Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, Поведение решений эллиптических неравенств, нелинейных относительно старших производных, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 1, 17–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/im599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 11:30:36

УДК 517.9

А. А. Коньков

Поведение решений эллиптических неравенств, нелинейных относительно старших производных

Исследуются неотрицательные решения эллиптических неравенств $\operatorname{div} A(x, Du) \geq F(x, u)$ в Ω , где $A: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $F: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – некоторые функции, Ω – неограниченное открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Библиография: 15 наименований.

§ 1. Введение

Пусть Ω – неограниченное открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Мы будем рассматривать неравенства вида

$$\operatorname{div} A(x, Du) \geq F(x, u), \quad (1.1)$$

где $A: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $F: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримые функции, а $D = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ – оператор градиента. При этом будем предполагать выполненными следующие условия эллиптичности:

$$C_1 |\xi|^p \leq \xi A(x, \xi), \quad |A(x, \xi)| \leq C_2 |\xi|^{p-1} \quad (1.2)$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и $p > 1$ – некоторые константы. Будем также считать, что правая часть (1.1) удовлетворяет соотношению

$$F(x, t) \geq \sup_{\substack{|x|/\sigma < r < \sigma|x| \\ t/\theta < \zeta < \theta t}} q(r)g(\zeta) \quad (1.3)$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $t \in (0, \infty)$, где $\sigma > 1$ и $\theta > 1$ – фиксированные вещественные числа (которые, тем не менее, могут быть выбраны произвольным образом), а $q: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – локально ограниченные измеримые функции, причем

$$\inf_K g > 0$$

для любого компакта $K \subset (0, \infty)$.

Пусть $B_r^x = \{y: |y - x| < r\}$ и $S_r^x = \{y: |y - x| = r\}$. Будем для краткости обозначать B_r и S_r вместо B_r^0 и S_r^0 соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 03-51-5007).

Неотрицательная функция $u \in W_{p,\text{loc}}^1(\omega) \cap L_{\infty,\text{loc}}(\omega)$ называется *решением неравенства (1.1)* в ω , где ω – открытое подмножество в Ω , если $A(x, Du) \in L_{p/(p-1),\text{loc}}(\omega)$, $F(x, u) \in L_{p/(p-1),\text{loc}}(\omega)$ и при этом

$$-\int_{\omega} A(x, Du) D\varphi \, dx \geq \int_{\omega} F(x, u) \varphi \, dx$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ [7].

На протяжении всей статьи мы будем считать, что $R_0 > 0$ – некоторое фиксированное вещественное число такое, что $\Omega \cap S_r \neq \emptyset$ для всех $r \in (R_0, \infty)$.

По определению выполнены равенство

$$u|_{\partial\Omega \cap B_R \setminus \overline{B}_{R_0}} = 0, \quad (1.4)$$

где $R_0 < R \leq \infty$, если $\psi u \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ для любой функции $\psi \in C_0^\infty(B_R \setminus \overline{B}_{R_0})$, и равенство

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.5)$$

если $\psi u \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ для любого $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

В случае $\partial\Omega \cap B_R \setminus \overline{B}_{R_0} = \emptyset$ условие (1.4) выполнено для всех $u \in W_{p,\text{loc}}^1(\Omega)$. Аналогично, если $\partial\Omega = \emptyset$, то (1.5) имеет место для любой функции $u \in W_{p,\text{loc}}^1(\Omega)$. Таким образом, когда Ω совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, условия (1.4) и (1.5), очевидно, выполнены для любого $u \in W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что в случае $R = \infty$ выражение (1.4) принимает вид

$$u|_{\partial\Omega \setminus \overline{B}_{R_0}} = 0. \quad (1.6)$$

Положим

$$M(r; u) = \text{ess sup}_{\Omega \cap S_r} u, \quad r > R_0,$$

где ess sup в правой части берется по $(n-1)$ -мерной мере Лебега на сфере S_r , при этом ограничение функции u на S_r понимается в смысле вложения пространства $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega)$ в $L_{p,\text{loc}}(\Omega \cap S_r)$ [11].

Вопросы, которые мы будем рассматривать в настоящем исследовании, ранее изучались в работах [3]–[5], [12], [13], [15]. Нас будут интересовать оценки для решений неравенства (1.1), а также условия на функции q и g , гарантирующие, что (1.1) не имеет нетривиальных глобальных решений (так называемые условия blow-up).

§ 2. Основные результаты

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть

$$\int_{R_0}^{\infty} (\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}} d\zeta = \infty, \quad (2.1)$$

$$\int_1^{\infty} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt = \infty. \quad (2.2)$$

Предположим также, что $u \geq 0$ – решение неравенства (1.1) в $\Omega \setminus \overline{B}_{R_0}$, удовлетворяющее условию (1.6) и такое, что в некоторой окрестности бесконечности $M(\cdot; u)$ – положительная монотонно не убывающая функция. Тогда

$$M(r; u) \geq H^{-1} \left(C \left(\int_{R_0}^r (\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}} d\zeta \right)^{1-\frac{1}{p}} \right) \quad (2.3)$$

для всех достаточно больших r , где

$$H(\zeta) = \int_1^\zeta (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt,$$

H^{-1} – функция, обратная к H , а постоянная $C > 0$ зависит только от $n, p, \sigma, \theta, C_1, C_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если $u \geq 0$ является решением задачи (1.1), (1.5) на всем множестве Ω , то согласно принципу максимума $M(\cdot; u)$ обязана быть неубывающей функцией на интервале (R_0, ∞) .

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть выполнены соотношения (2.1) и (2.2). Тогда для любого нетривиального решения $u \geq 0$ неравенства (1.1) в Ω , удовлетворяющего условию (1.5), в некоторой окрестности бесконечности имеет место оценка (2.3), где постоянная $C > 0$ зависит только от $n, p, \sigma, \theta, C_1, C_2$.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим задачу

$$\operatorname{div} A(x, Du) \geq a(x)u^\lambda, \quad u \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

где $a \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, – неотрицательная функция такая, что почти всюду в окрестности бесконечности

$$a(x) \geq a_0|x|^s, \quad a_0 = \text{const} > 0. \quad (2.5)$$

Предположим сначала, что $\lambda < p - 1$ и $s > -p$. Тогда, воспользовавшись следствием 2.1, для любого нетривиального решения (2.4) получим

$$M(r; u) \geq Cr^{\frac{s+p}{p-\lambda-1}}, \quad (2.6)$$

если r достаточно велико, где постоянная $C > 0$ не зависит от u . Несложно убедиться в точности оценки (2.6). В самом деле, для всех вещественных чисел $1 < p \leq n$ и $r_0 > 0$ формула

$$u(x) = (\max\{|x|, r_0\})^{\frac{s+p}{p-\lambda-1}}$$

определяет решение неравенства

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) \geq a(x)u^\lambda \quad (2.7)$$

в $\mathbb{R}^n$, где $a \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – неотрицательная функция такая, что

$$a(x) \sim |x|^s \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty,$$

т. е. найдутся константы $k_1, k_2 > 0$, для которых $k_1|x|^s \leq a(x) \leq k_2|x|^s$ почти всюду в окрестности бесконечности.

Пусть теперь $\lambda < p - 1$ и $s = -p$. Согласно следствию 2.1 для любого нетривиального решения задачи (2.4) будем иметь

$$M(r; u) \geq C(\ln r)^{\frac{p-1}{p-\lambda-1}}, \quad (2.8)$$

если r достаточно велико, где постоянная $C > 0$ не зависит от u . В случае $1 < p < n$ оценка (2.8) является точной. Действительно, при надлежащем выборе вещественного числа $r_0 > 0$ можно показать, что

$$u(x) = (\ln \max\{|x|, r_0\})^{\frac{p-1}{p-\lambda-1}}$$

является решением неравенства (2.7) в $\mathbb{R}^n$, где неотрицательная функция $a \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет соотношению

$$a(x) \sim |x|^{-p} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

ПРИМЕР 2.2. Пусть $a: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ – локально интегрируемая функция такая, что

$$a(x) \geq a_0|x|^{-p} \ln^s |x|, \quad a_0 = \text{const} > 0, \quad (2.9)$$

для почти всех x из окрестности бесконечности. Предположим также, что $\lambda < p - 1$ и $s > 1 - p$. Тогда, применяя следствие 2.1, для любого нетривиального решения задачи (2.4) получим

$$M(r; u) \geq C(\ln r)^{\frac{s+p-1}{p-\lambda-1}}, \quad (2.10)$$

если r достаточно велико, где постоянная $C > 0$ не зависит от u . В случае $1 < p < n$ можно убедиться в точности (2.10). В самом деле, легко проверить, что

$$u(x) = (\ln \max\{|x|, r_0\})^{\frac{s+p-1}{p-\lambda-1}}$$

при надлежащем выборе вещественного числа $r_0 > 1$ будет решением неравенства (2.7) в $\mathbb{R}^n$, где $a \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – некоторая неотрицательная функция такая, что

$$a(x) \sim |x|^{-p} \ln^s |x| \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

ПРИМЕР 2.3. Рассмотрим задачу

$$\text{div } A(x, Du) \geq a(x)u^{p-1} \ln^\lambda(2+u), \quad u \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.11)$$

где неотрицательная функция $a \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, почти всюду в окрестности бесконечности удовлетворяет условию (2.5), причем $s > -p$ и $\lambda < p$. Используя следствие 2.1, для любого нетривиального решения (2.11) получим

$$M(r; u) \geq e^{Cr^{(s+p)/(p-\lambda)}},$$

если r достаточно велико, где постоянная $C > 0$ не зависит от u . Последняя оценка является точной для всех $p > 1$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть

$$\int_{R_0}^{\infty} (\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}} d\zeta < \infty, \quad (2.12)$$

$$\int_1^{\infty} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt < \infty. \quad (2.13)$$

Предположим также, что u – неотрицательное решение задачи (1.1), (1.6) в $\Omega \setminus \overline{B}_{R_0}$, причем функция $M(\cdot; u)$ монотонно не убывает на интервале (R_0, ∞) . Тогда

$$u(x) \leq G^{-1} \left(C \left(\int_{|x|}^{\infty} (\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}} d\zeta \right)^{1-\frac{1}{p}} \right) \quad (2.14)$$

для почти всех $x \in \Omega \setminus \overline{B}_{R_0}$, где

$$G(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt,$$

G^{-1} – функция, обратная к G , а постоянная $C > 0$ зависит только от $n, p, \sigma, \theta, C_1, C_2$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Предположим, что выполнены соотношения (2.12) и (2.13). Тогда любое неотрицательное решение неравенства (1.1) в Ω , удовлетворяющее условию (1.5), допускает оценку (2.14) для почти всех $x \in \Omega$, где постоянная $C > 0$ зависит только от $n, p, \sigma, \theta, C_1, C_2$.

ПРИМЕР 2.4. Пусть u – решение задачи (2.4), где $a \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – неотрицательная функция такая, что для почти всех x из некоторой окрестности бесконечности справедливо (2.5), причем $\lambda > p - 1$ и $s < -p$. Тогда согласно следствию 2.2 получим

$$u(x) \leq C(1 + |x|)^{\frac{s+p}{p-\lambda-1}} \quad (2.15)$$

почти всюду в $\mathbb{R}^n$, где постоянная $C > 0$ не зависит от u . Точность (2.15) проверяется так же, как и в случае оценки (2.6) из примера 2.1.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть имеют место (2.1) и (2.13). Тогда всякое неотрицательное решение неравенства (1.1) в $\Omega \setminus \overline{B}_{R_0}$, удовлетворяющее условию (1.6) и такое, что функция $M(\cdot; u)$ не убывает на интервале (R_0, ∞) , тривиально (т. е. $u \equiv 0$ почти всюду в $\Omega \setminus \overline{Q}_{R_0}$).

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Предположим, что выполнены соотношения (2.1) и (2.13). Тогда любое неотрицательное решение задачи (1.1), (1.5) в Ω тривиально.

ПРИМЕР 2.5. Допустим, что u – решение задачи (2.4), где $a \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – неотрицательная функция такая, что почти всюду в окрестности бесконечности имеет место (2.5), причем

$$\lambda > p - 1 \quad \text{и} \quad s \geq -p. \quad (2.16)$$

Тогда согласно следствию 2.3 имеем $u \equiv 0$. Условия (2.16) точны для всех $1 < p \leq n$.

В работе [12, теорема 4.1] тривиальность всякого решения (2.4) с правой частью вида (2.5) была доказана в предположении, что $\lambda > p - 1$ и $s > -p$. При этом авторами [12, замечание 4.2] была выдвинута гипотеза, что это утверждение справедливо и в случае $\lambda > p - 1$, $s = -p$.

ПРИМЕР 2.6. Допустим, что неотрицательная функция $a \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ почти всюду в окрестности бесконечности удовлетворяет оценке (2.9). Тогда если

$$\lambda > p - 1 \quad \text{и} \quad s \geq 1 - p, \quad (2.17)$$

то ввиду следствия 2.3 любое решение задачи (2.4) тривиально. Условия (2.17) точны для всех $1 < p < n$.

ПРИМЕР 2.7. Предположим, что u – решение задачи (2.11), где неотрицательная функция $a \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ почти всюду в окрестности бесконечности удовлетворяет соотношению (2.5), и при этом

$$\lambda > p \quad \text{и} \quad s \geq -p. \quad (2.18)$$

Тогда согласно следствию 2.3 имеем $u \equiv 0$. Условия (2.18) точны для всех $p > 1$.

ПРИМЕР 2.8. Пусть для неотрицательной функции $a \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, стоящей в правой части (2.11), почти всюду в окрестности бесконечности справедливо соотношение (2.9). Тогда, применяя следствие 2.3, получим в случае $\lambda > p$ и $s \geq 1 - p$, что любое решение задачи (2.11) тривиально. Этот результат является точным для всех $1 < p < n$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть

$$\int_{R_0}^{\infty} \min\left\{\left(\zeta q(\zeta)\right)^{\frac{1}{p-1}}, q^{\frac{1}{p}}(\zeta)\right\} d\zeta = \infty. \quad (2.19)$$

Предположим также, что $u \geq 0$ – решение неравенства (1.1) в $\Omega \setminus \overline{B}_{R_0}$, удовлетворяющее условию (1.6) и такое, что в некоторой окрестности бесконечности $M(\cdot; u)$ – положительная монотонно неубывающая функция. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_1^{M(r;u)} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt + \int_1^{M(r;u)} g^{-\frac{1}{p-1}}(t) dt \\ & \geq C \int_{R_0}^r \min\left\{\left(\zeta q(\zeta)\right)^{\frac{1}{p-1}}, q^{\frac{1}{p}}(\zeta)\right\} d\zeta \end{aligned} \quad (2.20)$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $C > 0$ зависит только от n , p , σ , θ , C_1 , C_2 .

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть выполнено (2.19). Тогда для любого нетривиального решения $u \geq 0$ неравенства (1.1) в Ω , удовлетворяющего условию (1.5), при всех достаточно больших r имеет место (2.20), где постоянная $C > 0$ зависит только от n , p , σ , θ , C_1 , C_2 .

ПРИМЕР 2.9. Предположим, что u – решение задачи (2.4) из примера 2.1 с критическим показателем степени $\lambda = p - 1$. Рассмотрим сначала случай, когда для неотрицательной функции $a \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ почти всюду в окрестности бесконечности выполнено (2.5). Тогда согласно следствию 2.4 при всех достаточно больших r будем иметь

$$M(r; u) \geq e^{C r^{(s+p)/p}},$$

если $s > -p$, и

$$M(r; u) \geq r^C,$$

если $s = -p$, где постоянная $C > 0$ не зависит от u . Обе эти оценки точны для любого $p > 1$.

Пусть теперь в окрестности бесконечности справедливо соотношение (2.9). Тогда из следствия 2.4 при всех достаточно больших r получим

$$M(r; u) \geq e^{C(\ln r)^{(s+p)/p}},$$

если $s \geq 0$,

$$M(r; u) \geq e^{C(\ln r)^{(s+p-1)/(p-1)}},$$

если $1 - p < s < 0$, и

$$M(r; u) \geq (\ln r)^C,$$

если $s = 1 - p$, где постоянная $C > 0$ не зависит от u . Первая из этих трех оценок точна для всех $p > 1$, оставшиеся – для всех $1 < p < n$.

§ 3. Доказательства

В первую очередь установим справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 3.1. *Существует симметрическая $(n \times n)$ -матрица $\|a_{ij}(x, \xi)\|$ с измеримыми элементами такая, что компоненты вектор-функции $A(x, \xi) = (A_1(x, \xi), \dots, A_n(x, \xi))$, стоящей в левой части неравенства (1.1), могут быть представлены в виде*

$$A_i(x, \xi) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, \xi) |\xi|^{p-2} \xi_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

и при этом

$$\lambda_1 |\zeta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \xi) \zeta_i \zeta_j \leq \lambda_2 |\zeta|^2 \quad (3.1)$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$, где постоянные $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ зависят только от C_1, C_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Если $\xi = 0$, то $A(x, \xi) = 0$, поэтому можно положить

$$a_{ij}(x, 0) = \frac{C_1 + C_2}{2} \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Рассмотрим случай $\xi \neq 0$. Обозначим

$$v_1 = \frac{\xi}{|\xi|}, \quad v_2 = \frac{A(x, \xi)}{|A(x, \xi)|}. \quad (3.2)$$

Ввиду условия (1.2) получим

$$\cos(v_1, v_2) = v_1 v_2 \geq \frac{C_1}{C_2}.$$

Покажем, что найдутся ортонормированные векторы $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^n$, а также вещественные числа $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 &= v_1, \\ \alpha_2 f_1 + \alpha_1 f_2 &= v_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Геометрически этот факт очевиден. Для его строгого доказательства возьмем

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{2b}}, & \alpha_2 &= \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 1}}{2b}}, \\ f_1 &= \frac{\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}, & f_2 &= \frac{\alpha_1 v_2 - \alpha_2 v_1}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$b = \frac{1}{v_1 v_2}.$$

Соотношения (3.3) немедленно следуют из (3.4). Убедимся в том, что векторы f_1 и f_2 ортонормированные.

Имеем

$$f_1 f_2 = \frac{(\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2)(\alpha_1 v_2 - \alpha_2 v_1)}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)^2} = \frac{\frac{\alpha_1^2}{b} + \frac{\alpha_2^2}{b} - 2\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)^2} = 0,$$

так как

$$\alpha_1 \alpha_2 = \frac{1}{2b}, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1. \quad (3.5)$$

Далее,

$$f_1^2 = \frac{(\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2)^2}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)^2} = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{b}}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)^2}.$$

Преобразуя числитель и знаменатель последнего выражения с учетом (3.5), находим

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{b} &= 1 - (2\alpha_1 \alpha_2)^2, \\ (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)^2 &= (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 = (1 - 2\alpha_1 \alpha_2)(1 + 2\alpha_1 \alpha_2), \end{aligned}$$

откуда немедленно вытекает, что $f_1^2 = 1$. Аналогичными рассуждениями не сложно также показать, что $f_2^2 = 1$.

Дополним векторы f_1 и f_2 до ортонормированного базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$ во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданный в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно системе уравнений (3.3) справедливо равенство

$$\mathcal{L}v_1 = v_2. \quad (3.6)$$

Поскольку $\mathcal{L}$ – самосопряженный оператор, то в стандартном ортонормированном базисе $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ он имеет симметрическую матрицу $\|l_{ij}(x, \xi)\|$ с тем же набором собственных значений: α_2/α_1 , α_1/α_2 и 1. Учитывая соотношения (3.2) и (3.6), получим

$$A_i(x, \xi) = \frac{|A(x, \xi)|}{|\xi|} \sum_{j=1}^n l_{ij}(x, \xi) \xi_j.$$

Заметим, что первое из условий (1.2) влечет за собой оценку

$$|\xi| |A(x, \xi)| \geq \xi A(x, \xi) \geq C_1 |\xi|^p.$$

Таким образом,

$$C_1 |\xi|^{p-1} \leq |A(x, \xi)| \leq C_2 |\xi|^{p-1},$$

и для завершения доказательства остается положить

$$a_{ij}(x, \xi) = \frac{|A(x, \xi)|}{|\xi|^{p-1}} l_{ij}(x, \xi).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть u – неотрицательное решение неравенства (1.1) на открытом множестве $\omega \subset \Omega$. Тогда найдутся измеримые функции $h: \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ и $b_{ij} \equiv b_{ji}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\lambda_1^{\frac{p-2}{2}} \leq h(x) \leq \lambda_2^{\frac{p-2}{2}}, \quad \lambda_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda_2 |\xi|^2 \quad (3.7)$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, и при этом

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Du \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \geq F(x, u) \quad (3.8)$$

на множестве ω , где

$$\langle x, \xi \rangle = \left(\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \xi_i \xi_j \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.9)$$

а λ_1 и λ_2 – постоянные из формулы (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 3.1 достаточно взять

$$b_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x, Du), & x \in \omega, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\delta_{ij}/2, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \omega, \end{cases}$$

и

$$h(x) = \frac{|Du|^{p-2}}{\langle x, Du \rangle^{p-2}},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Следствие 3.1 позволяет нам без потери общности ограничиться рассмотрением неравенств вида (3.8) вместо (1.1). Далее будем предполагать, что $h: \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ и $b_{ij} \equiv b_{ji}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримые функции, для которых имеют место соотношения (3.7) и (3.9).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Du \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + f(x, u) \\ & \geq \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Dv \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + f(x, v) \end{aligned} \quad (3.10)$$

на множестве ω , где ω – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, $u, v \in W_{p,\text{loc}}^1(\omega)$ и $f: \omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, если $f(x, u), f(x, v) \in L_{\text{loc},p/(p-1)}(\omega)$, и при этом

$$\begin{aligned} & - \int_{\omega} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Du \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\omega} f(x, u) \varphi dx \\ & \geq - \int_{\omega} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dv \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\omega} f(x, v) \varphi dx \end{aligned} \quad (3.11)$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Предположим, что ω – открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, и пусть $u, v \in W_p^1(\omega)$. Тогда выполнены неравенство

$$u|_{\partial\omega} \leq v|_{\partial\omega}, \quad (3.12)$$

если $\max\{u - v, 0\} \in \mathring{W}_p^1(\omega)$, и равенство $u|_{\partial\omega} = \psi$, где $\psi \in W_p^1(\omega)$, если $u - \psi \in \mathring{W}_p^1(\omega)$.

ЛЕММА 3.2 (принцип максимума). Пусть функции $u, v \in W_p^1(\omega)$ на открытом ограниченном множестве $\omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяют (3.10) и (3.12), где $f: \omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ монотонно не убывает по последнему аргументу. Тогда $u(x) \leq v(x)$ для почти всех $x \in \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\varphi(x) = \max\{u(x) - v(x), 0\}$, согласно (3.11) получим

$$\int_{B_r \cap \omega} h(x) \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \left(\langle x, Du \rangle^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \langle x, Dv \rangle^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \leq 0. \quad (3.13)$$

При этом, очевидно, выполнено

$$\begin{aligned} & \int_{B_r \cap \omega} h(x) \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \left(\langle x, Du \rangle^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \langle x, Dv \rangle^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{B_r \cap \omega} h(x) \left(\frac{\partial \langle x, Dv + tD\varphi \rangle^p}{\partial t} \Big|_{t=1} - \frac{\partial \langle x, Dv + tD\varphi \rangle^p}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{B_r \cap \omega} h(x) \int_0^1 \frac{\partial^2 \langle x, Dv + tD\varphi \rangle^p}{\partial t^2} dt dx. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 \langle x, \xi + t\eta \rangle^p}{\partial t^2} \geq 0 \quad (3.14)$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$, всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ и $t \in (0, 1)$, причем равенство в соотношении (3.14) достигается тогда и только тогда, когда $\eta = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \langle x, \xi + t\eta \rangle^p}{\partial t^2} &= p \langle x, \xi + t\eta \rangle^{p-2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \eta_i \eta_j \\ &\quad + p(p-2) \langle x, \xi + t\eta \rangle^{p-4} \left(\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) (\xi_i + t\eta_i) \eta_j \right)^2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

откуда в случае $p \geq 2$ немедленно следует (3.14). Пусть теперь $1 < p < 2$. Тогда, объединяя (3.15) и неравенство Коши–Буняковского

$$\langle x, \xi + t\eta \rangle^2 \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \eta_i \eta_j \geq \left(\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) (\xi_i + t\eta_i) \eta_j \right)^2,$$

получим

$$\frac{\partial^2 \langle x, \xi + t\eta \rangle^p}{\partial t^2} \geq p(p-1) \langle x, \xi + t\eta \rangle^{p-2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \eta_i \eta_j,$$

и мы снова приходим к (3.14).

Тем самым, из (3.13) можно заключить, что $\varphi \equiv 0$. Доказательство полностью завершено.

ЛЕММА 3.3. Пусть функция $u \in W_p^1(\omega) \cap L_\infty(\omega)$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Du \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \geq 0 \quad (3.16)$$

в области $\omega \subset \mathbb{R}^n$, и при этом $\text{ess sup}_K u = \text{ess sup}_\omega u$, где $K \subset \omega$ – некоторый компакт ненулевой меры. Тогда

$$u(x) = \text{ess sup}_\omega u \quad (3.17)$$

для почти всех $x \in \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через ω_0 множество $x \in \omega$ таких, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{\omega \cap B_\varepsilon^x} u = \operatorname{ess\,sup}_\omega u$$

для любого $\varepsilon > 0$. Несложно увидеть, что ω_0 – непустое подмножество множества ω , замкнутое в топологии, индуцированной на ω из $\mathbb{R}^n$. Ввиду связности ω доказательство будет завершено, если мы покажем, что ω_0 – открытое множество, причем почти всюду в ω_0 имеет место (3.17).

Пусть $y \in \omega_0$; тогда $B_\varepsilon^y \subset \omega$ для всех достаточно малых вещественных чисел $\varepsilon > 0$. Фиксируем произвольное ε с указанным выше свойством. Рассмотрим функцию v , удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Dv \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3.18)$$

в B_ε^y и краевому условию

$$v|_{S_\varepsilon^y} = u. \quad (3.19)$$

Указанная функция v , разумеется, существует и является решением вариационной задачи

$$\int_{B_\varepsilon^y} h(x) \langle x, D\varphi \rangle^p dx \rightarrow \inf,$$

где инфимум берется по всем $\varphi \in W_p^1(B_\varepsilon^y)$, не превосходящим по абсолютной величине правой части выражения (3.17) и таким, что $\varphi - u \in \mathring{W}_p^1(B_\varepsilon^y)$.

Применяя лемму 3.2, получим

$$u(x) \leq v(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_\omega u$$

для почти всех $x \in B_\varepsilon^y$. Тем самым, полагая

$$w(x) = \operatorname{ess\,sup}_\omega u - v(x),$$

будем иметь неотрицательное решение уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) = 0$$

в B_ε^y . Известно [7], что $w \in C(B_\varepsilon^y)$. Поскольку w обращается в нуль во внутренней точке шара B_ε^y , эта функция обязана быть тождественно равной нулю на всем шаре B_ε^y . Действительно, согласно неравенству Харнака [14] множество $x \in B_\varepsilon^y$, для которых $w(x) = 0$, открыто. В то же время оно замкнуто в топологии, индуцированной на B_ε^y из $\mathbb{R}^n$.

Таким образом,

$$v(x) = \operatorname{ess\,sup}_\omega u$$

для всех $x \in B_\varepsilon^y$, откуда, учитывая (3.19), немедленно получим

$$u|_{S_\varepsilon^y} = \operatorname{ess\,sup}_\omega u. \quad (3.20)$$

Соотношение (3.20), очевидно, справедливо для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$, где $\delta > 0$ – достаточно малое вещественное число. Из сказанного следует, что (3.17) должно быть выполнено для почти всех $x \in B_\delta^y$. Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\omega_1, \omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ – открытые множества, на пересечении которых функция $u \in W_{p, \text{loc}}^1(\omega_1 \cap \omega_2)$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Du \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \geq f(x, u), \quad (3.21)$$

где $f: \omega_2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, и краевому условию $u|_{\omega_2 \cap \partial \omega_1} \leq 0$ (последнее означает, что $\psi \max\{u, 0\} \in \overset{\circ}{W}_p^1(\omega_1 \cap \omega_2)$ для всех $\psi \in C_0^\infty(\omega_2)$). Положим

$$u_+(x) = \begin{cases} \max\{u(x), 0\}, & x \in \omega_1 \cap \omega_2, \\ 0, & x \in \omega_2 \setminus \omega_1. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Du_+ \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial u_+}{\partial x_j} \right) \geq f_+(x, u_+)$$

на множестве ω_2 , где

$$f_+(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим монотонно неубывающую функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную тождественно нулю на промежутке $(-\infty, 1/4]$ и единице на промежутке $[3/4, \infty)$. Обозначим $\eta_\varepsilon(t) = \eta(t/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Согласно (3.21) имеем

$$-\int_{\omega_1 \cap \omega_2} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Du \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial (\eta_\varepsilon(u) \varphi)}{\partial x_i} dx \geq \int_{\omega_1 \cap \omega_2} f(x, u) \eta_\varepsilon(u) \varphi dx$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\omega_2)$, откуда немедленно находим

$$\begin{aligned} & - \int_{\omega_1 \cap \omega_2} h(x) \eta_\varepsilon(u) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Du \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ & \geq \int_{\omega_1 \cap \omega_2} h(x) \eta'_\varepsilon(u) \varphi \sum_{i,j=1}^n \langle x, Du \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\ & \quad + \int_{\omega_1 \cap \omega_2} f(x, u) \eta_\varepsilon(u) \varphi dx. \end{aligned}$$

Ввиду (3.7) первый интеграл в правой части приведенного выше неравенства неотрицательный. Тем самым, применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, в пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ получим

$$-\int_{\omega_2} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Du_+ \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial u_+}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \geq \int_{\omega_2} f_+(x, u_+) \varphi dx.$$

Доказательство полностью завершено.

ЛЕММА 3.5. Пусть $u \in W_p^1(\Omega \cap B_R \setminus \overline{B}_{R_0}) \cap L_\infty(\Omega \cap B_R \setminus \overline{B}_{R_0})$ является неотрицательным решением задачи (3.16), (1.4) в $\Omega \cap B_R \setminus \overline{B}_{R_0}$, где $R_0 < R < \infty$. Тогда

$$\max\{M(R_0; u), M(R; u)\} = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega \cap B_R \setminus \overline{B}_{R_0}} u. \quad (3.22)$$

Причем если

$$M(R_1; u) = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega \cap B_R \setminus \overline{B}_{R_0}} u \quad (3.23)$$

для некоторого $R_1 \in (R_0, R)$, то функция u отлична от константы лишь на множестве меры нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим функцию u нулем на $B_R \setminus (\Omega \cup \overline{B}_{R_0})$. Согласно лемме 3.4 для полученной таким образом функции неравенство (3.16) справедливо уже на всем множестве $B_R \setminus \overline{B}_{R_0}$. Взяв, далее, $v(x) = \max\{M(R_0; u), M(R; u)\}$ в лемме 3.2, будем, очевидно, иметь (3.22).

Пусть теперь выполнено (3.23). Тогда

$$\operatorname{ess\,sup}_{\overline{B}_{R_1+\varepsilon} \setminus B_{R_1-\varepsilon}} u = \operatorname{ess\,sup}_{B_R \setminus \overline{B}_{R_0}} u$$

для всех вещественных чисел $\varepsilon > 0$ таких, что $\overline{B}_{R_1+\varepsilon} \setminus B_{R_1-\varepsilon} \subset B_R \setminus \overline{B}_{R_0}$. Доказательство завершается применением леммы 3.3.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Для любого неотрицательного решения неравенства

$$\operatorname{div} A(x, Du) \geq 0$$

в $\Omega \cap B_R \setminus \overline{B}_{R_0}$, $R_0 < R < \infty$, удовлетворяющего условию (1.4), справедливо соотношение (3.22). При этом если для некоторого $R_1 \in (R_0, R)$ имеет место (3.23), то функция u равна константе почти всюду в $\Omega \cap B_R \setminus \overline{B}_{R_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем лемму 3.5 и следствие 3.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Емкостью компакта $K \subset \omega$ относительно открытого множества $\omega \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\operatorname{cap}(K, \omega) = \inf_{\varphi} \int_{\omega} |D\varphi|^p dx,$$

где инфимум в правой части берется по всем $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, тождественно равным единице в окрестности K .

Несложно увидеть [11], что емкость $\operatorname{cap}(K, \omega)$ обладает следующими естественными свойствами.

(i) *Монотонность*. Если $K_1 \subset K_2$ и $\omega_2 \subset \omega_1$, то

$$\operatorname{cap}(K_1, \omega_1) \leq \operatorname{cap}(K_2, \omega_2).$$

(ii) *Полуаддитивность*. Выполнено неравенство

$$\operatorname{cap}(K_1 \cup K_2, \omega) \leq \operatorname{cap}(K_1, \omega) + \operatorname{cap}(K_2, \omega).$$

(iii) *Свойство подобия.* Пусть множества K' и ω' получаются из K и ω гомотетией с коэффициентом $\lambda > 0$, т. е. $K' = \lambda K$, $\omega' = \lambda\omega$. Тогда

$$\text{cap}(K', \omega') = \lambda^{n-p} \text{cap}(K, \omega).$$

Заметим также, что в случае $\omega = \mathbb{R}^n$ и $p = 2$ рассмотренная выше емкость совпадает с хорошо известной винеровской емкостью $\text{cap}(K)$.

ЛЕММА 3.6. Пусть неотрицательная функция $u \in W_p^1(B_r \cap \omega) \cap L_\infty(B_r \cap \omega)$ удовлетворяет неравенству (3.16) в $B_r \cap \omega$ и краевому условию

$$u|_{B_r \cap \partial\omega} = 0,$$

где $r > 0$ – некоторое вещественное число, а ω – открытое подмножество в пространстве $\mathbb{R}^n$ такое, что $B_{r/2} \cap \omega \neq \emptyset$. Тогда

$$\text{ess sup}_{B_r \cap \omega} u - \text{ess sup}_{B_{r/2} \cap \omega} u \geq \alpha r^{p-n} \text{cap}(\overline{B}_{r/2} \setminus \omega, B_r) \text{ess sup}_{B_r \cap \omega} u, \quad (3.24)$$

где постоянная $\alpha > 0$ зависит только от n, p, C_1, C_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что

$$\text{ess sup}_{B_r \cap \omega} u > 0,$$

иначе утверждение леммы становится тривиальным. Можно также считать, что u продолжено нулем на $B_r \setminus \omega$. В этом случае согласно лемме 3.4 неравенство (3.16) выполнено уже на всем шаре B_r .

Рассмотрим функцию $v \in W_p^1(B_r)$ такую, что на множестве $B_r \setminus (\overline{B}_{r/2} \setminus \omega)$ выполнено уравнение (3.18) и при этом

$$v|_{\overline{B}_{r/2} \setminus \omega} = 0, \quad v|_{S_r} = \text{ess sup}_{B_r \cap \omega} u.$$

Учитывая принцип максимума, будем, очевидно, иметь

$$u(x) \leq v(x) \leq \text{ess sup}_{B_r \cap \omega} u \quad (3.25)$$

для почти всех $x \in B_r \setminus (\overline{B}_{r/2} \setminus \omega)$.

Пусть, далее,

$$w(x) = 1 - \frac{1}{\text{ess sup}_{B_r \cap \omega} u} v(x).$$

Следуя работе [10], оценим значение функции w на сфере $S_{3r/4}$. Обозначим

$$\mu = \sup_{S_{3r/4}} w.$$

Имеем $0 < \mu < 1$. В противном случае w на каждой компоненте связности множества $B_r \setminus (\overline{B}_{r/2} \setminus \omega)$ совпадает с константой. Последнее означает тривиальность неравенства (3.24) ввиду того, что $\text{cap}(\overline{B}_{r/2} \setminus \omega, B_r) = 0$.

Возьмем $\omega_0 = \{x \in B_r \setminus (\overline{B}_{r/2} \setminus \omega) : w(x) < \mu\}$. Напоминаем [7], что $w \in C(\overline{B}_r \setminus (\overline{B}_{r/2} \setminus \omega))$, поэтому ω_0 – открытое множество, причем $B_r \setminus \overline{B}_{3r/4} \subset \omega_0$,

иначе из строгого принципа максимума мы снова получили бы, что w – константа.

Тем самым, $K = B_r \setminus \omega_0$ – компакт, а функция $\tilde{w} \in \mathring{W}_p^1(B_r)$, определенная равенством

$$\tilde{w}(x) = \min\{w(x)/\mu, 1\}, \quad (3.26)$$

является неотрицательным решением задачи

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, D\tilde{w} \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in B_r \setminus K, \quad (3.27)$$

$$\tilde{w}|_K = 1, \quad \tilde{w}|_{S_r} = 0. \quad (3.28)$$

Первое условие (3.28), разумеется, следует понимать в обобщенном смысле, т. е. $\psi(\tilde{w} - 1) \in \mathring{W}_p^1(B_r \setminus K)$ для всех $\psi \in C_0^\infty(B_r)$. Ввиду того, что компакт K представляет собой, вообще говоря, негладкое множество, справедливость этого условия для функции $\tilde{w}$ кажется не слишком очевидной. Проведем строгое доказательство этого условия.

Рассмотрим последовательность открытых множеств ω_i , $i = 1, 2, \dots$, с бесконечно гладкой границей такую, что

$$\bigcap_{i=1} \omega_i = \overline{B}_{r/2} \setminus \omega$$

и при этом $\omega_{i+1} \subset \omega_i \Subset B_r$ для любого натурального числа i .

Обозначим через v_i решения уравнения (3.18) в $B_r \setminus \overline{\omega}_i$, удовлетворяющие краевым условиям

$$v_i|_{\overline{\omega}_i} = 0, \quad v_i|_{S_r} = \operatorname{ess\,sup}_{B_r \cap \omega} u.$$

Понятно [7], что $v_i \in C(\overline{B}_r \setminus \omega_i)$, причем согласно принципу максимума выполнено

$$0 \leq v_i(x) \leq v_{i+1}(x) \leq v(x)$$

для всех $x \in \overline{B}_r \setminus \omega_i$, $i = 1, 2, \dots$.

Положим

$$w_i(x) = 1 - \frac{1}{\operatorname{ess\,sup}_{B_r \cap \omega} u} v_i(x), \quad i = 1, 2, \dots$$

Ничто не мешает нам считать, что функции v_i определены нулем на множествах ω_i . Таким образом, $w_i \in C(\overline{B}_r) \cap \mathring{W}_p^1(B_r)$, причем $w_i(x) = 1$ для любого $x \in \omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Заметим также, что

$$w(x) \leq w_{i+1}(x) \leq w_i(x) \leq 1$$

для всех $x \in \overline{B}_r \setminus (\overline{B}_{r/2} \setminus \omega)$, $i = 1, 2, \dots$.

Согласно вариационному принципу, на w_i достигается инфимум функционала

$$J(\varphi) = \int_{B_r} h(x) \langle x, D\varphi \rangle^p dx \quad (3.29)$$

среди всех функций $\varphi \in C_0^\infty(B_r)$, равных тождественно единице в окрестности $\bar{\omega}_i$. Аналогично, на w достигается инфимум функционала (3.29) среди всех функций $\varphi \in C_0^\infty(B_r)$, равных тождественно единице в окрестности $\bar{B}_{r/2} \setminus \omega$.

Из сказанного можно сделать вывод, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} J(w_i) = J(w).$$

Последнее влечет за собой предельное соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} w_i(x) = w(x) \quad (3.30)$$

для почти всех $x \in B_r$ (см., например, [7, гл. 5, § 2]).

Пусть $\tilde{w}_i(x) = \min\{w_i(x)/\mu, 1\}$. Тогда, учитывая (3.26) и (3.30), получим

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{w}_i(x) = \tilde{w}(x) \quad (3.31)$$

для почти всех $x \in B_r$. Несложно увидеть, что $\tilde{w}_i \in C(\bar{B}_r) \cap \mathring{W}_p^1(B_r)$, $i = 1, 2, \dots$. Более того, нормы функций $\tilde{w}_i$ в пространстве $\mathring{W}_p^1(B_r)$ ограничены сверху некоторой величиной, не зависящей от i , и при этом $\tilde{w}_i(x) = 1$ для всех $x \in K$. Докажем, что и в обобщенном смысле

$$\tilde{w}_i|_K = 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

Другими словами, $\psi(\tilde{w}_i - 1) \in \mathring{W}_p^1(B_r \setminus K)$ для любой функции $\psi \in C_0^\infty(B_r)$.

Обозначим

$$\tilde{w}_{i,\varepsilon}(x) = 1 - (1 - \tilde{w}_i(x))\eta_\varepsilon(1 - \tilde{w}_i(x)),$$

где η_ε – функция, определенная в доказательстве леммы 3.4, а $\varepsilon > 0$ – вещественное число, которое в дальнейшем мы будем устремлять к нулю.

Не представляет особого труда убедиться в том, что функция $\tilde{w}_{i,\varepsilon}$ отличается от $\tilde{w}_i$ лишь на множестве $E_{i,\varepsilon} = \{x \in \bar{B}_r : 1 - \varepsilon < \tilde{w}_i(x) < 1\}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}_{i,\varepsilon} - \tilde{w}_i\|_{W_p^1(B_r)} &= \|\tilde{w}_{i,\varepsilon} - \tilde{w}_i\|_{L_p(E_{i,\varepsilon})} \\ &+ \|D\tilde{w}_{i,\varepsilon} - D\tilde{w}_i\|_{L_p(E_{i,\varepsilon})} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Действительно, первое слагаемое в правой части равенства (3.33) стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$, поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{mes } E_{i,\varepsilon} = 0, \quad (3.34)$$

и при этом как w_i , так и $w_{i,\varepsilon}$ не превосходят по модулю единицы почти всюду в B_r . Для второго слагаемого будем иметь

$$\|D\tilde{w}_{i,\varepsilon} - D\tilde{w}_i\|_{L_p(E_{i,\varepsilon})} \leq \|D\tilde{w}_{i,\varepsilon}\|_{L_p(E_{i,\varepsilon})} + \|D\tilde{w}_i\|_{L_p(E_{i,\varepsilon})}.$$

Учитывая (3.34), немедленно получим $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|D\tilde{w}_i\|_{L_p(E_{i,\varepsilon})} = 0$. В тоже время, очевидно,

$$D\tilde{w}_{i,\varepsilon} = \eta_\varepsilon(1 - \tilde{w}_i)D\tilde{w}_i + (1 - \tilde{w}_i)\eta'_\varepsilon(1 - \tilde{w}_i)D\tilde{w}_i,$$

откуда в силу того, что $|(1 - \tilde{w}_i(x))\eta'_\varepsilon(1 - \tilde{w}_i(x))| \leq \|\eta'\|_{C([0,1])}$ для всех $x \in E_{i,\varepsilon}$, в свою очередь, устанавливаем оценку

$$\|D\tilde{w}_{i,\varepsilon}\|_{L_p(E_{i,\varepsilon})} \leq (1 + \|\eta'\|_{C([0,1])}) \|D\tilde{w}_i\|_{L_p(E_{i,\varepsilon})},$$

которая согласно (3.34) влечет за собой следующее соотношение:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|D\tilde{w}_{i,\varepsilon}\|_{L_p(E_{i,\varepsilon})} = 0.$$

Тем самым,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|D\tilde{w}_{i,\varepsilon} - D\tilde{w}_i\|_{L_p(E_{i,\varepsilon})} = 0,$$

что окончательно убеждает нас в справедливости формулы (3.33).

Для завершения доказательства (3.32) осталось заметить, что функция $\tilde{w}_{i,\varepsilon}$ равна единице на открытом множестве $\{x \in B_r : \tilde{w}_i(x) > 1 - \varepsilon/4\}$, содержащем компакт K .

В силу рефлексивности пространства $\mathring{W}_p^1(B_r)$ из последовательности $\tilde{w}_i$, $i = 1, 2, \dots$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо в $\mathring{W}_p^1(B_r)$, сильно в $L_p(B_r)$ и почти всюду на шаре B_r к некоторой функции, равной в обобщенном смысле единице на компакте K . Согласно (3.31) этой функцией является $\tilde{w}$. Таким образом, первое условие (3.28) полностью доказано.

Далее, на $\tilde{w}$ достигается инфимум функционала (3.29) среди всех функций $\varphi \in \mathring{W}_p^1(B_r)$ таких, что $\varphi|_K = 1$, поэтому, учитывая соотношения (3.7), будем иметь

$$\lambda_1^{p-1} \text{cap}(K, B_r) \leq J(\tilde{w}) \leq \lambda_2^{p-1} \text{cap}(K, B_r). \quad (3.35)$$

Фиксируем некоторое $\psi \in C_0^\infty(B_r)$, равное единице в окрестности компакта K . Подставляя разность $\tilde{w} - \psi$ в качестве пробной функции в интегральное тождество для уравнения (3.27), получим

$$J(\tilde{w}) = \int_{B_r \setminus K} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, D\tilde{w} \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx,$$

откуда ввиду (3.35) будем иметь

$$\mu \geq \frac{\lambda_2^{1-p}}{\text{cap}(K, B_r)} \int_{B_r \setminus K} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx. \quad (3.36)$$

Из определения множества ω_0 , очевидно, следует включение $\overline{B}_{r/2} \setminus \omega \subset K$, поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{B_r \setminus K} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{B_r \setminus (\overline{B}_{r/2} \setminus \omega)} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx, \end{aligned}$$

и (3.36) немедленно влечет за собой неравенство

$$\mu \geq \frac{\lambda_2^{1-p}}{\text{cap}(K, B_r)} \int_{B_r \setminus (\overline{B}_{r/2} \setminus \omega)} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx. \quad (3.37)$$

С другой стороны,

$$\int_{B_r \setminus (\overline{B}_{r/2} \setminus \omega)} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial (w - \psi)}{\partial x_i} dx = 0,$$

так как $w - \psi \in \mathring{W}_p^1(B_r \setminus (\overline{B}_{r/2} \setminus \omega))$. Тем самым,

$$J(w) = \int_{B_r \setminus (\overline{B}_{r/2} \setminus \omega)} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx. \quad (3.38)$$

В то же время величина $J(w)$ допускает оценку

$$\lambda_1^{p-1} \text{cap}(\overline{B}_{r/2} \setminus \omega, B_r) \leq J(w) \leq \lambda_2^{p-1} \text{cap}(\overline{B}_{r/2} \setminus \omega, B_r),$$

из которой, учитывая (3.37) и (3.38), получим

$$\mu \geq \frac{\lambda_1^{p-1} \text{cap}(\overline{B}_{r/2} \setminus \omega, B_r)}{\lambda_2^{p-1} \text{cap}(K, B_r)}. \quad (3.39)$$

По свойству монотонности емкости имеем

$$\text{cap}(K, B_r) \leq \text{cap}(\overline{B}_{3r/4}, B_r) = \beta r^{n-p},$$

где постоянная $\beta > 0$ зависит только от n, p , поэтому (3.39) позволяет нам прийти к выводу, что

$$\mu \geq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{p-1} \beta^{-1} r^{p-n} \text{cap}(\overline{B}_{r/2} \setminus \omega, B_r). \quad (3.40)$$

Установим теперь справедливость неравенства

$$\inf_{S_{3r/4}} w \geq \gamma \mu, \quad (3.41)$$

где вещественное число $\gamma > 0$ зависит только от n, p, C_1, C_2 . Для этого построим конечную последовательность шаров $B_\varepsilon^{x_i} \subset B_r \setminus \overline{B}_{r/2}$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центрами в точках $x_i \in S_{3r/4}$, $i = 1, \dots, m$, такую, что $w(x_1) = \mu$, $w(x_m) = \inf_{S_{3r/4}} w$, и при этом $B_{\varepsilon/2}^{x_i} \cap B_{\varepsilon/2}^{x_{i+1}} \neq \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, m-1$. Согласно неравенству Харнака [14] получим

$$\inf_{B_{\varepsilon/2}^{x_i}} w \geq \gamma_0 \sup_{B_{\varepsilon/2}^{x_i}} w, \quad i = 1, \dots, m,$$

где постоянная $\gamma_0 > 0$ зависит только n, p, C_1, C_2 . Для завершения доказательства (3.41) остается заметить, что подходящим выбором радиуса ε и точек x_i

всегда можно добиться того, чтобы общее количество шаров m не превосходило некоторой величины, зависящей лишь от размерности основного пространства n .

Далее, согласно (3.25) будем иметь

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{r/2} \cap \omega} u \leq \operatorname{ess\,sup}_{B_{r/2} \cap \omega} v \leq \operatorname{ess\,sup}_{B_{3r/4} \setminus (\overline{B_{r/2}} \setminus \omega)} v,$$

причем из принципа максимума следует, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{3r/4} \setminus (\overline{B_{r/2}} \setminus \omega)} v = \sup_{S_{3r/4}} v.$$

Тем самым,

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_r \cap \omega} u - \operatorname{ess\,sup}_{B_{r/2} \cap \omega} u \geq \operatorname{ess\,sup}_{B_r \cap \omega} u - \sup_{S_{3r/4}} v = \inf_{S_{3r/4}} w \operatorname{ess\,sup}_{B_r \cap \omega} u,$$

откуда ввиду (3.41) находим

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_r \cap \omega} u - \operatorname{ess\,sup}_{B_{r/2} \cap \omega} u \geq \gamma \mu \operatorname{ess\,sup}_{B_r \cap \omega} u.$$

Наконец, объединяя последнюю оценку с формулой (3.40), завершаем доказательство леммы.

ЛЕММА 3.7. *В предположениях леммы 3.6 для любого вещественного числа $\lambda > 1$ найдется $\varepsilon > 0$, зависящее только от λ, n, p, C_1, C_2 , такое, что условие $\operatorname{mes} B_r \cap \omega < \varepsilon \operatorname{mes} B_r$ влечет за собой неравенство*

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_r \cap \omega} u \geq \lambda \operatorname{ess\,sup}_{B_{r/2} \cap \omega} u. \quad (3.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\delta = 4\varepsilon^{1/n}r$, где $\varepsilon > 0$ будет определено позже. Рассуждая по индукции, покажем, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{r/2+i\delta} \cap \omega} u \geq \mu^i \operatorname{ess\,sup}_{B_{r/2} \cap \omega} u \quad (3.43)$$

для всех целых чисел $0 \leq i \leq r/(2\delta)$ и некоторой константы $\mu > 1$, зависящей лишь от n, p, C_1, C_2 .

База индукции очевидна. Пусть (3.43) выполнено для $i = m - 1$, где $1 \leq m \leq r/(2\delta)$ – целое число. Докажем, что (3.43) имеет место и для $i = m$.

Выберем шар $B_{\delta/2}^y$ с центром в точке $y \in \overline{B_{r/2+(m-1)\delta} \cap \omega}$ такой, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{\delta/2}^y \cap \omega} u = \operatorname{ess\,sup}_{B_{r/2+(m-1)\delta} \cap \omega} u. \quad (3.44)$$

Последнее мы всегда можем сделать, так как компакт $\overline{B_{r/2+(m-1)\delta} \cap \omega}$ допускает конечное покрытие шарами радиуса $\delta/2$ с центрами, принадлежащими этому компакт.

Используя лемму 3.6, получим

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{\delta}^y \cap \omega} u - \operatorname{ess\,sup}_{B_{\delta/2}^y \cap \omega} u \geq \alpha \delta^{p-n} \operatorname{cap}(\overline{B_{\delta/2}^y} \setminus \omega, B_{\delta}^y) \operatorname{ess\,sup}_{B_{\delta}^y \cap \omega} u, \quad (3.45)$$

где постоянная $\alpha > 0$ зависит только от n, p, C_1, C_2 .

В силу неравенства Фридрихса имеем

$$\int_{B_\delta^y} |D\varphi|^p dx \geq \beta \delta^{-p} \int_{B_\delta^y} |\varphi|^p dx \geq \beta \delta^{-p} \text{mes } B_{\delta/2}^y \setminus \omega$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(B_\delta^y)$, тождественно равной единице в окрестности $\overline{B}_{\delta/2}^y \setminus \omega$, где $\beta > 0$ – некоторое вещественное число, зависящее только от n, p .

Таким образом,

$$\text{cap}(\overline{B}_{\delta/2}^y \setminus \omega, B_\delta^y) \geq \beta \delta^{-p} \text{mes } B_{\delta/2}^y \setminus \omega,$$

откуда ввиду (3.45) будем иметь

$$\text{ess sup}_{B_\delta^y \cap \omega} u \geq (1 + \alpha \beta \delta^{-n} \text{mes } B_{\delta/2}^y \setminus \omega) \text{ess sup}_{B_{\delta/2}^y \cap \omega} u. \quad (3.46)$$

Согласно условию леммы $\text{mes } B_r \cap \omega < \varepsilon \text{mes } B_r$. В то же время, очевидно, $\text{mes } B_{\delta/2}^y = 2^n \varepsilon \text{mes } B_r$, поэтому должна быть выполнена оценка

$$\text{mes } B_r \cap \omega < \frac{1}{2} \text{mes } B_{\delta/2}^y,$$

из которой, в частности, следует, что

$$\text{mes } B_{\delta/2}^y \setminus \omega \geq \text{mes } B_{\delta/2}^y - \text{mes } B_r \cap \omega \geq \frac{1}{2} \text{mes } B_{\delta/2}^y. \quad (3.47)$$

Объединяя (3.46) и (3.47), находим

$$\text{ess sup}_{B_\delta^y \cap \omega} u \geq \mu \text{ess sup}_{B_{\delta/2}^y \cap \omega} u,$$

где $\mu = 1 + 2^{-n-1} \alpha \beta \text{mes } B_1$, откуда, учитывая предположение индукции, соотношение (3.44) и тривиальное включение $B_\delta^y \cap \omega \subset B_{r/2+m\delta} \cap \omega$, немедленно устанавливаем справедливость формулы (3.43) для случая $i = m$.

Определим теперь $\varepsilon > 0$ равенством $\varepsilon = 8^{-n}(1 + \log_\mu \lambda)^{-n}$. Тогда, подставляя в формулу (3.43) в качестве i целую часть от деления r на 2δ , немедленно получим (3.42). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.8. Для любой неотрицательной функции $u \in W_p^1(B_r) \cap L_\infty(B_r)$, $r > 0$, и вещественного числа $m > \text{ess sup}_{B_r} u$ найдется неотрицательная функция $\psi \in \overset{\circ}{W}_p^1(B_r) \cap L_\infty(B_r)$ такая, что

$$\psi|_{\overline{B}_{r/2}} = 1, \quad (3.48)$$

и при этом

$$m^{p-1} \geq -\gamma r^{p-n} \int_{B_r} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Du \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx,$$

где постоянная $\gamma > 0$ зависит только от n, p, C_1, C_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$v(x) = \frac{1}{m} \left(\operatorname{ess\,sup}_{B_r} u - u(x) \right).$$

Рассмотрим решение задачи Дирихле

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in B_r \setminus \overline{B}_{r/2},$$

$$w|_{\overline{B}_{r/2}} = 1, \quad w|_{S_r} = 0.$$

Пусть η_ε – функция, введенная в доказательстве леммы 3.4, где $\varepsilon > 0$ выбрано настолько малым, чтобы было выполнено условие

$$\varepsilon < 1 - \operatorname{ess\,sup}_{B_r} v.$$

Положим $\psi = \eta_\varepsilon(w - v)$. Тогда, очевидно, $\psi \in \mathring{W}_p^1(B_r) \cap L_\infty(B_r)$, и при этом справедливо (3.48).

Имеем

$$\int_{B_r} h(x) \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \left(\langle x, Dw \rangle^{p-2} \frac{\partial w}{\partial x_j} - \langle x, Dv \rangle^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx \geq 0. \quad (3.49)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \left(\langle x, Dw \rangle^{p-2} \frac{\partial w}{\partial x_j} - \langle x, Dv \rangle^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ &= \eta'_\varepsilon(w - v) \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \left(\langle x, Dw \rangle^{p-2} \frac{\partial w}{\partial x_j} - \langle x, Dv \rangle^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \frac{\partial(w - v)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\eta'_\varepsilon(w - v)}{p} \left(\frac{\partial \langle x, Dv + tD(w - v) \rangle^p}{\partial t} \Big|_{t=1} - \frac{\partial \langle x, Dv + tD(w - v) \rangle^p}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \\ &= \frac{\eta'_\varepsilon(w - v)}{p} \int_0^1 \frac{\partial^2 \langle x, Dv + tD(w - v) \rangle^p}{\partial t^2} dt \geq 0 \end{aligned}$$

в силу соотношения (3.14) и монотонности η_ε .

Несложно увидеть, что $w - \psi \in \mathring{W}_p^1(B_r \setminus \overline{B}_{r/2})$, поэтому

$$\int_{B_r \setminus \overline{B}_{r/2}} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial(w - \psi)}{\partial x_i} dx = 0,$$

или, другими словами,

$$J(w) = \int_{B_r} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx,$$

где функционал J определен с помощью (3.29). Тем самым, учитывая (3.49), получим

$$J(w) \geq \int_{B_r} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dv \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx. \quad (3.50)$$

Согласно вариационному принципу на w достигается инфимум функционала (3.29) среди всех функций $\varphi \in \overset{\circ}{W}_p^1(B_r)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi|_{\overline{B}_{r/2}} = 1.$$

Таким образом, соотношения (3.7) влекут за собой оценку

$$\lambda_1^{p-1} \text{cap}(\overline{B}_{r/2}, B_r) \leq J(w) \leq \lambda_2^{p-1} \text{cap}(\overline{B}_{r/2}, B_r),$$

объединяя которую с неравенством (3.50), будем иметь

$$\lambda_2^{p-1} \text{cap}(\overline{B}_{r/2}, B_r) \geq \int_{B_r} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dv \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что $\text{cap}(\overline{B}_{r/2}, B_r) = cr^{n-p}$, где постоянная $c > 0$ зависит только от n, p .

Утверждения, аналогичные леммам 3.6 и 3.7, принято называть леммами о возрастании [8], [9], в то время как лемма 3.8 по существу является разновидностью теоремы Гервера–Ландиса [1], [2], [9]. Преимущество леммы 3.8 перед классической теоремой Гервера–Ландиса состоит в том, что мы не налагаем никаких требований относительно гладкости функции v и коэффициентов дифференциального оператора.

Леммы 3.6–3.8, разумеется, остаются в силе, если в их условиях шар B_r с центром в нуле заменить на шар B_r^y с центром в произвольной точке $y \in \mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 3.9. Пусть $u \geq 0$ – решение задачи (3.8), (1.4) в $\Omega \cap B_R \setminus \overline{B}_{R_0}$ такое, что $M(\cdot; u)$ – неубывающая функция на промежутке (R_0, R) , и при этом $\delta M(r_2; u) \leq M(r_1; u)$ для некоторых вещественных чисел $R_0 < r_1 < r_2 < R$ и $0 < \delta < 1$. Тогда

$$(M(r_2; u) - M(r_1; u))^{p-1} \geq \mu(r_2 - r_1)^p \underset{x \in \Omega \cap B_{r_2} \setminus \overline{B}_{r_1}}{\text{ess inf}} \inf_{\xi \in [\delta M(r_1; u), M(r_2; u)]} F(x, \xi), \quad (3.51)$$

где постоянная $\mu > 0$ зависит только от n, p, C_1, C_2, δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать без ограничения общности, что функция $M(\cdot; u)$ монотонно возрастает на отрезке $[r_1, r_2]$. В противном случае согласно лемме 3.5 правая часть (3.51) равна нулю и лемма 3.9 становится тривиальной.

Обозначим $r = (r_1 + r_2)/2$,

$$c = \underset{x \in \Omega \cap B_{r_2} \setminus \overline{B}_{r_1}}{\text{ess inf}} \inf_{\xi \in [\delta M(r_1; u), M(r_2; u)]} F(x, \xi).$$

Рассмотрим сначала случай

$$M(r_2; u) < (2 - \delta)M(r; u). \quad (3.52)$$

Положим $\Gamma = \{x \in \Omega \cap B_{r_2} \setminus \overline{B}_{r_1} : u(x) > 2M(r; u) - M(r_2; u)\}$ и

$$v(x) = \begin{cases} u(x) - 2M(r; u) + M(r_2; u), & x \in \Gamma, \\ 0, & x \in B_{r_2} \setminus (\overline{B}_{r_1} \cup \Gamma). \end{cases}$$

Учитывая лемму 3.4, будем иметь

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Dv \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \geq F(x, u) \chi_{(0, \infty)}(v)$$

в $B_{r_2} \setminus \overline{B}_{r_1}$, где $\chi_{(0, \infty)}$ – характеристическая функция интервала $(0, \infty)$. При этом, очевидно,

$$M(r; v) = M(r_2; u) - M(r; u), \quad M(r_2; v) = 2(M(r_2; u) - M(r; u)).$$

Ввиду условия (3.52) получим $u(x) > \delta M(r; u) \geq \delta M(r_1; u)$ для всех $x \in \Gamma$. Тем самым,

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Dv \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \geq c\eta_\varepsilon(v) \quad (3.53)$$

в $B_{r_2} \setminus \overline{B}_{r_1}$, где η_ε – функция, введенная в доказательстве леммы 3.4, причем вещественное число $\varepsilon > 0$ мы выберем таким образом, чтобы было выполнено неравенство

$$\varepsilon < \frac{1}{2}(M(r_2; u) - M(r; u)). \quad (3.54)$$

Обозначим, далее, через w решение краевой задачи

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) = c\eta_\varepsilon(w), \quad x \in B_{r_2} \setminus \overline{B}_{r_1}, \quad (3.55)$$

$$w|_{S_{r_1}} = M(r_1; v), \quad w|_{S_{r_2}} = M(r_2; v). \quad (3.56)$$

Как следует из [7, гл. 5, теорема 2.1], указанное выше решение существует. На нем достигается инфимум функционала

$$I(\varphi) = \int_{B_{r_2} \setminus \overline{B}_{r_1}} L(x, \varphi, D\varphi) dx$$

среди всех функций $\varphi \in W_p^1(B_{r_2} \setminus \overline{B}_{r_1})$ таких, что

$$\varphi|_{S_{r_1}} = M(r_1; v), \quad \varphi|_{S_{r_2}} = M(r_2; v),$$

где

$$L(x, t, \xi) = \frac{h(x) \langle x, \xi \rangle^p}{p} + c \int_{-\infty}^t \eta_\varepsilon(\zeta) d\zeta.$$

Известно также, что $w \in C(\overline{B}_{r_2} \setminus B_{r_1})$.

Из леммы 3.2 вытекает оценка

$$v(x) \leq w(x) \leq 2(M(r_2; u) - M(r; u)) \quad (3.57)$$

для почти всех $x \in B_{r_2} \setminus \overline{B}_{r_1}$, откуда, в частности, находим

$$M(r; w) \geq M(r_2; u) - M(r; u). \quad (3.58)$$

Рассмотрим шар $B_{(r_2-r_1)/2}^y$ с центром в точке $y \in S_r$, для которой $w(y) = M(r; w)$. По лемме 3.8 найдется функция $\psi \in \mathring{W}_p^1(B_{(r_2-r_1)/2}^y) \cap L_\infty(B_{(r_2-r_1)/2}^y)$ такая, что

$$\psi|_{\overline{B}_{(r_2-r_1)/4}^y} = 1, \quad (3.59)$$

$$\sup_{B_{(r_2-r_1)/2}^y} w^{p-1} \geq -\alpha(r_2 - r_1)^{p-n} \int_{B_{(r_2-r_1)/2}^y} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx,$$

где $\alpha > 0$ – константа, зависящая только от n, p, C_1, C_2 . При этом согласно уравнению (3.55)

$$-\int_{B_{(r_2-r_1)/2}^y} h(x) \sum_{i,j=1}^n \langle x, Dw \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = c \int_{B_{(r_2-r_1)/2}^y} \eta_\varepsilon(w) \psi dx.$$

В то же время, ввиду неравенства (3.57) имеем

$$2^{p-1}(M(r_2; u) - M(r; u))^{p-1} \geq \sup_{B_{(r_2-r_1)/2}^y} w^{p-1}. \quad (3.60)$$

Тем самым, должна быть выполнена оценка

$$(M(r_2; u) - M(r; u))^{p-1} \geq \beta c(r_2 - r_1)^{p-n} \int_{B_{(r_2-r_1)/2}^y} \eta_\varepsilon(w) \psi dx,$$

где постоянная $\beta > 0$ зависит только от n, p, C_1, C_2 , откуда, учитывая условие (3.59), приходим к выводу, что

$$(M(r_2; u) - M(r; u))^{p-1} \geq \beta c(r_2 - r_1)^{p-n} \text{mes } \Gamma_\varepsilon, \quad (3.61)$$

где $\Gamma_\varepsilon = \{x \in B_{(r_2-r_1)/4}^y : w(x) > \varepsilon\}$.

С другой стороны, существует вещественное число $\nu > 0$, зависящее только от n, p, C_1, C_2 , для которого

$$\text{mes } \Gamma_\varepsilon > \nu(r_2 - r_1)^n. \quad (3.62)$$

Действительно, функция $w_\varepsilon = w - \varepsilon$ является неотрицательным решением задачи

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \langle x, Dw_\varepsilon \rangle^{p-2} b_{ij}(x) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j} \right) \geq 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

$$w_\varepsilon|_{B_{(r_2-r_1)/4}^y \cap \partial \Gamma_\varepsilon} = 0.$$

Причем в силу соотношений (3.54), (3.57) и (3.58) справедливо неравенство

$$4 \sup_{B_{(r_2-r_1)/8}^y \cap \Gamma_\varepsilon} w_\varepsilon \geq \sup_{\Gamma_\varepsilon} w_\varepsilon,$$

поэтому (3.62) немедленно следует из леммы 3.7.

Наконец, объединяя (3.61) и (3.62), будем иметь

$$(M(r_2; u) - M(r; u))^{p-1} \geq \mu c(r_2 - r_1)^p, \quad (3.63)$$

где $\mu = \beta\nu$, откуда ввиду монотонности функции $M(\cdot; u)$, очевидно, вытекает (3.51).

Пусть теперь

$$M(r_2; u) \geq (2 - \delta)M(r; u). \quad (3.64)$$

Тогда, полагая $\Gamma = \{x \in \Omega \cap B_{r_2} \setminus \overline{B}_{r_1} : u(x) > \delta M(r; u)\}$ и

$$v(x) = \begin{cases} u(x) - \delta M(r; u), & x \in \Gamma, \\ 0, & x \in B_{r_2} \setminus (\overline{B}_{r_1} \cup \Gamma), \end{cases}$$

мы снова получим неотрицательное решение (3.53) в области $B_{r_2} \setminus \overline{B}_{r_1}$ такое, что

$$M(r; v) = (1 - \delta)M(r; u), \quad M(r_2; v) = M(r_2; u) - \delta M(r; u). \quad (3.65)$$

При этом вещественное число $\varepsilon > 0$ на этот раз выберем, исходя из соотношения

$$\varepsilon < \frac{1 - \delta}{2} M(r; u). \quad (3.66)$$

По лемме 3.2 для решения w задачи (3.55), (3.56) будем иметь

$$v(x) \leq w(x) \leq M(r_2; u) - \delta M(r; u)$$

почти всюду в $B_{r_2} \setminus \overline{B}_{r_1}$, откуда согласно (3.66), неравенству

$$\delta M(r_2; u) \leq M(r_1; u) < M(r; u) \quad (3.67)$$

и первому условию в (3.65) находим

$$\frac{2(1 + \delta)}{\delta} \sup_{B_{(r_2-r_1)/8}^y \cap \Gamma_\varepsilon} w_\varepsilon \geq \sup_{\Gamma_\varepsilon} w_\varepsilon, \quad (3.68)$$

где, как и выше, $w_\varepsilon = w - \varepsilon$, $\Gamma_\varepsilon = \{x \in B_{(r_2-r_1)/4}^y : w(x) > \varepsilon\}$, а точка $y \in S_r$ выбрана таким образом, чтобы $w(y) = M(r; w)$.

Ввиду леммы 3.7 соотношение (3.68) влечет за собой (3.62) где постоянная $\nu > 0$ зависит только от n, p, C_1, C_2, δ .

Объединяя, далее, (3.64) и (3.67), получим

$$M(r_2; u) - M(r; u) \geq \delta(1 - \delta)M(r_2; u).$$

С другой стороны, из условия (3.56) несложно заключить, что

$$\sup_{B_{r_2} \setminus \bar{B}_{r_1}} w = M(r_2; v) \leq M(r_2; u),$$

поэтому

$$(M(r_2; u) - M(r; u))^{p-1} \geq \delta^{p-1} (1 - \delta)^{p-1} \sup_{B_{(r_2-r_1)/2}^y} w^{p-1}. \quad (3.69)$$

Таким образом, дословно повторяя приведенные выше рассуждения с заменой неравенства (3.60) на (3.69), мы опять приходим к оценке (3.63), где постоянная $\mu > 0$ зависит лишь от n, p, C_1, C_2, δ . Лемма полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $u \geq 0$ – решение задачи (1.1), (1.4) в $\Omega \cap B_R \setminus \bar{B}_{R_0}$ такое, что $M(\cdot; u)$ – неубывающая функция на промежутке (R_0, R) и для некоторых вещественных чисел $R_0 < r_1 < r_2 < R$ и $0 < \delta < 1$ справедливо неравенство $\delta M(r_2; u) \leq M(r_1; u)$. Тогда $M(\cdot; u)$ удовлетворяет оценке (3.51), где постоянная $\mu > 0$ зависит только от n, p, C_1, C_2, δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем лемму 3.9 и следствие 3.1.

Напоминаем, что в соответствии с договоренностью, принятой в начале статьи, $q: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ являются локальными ограниченными измеримыми функциями, для которых имеет место соотношение (1.3), где $\sigma > 1$ и $\theta > 1$ – фиксированные вещественные числа.

Обозначим $\lambda = \sqrt{\theta}$. Доказательства результатов из § 2 опираются на теоремы 3.1 и 3.2, сформулированные ниже.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $f: (R_0, R) \rightarrow [0, \infty)$ – монотонно неубывающая функция, причем

$$(f(r_2) - f(r_1))^{p-1} \geq \mu(r_2 - r_1)^p \sup_{\substack{r \in (r_2/\sigma, \sigma r_1) \\ \zeta \in (f(r_2)/\lambda, \lambda f(r_1))}} q(r)g(\zeta)$$

для всех $R_0 < r_1 < r_2 < R$ таких, что $\sigma r_1 \geq r_2$ и $\lambda f(r_1) \geq f(r_2)$, где $\mu > 0$ – некоторая константа. Тогда

$$\int_{f_1}^{f_2} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt \geq C \left(\int_{r_1}^{r_2} (\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}} d\zeta \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

для всех вещественных чисел r_1, r_2, f_1, f_2 , удовлетворяющих неравенствам $R_0 < r_1 < r_2 < R$, $0 < f_1 \leq f(r_1) \leq f(r_2) \leq f_2$, $\sigma r_1 \leq r_2$ и $\lambda f_1 \leq f_2$, где постоянная $C > 0$ зависит только от p, σ, λ, μ .

ТЕОРЕМА 3.2. В предположениях теоремы 3.1

$$\int_{f(r_1)}^{f(r_2)} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt + \int_{f(r_1)}^{f(r_2)} g^{-\frac{1}{p-1}}(t) dt \geq C \int_{r_1}^{r_2} \min\{(\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}}, q^{\frac{1}{p}}(\zeta)\} d\zeta$$

для всех $R_0 < r_1 < r_2 < R$ таких, что $\sigma r_1 \leq r_2$ и $f(r_1) > 0$, где постоянная $C > 0$ зависит только от p, σ, λ, μ .

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 по существу содержатся в работе [6]. В § 4 мы получим теоремы 3.1 и 3.2 из более общих результатов, представляющих ценность для ряда приложений в математической физике и качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $u \geq 0$ – решение задачи (1.1), (1.4) в $\Omega \cap Q_R \setminus \bar{Q}_{R_0}$, при этом $M(\cdot; u)$ – монотонно неубывающая функция на интервале (R_0, R) . Тогда

$$\int_{M_1}^{M_2} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt \geq C \left(\int_{r_1}^{r_2} (\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}} d\zeta \right)^{1-\frac{1}{p}} \quad (3.70)$$

для всех вещественных чисел r_1, r_2, M_1, M_2 таких, что $R_0 < r_1 < r_2 < R$, $0 < M_1 \leq M(r_1; u) \leq M(r_2; u) \leq M_2$, $\sigma r_1 \leq r_2$ и $\lambda M_1 \leq M_2$, где постоянная $C > 0$ зависит только от $n, p, \sigma, \lambda, C_1, C_2$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. В предположениях следствия 3.4

$$\begin{aligned} & \int_{M(r_1; u)}^{M(r_2; u)} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt + \int_{M(r_1; u)}^{M(r_2; u)} g^{-\frac{1}{p-1}}(t) dt \\ & \geq C \int_{r_1}^{r_2} \min\{(\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}}, q^{\frac{1}{p}}(\zeta)\} d\zeta \end{aligned}$$

для всех $R_0 < r_1 < r_2 < R$ таких, что $\sigma r_1 \leq r_2$ и $M(r_1; u) > 0$, где постоянная $C > 0$ зависит только от $n, p, \sigma, \lambda, C_1, C_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 3.9, в которой надо взять $\delta = 1/\lambda$, ввиду соотношения (1.3) получим

$$(M(r_2; u) - M(r_1; u))^{p-1} \geq \mu(r_2 - r_1)^p \sup_{\substack{r \in (r_2/\sigma, \sigma r_1) \\ \zeta \in (M(r_2; u)/\lambda, \lambda M(r_1; u))}} q(r)g(\zeta)$$

для всех $R_0 < r_1 < r_2 < R$ таких, что $\sigma r_1 \geq r_2$ и $\lambda M(r_1; u) \geq M(r_2; u)$, где $\mu > 0$ – константа из неравенства (3.51). Таким образом, следствие 3.4 немедленно вытекает из теоремы 3.1, а следствие 3.5 – из теоремы 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Найдется вещественное число $r_1 > R_0$, для которого $M(r_1; u) > 0$. Согласно следствию 3.4 имеет место предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r; u) = \infty,$$

так как в противном случае мы приходим к противоречию с условием (2.1). Тем самым, следствие 3.4 приводит к оценке

$$\int_{M(r_1; u)}^{M(r; u)} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt \geq C \left(\int_{r_1}^r (\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}} d\zeta \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $C > 0$ зависит только от $n, p, \sigma, \theta, C_1, C_2$.

С другой стороны, используя (2.1) и (2.2), получим

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^r (\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}} d\zeta &\geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^r (\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}} d\zeta, \\ \int_1^{M(r;u)} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt &\geq \frac{1}{2} \int_{M(r_1;u)}^{M(r;u)} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt \end{aligned}$$

для всех r из некоторой окрестности бесконечности.

Для завершения доказательства остается объединить три последних неравенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Пусть $r_1 = \sup\{r \in (R_0, \infty) : M(r; u) = 0\}$, если $\{r \in (R_0, \infty) : M(r; u) = 0\} \neq \emptyset$, и $r_1 = R_0$ в противном случае. На множестве $\Omega \cap B_{r_1} \setminus \bar{B}_{R_0}$ оценка (2.14) тривиальна, так как $u(x) = 0$ для почти всех $x \in \Omega \cap B_{r_1} \setminus \bar{B}_{R_0}$.

Устремляя, далее, в следствии 3.4 вещественные числа M_2 и r_2 к бесконечности, находим

$$\int_{M(r;u)}^{\infty} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt \geq C \left(\int_r^{\infty} (\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}} d\zeta \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

для всех $r > r_1$, откуда, в свою очередь, вытекает справедливость (2.14) для почти всех $x \in S_r$ по $(n-1)$ -мерной мере Лебега на сфере S_r . Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Рассуждая от противного, допустим, что задача (1.1), (1.6) имеет нетривиальное решение. Тогда, очевидно, существует $r_1 > R_0$ такое, что $M(r_1; u) > 0$. Тем самым, устремляя M_2 и r_2 к бесконечности в формуле (3.70), немедленно приходим к противоречию с условиями (2.1) и (2.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Как и выше, рассмотрим вещественное число $r_1 > R_0$ такое, что $M(r_1; u) > 0$.

Согласно (2.19) имеем

$$\int_{r_1}^r \min\{(\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}}, q^{\frac{1}{p}}(\zeta)\} d\zeta \geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^r \min\{(\zeta q(\zeta))^{\frac{1}{p-1}}, q^{\frac{1}{p}}(\zeta)\} d\zeta \quad (3.71)$$

для всех достаточно больших r . То же условие (2.19) ввиду следствия 3.5 влечет соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{M(r_1;u)}^{M(r;u)} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt + \int_{M(r_1;u)}^{M(r;u)} g^{-\frac{1}{p-1}}(t) dt \right) = \infty,$$

поэтому

$$\begin{aligned} &\int_1^{M(r;u)} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt + \int_1^{M(r;u)} g^{-\frac{1}{p-1}}(t) dt \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\int_{M(r_1;u)}^{M(r;u)} (g(t)t)^{-\frac{1}{p}} dt + \int_{M(r_1;u)}^{M(r;u)} g^{-\frac{1}{p-1}}(t) dt \right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

для любого r из окрестности бесконечности.

Наконец, объединяя формулы (3.71), (3.72) с неравенством следствия 3.5, завершаем доказательство теоремы.

§ 4. О некоторых оценках для монотонных функций

Предположим, что $f: (R_0, R) \rightarrow [0, \infty)$ – монотонно не убывающая функция, а $\varkappa > 1$ и $\lambda > 1$ – произвольные константы, фиксированные в настоящем параграфе.

Пусть $\mathcal{P}_{f,\varkappa,\lambda}$ – множество упорядоченных наборов из четырех вещественных чисел (r_1, r_2, f_1, f_2) таких, что $R_0 < r_1 < r_2 < R$, $f_1 \in (0, f(r_1 + 0)]$, $f_2 \in [f(r_2 - 0), \infty)$ и при этом выполнено хотя бы одно из приведенных ниже двух условий:

- (i) $\sqrt{\varkappa} r_1 = r_2$ и $\sqrt{\lambda} f_1 \geq f_2$;
- (ii) $\sqrt{\varkappa} r_1 \geq r_2$ и $\sqrt{\lambda} f_1 = f_2$.

Допустим, далее, что $\mathcal{M}$ – конечное подмножество промежутка $[1, \infty)$, а $\varphi_m: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и $\psi_m: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – семейства измеримых локально ограниченных функций, занумерованных индексами $m \in \mathcal{M}$, причем

$$\inf_K \psi_m > 0$$

для любого компакта $K \subset (0, \infty)$ и индекса $m \in \mathcal{M}$.

Будем также считать, что f обладает следующим свойством: для любого набора $(r_1, r_2, f_1, f_2) \in \mathcal{P}_{f,\varkappa,\lambda}$ найдется $m \in \mathcal{M}$ такое, что

$$f_1 - f_2 \geq \alpha(r_2 - r_1)^m \sup_{\substack{r \in (r_2/\varkappa, \varkappa r_1) \\ \zeta \in (f_2/\lambda, \lambda f_1)}} \varphi_m(r) \psi_m(\zeta),$$

где $\alpha > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от (r_1, r_2, f_1, f_2) и m .

ТЕОРЕМА 4.1. *Справедлива оценка*

$$\max_{m \in \mathcal{M}} \left(\int_{f_1}^{f_2} \psi_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \right)^m \geq C \int_{r_1}^{r_2} \min_{m \in \mathcal{M}} r^{m-1} \varphi_m(r) dr \quad (4.1)$$

для всех вещественных чисел r_1, r_2, f_1, f_2 , удовлетворяющих неравенствам $R_0 < r_1 < r_2 < R$, $0 < f_1 \leq f(r_1) \leq f(r_2) \leq f_2$, $\varkappa r_1 \leq r_2$ и $\lambda f_1 \leq f_2$, где постоянная $C > 0$ зависит только от $\varkappa, \lambda, \alpha$ и $\mathcal{M}$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Обозначим*

$$\Phi_m(r) = \min\{r^{m-1} \varphi_m(r), \varphi_m^{\frac{1}{m}}(r)\}, \quad \Psi_m(t) = \max\{\psi_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1}, 1/\psi_m(t)\}.$$

Тогда

$$\max_{m \in \mathcal{M}} \int_{f(r_1)}^{f(r_2)} \Psi_m(t) dt \geq C \int_{r_1}^{r_2} \min_{m \in \mathcal{M}} \Phi_m(r) dr \quad (4.2)$$

для всех $R_0 < r_1 < r_2 < R$ таких, что $\varkappa r_1 \leq r_2$ и $f(r_1) > 0$, где постоянная $C > 0$ зависит только от $\varkappa, \lambda, \alpha$ и $\mathcal{M}$.

Доказательство теорем 4.1 и 4.2 опирается на несколько вспомогательных результатов. Введем функции

$$\tilde{\varphi}_m(r) = \sup_{r/\sqrt{\varkappa} < \xi < r\sqrt{\varkappa}} \varphi_m(\xi), \quad \tilde{\psi}_m(t) = \sup_{t/\sqrt{\lambda} < \zeta < t\sqrt{\lambda}} \psi_m(\zeta).$$

ЛЕММА 4.1. Пусть t_1 и t_2 – положительные вещественные числа такие, что $\sqrt{\lambda} t_1 \leq t_2$. Тогда

$$\left(\int_{t_1}^{t_2} \psi_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \right)^m \geq \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\tilde{\psi}_m(t)}$$

для всех $t \in \mathcal{M}$, где постоянная $\delta > 0$ зависит только от λ и $\mathcal{M}$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $R_0 < r_1 < r_2 < R$ и при этом $\sqrt{\varkappa} r_1 \leq r_2$. Тогда

$$\left(\int_{r_1}^{r_2} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r) dr \right)^m \geq \varepsilon \int_{r_1}^{r_2} r^{m-1} \varphi_m(r) dr$$

для всех $t \in \mathcal{M}$, где постоянная $\varepsilon > 0$ зависит только от $\varkappa$ и $\mathcal{M}$.

Доказательства лемм 4.1 и 4.2 содержатся в [6, леммы 2.3 и 2.6].

ЛЕММА 4.3. Пусть $R_0 < r_1 < r_2 < R$, $r_2 \leq \sqrt{\varkappa} r_1$ и $0 < \sqrt{\lambda} f(r_1 + 0) \leq f(r_2 - 0)$. Тогда

$$\int_{f(r_1+0)}^{f(r_2-0)} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \geq \beta \int_{r_1}^{r_2} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r) dr \quad (4.3)$$

для некоторого $t \in \mathcal{M}$, где постоянная $\beta > 0$ зависит только от λ , α и $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим минимальное натуральное число k такое, что $f(r_2 - 0) < \lambda^{(k+1)/2} f(r_1 + 0)$. Обозначим $f_i = \lambda^{i/2} f(r_1 + 0)$, $i = 0, \dots, k$. Положим также

$$\xi_i = \sup\{\xi \in (r_1, r_2) : f(\xi) < f_i\},$$

если $\{\xi \in (r_1, r_2) : f(\xi) < \lambda^{i/2} f_1\} \neq \emptyset$, и $\xi_i = r_1$ в противном случае. Разумеется, будем иметь $r_1 = \xi_0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_k \leq r_2$.

Допустим сначала, что

$$\xi_k - r_1 \geq \frac{r_2 - r_1}{2}. \quad (4.4)$$

По свойству функции f , приведенному в начале параграфа, для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ найдется $t \in \mathcal{M}$ такое, что

$$f_i - f_{i-1} \geq \alpha(\xi_i - \xi_{i-1})^m \tilde{\varphi}_m(r) \tilde{\psi}_m(t)$$

для всех $t \in (f_{i-1}, f_i)$ и $r \in (r_1, r_2)$, откуда немедленно находим

$$(f_i - f_{i-1}) \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} \geq \alpha_m(\xi_i - \xi_{i-1}) \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r) \quad (4.5)$$

для всех $t \in (f_{i-1}, f_i)$ и $r \in (r_1, r_2)$, где $\alpha_m = (1 - \lambda^{-\frac{1}{2}})^{1-\frac{1}{m}} \alpha^{\frac{1}{m}}$.

Таким образом, объединяя (4.5) с тривиальным неравенством

$$\int_{f_{i-1}}^{f_i} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \geq (f_i - f_{i-1}) \inf_{t \in (f_{i-1}, f_i)} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1},$$

получим

$$\int_{f_{i-1}}^{f_i} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \geq \alpha_m(\xi_i - \xi_{i-1}) \sup_{r \in (r_1, r_2)} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r). \quad (4.6)$$

Пусть Ξ_m – множество всех $i \in \{1, \dots, k\}$, для которых выполнено соотношение (4.6). Очевидно,

$$\bigcup_{m \in \mathcal{M}} \Xi_m = \{1, \dots, k\},$$

поэтому существует $m \in \mathcal{M}$ такое, что

$$\sum_{i \in \Xi_m} (\xi_i - \xi_{i-1}) \geq \frac{\xi_k - r_1}{|\mathcal{M}|},$$

где $|\mathcal{M}|$ – количество элементов во множестве $\mathcal{M}$. Тем самым, суммируя (4.6) по всем $i \in \Xi_m$, приходим к выводу, что

$$\int_{f(r_1+0)}^{f(r_2-0)} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \geq \alpha_m \frac{\xi_k - r_1}{|\mathcal{M}|} \sup_{r \in (r_1, r_2)} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r),$$

откуда согласно условию (4.4) и элементарной оценке

$$(r_2 - r_1) \sup_{r \in (r_1, r_2)} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r) \geq \int_{r_1}^{r_2} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r) dr \quad (4.7)$$

непосредственно вытекает (4.3).

Предположим теперь, что

$$\xi_k - r_1 < \frac{r_2 - r_1}{2}. \quad (4.8)$$

Обозначим $f^* = f(r_2 - 0)$ и $f_* = f(r_2 - 0)/\sqrt{\lambda}$. Пусть также $r_* = \inf\{r \in (r_1, r_2) : f(r) > f_*\}$, если $\{r \in (r_1, r_2) : f(r) > f_*\} \neq \emptyset$, и $r_* = r_2$ в противном случае. Легко убедиться в том, что $r_* \leq \xi_k$. Последнее в силу (4.8) влечет соотношение

$$r_2 - r_* \geq \frac{r_2 - r_1}{2}. \quad (4.9)$$

В то же время существует $m \in \mathcal{M}$ такое, что

$$f^* - f_* \geq \alpha(r_2 - r_*)^m \tilde{\varphi}_m(r) \tilde{\psi}_m(t)$$

для всех $t \in (f_*, f^*)$ и $r \in (r_1, r_2)$. Следовательно,

$$(f^* - f_*) \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} \geq \alpha_m(r_2 - r_*) \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r) \quad (4.10)$$

для всех $t \in (f_*, f^*)$ и $r \in (r_1, r_2)$, где постоянная $\alpha_m > 0$ такая же, как в формуле (4.5). Объединяя, далее, (4.10) с неравенством

$$\int_{f_*}^{f^*} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \geq (f^* - f_*) \inf_{t \in (f_*, f^*)} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1},$$

будем иметь

$$\int_{f_*}^{f^*} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \geq \alpha_m (r_2 - r_*) \sup_{r \in (r_1, r_2)} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r),$$

откуда, используя (4.7) и (4.9), снова получим (4.3). Лемма доказана.

ЛЕММА 4.4. *Предположим, что $R_0 < r_1 < R/\sqrt{\lambda}$, $r_2 = \sqrt{\kappa} r_1$ и при этом $0 < f(r_2 - 0) \leq \sqrt{\lambda} f(r_1 + 0)$. Тогда*

$$\int_{f(r_1+0)}^{f(r_2-0)} \frac{dt}{\tilde{\psi}_m(t)} \geq \gamma \int_{r_1}^{r_2} r^{m-1} \tilde{\varphi}_m(r) dr$$

для некоторого $m \in \mathcal{M}$, где постоянная $\gamma > 0$ зависит только от κ, α и $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется $m \in \mathcal{M}$ такое, что

$$f(r_2 - 0) - f(r_1 + 0) \geq \alpha (r_2 - r_1)^m \tilde{\varphi}_m(r) \tilde{\psi}_m(t)$$

для всех $r \in (r_1, r_2)$ и $t \in (f(r_1 + 0), f(r_2 - 0))$. Таким образом,

$$\inf_{t \in (f(r_1+0), f(r_2-0))} \frac{f(r_2 - 0) - f(r_1 + 0)}{\tilde{\psi}_m(t)} \geq \gamma (r_2 - r_1) \sup_{r \in (r_1, r_2)} r^{m-1} \tilde{\varphi}_m(r),$$

где $\gamma = (1 - \kappa^{-1/2})^{m-1} \alpha$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\begin{aligned} \int_{f(r_1+0)}^{f(r_2-0)} \frac{dt}{\tilde{\psi}_m(t)} &\geq \inf_{t \in (f(r_1+0), f(r_2-0))} \frac{f(r_2 - 0) - f(r_1 + 0)}{\tilde{\psi}_m(t)}, \\ (r_2 - r_1) \sup_{r \in (r_1, r_2)} r^{m-1} \tilde{\varphi}_m(r) &\geq \int_{r_1}^{r_2} r^{m-1} \tilde{\varphi}_m(r) dr. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Возьмем наибольшее натуральное число k , удовлетворяющее условию $\kappa^{k/2} r_1 < r_2$. Положим $\xi_i = \kappa^{i/2} r_1$, $i = 0, 1, \dots, k$, и

$$\varphi(r) = \min_{m \in \mathcal{M}} r^{m-1} \varphi_m(r).$$

Допустим сначала, что

$$\int_{r_1}^{\xi_k} \varphi(r) dr \geq \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \varphi(r) dr. \quad (4.11)$$

Если для $i \in \{1, \dots, k\}$ справедливо неравенство $f(\xi_i - 0) \geq \sqrt{\lambda} f(\xi_{i-1} + 0)$, то согласно лемме 4.3 найдется $m \in \mathcal{M}$ такое, что

$$\int_{f(\xi_{i-1}+0)}^{f(\xi_i-0)} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \geq \beta \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r) dr, \quad (4.12)$$

где постоянная $\beta > 0$ зависит только от λ , α и $\mathcal{M}$. В свою очередь, если $f(\xi_i - 0) < \sqrt{\lambda} f(\xi_{i-1} + 0)$, то по лемме 4.4 существует $m \in \mathcal{M}$ такое, что

$$\int_{f(\xi_{i-1}+0)}^{f(\xi_i-0)} \frac{dt}{\tilde{\psi}_m(t)} \geq \gamma \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} r^{m-1} \tilde{\varphi}_m(r) dr, \quad (4.13)$$

где постоянная $\gamma > 0$ зависит только от $\varkappa$, α и $\mathcal{M}$.

Обозначим через Λ_m множество всех $i \in \{1, \dots, k\}$, для которых выполнена оценка (4.12), а через Θ_m – множество всех $i \in \{1, \dots, k\}$, для которых имеет место (4.13). Очевидно,

$$\bigcup_{m \in \mathcal{M}} (\Lambda_m \cup \Theta_m) = \{1, \dots, k\},$$

поэтому существует $m \in \mathcal{M}$ такое, что

$$\sum_{i \in \Lambda_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \varphi(r) dr \geq \frac{1}{2|\mathcal{M}|} \int_{r_1}^{\xi_k} \varphi(r) dr \quad (4.14)$$

или

$$\sum_{i \in \Theta_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \varphi(r) dr \geq \frac{1}{2|\mathcal{M}|} \int_{r_1}^{\xi_k} \varphi(r) dr. \quad (4.15)$$

Рассмотрим сначала случай, когда выполнено неравенство (4.14). Используя соотношение (4.12), находим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in \Lambda_m} \int_{f(\xi_{i-1}+0)}^{f(\xi_i-0)} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \right)^m &\geq \beta^m \left(\sum_{i \in \Lambda_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r) dr \right)^m \\ &\geq \beta^m \sum_{i \in \Lambda_m} \left(\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r) dr \right)^m. \end{aligned}$$

При этом по лемме 4.2

$$\sum_{i \in \Lambda_m} \left(\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r) dr \right)^m \geq \varepsilon \sum_{i \in \Lambda_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} r^{m-1} \varphi_m(r) dr,$$

где постоянная $\varepsilon > 0$ зависит только от $\varkappa$ и $\mathcal{M}$. С другой стороны, несложно убедиться в том, что

$$\int_{f(r_1+0)}^{f(r_2-0)} \psi_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \geq \sum_{i \in \Lambda_m} \int_{f(\xi_{i-1}+0)}^{f(\xi_i-0)} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt.$$

Таким образом, объединяя три последние формулы, будем иметь

$$\left(\int_{f(r_1+0)}^{f(r_2-0)} \psi_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \right)^m \geq \beta^m \varepsilon \sum_{i \in \Lambda_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} r^{m-1} \varphi_m(r) dr,$$

откуда, учитывая (4.11) и (4.14), получим (4.1).

Пусть теперь выполнено соотношение (4.15). Тогда согласно (4.13) справедливо неравенство

$$\sum_{i \in \Theta_m} \int_{f(\xi_{i-1}+0)}^{f(\xi_i-0)} \frac{dt}{\tilde{\psi}_m(t)} \geq \gamma \sum_{i \in \Theta_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} r^{m-1} \tilde{\varphi}_m(r) dr \geq \frac{\gamma}{2|\mathcal{M}|} \int_{r_1}^{\xi_k} \varphi(r) dr,$$

которое ввиду того, что

$$\int_{f_1}^{f_2} \frac{dt}{\tilde{\psi}_m(t)} \geq \sum_{i \in \Theta_m} \int_{f(\xi_{i-1}+0)}^{f(\xi_i-0)} \frac{dt}{\tilde{\psi}_m(t)},$$

влечет за собой оценку

$$\int_{f_1}^{f_2} \frac{dt}{\tilde{\psi}_m(t)} \geq \frac{\gamma}{2|\mathcal{M}|} \int_{r_1}^{\xi_k} \varphi(r) dr.$$

В то же время ввиду леммы 4.1 имеем

$$\left(\int_{f_1}^{f_2} \psi_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \right)^m \geq \delta \int_{f_1}^{f_2} \frac{dt}{\tilde{\psi}_m(t)},$$

где постоянная $\delta > 0$ зависит только от λ и $\mathcal{M}$. Тем самым, выполнено неравенство

$$\left(\int_{f_1}^{f_2} \psi_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \right)^m \geq \frac{\delta\gamma}{2|\mathcal{M}|} \int_{r_1}^{\xi_k} \varphi(r) dr,$$

откуда, учитывая условие (4.11), вновь приходим к (4.1).

Предположим, что (4.11) не имеет места. Обозначим $r_* = r_2/\sqrt{\varkappa}$. Очевидно,

$$\int_{r_*}^{r_2} \varphi(r) dr \geq \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \varphi(r) dr, \quad (4.16)$$

так как $r_* \leq \xi_k$ по определению натурального числа k .

В случае $f(r_2 - 0) \geq \sqrt{\lambda} f(r_* + 0)$, применяя лемму 4.3, находим

$$\int_{f(r_*+0)}^{f(r_2-0)} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \geq \beta \int_{r_*}^{r_2} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r) dr \quad (4.17)$$

для некоторого $m \in \mathcal{M}$. Объединяя, далее, неравенство (4.17) с оценкой

$$\left(\int_{r_*}^{r_2} \tilde{\varphi}_m^{\frac{1}{m}}(r) dr \right)^m \geq \varepsilon \int_{r_*}^{r_2} r^{m-1} \varphi_m(r) dr,$$

вытекающей из леммы 4.2, получим

$$\left(\int_{f(r_*+0)}^{f(r_2-0)} \tilde{\psi}_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \right)^m \geq \beta^m \varepsilon \int_{r_*}^{r_2} r^{m-1} \varphi_m(r) dr,$$

откуда в силу условия (4.16) немедленно следует (4.1).

Пусть, наконец, $f(r_2 - 0) < \sqrt{\lambda} f(r_* + 0)$. Тогда по лемме 4.4 найдется $m \in \mathcal{M}$ такое, что

$$\int_{f(r_*+0)}^{f(r_2-0)} \frac{dt}{\tilde{\psi}_m(t)} \geq \gamma \int_{r_*}^{r_2} r^{m-1} \tilde{\varphi}_m(r) dr.$$

С другой стороны, из леммы 4.1 имеем

$$\left(\int_{f_1}^{f_2} \psi_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \right)^m \geq \delta \int_{f_1}^{f_2} \frac{dt}{\tilde{\psi}_m(t)} \geq \delta \int_{f(r_*+0)}^{f(r_2-0)} \frac{dt}{\tilde{\psi}_m(t)},$$

поэтому

$$\left(\int_{f_1}^{f_2} \psi_m^{-\frac{1}{m}}(t) t^{\frac{1}{m}-1} dt \right)^m \geq \delta \gamma \int_{r_*}^{r_2} r^{m-1} \tilde{\varphi}_m(r) dr.$$

Согласно (4.16) последнее неравенство влечет за собой (4.1). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Положим

$$\Phi(r) = \min_{m \in \mathcal{M}} \Phi_m(r),$$

$r_* = r_2/\sqrt{\varkappa}$ и $\xi_i = \varkappa^{i/2} r_1$, $i = 0, 1, \dots, k$, где k – максимальное целое число, удовлетворяющее условию $\varkappa^{k/2} r_1 < r_2$.

Если $f(\xi_i - 0) \geq \sqrt{\lambda} f(\xi_{i-1} + 0)$, то, применяя лемму 4.3, будем иметь для некоторого $m \in \mathcal{M}$ соотношение (4.12). Точно так же в случае $f(\xi_i - 0) < \sqrt{\lambda} f(\xi_{i-1} + 0)$ из леммы 4.4 следует оценка (4.13).

Тем самым, для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ существует $m \in \mathcal{M}$ такое, что

$$\int_{f(\xi_{i-1}+0)}^{f(\xi_i-0)} \Psi_m(t) dt \geq \min\{\beta, \gamma\} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \Phi_m(r) dr, \quad (4.18)$$

где $\beta > 0$ и $\gamma > 0$ – константы из лемм 4.3 и 4.4 соответственно.

Аналогично, найдется $m \in \mathcal{M}$ такое, что

$$\int_{f(r_*+0)}^{f(r_2-0)} \Psi_m(t) dt \geq \min\{\beta, \gamma\} \int_{r_*}^{r_2} \Phi_m(r) dr. \quad (4.19)$$

Допустим, что

$$\int_{r_1}^{\xi_k} \Phi(r) dr \geq \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \Phi(r) dr. \quad (4.20)$$

Обозначим через I_m множество всех $i \in \{1, \dots, k\}$, для которых выполнено (4.18). Очевидно,

$$\bigcup_{m \in \mathcal{M}} I_m = \{1, \dots, k\}.$$

В частности, существует $m \in \mathcal{M}$ такое, что

$$\sum_{i \in I_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \Phi(r) dr \geq \frac{1}{|\mathcal{M}|} \int_{r_1}^{\xi_k} \Phi(r) dr,$$

где $|\mathcal{M}|$ – количество элементов множества $\mathcal{M}$, откуда, учитывая (4.18), находим

$$\sum_{i \in I_m} \int_{f(\xi_{i-1}+0)}^{f(\xi_i-0)} \Psi_m(t) dt \geq \frac{\min\{\beta, \gamma\}}{|\mathcal{M}|} \int_{r_1}^{\xi_k} \Phi(r) dr. \quad (4.21)$$

Таким образом, объединяя (4.21) с условием (4.20) и неравенством

$$\int_{f(r_1+0)}^{f(r_2-0)} \Psi_m(t) dt \geq \sum_{i \in I_m} \int_{f(\xi_{i-1}+0)}^{f(\xi_i-0)} \Psi_m(t) dt,$$

получим (4.2).

Предположим теперь, что условие (4.20) не выполнено. Поскольку $r_* \leq \xi_k$, последнее означает справедливость оценки

$$\int_{r_*}^{r_2} \Phi(r) dr \geq \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \Phi(r) dr,$$

откуда согласно (4.19) непосредственно вытекает, что

$$\int_{f(r_*+0)}^{f(r_2-0)} \Psi_m(t) dt \geq \frac{\min\{\beta, \gamma\}}{2} \int_{r_1}^{r_2} \Phi(r) dr,$$

и мы снова приходим к (4.2). Доказательство теоремы завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 3.1 и 3.2. Применяя теорему 4.1, в которой множество $\mathcal{M}$ состоит из единственного элемента $m = p/(p-1)$, причем $\varphi_m = q^{1/(p-1)}$ и $\psi_m = g^{1/(p-1)}$, получим утверждение теоремы 3.1.

Аналогично, теорема 3.2 следует из теоремы 4.2.

Список литературы

1. М. Л. Гервер, Е. М. Ландис, “Одно обобщение теоремы о среднем для функций многих переменных”, *Докл. АН СССР*, **146**:4 (1962), 761–764; англ. пер.: M. L. Gerver, E. M. Landis, “A generalization of the mean value theorem for functions of several variables”, *Sov. Math. Dokl.*, **3** (1963), 1382–1385.
2. А. А. Григорьян, “О лиувилевых теоремах для гармонических функций с конечным интегралом Дирихле”, *Матем. сб.*, **132**(174):4 (1987), 496–516; англ. пер.: A. A. Grigor'yan, “On Liouville theorems for harmonic functions with finite Dirichlet integral”, *Math. USSR-Sb.*, **60**:2 (1988), 485–504.
3. В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис, “О качественных свойствах решений одного уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **135**(177):3 (1988), 346–360; англ. пер.: V. A. Kondrat'ev, E. M. Landis, “On qualitative properties of solutions of a nonlinear equation of second order”, *Math. USSR-Sb.*, **63**:2 (1989), 337–350.
4. В. А. Кондратьев, С. Л. Эйдельман, “О положительных решениях квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка”, *Докл. РАН*, **334**:4 (1994), 427–428; англ. пер.: V. A. Kondrat'ev, S. D. Eidel'man, “On positive solutions of second-order quasilinear elliptic equations”, *Russ. Acad. Sci. Dokl. Math.*, **49**:1 (1994), 124–126.
5. А. А. Коньков, “О неотрицательных решениях квазилинейных эллиптических неравенств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:2 (1999), 41–126; англ. пер.: A. A. Kon'kov, “On non-negative solutions of quasilinear elliptic inequalities”, *Izv. Math.*, **63**:2 (1999), 255–329.
6. А. А. Коньков, “О решениях неавтономных обыкновенных уравнений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:2 (2001), 81–126; англ. пер.: A. A. Kon'kov, “On solutions of non-autonomous ordinary differential equations”, *Izv. Math.*, **65**:2 (2001), 285–327.

7. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралъцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Mathematics in Science and Engineering, **46**, Academic Press, New York, 1968.
8. Е. М. Ландис, “Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений (случай нескольких независимых переменных)”, *УМН*, **18**:1 (1963), 3–62; англ. пер.: Е. М. Landis, “Some questions in the qualitative theory of second-order elliptic equations (case of several independent variables)”, *Russ. Math. Surv.*, **18**:1 (1963), 1–62.
9. Е. М. Ландис, *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов*, Наука, М., 1971; англ. пер.: Е. М. Landis, *Second order equations of elliptic and parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **171**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
10. W. Littman, G. Stampacchia, H. F. Weinberger, “Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **17**:1–2 (1963), 43–77.
11. В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985; англ. пер.: V. G. Maz'ya, *Sobolev spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
12. Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в $\mathbb{R}^N$ ”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям*, ч. 18, Тр. МИАН, **227**, Наука, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 1999, 192–222; англ. пер.: È. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, “Absence of positive solutions for quasilinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ ”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **4**:227 (1999), 186–216.
13. Э. Митидиери, С. И. Похожаев, *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных*, Тр. МИАН, **234**, Наука, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2001; англ. пер.: È. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, *A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities*, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **3**(234), МАИК Nauka/Interperiodica, Moscow, 2001.
14. J. Serrin, “Local behavior of solutions of quasi-linear equations”, *Acta Math.*, **111**:1 (1964), 247–302.
15. Y. Naito, H. Usami, “Nonexistence results of positive entire solutions for quasilinear elliptic inequalities”, *Canad. Math. Bull.*, **40**:2 (1997), 244–253.

А. А. Коньков (А. А. Кон'ков)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: konkov@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
 06.10.2005