дерева T назовем произведение весов его вершин. Весом леса (множества деревьев) назовем сумму весов деревьев, входящих в данный лес. В такой терминологии выражение $W_m(B)$ в правой части формулы (11) есть вес $W(\text{Inv}_m)$ леса Inv_m и теорема 2 преобразуется в следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Для любой функции g из класса $\Phi_n(B)$ имеет место следующая оценка нормы ее производной порядка m , $m \leq n$:*

$$\|g^{(m)}(y_0)\| \leq W(\text{Inv}_m).$$

При анализе полученных оценок вместо последовательности $b_2, b_3, \dots$ удобнее рассмотреть число b_2 и последовательность отношений $\gamma_{m+1} = b_{m+1}/b_m$ — коэффициентов возрастания последовательности b_m . Тогда $b_m = b_2 \prod_{k=3}^m \gamma_k$, $m \geq 3$.

Построим для последовательности $W_m(B) = W(\text{Inv}_m)$ мажорирующую последовательность $\widetilde{W} = (H, \widetilde{W}_2, \widetilde{W}_3, \dots)$, задавая ее с помощью соответствующих коэффициентов роста, которые удастся получить в достаточно эффективном виде, используя те же соображения, что и в доказательстве теоремы 1. Такой подход позволяет также построить оценки снизу для последовательности $W_m(B)$, дающие дополнительную информацию о поведении данной последовательности.

Для любого $m \geq 2$ зададим функцию, определенную на множестве AInv_m характеристических векторов:

$$\varphi_m(\alpha) = \varphi_m(\alpha; B) = \sum_{i=2}^m (\gamma_{i+1} + Hb_2)\alpha_i + mHb_2. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 5. *Для величины $W_{m+1} = W(\text{Inv}_{m+1})$, $m \geq 2$, справедливы следующие оценки:*

$$H^{m+2}b_2 \prod_{i=2}^m \min_{\alpha \in \text{AInv}_i} \varphi_i(\alpha) \leq W_{m+1} \leq H^{m+2}b_2 \prod_{i=2}^m \max_{\alpha \in \text{AInv}_i} \varphi_i(\alpha), \quad (14)$$

где $\varphi_i(\alpha)$ — определенные выше функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T — произвольное дерево из Inv_m , и пусть дерево $T' \in \text{Inv}_{m+1}$ получено из дерева T с помощью вариации первого рода. Если вариация первого рода применялась к вершине типа F_k , то полный характеристический вектор $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{m+1})$ построенного дерева T' связан с характеристическим вектором исходного дерева T при $k \neq m$ соотношениями $\beta_k = \alpha_k - 1$, $\beta_{k+1} = \alpha_{k+1} + 1$, $\beta_m = 0$, $\alpha_i = \beta_i$, $i \neq k, k+1$, и при $k = m$ соотношениями

$\beta_m = \alpha_m - 1$, $\beta_{m+1} = 1$, $\alpha_i = \beta_i$, $i \neq m$. Поэтому $W(T') = W(T)H\gamma_{k+1}$. Так как число вершин типа F_k есть α_k , суммируя веса деревьев из множества $\text{Var}_1(T)$, получаем

$$W(\text{Var}_1(T)) = \left(H \sum_{k=2}^m \gamma_{k+1} \alpha_k \right) W(T). \quad (15)$$

Если дерево $T' \in \text{Inv}_{m+1}$ получено из дерева T с помощью вариации второго рода и эта вариация применялась к одной из α_k вершин типа F_k , $k \geq 2$, то полный характеристический вектор β построенного дерева T' связан с характеристическим вектором α исходного дерева соотношениями $\beta_0 = \alpha_0 + 1$, $\beta_2 = \alpha_2 + 1$, $\beta_{m+1} = 0$ и $\alpha_i = \beta_i$, $i \neq 0, 2$, откуда $W(T') = W(T)H^2b_2$.

Если вариация второго рода применялась к одной из m отмеченных вершин – вершин типа F_0 , то полный характеристический вектор β построенного дерева T' связан с полным характеристическим вектором α исходного дерева теми же соотношениями, что и для вершин типа F_k , $k \geq 2$, описанными выше, откуда также имеем $W(T') = W(T)H^2b_2$. Поэтому, суммируя веса деревьев из множества $\text{Var}_2(T)$ и учитывая, что $\alpha_1 = 0$, получаем

$$W(\text{Var}_2(T)) = \left(H^2 \sum_{k=0}^m b_2 \alpha_k \right) W(T) = H \left(\sum_{k=2}^m H b_2 \alpha_k + m H b_2 \right) W(T). \quad (16)$$

Суммируя (15) и (16), получаем

$$W(\text{Var}(T)) = H \left(\sum_{k=2}^m (\gamma_{k+1} + H b_2) \alpha_k + m H b_2 \right) W(T) = H \varphi_m(\alpha) W(T).$$

Согласно лемме 3 имеем

$$\text{Inv}_{m+1} = \coprod_{T \in \text{Inv}_m} \text{Var}(T).$$

Кроме того, если двум деревьям соответствует один и тот же характеристический вектор α , то веса таких деревьев равны, поэтому веса деревьев будем в дальнейшем обозначать $W(\alpha)$. В результате получаем

$$W(\text{Inv}_{m+1}) = \sum_{\alpha \in \text{AInv}_m} c(\alpha) W(\alpha) H \varphi_m(\alpha).$$

Основное упрощение полученного выражения получаем, если сомножители $\varphi_m(\alpha)$ оценить через их максимум или минимум по α . Тогда неудобные для исследования суммы и коэффициенты исчезают, так как

$$\sum_{\alpha \in \text{AInv}_m} c(\alpha) W(\alpha) = W_m.$$

Таким образом получаем более эффективные оценки

$$H \min_{\alpha \in \text{AInv}_m} \varphi_m(\alpha) W_m \leq W_{m+1} \leq H \max_{\alpha \in \text{AInv}_m} \varphi_m(\alpha) W_m. \quad (17)$$

Применяя последовательно формулу (17), получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} W_{m+1} &\leq H \max_{\alpha \in \text{AInv}_m} \varphi_m(\alpha) W_m \leq H^2 \max_{\alpha \in \text{AInv}_m} \varphi_m(\alpha) \max_{\alpha \in \text{AInv}_{m-1}} \varphi_{m-1}(\alpha) W_{m-1} \\ &\leq H^{m-1} \prod_{k=2}^m \max_{\alpha \in \text{AInv}_k} \varphi_k(\alpha) W_2. \end{aligned}$$

Поскольку $W_2 = H^3 b_2$, получаем искомую оценку сверху. Оценку снизу получаем аналогично. Теорема доказана.

Следующим шагом исследования является вычисление или оценивание максимума и минимума функции $\varphi_m(\alpha)$.

Рассмотрим последовательность $(\xi(k))_{k=2}^{n-1}$, заданную формулой

$$\xi(k) = \frac{1}{k-1}(\gamma_{k+1} + Hb_2), \quad (18)$$

от которой, как будет показано ниже, зависит поведение полученных оценок. Заметим, что она не зависит от числа m . Введем новую последовательность $\tilde{\xi}(k) = \max_{i=2, \dots, k} \xi(i)$. Если последовательность $\xi(k)$ возрастает, то $\tilde{\xi}(k) = \xi(k) = \frac{1}{k-1}(\gamma_{k+1} + Hb_2)$, а если убывает, то $\tilde{\xi}(k) = \xi(2) = \gamma_3 + Hb_2$.

Введем также последовательность $\underline{\xi}(k) = \min_{k=2, \dots, k} \xi(i)$. Аналогично, если последовательность $\xi(k)$ возрастает, то $\underline{\xi}(k) = \xi(2) = \gamma_3 + Hb_2$, а если убывает, то $\underline{\xi}(k) = \xi(k)$.

Условие возрастания последовательности $\xi(k)$ эквивалентно выполнению неравенств

$$\gamma_{k+1} + Hb_2 \geq \frac{k-1}{k-2}(\gamma_k + Hb_2) \geq \frac{k-1}{k-3}(\gamma_{k-1} + Hb_2) \geq (k-1)(\gamma_3 + Hb_2),$$

из которых следует, что последовательность γ_k растет не медленнее, чем k . Таким образом, условие возрастания этой последовательности $\xi(k)$ представляет собой ограничение снизу скорости роста последовательности γ_k .

Аналогично, условие убывания этой последовательности эквивалентно выполнению противоположных неравенств и представляет собой ограничение сверху скорости роста последовательности γ_k .

Представляют интерес граничные случаи, когда соответствующие последовательности $\xi(k)$ постоянны. В этих случаях выполнено

$$\gamma_{k+1} + Hb_2 = \frac{k-1}{k-2}(\gamma_k + Hb_2) = \frac{k-1}{k-3}(\gamma_{k-1} + Hb_2) = (k-1)(\gamma_3 + Hb_2).$$

Тогда $\gamma_{k+1} = (k-1)(\gamma_3 + Hb_2) - Hb_2$ для всех $k \geq 2$ и последовательность b_m при $m \geq 3$ зависит от b_2 и γ_3 следующим образом:

$$\begin{aligned} b_m &= b_2 \prod_{k=2}^{m-1} [(k-1)(\gamma_3 + Hb_2) - Hb_2] \\ &= (m-2)!(\gamma_3 + Hb_2)^{m-2} b_2 \prod_{k=2}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{k-1} \frac{Hb_2}{\gamma_3 + Hb_2}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Множество таких последовательностей (и семейство соответствующих производящих функций) образует трехпараметрическое семейство.

Рассмотрим производящие функции, соответствующие постоянным последовательностям $\xi(k)$. Прежде всего заметим, что для рядов, задающих эти функции, можно вычислить радиус сходимости. Действительно, так как $\delta := \frac{Hb_2}{\gamma_3 + Hb_2} < 1$, с ростом m произведения

$$\prod_{k=2}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{k-1} \frac{Hb_2}{\gamma_3 + Hb_2}\right)$$

стремятся к нулю, как $m^{-\delta}$. Поэтому радиус сходимости R ряда Тейлора соответствующей производящей функции определяется первыми сомножителями в (19) и $R = (\gamma_3 + Hb_2)^{-1}$.

Найдем указанные производящие функции в явном виде. Сначала преобразуем выражение для b_m :

$$\begin{aligned} b_m &= \prod_{k=2}^{m-1} [(k-1)(\gamma_3 + Hb_2) - Hb_2] b_2 = b_2 (\gamma_3 + Hb_2)^{m-2} \prod_{k=2}^{m-1} (k-1-\delta) \\ &= \frac{b_2}{(\delta+1)\delta(\gamma_3 + Hb_2)^2} (\gamma_3 + Hb_2)^m \prod_{k=0}^{m-1} [k + (-\delta-1)] \\ &= b_2 (\gamma_3 + Hb_2)^{m-2} \frac{\Gamma(m-1-\delta)}{\Gamma(1-\delta)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию вида $F(z) = C(1-\lambda z)^{-a} - 1$, где C , λ и a – постоянные. Тогда $F^{(m)}(0) = C\lambda^m \prod_{k=0}^{m-1} (k+a)$. Сравнивая последнее выражение с выражением (19) для b_m , замечаем, что при $m \geq 3$ имеем $F^{(m)}(0) = b_m$, если положить

$$a = -(\delta+1), \quad \lambda = \gamma_3 + Hb_2, \quad C = \frac{b_2}{(\delta+1)\delta(\gamma_3 + Hb_2)^2}.$$

Таким образом, функция

$$f(z) = C \left((1-\lambda z)^{-a} - 1 - a\lambda z - \frac{1}{2}a(a+1)\lambda^2 z^2 \right) - \frac{1}{H}z + \frac{1}{2}b_2 z^2 \quad (20)$$

при заданных значениях параметров является производящей функцией, соответствующей постоянной последовательности $\xi(k)$.

Вернемся к получению оценок производных обратной функции.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $m \geq 3$. Для величин $W_m = W(\text{Inv}_m)$ справедливы следующие оценки:

$$\underline{W}_m \leq W_m \leq \widetilde{W}_m, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{W}_m &:= H^{m+1}b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [(i-1)\underline{\xi}(i) + iHb_2], \\ \widetilde{W}_m &:= H^{m+1}b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [(i-1)\widetilde{\xi}(i) + iHb_2]. \end{aligned}$$

Если последовательность $\xi(k)$ возрастает, то имеем оценку

$$H^{m+1}b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2) + Hb_2] \leq W_m \leq H^{m+1}b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [\gamma_{i+1} + (i+1)Hb_2]. \quad (22)$$

Если последовательность $\xi(k)$ убывает, то имеем аналогичную оценку

$$H^{m+1}b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [\gamma_{i+1} + (i+1)Hb_2] \leq W_m \leq H^{m+1}b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2) + Hb_2]. \quad (23)$$

В случае постоянной последовательности $\xi(k)$ в указанных оценках имеем точное равенство. Для производящих функций, соответствующих постоянным последовательностям, т. е. функций вида (20), имеем явную формулу производной обратной функции:

$$\begin{aligned} g^{(m)}(0) &= (-1)^m H^{m+1} b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2) + Hb_2] \\ &= (-1)^m H^{m+1} b_2 (\gamma_3 + 2Hb_2)^{m-2} \frac{\Gamma(m - \frac{\gamma_3 + Hb_2}{\gamma_3 + 2Hb_2})}{\Gamma(2 - \frac{\gamma_3 + Hb_2}{\gamma_3 + 2Hb_2})}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения сформулированных утверждений вычислим или оценим величины $\max_{\alpha \in A_{\text{Inv}_m}} \varphi_m(\alpha)$ и $\min_{\alpha \in A_{\text{Inv}_m}} \varphi_m(\alpha)$, после чего требуемый результат непосредственно следует из теоремы 5.

Фактически мы имеем следующую задачу целочисленного линейного программирования:

$$\begin{aligned} \varphi_m(\alpha) &= \sum_{i=2}^m (\gamma_{i+1} + Hb_2) \alpha_i + mHb_2 \rightarrow \text{extremum}, \\ \alpha_i &\in \mathbb{N}^+, \quad \alpha_2 + 2\alpha_3 + \dots + (m-1)\alpha_m = m-1, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Максимум линейной функции в такой задаче достигается в одной из вершин выпуклого многогранника, порожденного указанными целочисленными точками. Заметим, что этот многогранник является многогранником Ньютона полинома (11) и в рассматриваемом случае, как в ряде других задач, наиболее существенные свойства полинома зависят от вершин многогранника Ньютона. Стремясь к созданию эффективных конструкций, мы получаем явные оценки максимума и минимума, которые в важных частных случаях (см. § 4 и § 5) оказываются точными.

ЛЕММА 6. Для любой последовательности γ_k имеет место оценка

$$(m-1)\underline{\xi}(m) + mHb_2 \leq \varphi_m(\alpha) \leq (m-1)\tilde{\xi}(m) + mHb_2. \quad (25)$$

Если последовательность $\xi(k)$ возрастает, то максимум функции $\varphi_m(\alpha)$ достигается при $\alpha = (0, 0, \dots, 0, 1)$ и

$$\max_{\alpha \in A_{\text{Inv}_m}} \varphi_m(\alpha) = \gamma_{m+1} + (m+1)Hb_2,$$

а минимум достигается при $\alpha = (m-1, 0, \dots, 0, 0)$ и

$$\min_{\alpha \in A_{\text{Inv}_m}} \varphi_m(\alpha) = (m-1)(\gamma_3 + 2Hb_2) + Hb_2.$$

Если последовательность $\xi(k)$ убывает, то максимум функции $\varphi_m(\alpha)$ достигается при $\alpha = (m-1, 0, \dots, 0, 0)$ и

$$\max_{\alpha \in A_{\text{Inv}_m}} \varphi_m(\alpha) = (m-1)(\gamma_3 + 2Hb_2) + Hb_2,$$

минимум достигается при $\alpha = (0, 0, \dots, 0, 1)$ и

$$\min_{\alpha \in A_{\text{Inv}_m}} \varphi_m(\alpha) = \gamma_{m+1} + (m+1)Hb_2.$$

Если последовательность $\xi(k)$ постоянна, то функция $\varphi_m(\alpha)$ не зависит от α и

$$\varphi_m(\alpha) \equiv (m-1)(\gamma_3 + 2Hb_2) + Hb_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим соответствующую (не целочисленную) задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) &:= \sum_{i=2}^m (\gamma_{i+1} + Hb_2)x_i + mHb_2 \rightarrow \text{extremum}, \\ x_2 + 2x_3 + \dots + (m-1)x_m &= m-1, \\ x_i &\in \mathbb{R}, \quad x_i \geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Заданные ограничения на вектор $x = (x_2, x_3, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$ означают, что область определения есть симплекс размерностью $m-2$ с вершинами вида

$$A_k = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{m-1}{k-1}, 0, \dots, 0\right),$$

где ненулевой член стоит на месте с номером k . Значения исследуемой функции в вершинах суть числа $(m-1)\xi(k) + mHb_2$. Поскольку экстремум линейной функции достигается в одной из вершин, получаем, что максимум и минимум в задаче (26) – соответственно наибольшее и наименьшее из указанных значений. Так как многогранник Ньютона, связанный с задачей (24), принадлежит рассматриваемому симплексу, для задачи целочисленного линейного программирования (24) имеем оценки максимума и минимума (25).

Если последовательность $\xi(k)$ возрастает, то максимум достигается в вершине $A_m = (0, 0, \dots, 0, 1)$ и этот максимум есть $\gamma_{m+1} + (m+1)Hb_2$. Но эта вершина имеет целочисленные координаты, значит, в этой вершине мы имеем максимум в задаче (24) целочисленного линейного программирования. Минимум в задаче (24) достигается в вершине $A_2 = (m-1, 0, \dots, 0, 0)$ с целочисленными координатами, и этот минимум есть $(m-1)(\gamma_3 + 2Hb_2) + Hb_2$.

Если последовательность $\xi(k)$ убывает, то аналогично получаем, что максимум достигается в вершине A_2 , а минимум – в вершине A_m .

Если последовательность $\xi(k)$ постоянна, то значения рассматриваемой линейной функции одинаковы во всех вершинах и, значит, эта функция постоянна на данном симплексе. Лемма доказана.

Утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 6 и теоремы 5.

Заметим в заключение, что полученные оценки сверху для чисел $W(\text{Inv}_m)$ дают оценки норм производных обратной функции для любой функции из рассматриваемого класса, соответствующего заданной последовательности мажорант b_m . Оценки снизу, разумеется, могут не выполняться для конкретной функции. Однако в рассматриваемом классе всегда есть функция, у которой для производных обратной функции справедлива полученная оценка снизу, которая несет информацию о “плохих” функциях из заданного класса.

§ 4. Асимптотическое поведение оценок

Для заданной последовательности мажорант $B = \{b_m\}$ рассмотрим функции класса $\Phi(B)$ и получим, исходя из теоремы 6, информацию об асимптотическом поведении последовательности полученных выше оценок $\underline{W}_m(B)$ и $\widetilde{W}_m(B)$. Общая задача заключается в выяснении связи между скоростью роста производных исходной функции и скоростью роста производных обратной функции. В аналитическом случае такие результаты позволяют оценить радиус сходимости ряда Тейлора и получить информацию об области определения обратной функции, что приводит к утверждениям о существовании решений соответствующих уравнений.

Будем говорить, что последовательности a_n и b_n *асимптотически эквивалентны* (обозначаем $a_n \simeq b_n$), если отношения a_n/b_n и b_n/a_n растут субэкспоненциально, т. е. медленнее, чем a^n при любом $a > 1$, и *слабо асимптотически эквивалентны* (обозначаем $a_n \sim b_n$), если отношения a_n/b_n и b_n/a_n оцениваются через некоторую экспоненту.

С технической точки зрения задача заключается в том, чтобы исследовать поведение произведений первых членов числовой последовательности, имеющей вид суммы двух заданных последовательностей. Оказывается, что поведение таких произведений определяется скоростью роста большей из двух заданных последовательностей.

Чтобы выяснить основные закономерности, не усложняя изложение деталями и частными случаями, рассмотрим здесь только специальный класс последовательностей b_k , для которых соответствующие последовательности $\xi(k)$ монотонны.

ТЕОРЕМА 7. Пусть последовательность $\xi(k)$, соответствующая последовательности b_m , монотонна и для отношения k/γ_k существует предел τ , конечный или бесконечный. Тогда в случае возрастающей последовательности $\xi(k)$ имеем

$$\begin{aligned}\underline{W}_m(B) &\simeq (H(\gamma_3 + 2Hb_2))^m m! \sim m!, \\ \widetilde{W}_m(B) &\simeq H^m b_m (1 + \tau H b_2)^m \sim b_m \sim (b_m + m!).\end{aligned}$$

В случае убывающей последовательности $\xi(k)$ имеем

$$\begin{aligned}\underline{W}_m(B) &\simeq (m)!(Hb_2)^m \left(1 + \frac{1}{\tau H b_2}\right)^m \sim m! \sim (b_m + m!), \\ \widetilde{W}_m(B) &\simeq (H(\gamma_3 + 2Hb_2))^m m! \sim m!.\end{aligned}$$

В доказательстве теоремы 7 мы будем использовать следующий простой факт, который сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 7. Если $a_i \rightarrow 1$, то $\prod_{i=1}^m a_i \simeq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. В случае возрастающей последовательности $\xi(k)$ оценка снизу имеет вид

$$\begin{aligned}\underline{W}_m(B) &= H^{m+1}b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2) + Hb_2] \\ &= H^{m+1}(\gamma_3 + 2Hb_2)^{m-2}b_2(m-2)! \prod_{i=2}^{m-1} \left(1 + \frac{Hb_2}{(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2)}\right).\end{aligned}$$

Так как $\frac{Hb_2}{(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2)} \rightarrow 0$, то в силу леммы 7 имеем

$$\prod_{i=2}^{m-1} \left(1 + \frac{Hb_2}{(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2)}\right) \simeq 1.$$

Таким образом,

$$\underline{W}_m(B) \simeq (H(\gamma_3 + 2Hb_2))^m m! \sim m!.$$

Оценка сверху в рассматриваемом случае имеет вид

$$\widetilde{W}_m(B) = H^{m+1}b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [\gamma_{i+1} + (i+1)Hb_2].$$

Как отмечалось выше, последовательность γ_k растет не медленнее, чем k , поэтому отношения k/γ_k ограничены некоторой постоянной и, в частности, $\tau < +\infty$. Так как в этом случае числа γ_{k+1} растут достаточно быстро, преобразуем последнее выражение к виду

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_m(B) &= H^{m+1}b_2 \prod_{i=2}^{m-1} \gamma_{i+1} \prod_{i=2}^{m-1} \left(1 + \frac{i+1}{\gamma_{i+1}} Hb_2\right) \\ &= H^{m+1}b_m(1 + \tau Hb_2)^{m-2} \prod_{i=2}^{m-1} \left(\frac{1}{1 + \tau Hb_2} \left(1 + \frac{i+1}{\gamma_{i+1}} Hb_2\right)\right),\end{aligned}$$

откуда, применяя лемму 7, получаем

$$\widetilde{W}_m(B) \simeq H^m b_m (1 + \tau Hb_2)^m \sim b_m.$$

Поскольку в рассматриваемом случае либо $b_m \sim m!$, либо b_m растет быстрее, чем $m!$, имеем $\widetilde{W}_m(B) \sim (b_m + m!)$.

Если последовательность $\xi(k)$ убывает или постоянна, то оценка сверху задается тем же выражением, что и оценка снизу в предыдущем случае:

$$\widetilde{W}_m(B) = H^{m+1}(\gamma_3 + 2Hb_2)^{m-2}b_2(m-2)! \prod_{i=2}^{m-1} \left(1 + \frac{Hb_2}{(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2)}\right), \quad (27)$$

и имеет ту же асимптотику:

$$\widetilde{W}_m(B) \simeq [H(\gamma_3 + 2Hb_2)]^m m! \sim m!.$$

Но в рассматриваемом случае b_m растет не быстрее $L^m m!$, откуда и в этом случае имеем $\widetilde{W}_m(B) \sim (b_m + m!)$.

Нам осталось рассмотреть оценку снизу в случае убывания $\xi(k)$. Оценка снизу имеет такой же вид, как и оценка сверху в предыдущем случае:

$$\underline{W}_m(B) = H^{m+1}b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [\gamma_{i+1} + (i+1)Hb_2].$$

Но, так как здесь слагаемое $(i+1)Hb_2$ является главным, преобразуем произведение другим способом:

$$\begin{aligned} \underline{W}_m(B) &= H^{m+1}b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [\gamma_{i+1} + (i+1)Hb_2] \\ &= \frac{1}{Hb_2} (m)! (H^2b_2)^m \prod_{i=2}^{m-1} \left(1 + \frac{\gamma_{i+1}}{i+1} \frac{1}{Hb_2} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

В рассматриваемом случае последовательность γ_k растет не быстрее, чем k , поэтому $\tau = \lim_{\gamma_{i+1}} \frac{i-1}{\gamma_{i+1}} > 0$.

Таким образом, в этом случае, еще раз применив лемму 7, имеем

$$\underline{W}_m(B) \simeq (m)! (H^2b_2)^m \left(1 + \frac{1}{\tau Hb_2} \right)^m \sim m!.$$

Теорема доказана.

Качественно утверждения теоремы 7 означают, что оценки сверху $\widetilde{W}_m(B)$ имеют скорость роста, наибольшую из скорости роста последовательности вида $m!L^m$ и скорости роста последовательности b_m . При этом чем быстрее растет последовательность b_m , тем меньше скорость роста этих оценок отличается от скорости роста последовательности b_m . В частности, случай $\tau = 0$ соответствует быстро возрастающим последовательностям b_m , в этом случае в асимптотике пропадает экспоненциально растущий множитель $(1 + \tau Hb_2)^m$. Случай $\tau = \infty$ соответствует медленно растущим или убывающим последовательностям b_m , в этом случае в асимптотике пропадает экспоненциально растущий множитель $(1 + \frac{1}{\tau Hb_2})^m$. Отметим, что даже в случае быстрого убывания производных исходной функции оценки снизу производных обратных функций всегда содержат величину $m!$.

Особый случай представляют производящие функции, соответствующие постоянным последовательностям $\xi(k)$. Для этих функций оценки превращаются в точные равенства, т.е. получаем явные формулы для производных обратной функции и точное выражение для радиуса сходимости ряда Тейлора обратной функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для радиуса R круга сходимости ряда Тейлора функции g , обратной к функции

$$f(z) = C \left((1 - \lambda z)^{-a} - 1 - a\lambda z - \frac{1}{2}a(a+1)\lambda^2 z^2 \right) - \frac{1}{H}z + \frac{1}{2}b_2 z^2,$$

где

$$a = -(\delta + 1), \quad \lambda = \gamma_3 + Hb_2, \quad C = \frac{b_2}{(\delta + 1)\delta(\gamma_3 + Hb_2)^2}, \quad \delta = \frac{Hb_2}{\gamma_3 + Hb_2},$$

имеем явное выражение

$$R = \frac{1}{H(\gamma_3 + 2Hb_2)}.$$

В классе всех производящих функций, соответствующих последовательностям с фиксированными b_2 , b_3 и монотонными $\xi(k)$, производящие функции, соответствующие постоянным последовательностям $\xi(k)$, обладают особыми свойствами: среди всех функций с убывающими последовательностями $\xi(k)$ такие функции имеют наименьший радиус сходимости ряда Тейлора обратной функции, а среди функций с возрастающими последовательностями $\xi(k)$ – имеют наибольший радиус сходимости.

Покажем теперь, что использованную нами связь задачи о производных обратной функции с теорией графов можно применить в обратную сторону, т. е. эта связь может помочь в исследовании чисто графовых перечислительных задач. К таким задачам относится исследование поведения последовательности $\nu_m = \text{card Inv}_m$ – количества деревьев в множестве Inv_m . Напомним, что число ν_m есть количество слагаемых в формуле для производной порядка m обратной функции. Выражение (6) для этого количества достаточно сложно, и непосредственно из него трудно выяснить, например, скорость роста последовательности ν_m .

ТЕОРЕМА 8. *Имеют место следующие оценки:*

$$\frac{1}{6}(m+1)! \leq \text{card Inv}_m \leq 3^{m-2}(m-2)! \prod_{i=2}^{m-1} \left(1 + \frac{1}{3(i-1)}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $f_B(z) = e^z - 1 - 2z$, являющуюся производящей функцией для последовательности $b_k = 1$, $k = 2, 3, \dots$. Как уже отмечалось, для обратной функции g_B выполнено равенство $|g_B^{(m)}(0)| = \text{card Inv}_m$.

Применим к данной функции теорему 6. Соответствующая последовательность $\xi(k) = \frac{2}{k-1}$ убывает. Поэтому выполнено двойное неравенство (21), причем в силу (23) входящие в это неравенство величины в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_m(B) &= H^{m+1}(\gamma_3 + 2Hb_2)^{m-2} b_2 (m-2)! \prod_{i=2}^{m-1} \left(1 + \frac{Hb_2}{(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2)}\right) \\ &= 3^{m-2}(m-2)! \prod_{i=2}^{m-1} \left(1 + \frac{1}{3(i-1)}\right), \\ \underline{W}_m(B) &= H^{m+1} b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [\gamma_{i+1} + (i+1)Hb_2] = \frac{1}{6}(m+1)!. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для радиуса R круга сходимости ряда Тейлора функции g , обратной к функции $f(z) = e^z - 1 - 2z$, имеют место следующие оценки:*

$$1/3 \approx 0.333 \leq R \leq 2 \ln 2 - 1 \approx 0.386.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения теоремы 8 получаем оценки $1/3 \leq R \leq 1$. Покажем, что полученную оценку сверху можно уточнить с помощью элементарного анализа. Действительно, так как $f'(z) = 0$ в точке $z_1 = \ln 2$, точка $w_1 = f(z_1) = 2 \ln 2 - 1$ не принадлежит кругу сходимости ряда Тейлора для обратной функции, т. е. $R \leq 2 \ln 2 - 1 \approx 0.386$. Отсюда получаем информацию о поведении последовательности ν_m :

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\nu_m}{m!} \right)^{1/m} \geq \frac{1}{2 \ln 2 - 1}.$$

Из полученного неравенства следует, что для любого числа $L < \frac{1}{2 \ln 2 - 1} \approx 2.58$ существует такая постоянная C , что для некоторой подпоследовательности m_k выполняется оценка

$$\nu_{m_k} = \text{card Inv}_{m_k} \geq CL^{m_k}(m_k)!.$$

В частности, такая оценка снизу имеет место при $L = 2.58$.

Из следствия 1 можно сделать вывод, что полученная в теореме 8 оценка сверху ближе к истинным значениям, чем оценка снизу. Проведем небольшой численный эксперимент, косвенно подтверждающий, что оценка сверху точнее. Для этого при $m = 3, 4, 5$ приведем численные значения величин $\underline{W}_m$, ν_m и $\widetilde{W}_m$, для которых в теореме 8 доказано двойное неравенство

$$\underline{W}_m \leq \nu_m \leq \widetilde{W}_m.$$

Получаем

$$\begin{aligned} 4 &\leq \nu_3 \leq 4 && \text{при } m = 3, \\ 20 &\leq \nu_4 \leq 26 && \text{при } m = 4, \\ 120 &\leq \nu_5 \leq 249 && \text{при } m = 5. \end{aligned}$$

В связи с рассматриваемым кругом задач естественно возникает вопрос о числе слагаемых в сумме (11), т. е. числе card AInv_m . Этот вопрос является частным случаем классической задачи описания количества целочисленных точек полиэдров. Получим один результат в этом направлении.

ТЕОРЕМА 9. Последовательность $\sigma_m = \text{card AInv}_m$ растет быстрее любой степени m и оценивается сверху выражением

$$\frac{(m-1 + \frac{1}{2}(m+1)(m-2))^{m-1}}{(m-1)!(m-2)!} \cong \frac{e}{\pi} \left(\frac{e^2}{2} \right)^m$$

(здесь знак $\cong$ означает, что отношение величин стремится к 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения оценки сверху воспользуемся следующим результатом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [12]. Для числа σ целочисленных точек симплекса

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n : c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \leq \delta, x_i \geq 0\} \quad (29)$$

справедливы оценки

$$\frac{\delta^n}{n! \prod_{i=1}^n c_i} \leq \sigma \leq \frac{(\delta + \sum_{i=1}^n c_i)^n}{n! \prod_{i=1}^n c_i}.$$

Интересующее нас число σ_m есть число целочисленных точек симплекса

$$\Delta_m = \{x = (x_2, x_3, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1} : x_2 + 2x_3 + \dots + (m-1)x_m = m-1, x_i \geq 0\}.$$

Чтобы применить предложение 2, сведем задачу к рассмотрению симплекса, заданного в виде (29). Рассмотрим симплекс

$$T_{m-2} = \{x = (x_3, x_4, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-2} : 2x_3 + 3x_4 + \dots + (m-1)x_m \leq m-1, x_i \geq 0\}.$$

Очевидно, что точки $x = (x_3, x_4, \dots, x_m)$ и $x' = (m-1 - \sum_{i=3}^m (i-1)x_i, x_3, x_4, \dots, x_m)$ одновременно являются целочисленными и включения $x \in T_{m-2}$ и $x' \in \Delta_m$ равносильны. Поэтому количества целочисленных точек в указанных симплексах одинаковы. Применяя предложение 2, получаем

$$\frac{(m-1)^{m-2}}{(m-1)!(m-2)!} \leq \sigma_m \leq \frac{(m-1 + \frac{1}{2}(m+1)(m-2))^{m-1}}{(m-1)!(m-2)!}. \quad (30)$$

Проанализируем поведение полученных оценок с ростом m . Рассмотрим поведение правой части в оценке (30). Воспользовавшись формулой Стирлинга $n! \cong n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{(m-1 + \frac{1}{2}(m+1)(m-2))^{m-1}}{(m-1)!(m-2)!} &= \frac{\left[\frac{(m-1)(m-2)}{2}\right]^{m-1} \left(1 + \frac{4m-6}{(m-1)(m-2)}\right)^{m-1}}{(m-1)!(m-2)!} \\ &\cong \frac{e^{2m-3} \left[\frac{(m-1)(m-2)}{2}\right]^{m-1} e^4}{(m-1)^{m-1} (m-2)^{m-2} 2\pi \sqrt{(m-1)(m-2)}} \\ &\cong \frac{e^{2m+1} (m-2)}{2^m \pi \sqrt{(m-1)(m-2)}} \cong \frac{e}{\pi} \left(\frac{e^2}{2}\right)^m. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка сверху в (30) мощности множества AInv_m имеет экспоненциальный рост. С помощью формулы Стирлинга легко проверить, что левая часть в оценке (30) стремится к нулю при стремлении m к бесконечности, т. е. эта оценка становится тривиальной при больших m .

Покажем, что последовательность σ_m растет быстрее любого полинома.

Зафиксируем натуральное число r , положим $N = \frac{1}{2}r(r+3) + 1$ и рассмотрим симплекс

$$T_{N-2} = \{x = (x_3, x_4, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-2} : 2x_3 + 3x_4 + \dots + (N-1)x_N \leq N-1, x_i \geq 0\}.$$

В этом симплексе лежит точка $x = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, количество ненулевых координат которой есть r .

Для некоторого натурального $K > 1$ рассмотрим новый симплекс

$$K(T_{N-2}) = \{x = (x_3, x_4, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-2} : 2x_3 + 3x_4 + \dots + (N-1)x_N \leq K(N-1), x_i \geq 0\}.$$

В этом симплексе лежат целочисленные точки вида $x = (k_1, k_2, \dots, k_r, 0, \dots, 0)$, где $0 \leq k_i \leq K$. Число таких точек есть $(K+1)^r$. Но симплекс $K(T_{N-2})$ естественно вкладывается в симплекс T_{m-2} при $m = K(N-1) + 1$. Поэтому

$\sigma_m \geq (K+1)^r = \left(\frac{m-1}{N-1} + 1\right)^r$. Таким образом получаем, что при любом натуральном r существует такая постоянная $C > 0$, что последовательность σ_m растет быстрее, чем Cm^r . Теорема доказана.

Заметим в заключение, что наиболее простая оценка нормы композиционного полинома имеет вид произведения максимальной из норм слагаемых на число слагаемых. Из теоремы 9 следует, что такие оценки будут существенно грубее полученных в теореме 6. Действительно, в типичных примерах $b_m \sim m!$. Так как согласно теореме 9 число слагаемых $\nu_m \sim m!$, при указанных оценках получаем величину порядка $(m!)^2$, не отражающую свойств обратной функции.

§ 5. Оценки производных обратной функции для классических классов

Один из наиболее распространенных способов задания классов бесконечно дифференцируемых функций заключается в следующем.

Пусть задана возрастающая последовательность положительных чисел M_n и задано положительное число L . Множество бесконечно дифференцируемых функций на отрезке, для которых конечна величина

$$\|f\|_L = \sup_{n=0,1,\dots} L^{-n} M_n^{-1} \|f^{(n)}\|,$$

где $\|\cdot\|$ – $\sup$ -норма, является банаховым пространством и называется *пространством Румье*.

Пространством типа Румье будем называть множество $R(L, M_n)$ бесконечно дифференцируемых функций, отображающих окрестность точки 0 банахова пространства X в банахово пространство Y , удовлетворяющих условию $f(0) = 0$ и таких, что при некоторой постоянной C выполнены неравенства

$$\|f^{(n)}(0)\| \leq CL^n M_n.$$

В обозначениях из § 2 это функции класса $\Phi(B)$, где $b_n = CL^n M_n$.

Свойства пространства типа Румье определяются свойствами последовательности M_n . В классических примерах таких пространств имеем $M_n = (n!)^s$, где $s > 0$.

В случае $s > 1$ такие пространства называют *классами Жевре*. При $s = 1$ указанные неравенства выполнены, например, для функций комплексной переменной, ограниченных и аналитических в круге радиуса L . Случаю $s < 1$ соответствуют целые аналитические функции конечного порядка. Напомним, что целая функция комплексной переменной называется *функцией конечного порядка*, если существует положительное число k такое, что неравенство

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq e^{r^k}$$

выполнено для всех достаточно больших значений r .

Получим в явном виде оценки производных обратной функции для классического случая последовательностей вида $M_n = (n!)^s$. Сначала рассмотрим случай $s \leq 1$, соответствующий аналитическим функциям. Обратим внимание на то, что ниже мы рассматриваем функции, отображающие банахово пространство в банахово, а не ограничиваемся случаем скалярных функций.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $0 < s \leq 1$. Если $\|f^{(n)}(0)\| \leq CL^n(n!)^s$ при $n \geq 2$ и $\|(f'(0))^{-1}\| \leq H$, то для производных обратной функции имеют место оценки

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_m(B) &= \frac{\delta}{L} (HL)^m (3^s + 2\delta)^{m-2} \frac{\Gamma(m-\Delta)}{\Gamma(2-\Delta)} \\ &\leq \frac{\delta}{L} (HL)^m (3^s + 2\delta)^{m-2} m^{-\Delta-1} m!,\end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{3^s + \delta}{3^s + 2\delta}, \quad \delta = 2^s CHL,$$

Γ – гамма-функция. В частности, для радиуса сходимости R ряда Тейлора обратной функции имеем оценку

$$R \geq \frac{1}{HL(3^s + 2\delta)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для последовательности $b_n = CL^n(n!)^s$ имеем $\gamma_{m+1} = (m+1)^s L$ (в обозначениях из § 3). Соответствующая последовательность

$$\xi(k) = \frac{(k+1)^s L + Hb_2}{k-1}$$

убывает в силу условия $s \leq 1$. Поэтому при $s \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_m(B) &= H^{m+1} b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2) + Hb_2] \\ &= H^{m+1} b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [i(\gamma_3 + 2Hb_2) - \gamma_3 - Hb_2] \\ &= H^{m+1} (\gamma_3 + 2Hb_2)^{m-2} b_2 (m-1)! \prod_{i=2}^{m-1} \left(1 - \frac{\gamma_3 + Hb_2}{i(\gamma_3 + 2Hb_2)}\right).\end{aligned}$$

Вычислим и исследуем это выражение для рассматриваемого случая. Имеем здесь $b_2 = 2^s CL^2$, $\gamma_3 = 3^s L$, поэтому

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_m(B) &= H^{m+1} (3^s L + 2H2^s CL^2)^{m-2} 2^s CL^2 (m-1)! \\ &\quad \times \prod_{i=2}^{m-1} \left(1 - \frac{3^s L + 2^s HCL^2}{i(3^s L + 2H2^s CL^2)}\right) \\ &= H^{m+1} (3^s L + 2H2^s CL^2)^{m-2} 2^s CL^2 (m-1)! p_m,\end{aligned}$$

где

$$p_m := \prod_{i=2}^{m-1} \left(1 - \frac{\Delta}{i}\right) = \frac{\Gamma(m-\Delta)}{\Gamma(m)\Gamma(2-\Delta)}, \quad \Delta = \frac{3^s + 2^s HCL}{3^s + 2H2^s CL} < 1.$$

Поскольку $p_m < 1$, получаем

$$\widetilde{W}_m(B) \leq H^{m+1} (3^s L + 2H2^s CL^2)^{m-2} 2^s CL^2 (m-1)!.$$

Но для чисел p_m можно получить более точную оценку. Имеем

$$\ln p_m = \sum_{i=2}^{m-1} \ln \left(1 - \frac{\Delta}{i} \right) \leq -\Delta \sum_{i=2}^{m-1} \frac{1}{i}.$$

Используя известное неравенство $\sum_{i=2}^{m-1} \frac{1}{i} \leq \ln m$, получаем $p_m \leq m^{-\Delta}$. Окончательно, в случае последовательности $M_n = (n!)^s$ при $s \leq 1$ имеем оценку

$$\widetilde{W}_m(B) \leq H^{m+1} (3^s L + 2H 2^s C L^2)^{m-2} m^{-\Delta} 2^s C L^2 (m-1)!,$$

откуда получаем требуемое неравенство, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если аналитическая функция f комплексной переменной определена в круге радиуса r , в этом круге выполнено неравенство $|f(z) - f(0)| \leq C$ и $|f'(0)| \neq 0$, то обратная функция определена в открытом круге с центром в точке $f(0)$ и радиусом

$$R = \frac{|f'(0)|^2 r^2}{3r|f'(0)| + 4C}.$$

Отметим, что для аналитических функций полученные оценки производных могут оказаться довольно грубыми, в частности, они не дают точного значения радиуса сходимости ряда Тейлора для обратной функции. Более точные результаты можно получить, непосредственно исследовав соответствующие производящие функции. Фактически это эквивалентно применению метода мажорант подобно тому, как этот метод применяется в [8].

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\|f^{(n)}(0)\| \leq C L^n n!$ при $n \geq 2$ и $\|(f'(0))^{-1}\| \leq H$. Тогда для производных обратной функции имеют место оценки

$$\|g^{(k)}(0)\| \leq |g_B^{(k)}(0)|,$$

где функция g_B задана формулой

$$g_B(w) = \frac{\frac{1}{H} - Lw - \sqrt{\left(Lw - \frac{1}{H}\right)^2 + 4w(CL^2 + \frac{L}{H})}}{2(CL^2 + \frac{L}{H})}. \quad (31)$$

В частности, для радиуса сходимости R ряда Тейлора обратной функции имеем оценку

$$R \geq \frac{2CLH + 1 - 2\sqrt{CL^2 H^2 + H}}{LH}. \quad (32)$$

Полученные оценки оптимальны, в рассматриваемом классе есть функция, для которой эти оценки достигаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производящая функция для рассматриваемого класса есть

$$f_B(z) = -\frac{1}{H}z + \sum_{k=2}^{\infty} C L^k z^k = -\frac{1}{H}z + C \frac{L^2 z^2}{1 - Lz}.$$

Для такой функции обратная может быть найдена в явном виде: обратной в окрестности точки 0 является функция (31). Поэтому согласно теореме 3

для функций f из рассматриваемого класса наилучшей оценкой производных обратных функций является оценка через производные функции g_B .

Для функции g_B нетрудно найти радиус сходимости ряда Тейлора, вычислив расстояние от нуля до точек, в которых функция имеет особенности. Функция g_B имеет особенность в точках, в которых подкоренное выражение

$$\left(Lw - \frac{1}{H}\right)^2 + 4w\left(cL^2 + \frac{L}{H}\right)$$

обращается в нуль. Отсюда получаем (32). Теорема доказана.

Заметим, что вычисление производных по полученной формуле проще, чем вычисления по формуле Лагранжа, здесь нужно вычислять производные одной функции (31), в то время как в формуле Лагранжа при каждом k нужно вычислять производную порядка k от новой функции $\left(\frac{z}{f(z)}\right)^{k+1}$. Однако и здесь нужно проделать определенную работу, чтобы вычислить производную заданного порядка. С этой точки зрения оценки, полученные в теореме 10, могут оказаться предпочтительнее, они имеют простой вид и получены сразу для производных произвольного порядка.

Оценка (32) не совпадает с оценкой из теоремы 10 и в силу оптимальности, точнее оценки из теоремы 10. Например, при $C = L = H = 1$ из (32) получаем оценку $R \geq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17$, а из теоремы 10 – оценку $R \geq 1/7 \approx 0.14$. В этом примере отличие не очень большое.

В связи с применением общих оценок к конкретным классам обратим внимание на следующее обстоятельство. Точность оценок (21) зависит не только от скорости роста последовательности b_m , но и от внутренней структуры этой последовательности: чем ближе соответствующая последовательность $\xi(k)$ вида (18) к постоянной последовательности, тем точнее эти оценки. В частности, полученные оценки производных не являются монотонно зависящими от набора b_m . Может оказаться, что $b_m \leq b'_m$, но выражения для $\widetilde{W}_m$, построенные с помощью b'_m , дают лучшие оценки для производных. Поэтому можно уточнить оценки, решив задачу оптимизации: по заданной последовательности b_m построить последовательность b'_m таким образом, чтобы выполнялось $b_m \leq b'_m$, и при этом чтобы скорость роста величин, входящих в оценки, построенные с помощью b'_m , была минимальной. В общем случае это отдельная задача, которую предполагается рассмотреть в последующих работах.

Отдельно рассмотрим функции из классов Жевре, так как здесь исследование оценок требует других вычислений. Кроме того, для классов Жевре производящие функции не могут быть аналитическими и прямой анализ, аналогичный теореме 11, здесь невозможен. Таким образом, для классов Жевре полученные ниже оценки являются принципиально новыми.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $s > 1$ и для $n \geq 2$ имеют место оценки $\|f^{(n)}(0)\| \leq CL^n(n!)^s$ и $\|(f'(0))^{-1}\| \leq H$. Тогда существует такое натуральное число k_0 , зависящее от чисел C, L, H и s , что для производных обратной функции имеют место следующие оценки:

1) если $3 \leq m < k_0$, то

$$\widetilde{W}_m(B) = \frac{\delta}{L}(HL)^m(3^s + 2\delta)^{m-2} \frac{\Gamma(m - \Delta)}{\Gamma(2 - \Delta)},$$

где $\Delta = \frac{3^s + \delta}{3^s + 2\delta}$, $\delta = 2^s CHL$, Γ – гамма-функция;
 2) если $m \geq k_0$, то

$$\widetilde{W}_m(B) = C_0 \frac{\delta}{L} (HL)^m (k_0!)^{-s} (m!)^s q_m,$$

где

$$C_0 = (3^s + 2\delta)^{k_0-2} \frac{\Gamma(m - k_0)}{\Gamma(2 - k_0)}, \quad q_m = \prod_{i=k_0}^{m-1} \left(1 + \frac{\delta}{(i+1)^{s-1}}\right).$$

При этом для последовательности q_m выполнены оценки:

- а) если $s > 2$, то $q_m < \text{const} = \prod_{i=k_0}^{\infty} \left(1 + \frac{\delta}{(i+1)^{s-1}}\right)$;
 б) если $s = 2$, то $q_m \leq m^\delta$;
 в) если $1 < s < 2$, то $q_m \leq C_1(K)^{(m-1)^{2-s}}$, где $K = K(\delta, s) = e^{\frac{\delta}{2-s}}$
 и $C_1 = \frac{1}{(K)^{k_0^{2-s}}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, для последовательности $b_n = CL^n(n!)^s$ имеем $\gamma_{m+1} = (m+1)^s L$. Но соответствующая последовательность

$$\xi(k) = \frac{(k+1)^s L + 2^s CHL^2}{k-1}$$

не является монотонной, поэтому приходится применять первую часть теоремы 6, где в оценке сверху участвует последовательность $\xi(k)$. Нетрудно проверить, что последовательность $\xi(k)$ может убывать при малых k и что она неограниченно возрастает при больших k . Это следует из того, что функция действительной переменной

$$\xi(x) = \frac{(x+1)^s L + 2^s CHL^2}{x-1}$$

является при $x > 1$ выпуклой вниз (как сумма двух выпуклых функций). Поэтому существует такое натуральное число k_0 , что $\xi(k_0) \geq \xi(2)$, $\xi(k) \leq \xi(2)$ при $k < k_0$, и последовательность $\xi(k)$ возрастает при $k > k_0$. Это число зависит от H , C , L и s . При больших значениях произведения CHL это число может быть достаточно большим, а при малых может оказаться, что $k_0 = 2$, т. е. последовательность $\xi(k)$ возрастает. При $s = 2$ число k_0 легко найти в явном виде: $k_0 = 3.5 + 4CHL$, если число $3.5 + 4CHL$ целое, и k_0 есть целая часть числа $3.5 + 4CHL + 1$ в противном случае.

По определению числа k_0 получаем, что $\widetilde{\xi}(k) = \xi(2)$ при $k < k_0$ и $\widetilde{\xi}(k) = \xi(k)$ при $k \geq k_0$. Таким образом, получаем, что при $m < k_0$

$$\widetilde{W}_m(B) = H^{m+1} b_2 \prod_{i=2}^{m-1} [(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2) + Hb_2],$$

а при $m \geq k_0$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_m(B) &= H^{m+1} b_2 \prod_{i=2}^{k_0-1} [(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2) + Hb_2] \prod_{i=k_0}^{m-1} [\gamma_{i+1} + (i+1)Hb_2] \\ &= C_0 L^{k_0-2} H^{m+1} b_2 \prod_{i=k_0}^{m-1} [\gamma_{i+1} + (i+1)Hb_2], \end{aligned}$$

где

$$C_0 = L^{2-k_0} \prod_{i=2}^{k_0-1} [(i-1)(\gamma_3 + 2Hb_2) + Hb_2].$$

Подставив соответствующие значения для γ_{i+1} и b_2 , получаем

$$\widetilde{W}_m(B) = C_0 L^{k_0-2} H^{m+1} L^2 2^s C \prod_{i=k_0}^{m-1} [(i+1)^s L + (i+1)HL^2 2^s C],$$

$$C_0 = \prod_{i=2}^{k_0-1} [(i-1)(3^s + 2\delta) + \delta] = (3^s + 2\delta)^{k_0-2} \frac{\Gamma(m-k_0)}{\Gamma(2-k_0)}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\widetilde{W}_m(B) = C_0 H^{m+1} \delta L^{m-1} \left(\prod_{i=k_0}^{m-1} (i+1)^s \right) q_m = C_0 \frac{\delta}{L} (HL)^m (k_0!)^{-s} (m!)^s q_m, \quad (33)$$

где

$$q_m = \prod_{i=k_0}^{m-1} \left(1 + \frac{\delta}{(i+1)^{s-1}} \right), \quad \delta = 2^s C H L.$$

Исследуем поведение последовательности q_m . Очевидно, что

$$q_m < \left(1 + \frac{\delta}{(k_0+1)^{s-1}} \right)^{m-k_0}.$$

Однако в действительности рост этой последовательности субэкспоненциальный и оценка может быть уточнена. Прежде всего заметим, что при $s > 2$ бесконечное произведение

$$\prod_{i=k_0}^{\infty} \left(1 + \frac{\delta}{(i+1)^{s-1}} \right)$$

сходится и последовательность q_m оценивается через постоянную – значение этого бесконечного произведения. При $s = 2$ такое произведение рассматривалось выше и для него имеем степенную оценку $q_m \leq m^\delta$.

При $1 < s < 2$ последовательность q_m растет быстрее любой степени m , однако ее рост субэкспоненциальный. Соответствующую оценку сверху можно получить стандартным способом. Имеем

$$\begin{aligned} \ln q_m &= \sum_{i=k_0}^{m-1} \ln \left(1 + \frac{\delta}{(i+1)^{s-1}} \right) \leq \sum_{i=k_0}^{m-1} \frac{\delta}{(i+1)^{s-1}} \\ &\leq \delta \int_{k_0}^{m-1} \frac{1}{x^{s-1}} dx = \frac{\delta}{s-2} ((m-1)^{2-s} - k_0^{2-s}), \end{aligned}$$

откуда

$$q_m \leq C_1(K)^{(m-1)^{2-s}}, \quad K = e^{\frac{\delta}{2-s}}, \quad C_1 = \frac{1}{(K)^{k_0^{2-s}}}.$$

Так как $2-s < 1$, построенная мажоранта растет медленнее любой экспоненты.

Подставляя в (33) полученные оценки величины q_m , получаем утверждение теоремы.

В заключение рассмотрим вопрос о преобразованиях производных исходной и обратной функций и полученных оценок при простейших линейных заменах переменных. Из этих рассмотрений следует, что полученные выше оценки производных обратной функции согласованы с некоторой естественной групповой структурой.

На рассматриваемых пространствах функций естественно действует двухпараметрическая группа G преобразований $T_{\lambda,\mu}: f \rightarrow \hat{f}(x) = \lambda f(\mu x)$, где λ и μ – положительные константы. Изменения производных исходной и обратной функций при таких преобразованиях описываются следующими утверждениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть функция f удовлетворяет условиям

$$\|f^{(n)}(0)\| \leq CL^n M_n \quad \text{при} \quad n \geq 2, \quad \|(f'(0))^{-1}\| \leq H. \quad (34)$$

Тогда:

1) для функции $\hat{f}(x) = \frac{1}{C} f(\frac{x}{L})$ выполнены условия

$$\|\hat{f}^{(n)}(0)\| \leq M_n, \quad \|(\hat{f}'(0))^{-1}\| \leq \tilde{H} := CLH;$$

2) если для функции $\hat{g}$, обратной к функции $\hat{f}$, выполнены оценки вида $\|\hat{g}^{(n)}(0)\| \leq V_n$, то

$$\|g^{(n)}(0)\| \leq \frac{1}{LC^n} V_n.$$

Сформулированное предложение 3 является непосредственным следствием следующей леммы, проверяемой элементарными вычислениями.

ЛЕММА 8. Для производных любого порядка функции $\hat{f}(x) = \lambda f(\mu x)$ выполнены соотношения

$$\hat{f}^{(n)}(0) = \lambda \mu^n f^{(n)}(0), \quad (\hat{f}'(0))^{-1} = \frac{1}{\lambda \mu} (f'(0))^{-1}.$$

Если g – обратная функция к f , то обратная функция $\hat{g}$ к функции $\hat{f}$ имеет вид $\hat{g}(y) = \frac{1}{\mu} g(\frac{y}{\lambda})$ и для ее производных выполнены соотношения

$$\hat{g}^{(n)}(0) = \frac{1}{\mu \lambda^n} g^{(n)}(0).$$

Таким образом, получение оценок (при заданной последовательности M_n) можно свести к случаю $C = L = 1$, при этом в оценках обратной функции постоянные C и L следует заменить на обратные величины и поменять местами. Кроме того, из предложения 3 вытекает, что единственным инвариантом относительно группы преобразований G в классе функций, удовлетворяющих оценкам (34), является величина $\tilde{H} = CLH$.

При получении оценок производных обратной функции происходит огрубление ситуации и в общем случае нет основания считать, что полученные оценки всегда будут преобразовываться при действии указанной группы преобразований по тому же правилу, что и сами производные. По ходу работы в теоремах 2, 3, 10 и 12 были получены разные оценки производных обратной функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Все полученные выше оценки производных обратной функции согласованы с указанной групповой структурой в следующем смысле. Пусть последовательность $\widehat{B}$ получена из последовательности B по правилу $\widehat{H} = \frac{H}{\lambda\mu}$, $\widehat{b}_n = \lambda\mu^n b_n$, соответствующему преобразованию производных при замене переменных. Тогда для построенных выше последовательностей мажорант производных обратной функции имеют место равенства

$$W_m(\widehat{B}) = \frac{1}{\mu\lambda^m} W_m(B), \quad \widetilde{W}_m(\widehat{B}) = \frac{1}{\mu\lambda^m} \widetilde{W}_m(B),$$

показывающие, что при действии группы преобразований мажоранты преобразуются по тому же правилу, что и производные обратной функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сформулированное утверждение для оценки (11). Согласно (11) имеем

$$\begin{aligned} W_m(\widehat{B}) &= \sum_{\alpha \in \text{AInv}_m} \frac{(2\alpha_2 + \dots + m\alpha_m)!}{(2!)^{\alpha_2} \alpha_2! \dots (m!)^{\alpha_m} \alpha_m!} \widehat{H}^{m+|\alpha|} \widehat{b}_2^{\alpha_2} \widehat{b}_3^{\alpha_3} \dots \widehat{b}_m^{\alpha_m} \\ &= \sum_{\alpha \in \text{AInv}_m} \frac{(2\alpha_2 + \dots + m\alpha_m)!}{(2!)^{\alpha_2} \alpha_2! \dots (m!)^{\alpha_m} \alpha_m!} H^{m+|\alpha|} \left(\frac{1}{\lambda\mu} \right)^{m+|\alpha|} \\ &\quad \times b_2^{\alpha_2} b_3^{\alpha_3} \dots b_m^{\alpha_m} \lambda^{|\alpha|} \mu^{2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + m\alpha_m} = \frac{1}{\mu\lambda^m} W_m(B). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь выражение $\widetilde{W}_m$ из оценки (21), в которое входят функции $\varphi_m(\alpha)$, заданные равенством

$$\varphi_m(\alpha) = \varphi_m(\alpha; B) = \sum_{i=2}^m (\gamma_{i+1} + Hb_2) \alpha_i + mHb_2.$$

Поскольку $\widehat{\gamma}_{i+1} = \mu\gamma_{i+1}$, $\widehat{H}\widehat{b}_2 = \mu Hb_2$, имеем $\varphi_m(\alpha; \widehat{B}) = \mu\varphi_m(\alpha; B)$. Поэтому

$$\widetilde{W}_m(\widehat{B}) = \left(\frac{1}{\lambda\mu} \right)^{m+1} \lambda\mu^2 \mu^{m-2} \widetilde{W}_m(B) = \frac{1}{\mu\lambda^m} \widetilde{W}_m(B),$$

что и требовалось доказать.

Аналогично преобразуются оценки и асимптотики, полученные в теоремах 10 и 12.

В теореме 10 в оценки входят выражения, которые преобразуются по требуемому правилу (проверка полностью аналогична предыдущей), и дополнительные множители $p_m(\Delta)$, где число Δ зависит от величин C , L , H . Так как эти величины C , L и H изменяются при рассматриваемых преобразованиях, инвариантные оценки имеем только в том случае, когда число Δ не изменяется при действии группы преобразований G . И это действительно так, поскольку

$$\Delta = \frac{3^s + \delta}{3^s + 2\delta},$$

т. е. величина Δ зависит от δ , которая, в свою очередь, выражается через инвариант $\widehat{H} = CHL$.

В теореме 12 в оценки входят множитель q_m и число C_0 , которые зависят от чисел δ и k_0 . Величина δ не изменяется при преобразованиях из группы G . Инвариантность k_0 следует из того, что последовательность $\xi(k)$, через свойства которой определяется число k_0 , имеет вид

$$\xi(k) = L \frac{(k+1)^s + 2^s \hat{H}}{k-1},$$

и рассматриваемые свойства зависят только от $\hat{H}$.

С точки зрения проведенного группового анализа полученные в теоремах оценки естественно переписать в инвариантном виде, выделив части, зависящие от инварианта $\hat{H}$, и множители, преобразующиеся в соответствии с правилом “перемены местами C и L ”. Это может быть полезно, например, в следующем вопросе. Пусть R – радиус сходимости ряда Тейлора для функции g и $\hat{R}$ – радиус сходимости ряда Тейлора для преобразованной обратной функции $\hat{g}(y) = \frac{1}{\mu} g(\frac{y}{\lambda})$. Тогда $\hat{R} = \lambda R$ и, в частности, $\hat{R}$ не зависит от μ . Эти свойства не видны непосредственно из формулировки теоремы 10, а в инвариантной записи они очевидны.

Для теоремы 10 инвариантная формулировка имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $0 < s \leq 1$. Если $\|f^{(n)}(0)\| \leq CL^n(n!)^s$ при $n \geq 2$ и $\|(f')^{-1}(0)\| \leq H$, то для производных обратной функции имеют место оценки

$$\widetilde{W}_m(B) \leq \frac{1}{LC^m} 2^s \hat{H}^{m+1} (3^s + 2^{s+1} \hat{H})^{m-2} m^{-\Delta-1} m!,$$

где

$$\hat{H} = CLH, \quad \Delta = \frac{3^s + 2^s \hat{H}}{3^s + 2^{s+1} \hat{H}}.$$

В частности, для радиуса сходимости R ряда Тейлора обратной функции имеем оценку $R \geq \frac{C}{\hat{H}(3^s + 2^{s+1} \hat{H})}$.

Список литературы

1. П. П. Забрейко, М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, Я. Б. Рутцкий, В. Я. Стеценко, *Приближенное решение операторных уравнений*, Наука, М., 1969; англ. пер.: М. А. Krasnosel'skij, G. M. Vainikko, P. P. Zabreiko, Ya. B. Rutitskij, V. Ya. Stetsenko, *Approximate solution of operator equations*, Wolters-Noordhoff Series of Monographs and Textbooks on Pure and Applied Mathematics, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.
2. Л. Шварц, *Анализ*, ч. I, II, Мир, М., 1972; пер. с франц.: L. Schwartz, *Analyse mathématique*, vols. I, II, Hermann, Paris, 1967.
3. П. П. Забрейко, Ю. В. Лысенко, “Точные формулы для производных высших порядков обратных функций в банаховых пространствах”, *Докл. НАН Беларуси*, **45:2** (2001), 27–30.
4. П. П. Забрейко, Ю. В. Лысенко, “Явные формулы для производных обратных функций в банаховых пространствах”, *Изв. РАН*, **4:3** (2000), 40–56.
5. Л. Коллатц, *Функциональный анализ и вычислительная математика*, Мир, М., 1969; пер. с нем.: L. Collatz, *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **120**, Springer-Verlag, Berlin, 1964.

6. Э. Гурса, *Курс математического анализа*, ОНТИ, М.–Л., 1936; пер. с франц.: É. Goursat, *Cours d'analyse mathématique. Tome I. Dérivées et différentielles. Integrales définies. Développement en séries. Applications géométriques; Tome II. Théorie des fonctions analytiques. Equations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments du calcul des variations*, Gauthier-Villars, Paris, 1902, 1905.
7. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950; англ. пер. 2-го изд.: A. I. Markushevich, *The theory of analytic functions*, Hindustan, Delhi, 1963.
8. Ш. Эрмит, *Курс анализа*, ОНТИ, Л.–М., 1936.
9. Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
10. А. Картан, *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы*, Мир, М., 1971; пер. с франц.: H. Cartan, *Calcul différentiel*, Collection méthodes, Hermann, Paris, 1967; H. Cartan, *Formes différentielles. Applications élémentaires au calcul des variations et à la théorie des courbes et des surfaces*, Hermann, Paris, 1967.
11. А. М. Островский, *Решение уравнений и систем уравнений*, ИЛ, М., 1963; пер. с англ.: A. M. Ostrowski, *Solution of equations and systems of equations*, Pure and Applied Mathematics, **9**, Academic Press, New York–London, 1960.
12. A. G. Beged-Dov, “Lower and upper bounds for the number of lattice points in a simplex”, *SIAM J. Appl. Math.*, **22**:1 (1972), 106–108.

Ю. В. ЛЫСЕНКО (Yu. V. Lysenko)
Белорусский государственный университет
E-mail: lysenko@tut.by

Поступило в редакцию
21.12.2004
10.05.2007