Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Журавлев, Двухцветные повороты единичной окружности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 1, 79–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/im601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:09:12

УДК 514

В. Г. Журавлев

Двухцветные повороты единичной окружности

Исследуются двухцветные, или двойные, повороты $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ единичной окружности C , раскраска которой зависит от непрерывного параметра $\varepsilon \in C$ и в каждой области которой задан свой угол поворота α или β . В качестве модели выбрано однопараметрическое семейство двухцветных поворотов $S_\varepsilon(x) = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$, где $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ – золотое сечение, имеющих ранг вращения $d = 2$. Доказано, что отображение первого вращения $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ – ограничение поворота $S_\varepsilon(x)$ на его аттрактор Att_ε – изоморфно интегральному отображению $T_\varepsilon = T(S^{\pm 1}, d_\varepsilon)$, построенному по простому повороту окружности S на угол $\pm \tau$ и некоторой кусочно постоянной функции d_ε . Получена точная формула для функции частотного распределения $\nu(\varepsilon)$ точек орбит под действием двухцветного поворота S_ε .

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: двухцветные (двойные) повороты, ИТМ-отображения (interval translation mappings), распределение дробных долей, разбиения Фибоначчи.

§ 1. Введение

Отождествим единичный полуинтервал $I = [0, 1)$ с единичной окружностью $C \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и зададим на нем двухцветный сдвиг $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$, зависящий от параметров $\alpha, \beta, \varepsilon \in I$. *Двухцветный*, или *двойной*, сдвиг $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ определяется следующим образом:

$$S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x) = \begin{cases} \langle x + \alpha \rangle, & \text{если } x \in I_\varepsilon^-, \\ \langle x + \beta \rangle, & \text{если } x \in I_\varepsilon^+; \end{cases} \quad (1.1)$$

здесь единичный полуинтервал

$$I = I_\varepsilon^- \cup I_\varepsilon^+ \quad (1.2)$$

разбит на два полуинтервала $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$, $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$ и $\langle x \rangle$ обозначает дробную часть x .

В настоящей работе в качестве модели выбрано однопараметрическое семейство двухцветных сдвигов

$$S_\varepsilon(x) = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x), \quad (1.3)$$

где $\varepsilon \in I$ и $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$, т.е. равно золотому сечению. В предложении 4.1 доказано, что двухцветные сдвиги S_ε обладают следующим свойством: для любого $\varepsilon \in I$ последовательность строгих включений

$$I \supset S_\varepsilon(I) \supset S_\varepsilon^2(I) \supset \dots \supset S_\varepsilon^k(I) \supset \dots, \quad (1.4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00326).

где S_ε^k – k -кратная композиция сдвига S_ε , является конечной. Это означает существование такой степени $k(\varepsilon)$, что для всех $k \geq k(\varepsilon)$ выполняются равенства $S_\varepsilon^k(I) = S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I)$, т. е. последовательность (1.4) стабилизируется через конечное число шагов. Единичный полуинтервал

$$I = \text{Att}_\varepsilon \cup \text{Spir}_\varepsilon \quad (1.5)$$

разбивается на две области, одну из которых Att_ε будем называть *аттрактором двухцветного сдвига* S_ε . Для аттрактора выполняется равенство

$$\text{Att}_\varepsilon = S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I) \subset I.$$

Дополнение к нему

$$\text{Spir}_\varepsilon = I \setminus \text{Att}_\varepsilon$$

назовем *областью притяжения аттрактора*. Из сказанного выше следует, что любая точка x из области притяжения Spir_ε попадает в аттрактор Att_ε через конечное число шагов $k \leq k(\varepsilon)$.

Рис. 1. Развертка аттрактора Att для двухцветного сдвига $S_\varepsilon = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$

Один из результатов для аттрактора Att_ε (см. теорему 5.1) состоит в следующем: ограничение $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ двухцветного сдвига S_ε на аттрактор Att_ε , или, иначе, отображение первого возвращения, задает взаимно однозначное отображение аттрактора Att_ε на себя. На рис. 1 изображена фазовая диаграмма

$$I \times I = \text{Att} \cup \text{Spir}$$

двухцветного сдвига S_ε . По горизонтальной оси отложены координаты точек x из единичного полуинтервала I , а по вертикальной – значения параметра $\varepsilon \in I$, который определяет разбиение (1.2). Если на фазовой диаграмме провести горизонтальный отрезок, то часть его, попавшая в темную область, будет состоять из точек аттрактора Att_ε , а другая часть, попавшая в светлую область, будет состоять из точек области притяжения аттрактора Spir_ε . На рис. 1 видно,

что аттракторы Att_ε для любого $\varepsilon \in I$ состоят из конечного числа полуинтервалов. Согласно [1] данное свойство вытекает из того факта, что двухцветные сдвиги S_ε являются отображениями конечного типа, т. е. отображениями, для которых последовательность строгих включений (1.4) конечна.

Еще один из результатов работы состоит в полном описании поведения двухцветного сдвига S_ε на аттракторе Att_ε . В зависимости от параметра ε на аттракторе Att_ε можно выделить полуинтервал $I^m(\delta)$ такой, что ограничение $S_\varepsilon|_{I^m(\delta)}$ двухцветного сдвига S_ε на полуинтервал $I^m(\delta) \subset \text{Att}_\varepsilon$ изоморфно (см. предложение 5.1) простому сдвигу $S^{\pm 1}: x \mapsto \langle x \pm \tau \rangle$ единичного полуинтервала I :

$$S_\varepsilon|_{I^m(\delta)} \simeq S^{\pm 1}. \quad (1.6)$$

Под изоморфизмом (1.6) подразумевается взаимно однозначное соответствие

$$I^m(\delta) \rightarrow I: x \mapsto x',$$

при котором $S_\varepsilon|_{I^m(\delta)}(x)$ переходит в $S^{\pm 1}(x')$. Степень в $S^{\pm 1}$ из (1.6) определяется четностью полуинтервала $W^m \subset I$, содержащего ε , где единичный полуинтервал

$$I = W^1 \cup W^4 \cup W^7 \cup W^{10} \cup \dots \quad (1.7)$$

разбит на полуинтервалы $W^m = V^m \cup C^m$ уровней $m \geq 1$ и $m \equiv 1 \pmod{3}$, при этом $V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m)$, $C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2})$ и $\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m}$.

Используя изоморфизм (1.6), в теореме 5.1 доказывается, что отображение $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ изоморфно,

$$S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon} \simeq T_\varepsilon, \quad (1.8)$$

интегральному отображению $T_\varepsilon = T(S^{\pm 1}, d_\varepsilon)$ [2], построенному по отображению простого сдвига $S^{\pm 1}$ и некоторой двух- или трехзначной функции d_ε (см. § 5). Изоморфизм (1.8) полностью описывает действие двухцветного сдвига S_ε на аттракторе Att_ε . Поскольку, как уже было отмечено выше, выполняется включение

$$S_\varepsilon^{k(\varepsilon)} \text{Spir}_\varepsilon \subseteq \text{Att}_\varepsilon,$$

мы также получаем описание действия сдвига S_ε на всем единичном полуинтервале I .

Еще один дополнительный результат (см. теорему 5.2) состоит в доказательстве следствия из (1.8) относительно отображения первого возвращения $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$: для любой начальной точки $x \in \text{Att}_\varepsilon$ точки ее орбиты $x_k = S_\varepsilon^k(x)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, равномерно распределены в Att_ε относительно ограничения $\mu|_{\text{Att}_\varepsilon}$ меры Хаара μ на $I \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Обозначим через

$$\nu(\varepsilon, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{k: 0 \leq S_\varepsilon^k(x) < \varepsilon, k = 0, 1, \dots, n-1\}$$

частоту попаданий некоторой фиксированной точки $x \in I$ в полуинтервал $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$. В теореме 5.2 доказано, что частота $\nu(\varepsilon) = \nu(\varepsilon, x)$ не зависит от выбора начальной точки x . Более того, в предложении 6.1 доказано, что она связана с мерой аттрактора $|\text{Att}_\varepsilon|$ соотношением

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{|\text{Att}_\varepsilon|} - 1 \quad (1.9)$$

для всех $\varepsilon \in I$. Мера аттрактора $|\text{Att}_\varepsilon|$ вычислена в предложении 4.1. В качестве следствия из соотношения (1.9) получаются следующие формулы для частоты:

$$\nu(\varepsilon) = \frac{2}{1 + \tau^{-(m+2)} + \varepsilon_m - \varepsilon} - 1 \quad (1.10)$$

для параметров ε из полуинтервала $V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m)$ и

$$\nu(\varepsilon) = \frac{2}{1 + \tau^{-(m+2)}} - 1 \quad (1.11)$$

для параметров ε из полуинтервала $C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2})$.

Поскольку $W^m = V^m \cup C^m$ и согласно (1.7) полуинтервалы W^m покрывают весь единичный полуинтервал I , то формулы (1.10) и (1.11) позволяют вычислить частоту $\nu(\varepsilon)$ для всех значений параметра ε из единичного полуинтервала I . Указанные формулы составляют один из основных результатов настоящей работы. Из них, в частности, вытекает непрерывность функции $\nu(\varepsilon)$.

График для частоты $\nu(\varepsilon)$ представлен на рис. 2. Участки постоянства для частотного распределения орбит $\nu(\varepsilon)$ на рис. 2 взаимно однозначно соответствуют участкам развертки аттрактора Att на рис. 1 со сторонами, параллельными главной диагонали или оси y , например, для ε из полуинтервалов $C^1 = [\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ и $C^4 = [\varepsilon_4, \varepsilon_6)$. Согласно формулам (1.10), (1.11) мера аттрактора $|\text{Att}_\varepsilon|$ остается постоянной при изменении параметра ε на любом из полуинтервалов C^m , а тогда по формуле (1.9) постоянным будет и значение частоты $\nu(\varepsilon)$.

Рис. 2. График функции частотного распределения $\nu(\varepsilon)$

Двойные сдвиги $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ были введены в работе [3]. Ранее такие сдвиги с параметрами $(\alpha, \alpha^2, 1 - \alpha)$, где $\alpha \approx 0.31$ – корень кубического уравнения $x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$, изучались в [1], а с параметрами $\varepsilon = 1 - \alpha$ – в работе [4]. Двойные сдвиги $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ представляют собою частный случай ИТ-отображений (interval translation mappings) [1]. Рангом вращения d двойного сдвига $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ называется размерность векторного пространства над полем $\mathbb{Q}$, порожденного числами $\alpha, \beta, 1$. В [3] исследованы двойные сдвиги $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$, имеющие ранг вращения $d = 3$. Для них найдены некоторые отрезки постоянства функции частоты $\nu(\varepsilon)$, т.е. некоторые участки плато на графике

функции $\nu(\varepsilon)$ (см. рис. 2). В [3] доказано, что для двойных сдвигов ранга $d \leq 2$ последовательности строгих вложений (1.4) конечны, т. е. имеют конечный тип. В настоящей работе исследуется случай ранга $d = 2$. Мы выбрали моделью однопараметрическое семейство двойных сдвигов вида $S_\varepsilon(x) = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$, (1.3), где ε – произвольное число из I , поскольку они обладают всеми типичными свойствами, присущими двойным сдвигам ранга $d = 2$ [5], [6].

В настоящей работе § 2 посвящен формулировке необходимых результатов о разбиениях Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$, полученных автором в работе [7]. К ним относятся формулы координат и описание локального порядка полуинтервалов из $\text{Til}(\varepsilon_m)$, свойство инвариантности разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ относительно действия на них простого сдвига S . Кроме того, в п. 2.5 устанавливается связь отображений первого возвращения $d^m S = S|I^m$ для простого сдвига S с данными разбиениями. Здесь I^m – некоторый полуинтервал из I , сдвигом которого получается полуинтервал $I^m(\delta)$ из формулы (1.6).

В § 3 определяются δ -разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ и динамические графы D_c^m и D_v^m . При их использовании описываются динамические свойства двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(x) = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$. В п. 3.6 приведено пошаговое построение графа D_c^1 (см. ниже рис. 5–9), а в теоремах 3.1, 3.2 доказываемся, что двухцветные сдвиги $S_\varepsilon(x)$ представимы динамическими графами D_c^m и D_v^m , т. е. перемещение точек x из единичного полуинтервала $I = [0, 1)$ под действием двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(x)$ происходит согласно указанным динамическим графам.

Аттрактор Att_ε и его область притяжения Spir_ε рассматриваются в § 4. В предложении 4.1 доказываемся замкнутость аттрактора Att_ε относительно действия двухцветного сдвига $S_\varepsilon(x)$ и попадание любой точки из области притяжения Spir_ε в аттрактор Att_ε за конечное число шагов. В предложении 4.2 вычисляется мера аттрактора $|\text{Att}_\varepsilon|$.

В § 5 доказываются изоморфизм (1.8) отображения первого возвращения $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ и интегрального отображения $T_\varepsilon = T(S^{\pm 1}, d_\varepsilon)$ (см. теорему 5.1) и, как следствие из него, равномерность распределения точек $S_\varepsilon(x)$ -орбит на аттракторе Att_ε (см. теорему 5.2).

Наконец, в § 6 доказываемся формула связи (1.9) частотного распределения орбит $\nu(\varepsilon)$ и меры аттракторов $|\text{Att}_\varepsilon|$ (см. предложение 6.1), из которой выводятся явные формулы (1.10), (1.11) для частоты $\nu(\varepsilon)$.

§ 2. Разбиения Фибоначчи

В этом параграфе определяются разбиения Фибоначчи и приводятся формулировки основных результатов из работы [8], касающиеся данных разбиений и необходимые нам для дальнейшего.

2.1. Подстановки. Существуют несколько методов определения указанных разбиений: метод подстановок и рекуррентного соотношения; метод “cut and project”; метод использования τ -системы счисления.

Воспользуемся методом подстановок. Разбиения Фибоначчи Til_m уровня $m = 0, 1, 2, \dots$ единичного полуинтервала $I = [0, 1)$ определим индукцией по m (см. [7], [8]). В качестве нулевого выбираем разбиение

$$\text{Til}_0 = Y_0 \oplus X_0, \quad Y_0 = [0, 2 - \tau), \quad X_0 = [2 - \tau, 1), \quad (2.1)$$

где $\oplus$ обозначает операцию прикладывания правого конца полуинтервала Y_0 к левому концу полуинтервала X_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В отличие от $Y_0 \oplus X_0$, через $Y_0 \sqcup X_0$ будем обозначать простое объединение двух непересекающихся множеств Y_0 и X_0 .

Переход от разбиения Til_m к разбиению Til_{m+1} осуществляется с помощью подстановки (инфляции)

$$\pi: \text{Til}_m \rightarrow \text{Til}_{m+1}.$$

Разбиение Til_m состоит из полуинтервалов двух различных длин. Инфляция π сохраняет короткие полуинтервалы. Каждый из длинных полуинтервалов под действием инфляции π разбивается на два полуинтервала: $X \oplus Y$, с отношением длин $|X|/|Y|$, равным $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$.

Рис. 3. Разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ уровней $0 \leq m \leq 4$

Удобно нумеровать разбиения Фибоначчи $\text{Til}_m = \text{Til}(\varepsilon_m)$ числами ε_m , удовлетворяющими равенствам (рис. 3)

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= \langle (-1)^m F_m \cdot \tau \rangle = 1 - \tau^{-m}, \\ \varepsilon_{m+n} &= \varepsilon_m + \varepsilon_n - \varepsilon_m \varepsilon_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

и рекуррентному соотношению

$$\varepsilon_{m+2} = \varepsilon_m - \varepsilon_{m+1} + 1$$

для $m = 0, 1, 2, \dots$ с начальными условиями $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 2 - \tau$. Здесь F_n обозначают числа Фибоначчи, определяемые рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, и $F_1 = F_2 = 1$. Для произвольного уровня m разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m)$ состоит из полуинтервалов двух типов: G_j^m и E_j^m . Здесь G и E – типы полуинтервалов, верхний индекс m указывает на уровень разбиения, а нижний индекс j представляет собой номер интервала в некоторой естественной нумерации. Как устроена эта нумерация, будет объяснено в следующем пункте. Количества полуинтервалов каждого из типов вычисляются по формулам

$$\#G^m = F_{2[(m+1)/2]+1}, \quad \#E^m = F_{2[m/2]+2}. \quad (2.3)$$

Полуинтервалы G_j^m , E_j^m имеют соответственно длины

$$g^m = \tau^{-(2[m/2]+2)}, \quad e^m = \tau^{-(2[(m+1)/2]+1)}. \quad (2.4)$$

2.2. Координаты полуинтервалов. Для любых целых j, i обозначим через $I[j, i]$ полуинтервал $[\langle j\tau \rangle, \langle i\tau \rangle)$ из $I = [0, 1)$. При этом предполагается, что $\langle j\tau \rangle < \langle i\tau \rangle$, где $\langle \cdot \rangle$ – дробная доля, и если $i = 0$, то полагаем $I[j, 0] = [\langle j\tau \rangle, 1)$.

Пусть m – четное число. Тогда в координатах разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ имеет представление [7], [8]

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = \bigsqcup_{0 \leq k < F_{m+1}} (G_k^m \oplus E_k^m) \sqcup \bigsqcup_{F_{m+1} \leq k < F_{m+2}} E_k^m, \quad (2.5)$$

где полуинтервалы G_k^m и E_k^m определяются равенствами $G_k^m = I[k^+, k^-)$, $E_k^m = I[k^-, k)$, при этом использованы сокращения $k^+ = k + F_m$, $k^- = k - F_{m+1}$. Полуинтервалы G_k^m, E_k^m из разбиения (2.5) имеют длины (2.4) и получаются последовательными сдвигами

$$I \xrightarrow{S} I: x \mapsto S(x) \equiv x + \tau \pmod{1} \quad (2.6)$$

начальных полуинтервалов

$$G_{k+1}^m \equiv G_k^m + \tau \pmod{1}, \quad (2.7)$$

где $0 \leq k < F_{m+1}$ и $G_0^m = I[F_m, -F_{m+1}) = [\langle F_m \rangle, \langle -F_{m+1} \rangle)$, и полуинтервалов

$$E_{k+1}^m \equiv E_k^m + \tau \pmod{1}, \quad (2.8)$$

где $0 \leq k < F_{m+2}$ и $E_0^m = I[-F_{m+1}, 0) = [\langle -F_{m+1}\tau \rangle, 1)$.

Аналогично для нечетных уровней m разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ представляются в виде суммы:

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = \bigsqcup_{0 \leq k < F_{m+1}} (G_k^m \oplus E_k^m) \sqcup \bigsqcup_{F_{m+1} \leq k < F_{m+2}} G_k^m. \quad (2.9)$$

Полуинтервалы G_k^m и E_k^m в этом случае задаются формулами $G_k^m = I[k^-, k^=)$, $E_k^m = I[k^=, k)$, где $k^- = k - F_m$, $k^= = k - F_{m+2}$, и связаны между собой S -сдвигами:

$$G_{k+1}^m \equiv G_k^m + \tau \pmod{1}, \quad (2.10)$$

где $0 \leq k < F_{m+2}$, $G_0^m = I[-F_m, -F_{m+2}) = [\langle -F_m\tau \rangle, \langle -F_{m+2}\tau \rangle)$, и

$$E_{k+1}^m \equiv E_k^m + \tau \pmod{1}, \quad (2.11)$$

где $0 \leq k < F_{m+1}$ и $E_0^m = I[-F_{m+2}, 0) = [\langle -F_{m+2}\tau \rangle, 1)$.

2.3. Простой сдвиг и разбиения Фибоначчи. Как следствие из соотношений (2.7), (2.8) и (2.10), (2.11), получаем формулы

$$G_k^m \equiv G_0^m + k\tau \pmod{1}, \quad E_k^m \equiv E_0^m + k\tau \pmod{1}, \quad (2.12)$$

где $0 \leq k < F_{m+1}$ в первом сравнении и $0 \leq k < F_{m+2}$ во втором сравнении для четных m , указанные неравенства меняются порядками для нечетных m . Эти формулы показывают, что индексы k у всех полуинтервалов G_k^m и E_k^m означают их порядковый номер относительно простого сдвига S , (2.6), т. е.

$$G_k^m = S^k(G_0^m), \quad E_k^m = S^k(E_0^m) \quad (2.13)$$

суть S^k -образы начальных полуинтервалов G_0^m , (2.7), (2.10), и E_0^m , (2.8), (2.11), где S^k обозначает композицию отображения (2.6) кратности k . Используя равенства (2.13), разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$, (2.5), (2.9), можно переписать в виде

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = \bigsqcup_{0 \leq k < F_{m+1}} (S^k(G_0^m) \oplus S^k(E_0^m)) \sqcup \bigsqcup_{0 \leq F_{m+1} \leq k < F_{m+2}} S^k(E_0^m) \quad (2.14)$$

для четных m и в виде

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = \bigsqcup_{0 \leq k < F_{m+1}} (S^k(G_0^m) \oplus S^k(E_0^m)) \sqcup \bigsqcup_{0 \leq F_{m+1} \leq k < F_{m+2}} S^k(G_0^m) \quad (2.15)$$

для нечетных m .

Пусть m четное. Согласно (2.5) правая часть равенства (2.14) представляет собой разбиение единичного полуинтервала I . Поэтому, действуя на него сдвигом S , (2.6), приходим к еще одному разбиению

$$S(\text{Til}(\varepsilon_m)) = \text{Til}(\varepsilon_m) \setminus (G_0^m \oplus E_0^m) \oplus (E_{F_{m+2}}^m \oplus G_{F_{m+1}}^m), \quad (2.16)$$

где $E_{F_{m+2}}^m = S^{F_{m+2}}(E_0^m)$ и $G_{F_{m+1}}^m = S^{F_{m+1}}(G_0^m)$. При этом все слагаемые справа в разбиении (2.16) записаны в своем естественном порядке их следования в единичном полуинтервале I . Поскольку операция прикладывания полуинтервалов $\oplus$ некоммутативна, то порядок следования слагаемых в (2.16) существен. Справедливость разложения (2.16) вытекает из равенства

$$G_0^m \oplus E_0^m = E_{F_{m+2}}^m \oplus G_{F_{m+1}}^m. \quad (2.17)$$

Аналогично, используя разложение (2.9), для нечетных m получаем

$$S(\text{Til}(\varepsilon_m)) = \text{Til}(\varepsilon_m) \setminus (G_0^m \oplus E_0^m) \oplus (E_{F_{m+1}}^m \oplus G_{F_{m+2}}^m), \quad (2.18)$$

где

$$G_0^m \oplus E_0^m = E_{F_{m+1}}^m \oplus G_{F_{m+2}}^m. \quad (2.19)$$

Равенства (2.16), (2.17) и (2.18), (2.19) показывают, что действие простого сдвига S , (2.6), на разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ сводится к перекладыванию двух крайних правых полуинтервалов из $\text{Til}(\varepsilon_m)$. Это означает инвариантность разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ относительно действия сдвига S .

2.4. Локальный порядок. Для разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$, (2.5), (2.9), существуют два алгоритма построения последовательности примыкающих друг к другу полуинтервалов G_k^m , E_k^m [7], [8]. Указанные алгоритмы позволяют определить локальный порядок следования полуинтервалов в разбиениях $\text{Til}(\varepsilon_m)$.

Алгоритм 1. Первый этап. Строится справа налево циклическая последовательность полуинтервалов

$$\dots, G_{k^*}^m, E_{k^*}^m, G_k^m, E_k^m, \dots, G_0^m, E_0^m \quad (2.20)$$

по правилу

$$k \mapsto k^* \equiv k^+ \pmod{F_{m+2}}, \quad (2.21)$$

где $k^+ = k + F_m$ или $k^+ = k + F_{m-1}$ для четных или нечетных m соответственно и в качестве k^* выбирается вычет по $\pmod{F_{m+2}}$, т. е. $0 \leq k^* < F_{m+2}$.

Второй этап. Из последовательности (2.20) вычеркиваются все полуинтервалы G_k^m , если m четное, или E_k^m , если m нечетное, с индексами $k \geq F_{m+1}$.

Алгоритм 2 (для четных m). Первый этап. Справа налево строим последовательность из одних только полуинтервалов G_k^m :

$$\dots, G_{k^+}^m, G_k^m, \dots, G_0^m \quad (2.22)$$

по правилу

$$k \mapsto k^+ \pmod{F_{m+1}}, \quad (2.23)$$

где $k^+ = k + F_m$ и $\pmod{F_{m+1}}$ имеет то же значение, что и в формуле (2.21).

Второй этап. Расширяем последовательность (2.22) с помощью подстановок

$$G_k^m \rightarrow E_{k+F_m}^m \oplus G_k^m \oplus E_k^m, \quad G_k^m \rightarrow G_k^m \oplus E_k^m \quad (2.24)$$

для индексов $k \geq F_{m-1}$ и $0 \leq k < F_{m-1}$ соответственно. Порядок полуинтервалов в (2.24) существует.

Алгоритм 2 (для нечетных m). Первый этап. Строится последовательность

$$\dots, E_{k^*}^m, E_k^m, \dots, E_0^m \quad (2.25)$$

по правилу

$$k \mapsto k^* \equiv k^+ \pmod{F_{m+1}}, \quad (2.26)$$

где $k^+ = k + F_{m-1}$.

Второй этап. Дополняем последовательность (2.25) полуинтервалами G_k^m с помощью подстановок

$$E_k^m \rightarrow G_k^m \oplus E_k^m \oplus G_{k+F_m}^m, \quad E_k^m \rightarrow G_k^m \oplus E_k^m \quad (2.27)$$

для индексов $k \geq F_{m-1}$ и $k < F_{m-1}$ соответственно. Порядок полуинтервалов в (2.27) существует.

2.5. Отображения первого возвращения для простого сдвига и разбиения Фибоначчи. Рассмотрим ограничение простого сдвига S , (2.6), на полуинтервалы вида

$$I^m = G_0^m \oplus E_0^m, \quad (2.28)$$

где G_0^m и E_0^m заданы формулами (2.5) и (2.9). Отображение первого возвращения $S|I^m$ порядка m – это ограничение сдвига S на полуинтервал $I^m \subseteq I$. Поскольку отображение $S|I^m$ будет много раз итерироваться, удобно для него использовать обозначение $d^m S = S|I^m$.

В этом пункте мы рассмотрим результаты работы [7], касающиеся отображения первого возвращения $d^m S$.

Напомним, что отображение S , (2.6), осуществляет сдвиг единичного полуинтервала $I = [0, 1)$ на иррациональное число $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$. Поэтому для любого $x \in I^m$ найдется целое неотрицательное число $k_m(x)$ со свойством: образ $S^{k_m(x)}(x)$ содержится в I^m . В качестве $k_m(x)$ выбираем наименьшее число с указанным свойством. Тогда отображение первого возвращения $d^m S$ действует на полуинтервале I^m по правилу

$$I^m \xrightarrow{d^m S} I^m: x \mapsto d^m S(x) \equiv x + k_m(x)\tau \pmod{1}. \quad (2.29)$$

Из разбиений (2.17), (2.19) следует, что отображение $d^m S$ представляет собой простой сдвиг

$$d^m S(x) \equiv x + |E_0^m| \pmod{|I^m|} \quad (2.30)$$

полуинтервала I^m на длину полуинтервала E_0^m , где длина $e_m = |E_0^m|$ вычисляется по формуле (2.4), $e_m = \tau^{-(m+1)}$ для четных m и $e_m = \tau^{-(m+2)}$ для нечетных m . В формуле (2.30) образ $x' \equiv x + |E_0^m| \pmod{|I^m|}$ элемента $x \in I^m$ определяется равенством

$$x' = x + |E_0^m| + k|I^m|,$$

где целое число k единственным образом задается условием $x' \in I^m$. Формула (2.30) – один из основных результатов работы [7], вытекающий из структурной теоремы 2.2 работы [7] об инвариантности разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ относительно действия простого сдвига S .

Снова используя формулу (2.4), находим длину полуинтервала I^m для $m = 0, 1, 2, \dots$:

$$|I^m| = g_m + e_m = \tau^{-m}. \quad (2.31)$$

Сравнивая длину I^m со значениями ε_m , (2.2), получаем формулу связи между ними:

$$|I^m| = 1 - \varepsilon_m. \quad (2.32)$$

Заметим, что

$$\frac{e_m}{|I^m|} = \tau^{-1} = \tau - 1 \equiv \tau \pmod{1} \quad (2.33)$$

для четных уровней m и

$$\frac{e_m}{|I^m|} = \tau^{-2} = 2 - \tau \equiv -\tau \pmod{1} \quad (2.34)$$

для нечетных m . Из сравнений (2.33), (2.34) вытекает свойство подобия исходного простого сдвига S и его отображений первого возвращения $d^m S$:

$$d^m S \sim S, \quad d^m S \sim S^{-1} \quad (2.35)$$

для четных и нечетных порядков m соответственно. Отметим, что свойство подобия (2.35) содержится фактически в [7, теорема 2.2], где утверждается, что действие простого сдвига S на разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ сводится к перекладыванию (2.17), (2.18) его двух крайних правых полуинтервалов G_0^m и E_0^m . Поскольку в силу (2.28) имеет место разбиение $I^m = G_0^m \oplus E_0^m$, то такому перекладыванию отвечает сдвиг полуинтервала I^m на длину $e_m = |E_0^m|$ полуинтервала E_0^m . Если теперь аффинно отобразить I^m на единичный полуинтервал I , учитывая равенства (2.33) и (2.34), то мы видим, что при этом отображении перекладыванию $d^m S$ полуинтервалов G_0^m и E_0^m соответствует простой сдвиг $S^{\pm 1}: x \mapsto x \pm \tau \pmod{1}$ единичного полуинтервала I .

§ 3. Двухцветный сдвиг и динамические графы

3.1. Двухцветный сдвиг. В этом параграфе рассмотрим зависящее от $\varepsilon \in I$ непрерывное семейство $S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$ двухцветных сдвигов единичного полуинтервала I . Покажем, что поведение двухцветных сдвигов $S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$ согласуется с разбиениями Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$, уровень m которых явным образом

определяется параметром ε . Связь между сдвигами $S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$ и разбиениями $\text{Til}(\varepsilon_m)$ описывается с помощью динамических графов D в теоремах 3.1, 3.2.

Двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(x) = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$ действует на единичном полуинтервале $I = [0, 1)$ и определяется формулой

$$S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x) \equiv \begin{cases} x + 2\tau \pmod{1}, & \text{если } x \in I_\varepsilon^-, \\ x + \tau \pmod{1}, & \text{если } x \in I_\varepsilon^+, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$, $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$.

3.2. Бесконечное разбиение единичного полуинтервала. Используя собственные значения ε_m (см. п. 2.1), разобьем I на прилегающие друг к другу полуинтервалы упорядоченными точками

$$\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < \varepsilon_6 < \varepsilon_7 < \varepsilon_9 < \varepsilon_{10} < \varepsilon_{12} < \dots,$$

где $\varepsilon_0 = 0$ и индексы сравнимы с $0, 1, 3, 4 \pmod{6}$. Обозначим соответствующие полуинтервалы через

$$V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m), \quad C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2}) \quad (3.2)$$

и через $W^m = V^m \oplus C^m$ – их объединение, полученное прикладыванием V^m к C^m . Учитывая формулу (2.2) для ε_m , получаем для длин $c_m = |C_m|$, $v_m = |V_m|$ полуинтервалов (3.2) равенства

$$c_m = v_m = \tau^{-(m+1)}. \quad (3.3)$$

Исследование двухцветного сдвига S_ε , (3.1), опирается на следующее разбиение единичного полуинтервала:

$$I = W^1 \oplus W^4 \oplus W^7 \oplus W^{10} \oplus \dots \quad (3.4)$$

Здесь индексы m в W^m занумерованы подряд идущими числами $m \geq 1$ из арифметической прогрессии $m \equiv 1 \pmod{3}$ (такая нумерация оказывается удобной). Тип поведения сдвига S_ε для $\varepsilon \in W^m$ зависит от:

- 1) принадлежности параметра ε полуинтервалу V^m или C^m ;
- 2) вида уровня $m \equiv 1 \pmod{6}$ или $m \equiv 4 \pmod{6}$.

Поэтому в дальнейшем указанные четыре случая будут рассматриваться раздельно.

3.3. δ -разбиения. Согласно (2.10) и (2.12) разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ инвариантны относительно действия сдвига S . Отсюда вытекает свойство самоподобия

$$S|I^m \sim S^{\pm 1} \quad (3.5)$$

для отображений первого возвращения $S|I^m$ (см. п. 2.5). Аналогичным свойством обладают δ -разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ относительно действия двухцветного сдвига S_ε . Данные разбиения получаются из разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ с помощью дополнительного простого сдвига. Чтобы заметить это, достаточно сравнить рис. 1 и рис. 3: сечения Att_ε разветки аттрактора Att двухцветного сдвига S_ε состоят из полуинтервалов сдвинутых разбиений $\text{Til}(\varepsilon_m)$. Поэтому, описав

действие сдвига S_ε на разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$, мы сможем полностью описать и динамику самого двухцветного сдвига S_ε на всем единичном полуинтервале I .

Указанные δ -разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ имеют вид

$$\text{Til}(\varepsilon_m, \delta) = t_\delta(\text{Til}(\varepsilon_m)), \quad (3.6)$$

где

$$I \xrightarrow{t_\delta} I: x \mapsto t_\delta(x) \equiv x - \delta \pmod{1}, \quad (3.7)$$

при этом $\delta \in I$ будет выбираться в зависимости от параметра ε . Соотношение (3.6) означает, что разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ получаются из разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ сдвигом их как единого целого на $-\delta \pmod{1}$. Разбиения (3.6) состоят согласно п. 2.2 из полуинтервалов

$$G_k^m(\delta) = t_\delta(G_k^m) \equiv G_k^m - \delta \pmod{1}, \quad E_k^m(\delta) = t_\delta(E_k^m) \equiv E_k^m - \delta \pmod{1},$$

которые представляют собой полуинтервалы G_k^m и E_k^m , сдвинутые на $-\delta \pmod{1}$. Уровень $m = m(\varepsilon)$ разбиений $\text{Til}(\varepsilon_m)$ определяется исходя из включения $\varepsilon \in W^m$, где W^m – полуинтервалы, на которые разбивается (см. (3.4)) единичный полуинтервал I . Выбор величины сдвига δ в (3.7) будет осуществляться следующим образом. Если $m \equiv 1 \pmod{6}$, то полагаем

$$\delta = \begin{cases} (\varepsilon_m - \varepsilon) + g_{m-1} & \text{для } \varepsilon \in C^m, \\ g_{m-1} & \text{для } \varepsilon \in V^m; \end{cases} \quad (3.8)$$

если же $m \equiv 4 \pmod{6}$, то полуинтервалы V^m и C^m не разделяются, и в этом случае выбираем

$$\delta = e_m \quad \text{для всех } \varepsilon \in W^m = V^m \oplus C^m. \quad (3.9)$$

В предложении 5.1 будет доказано, что определенные таким образом разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ обладают свойством (3.5):

$$S_\varepsilon | I^m(\delta) \sim S^{\pm 1}. \quad (3.10)$$

Здесь $I^m(\delta) = t_\delta(I^m)$ – полуинтервал из разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$, соответствующий полуинтервалу I^m из разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$.

Ниже мы собираемся полностью описать, что происходит с δ -разбиением $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ под действием двухцветного сдвига S_ε . Эта задача довольно сложная. Для того чтобы это сделать, мы вводим понятие “динамических графов”, которые автору кажутся естественными и удобными для описания данного процесса, поскольку в их терминах удастся точно описать основные характеристики поведения сдвига S_ε . К ним относятся:

- 1) аттрактор $\text{Att}_\varepsilon \subseteq I$ и его область притяжения $\text{Spir}_\varepsilon \subset I$;
- 2) максимальное динамическое расстояние

$$\varrho_\varepsilon = \max_{x \in \text{Spir}_\varepsilon} \varrho_\varepsilon(x) = \max_{x \in I} \varrho_\varepsilon(x) \quad (3.11)$$

от области притяжения Spir_ε до аттрактора Att_ε , где $\varrho_\varepsilon(x) = \min\{k: S_\varepsilon^k(x) \in \text{Att}_\varepsilon, k = 0, 1, 2, \dots\}$ – динамическое расстояние от точки $x \in I$ до аттрактора Att_ε ;

3) множество точек $Dh(\varepsilon) = \{x \in \text{Spir}_\varepsilon : \varrho_\varepsilon(x) = k(\varepsilon)\}$, максимально удаленных от аттрактора Att_ε , где $k(\varepsilon)$ – длина максимальной последовательности строгих включений

$$\underbrace{I \supset S_\varepsilon(I) \supset S_\varepsilon^2(I) \supset \cdots \supset S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I)}_{k(\varepsilon)};$$

здесь S_ε^k обозначает k -кратную композицию сдвига S_ε и $S_\varepsilon^{k(\varepsilon)+1}(I) = S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I)$;

4) скорость сжатия полуинтервала I , характеризуемая с помощью функции

$$\text{mes}_\varepsilon(t) = |S_\varepsilon^{[t]}(I)|,$$

равной мере множества $S_\varepsilon^{[t]}(I) \subset I$, где $[t]$ – целая часть t .

3.4. Динамические графы. Наша задача – описать в явном виде действие двухцветного сдвига S_ε на δ -разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$, уровень которого $m = m(\varepsilon)$ и величина сдвига δ выбираются так, чтобы как можно больше полуинтервалов из $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ снова бы переходило в полуинтервалы из того же разбиения. Сначала мы опишем данное действие непосредственно в терминах самих полуинтервалов, а затем на языке графов.

Каждый полуинтервал из $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ отображается сдвигом S_ε в один или несколько полуинтервалов. В последнем случае будем говорить, что для данного полуинтервала имеет место *ветвление*. При наличии ветвления полуинтервал может переходить в два или три полуинтервала. В первом случае возможно S -ветвление или S_ε -ветвление (*цветное ветвление*). S -ветвление имеет ту же природу, что и для простого сдвига S , перекладывающего полуинтервалы из разбиения $I^m = G_0^m \oplus E_0^m$. Цветное ветвление S_ε возникает, когда некоторый полуинтервал имеет двойную раскраску, т. е. он пересекается с двумя полуинтервалами I_ε^- и I_ε^+ . В случае перехода в три полуинтервала наблюдается наложение на один и тот же полуинтервал сразу двух ветвлений, и тогда будем говорить, что имеет место *двойное ветвление*.

Наконец, еще одно важное явление, которое необходимо учитывать, состоит в том, что одна часть полуинтервала может содержаться в аттракторе Att_ε двухцветного сдвига S_ε , а другая часть – в его области притяжения Spir_ε . Поскольку каждая из этих частей имеет свою орбиту под действием сдвига S_ε , то указанные орбиты необходимо различать, вводя дополнительные обозначения.

Чтобы придать сказанному более четкую структуру, воспользуемся геометричным языком *динамических графов* D уровня m – ориентированных графов, вершины V которых пронумерованы полуинтервалами $G_k^m(\delta)$ и $E_k^m(\delta)$ из δ -разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$. Далее, говоря о динамических графах, будем считать синонимами *вершины* и *полуинтервалы*, *ребра* и *стрелки*. Если под действием двухцветного сдвига S_ε -образ всего полуинтервала V_k или какой-либо его части содержится в некотором полуинтервале V_l , то из вершины V_k выходит направленное в вершину V_l ребро.

Таким образом, согласно сказанному выше из каждой вершины V_k могут выходить максимум три ребра. Если ребер несколько, то отвечающий вершине V_k полуинтервал будет дополнительно разбиваться на более мелкие полуинтервалы с указанием стрелками всех полуинтервалов, в которые они переводятся

сдвигом S_ε . Если части полуинтервала содержатся и в аттракторе Att_ε , и в области притяжения Spir_ε , то из вершины V_k будут выходить сразу два параллельных ребра, отмеченные сплошной и пунктирной линиями соответственно.

Будем говорить, что обладающий таким свойством граф D *представляет* двухцветный сдвиг S_ε .

Рис. 4. Динамический граф D простого сдвига S

Проиллюстрируем на рис. 4, как устроен динамический граф D для простого сдвига S (см. (2.6)). Для этого выберем разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_0) = G_0^0 \oplus E_0^0$ нулевого уровня. Согласно формулам (2.16), (2.17) сдвига S перекладывает полуинтервалы:

$$G_0^0 \oplus E_0^0 \xrightarrow{S} E_0^0 \sqcup G_0^0,$$

следовательно, полуинтервал E_0^0 отображается в G_0^0 и частично сам в себя, а G_0^0 — полностью в E_0^0 . Поэтому на графе D из вершины E_0^0 должны выходить два ребра. Таким образом, динамический граф D (см. рис. 4) состоит из двух вершин G_0^0, E_0^0 и имеет S -ветвление в вершине E_0^0 .

3.5. Обозначения, используемые в динамических графах D_v^m и D_c^m .

Будем различать динамические графы D двух типов D_v^m или D_c^m в зависимости от того, меняется или остается постоянной мера аттрактора Att_ε двухцветного сдвига S_ε при малых изменениях параметра ε . Следовательно, графы D_c^m устроены несколько проще. Вначале мы построим динамические графы D для всех значений параметра $\varepsilon \in I$, а затем в теоремах 3.1 и 3.2 докажем, что определенные таким образом графы D представляют сдвиг S_ε .

Ребра. Как уже было сказано, сплошными ребрами соединены полуинтервалы из аттрактора Att_ε , и пунктирными ребрами соединяются полуинтервалы из области притяжения Spir_ε . Строгие определения множеств Att_ε и Spir_ε будут приведены в § 4.

Кружками $\circ, \bullet$ на пунктирных ребрах отмечены начала S_ε -цепей из соответствующих полуинтервалов из области Spir_ε . Жирный кружок $\bullet$ выделяет полуинтервал, максимально удаленный — в смысле динамического расстояния $\varrho_\varepsilon(x)$ (см. определение (3.11)) — от аттрактора Att_ε .

Обычные стрелки $V_k \rightarrow V_l$ отвечают ребрам графа D . Вместо указания полной цепи последовательных полуинтервалов

$$V_k \rightarrow V_{k+2} \rightarrow \dots \rightarrow V_l \quad (3.12)$$

будем использовать одно из сокращений

$$V_k \twoheadrightarrow V_l \quad \text{или} \quad V_k \dashrightarrow V_l$$

в соответствии с тем, четный или нечетный номер k имеет начальный полуинтервал V_k . Разность номеров соседних полуинтервалов цепи (3.12) равна 2, следовательно, все полуинтервалы одной и той же S_ε -цепи имеют одинаковую четность. Жирные стрелки

$$\cdots \dashrightarrow V_l$$

указывают на вход в аттрактор Att_ε .

Раскраска полуинтервалов. Верхние индексы $+$, $-$ у полуинтервалов $G_k^m(\delta)$, $E_k^m(\delta)$ обозначают их части по mod 1, содержащиеся соответственно в полуинтервалах $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$, $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$. Расположения индексов, например

$${}^+G_k^m(\delta)^- = {}^+G_k^m(\delta) \oplus G_k^m(\delta)^-, \quad (3.13)$$

где

$$G_k^m(\delta)^- = G_k^m(\delta) \cap I_\varepsilon^-, \quad {}^+G_k^m(\delta) = G_k^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+, \quad (3.14)$$

показывают, что $G_k^m(\delta)$ разбит на два полуинтервала, при этом ${}^+G_k^m(\delta)$ – левый, а $G_k^m(\delta)^-$ – правый подинтервалы. Если полуинтервалы $G_k^m(\delta)$, $E_k^m(\delta)$ отмечены нижними индексами: $G_k^m(\delta)_+$, $E_k^m(\delta)_+$, то это означает их принадлежность полуинтервалу I_ε^+ . Неотмеченные нижним индексом $+$ полуинтервалы содержатся в I_ε^- . Соответственно, стрелки $\dashrightarrow$, $\overset{+}{\dashrightarrow}$ указывают на части множеств, к которым они относятся и которые содержатся в полуинтервалах I_ε^- , I_ε^+ .

Ветвление. Если из некоторой вершины выходят несколько ребер, то будем говорить, что в данной вершине имеет место *ветвление*. Существуют два основных вида ветвлений: S -ветвление и S_ε -ветвление (или цветное ветвление).

S -ветвление наследуется от простого сдвига S , перекладывающего полуинтервалы из разбиения $I^m = G_0^m \oplus E_0^m$ (см. (2.17) и (2.19)). Этот вид ветвления представлен на рис. 4 для вершины E_0^0 динамического графа D простого сдвига S .

Цветное ветвление S_ε порождается различными поведением двойного сдвига S_ε на полуинтервалах I_ε^- и I_ε^+ . Указанное ветвление возникает в случае, когда некоторый полуинтервал имеет двойную раскраску, т. е. пересекается с двумя полуинтервалами I_ε^- и I_ε^+ , например полуинтервал вида (3.13).

Если имеет место одно из основных ветвлений, то из вершины выходят два ребра. Однако возможно и наложение на один и тот же полуинтервал сразу двух ветвлений различных видов, и тогда будем говорить, что в вершине имеет место *двойное ветвление*. В этом случае на графе D из такой вершины выходят три ребра. Двойные ветвления возможны лишь в динамических графах D_c^m и D_v^m уровня $m = 1$, когда двухцветный сдвиг S_ε имеет параметры $\varepsilon \in [0, \varepsilon_3)$.

3.6. Построение динамических графов. Покажем, как работают приведенные выше соглашения на примере динамических графов $D = D_v^1, D_c^1$ минимального уровня $m = 1$. Согласно определению (3.8) такие графы описывают двухцветные сдвиги S_ε с параметрами ε из полуинтервала $W^1 = V^1 \oplus C^1$, где $V^1 = [0, \varepsilon_1)$ и $C^1 = [\varepsilon_1, \varepsilon_3)$. Поскольку графы D_c^1 устроены несколько проще, рассмотрим именно их (см. далее рис. 8, 9).

Динамические графы D_c^1 . Данные графы строятся на основе разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_1)$. На рис. 5 изображено разбиение $\text{Til}(\varepsilon_1)$, в котором полуинтервал G_1^1 согласно (2.22)–(2.24) и (2.25)–(2.27) разложен:

$$G_1^1 = G_2^3 \oplus E_2^3 \oplus G_4^3, \quad (3.15)$$

на более мелкие полуинтервалы из разбиения $\text{Til}(\varepsilon_3)$ уровня $m + 2 = 3$ (см. рис. 3).

Рис. 5. Разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_1)$

По условию имеем $\varepsilon \in C^1 = [\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, следовательно, параметр ε делит полуинтервал G_0^1 . По формуле (3.8) выбор δ осуществляется так, чтобы совместить правый конец полуинтервала G_0^1 со значением параметра ε . Как мы увидим далее, необходимо полуинтервал $C^1 = [\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ разбить на два подынтервала $[\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $[\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, поскольку при переходе через их границу изменяется вид графа D_c^1 .

Рис. 6. Смещение полуинтервалов сдвигом S_ε для параметров $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, отвечающее динамическому графу D_c^1

На рис. 6, 7 показаны δ -разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_1, \delta)$, получающиеся сдвигом на соответствующую величину $-\delta \bmod 1$ всего разбиения $\text{Til}(\varepsilon_1)$. Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G_1^1(\delta)^- &= G_1^1(\delta) \cap I_\varepsilon^-, & +G_1^1(\delta) &= G_1^1(\delta) \cap I_\varepsilon^+, \\ G_2^3(\delta)^- &= G_2^3(\delta) \cap I_\varepsilon^-, & +G_2^3(\delta) &= G_2^3(\delta) \cap I_\varepsilon^+, \end{aligned}$$

индекс $+$ в $E_0^1(\delta)_+ = E_0^1(\delta)$ указывает, что весь полуинтервал $E_0^1(\delta)$ содержится в полуинтервале $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$, а его отсутствие в $G_0^1(\delta)$ – на полное включение $G_0^1(\delta)$ в полуинтервал $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$.

Динамический граф D_c^1 строится на основе действия двухцветного сдвига S_ε на полуинтервалы из разбиения $\text{Til}(\varepsilon_1, \delta)$ (см. рис. 6, 7). Единичный полуинтервал $I = [0, 1)$ разделен на область притяжения

$$\text{Spir}_\varepsilon = +G_1^1(\delta) \oplus G_1^1(\delta)^- = G_1^1(\delta)^- \sqcup +G_1^1(\delta) \quad (3.16)$$

(на рис. 6, 7 она заштрихована) и аттрактор

$$\text{Att}_\varepsilon = G_0^1(\delta) \oplus E_0^1(\delta)_+, \quad (3.17)$$

совпадающий в нашем случае с полуинтервалом $I^1(\delta) = t_\delta(I^1)$. Отображение первого возвращения $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon} = S_\varepsilon|_{I^1(\delta)}$ производит перекладывание

$$G_0^1(\delta) \oplus E_0^1(\delta) \xrightarrow{S_\varepsilon} E_1^1(\delta) \oplus G_2^1(\delta) \quad (3.18)$$

полуинтервалов $G_0^1(\delta)$, $E_0^1(\delta) = E_0^1(\delta)_+$ и, следовательно, подобно простому сдвигу S^{-1} . При этом одна часть полуинтервала $G_0^1(\delta)$ отображается снова в $G_0^1(\delta)$, а другая – в полуинтервал $E_0^1(\delta)$. Данное явление представляет собой S -ветвление в графе D_c^1 . Поэтому на рис. 8, 9 из вершины $G_0^1(\delta)$ выходят два ребра.

Рис. 7. Смещение полуинтервалов сдвигом S_ε для параметров $\varepsilon \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, отвечающее динамическому графу D_c^1

Вид двухцветного S_ε -ветвления зависит от принадлежности параметра ε одному из полуинтервалов $[\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ или $[\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Более того, в случае $[\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ в вершине $G_1^1(\delta)$ присутствуют сразу два вида ветвления, но S_ε -ветвление в данном случае вырождено, так как обе части $G_1^1(\delta)^-$ и $+G_1^1(\delta)$ отображаются сдвигом S_ε в один и тот же полуинтервал $G_0^1(\delta)$ (см. рис. 9).

Рис. 8. Динамический граф D_c^1 для параметров $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

Если $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, то двухцветный сдвиг S_ε действует на полуинтервал $G_1^1(\delta) = +G_1^1(\delta) \oplus G_1^1(\delta)^-$ как композиция

$$G_1^1(\delta) \xrightarrow{S_\varepsilon} G_1^1(\delta)^- \oplus +G_1^1(\delta) \xrightarrow{S_\varepsilon} I^1(\delta) \quad (3.19)$$

перекладывания полуинтервалов $+G_1^1(\delta)$, $G_1^1(\delta)^-$ и вложения в полуинтервал $I^1(\delta) = G_0^1(\delta) + E_0^1(\delta)$. В случае $\varepsilon \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ действие сдвига S_ε на полуинтервал $G_1^1(\delta)$ распадается в тройную композицию

$$\begin{aligned} G_1^1(\delta) &\xrightarrow{S_\varepsilon} +G_2^3(\delta) \sqcup (E_2^3(\delta) \oplus G_4^3(\delta)), \\ 1 &\xrightarrow{S_\varepsilon} (E_2^3(\delta) \oplus G_4^3(\delta)) \oplus +G_2^3(\delta) \xrightarrow{S_\varepsilon} G_0^1(\delta) \end{aligned} \quad (3.20)$$

вложения полуинтервала $G_2^3(\delta)^- \subset G_1^1(\delta)$ в указанное в (3.20) множество, перекладывания и еще одного вложения. В (3.20) первое вложение представляет собой не что иное, как сжатие полуинтервала $G_1^1(\delta)$.

Рис. 9. Динамический граф D_c^1 для параметров $\varepsilon \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3)$

На рис. 6, 7 и рис. 8, 9 пунктирными стрелками показаны движения полуинтервалов из области притяжения Spir_ε под действием двухцветного сдвига S_ε , а жирные стрелки указывают на вход в аттрактор Att_ε . Здесь и далее простые и пунктирные стрелки обозначают вложение полуинтервалов. Жирный кружок $\bullet$ в начале стрелки выделяет полуинтервал $G_2^3(\delta)^-$, максимально удаленный – в смысле динамического расстояния (3.11) – от аттрактора Att_ε . Так, для значений параметра $\varepsilon \in C^1$ динамическое расстояние $\varrho_\varepsilon(x)$ равно 2 для точек x из полуинтервала $G_2^3(\delta)^-$ и равно 1 для x из $\text{Spir}_\varepsilon \setminus G_2^3(\delta)^-$, значит, максимальное динамическое расстояние ϱ_ε равно 1 или 2 соответственно для параметров $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ или $\varepsilon \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Динамические графы D_v^1 . Как уже отмечалось выше, такие графы описывают двухцветный сдвиг S_ε с параметрами $\varepsilon \in V^1 = [0, \varepsilon_1)$, и они так же, как и графы D_c^1 , строятся с помощью разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_1)$. Снова полуинтервал V^1 необходимо разбить на два подынтервала $[0, \tau^{-1}\varepsilon_1)$ и $[\tau^{-1}\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ в отношении τ , каждому из которых будет соответствовать свой динамический граф D_v^1 .

Рис. 10. Смещение полуинтервалов сдвигом S_ε для параметров $\varepsilon \in [0, \tau^{-1}\varepsilon_1)$, отвечающее динамическому графу D_c^1

На рис. 10, 11 показаны δ -разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_1, \delta)$, где выбор параметра сдвига δ осуществляется по формуле (3.8).

Если $\varepsilon \in [0, \tau^{-1}\varepsilon_1)$, то S - и S_ε -ветвления имеют вид

$$G_1^1(\delta) \xrightarrow{S_\varepsilon} G_0^1(\delta) \oplus E_0^1(\delta), \quad G_0^1(\delta) \xrightarrow{S_\varepsilon} E_0^1(\delta) \oplus G_1^1(\delta). \quad (3.21)$$

На графе D_v^1 (рис. 12) правое ребро из вершины $G_1^1(\delta)$ разделено на сплошное и пунктирное ребра, относящиеся соответственно к частям $G_1^1(\delta) \cap \text{Att}_\varepsilon$ и

$$G_1^1(\delta) \cap \text{Spir}_\varepsilon \equiv G_0^1(\delta)^- + \tau \pmod{1} = \text{Spir}_\varepsilon.$$

Если $\varepsilon \in [\tau^{-1}\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, то S -ветвление в вершине $G_1^1(\delta)$ сохраняется, а на S_ε -ветвление в вершине $G_0^1(\delta)$ дополнительно налагается S -ветвление

$$G_0^1(\delta) \xrightarrow{S_\varepsilon} G_0^1(\delta) \oplus E_0^1(\delta) \oplus G_1^1(\delta). \quad (3.22)$$

Поэтому на графе D_v^1 (рис. 13) из вершины $G_0^1(\delta)$ выходят три ребра, т. е. имеет место двойное ветвление.

Рис. 11. Смещение полуинтервалов сдвигом S_ε для параметров $\varepsilon \in [\tau^{-1}\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, отвечающее динамическому графу D_c^1

Динамические графы D_c^m и D_v^m произвольного уровня m строятся также с помощью δ -разбиений $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ аналогично рассмотренным графам D_c^1 и D_v^1 .

Рис. 12. Динамический граф D_v^1 для параметров $\varepsilon \in [0, \tau^{-1}\varepsilon_1)$

Динамический граф D_c^m . Динамический граф D_c^m для $m \equiv 1 \pmod{6}$, $m > 1$, изображен на рис. 14. Снова полуинтервалы из области притяжения Spir_ε соединены пунктирными стрелками, а из аттрактора Att_ε – непрерывными стрелками. При этом двойные стрелки $\rightrightarrows$ соединяют полуинтервалы с четными номерами, простые стрелки $\rightarrow$ соединяют с нечетными номерами. Индексы $\pm$ над стрелками указывают, какая часть полуинтервалов (3.13) соединена данной стрелкой, т. е. в этом случае имеет место S_ε -ветвление. Жирный кружок $\bullet$ в начале стрелки выделяет полуинтервал $E_2^m(\delta)$, максимально удаленный от аттрактора Att_ε , а простой кружок $\circ$ указывает на полуинтервал или его часть,

на которых динамическое расстояние $\varrho_\varepsilon(x)$ принимает свой локальный максимум.

S -ветвления в динамическом графе D_c^m имеют вид (ср. с переключиванием (2.19))

$$\begin{aligned} E_{F_{m+1}-2}^m(\delta) \oplus G_{F_{m+2}-2}^m(\delta) &\xrightarrow{S_\varepsilon} G_0^m(\delta) \oplus E_0^m(\delta), \\ E_{F_{m+1}-1}^m(\delta) \oplus G_{F_{m+2}-1}^m(\delta) &\xrightarrow{S_\varepsilon} G_1^m(\delta) \oplus E_1^m(\delta). \end{aligned} \quad (3.23)$$

На подмножествах слева в (3.23) двухцветный сдвиг S_ε совпадает с композицией $S^2 = S \cdot S$, (2.6). Стрелки $\mapsto$ означают наложение левых разбиений на правые.

S_ε -ветвления в графе D_c^m представлены наложениями полуинтервалов:

$$+G_{F_m}^m(\delta) \xrightarrow{S_\varepsilon} +G_{F_m+1}^m(\delta), \quad G_{F_m}^m(\delta)^- \xrightarrow{S_\varepsilon} G_{F_m+2}^m(\delta)^-, \quad (3.24)$$

где $G_k^m(\delta) = +G_k^m(\delta) \oplus G_k^m(\delta)^-$ считается разбитым на полуинтервалы в том же отношении, что и цветной полуинтервал (см. (3.13)) $+G_{F_m}^m(\delta)^- = +G_{F_m}^m(\delta) \oplus G_{F_m}^m(\delta)^-$. Разбиения полуинтервалов G_k^m для $k \neq F_m$ не связаны с включениями в $I_\varepsilon^-, I_\varepsilon^+$.

Рис. 13. Динамический граф D_v^1 для параметров $\varepsilon \in [\tau^{-1}\varepsilon_1, \varepsilon_1)$

При $m = 1$ некоторые вершины-полуинтервалы графа D_c^m совпадают или не реализуются, поэтому в данном случае граф D_c^m вырождается в динамический граф D_c^1 (см. рис. 8, 9).

Динамический граф D_v^m . Для динамического графа D_v^m (см. рис. 12, 13) уровня $m \equiv 1 \pmod{6}$, $m > 1$, его S -ветвления (3.23) остаются без изменения, а S_ε -ветвление (3.24) перемещается на полуинтервал (ср. с (3.13)) $-G_0^m(\delta)^+ = -G_0^m(\delta) \oplus G_0^m(\delta)^+$ и принимает вид

$$-G_0^m(\delta) \xrightarrow{S_\varepsilon} -G_2^m(\delta), \quad G_0^m(\delta)^+ \xrightarrow{S_\varepsilon} G_1^m(\delta)^+. \quad (3.25)$$

Полуинтервалы $G_k^m(\delta) = -G_k^m(\delta) \oplus G_k^m(\delta)^+$ для $k = 1, 2$ разбиты так, что выполнены два условия:

1) $-G_1^m(\delta)$, $G_1^m(\delta)^+$ и следующие за ними аналогичные полуинтервалы содержатся в Spir_ε и Att_ε соответственно, что на графе D_v^m отмечено пунктирной и сплошной стрелками;

2) $-G_2^m(\delta)$, $G_2^m(\delta)^+$ и следующие за ними полуинтервалы содержатся в Att_ε и Spir_ε соответственно, на это указывают сплошная и пунктирная стрелки.

 Рис. 14. Динамический граф D_c^m для $m \equiv 1 \pmod{6}$, $m > 1$

Двойные пунктирные стрелки, выходящие из $G_{F_m+2-1}^m(\delta)$ в полуинтервал $G_1^m(\delta)$, указывают, в какой из его подынтервалов, $-G_1^m(\delta)$ или $G_1^m(\delta)^+$, переводятся сдвигом S_ε соответствующие части из $G_{F_m+2-1}^m(\delta)$ после S -ветвления (3.23).

Динамические графы D_c^m , D_v^m для уровней $m \equiv 4 \pmod{6}$ двойственны графам для $m \equiv 1 \pmod{6}$. При переходе к графам для $m \equiv 4 \pmod{6}$ происходит инверсия полуинтервалов $G_k^m(\delta) \rightleftharpoons E_k^m(\delta)$ и вектор сдвига у S_ε меняет направление на противоположное. Указанная двойственность проявляется в геометрической симметрии динамических графов и их ветвлений.

Динамический граф D_c^m (рис. 15) для уровней $m \equiv 4 \pmod{6}$ имеет S -ветвления (ср. с перекладыванием полуинтервалов (2.17))

$$\begin{aligned} E_{F_m+2-2}^m(\delta) \oplus G_{F_m+1-2}^m(\delta) &\xrightarrow{S_\varepsilon} G_0^m(\delta) \oplus E_0^m(\delta), \\ E_{F_m+2-1}^m(\delta) \oplus G_{F_m+1-1}^m(\delta) &\xrightarrow{S_\varepsilon} G_1^m(\delta) \oplus E_1^m(\delta) \end{aligned} \quad (3.26)$$

и S_ε -ветвление вида

$$-E_{F_m+1}^m(\delta) \xrightarrow{S_\varepsilon} -E_{F_m+1+2}^m(\delta), \quad E_{F_m+1}^m(\delta)^+ \xrightarrow{S_\varepsilon} E_{F_m+1+1}^m(\delta)^+. \quad (3.27)$$

В динамическом графе D_v^m (рис. 16) для $m \equiv 4 \pmod{6}$ сохраняются S -ветвления (3.26), а S_ε -ветвление перемещается на полуинтервал

$$-E_0^m(\delta)^+ = -E_0^m(\delta) \oplus E_0^m(\delta)^+$$

и имеет вид (ср. с (3.25))

$$-E_0^m(\delta) \xrightarrow{S_\varepsilon} -E_2^m(\delta), \quad E_0^m(\delta)^+ \xrightarrow{S_\varepsilon} E_1^m(\delta)^+. \quad (3.28)$$

Рис. 15. Динамический граф D_v^m , $m \equiv 1 \pmod{6}$, $m > 1$

Разбиения полуинтервалов $E_k^m(\delta) = -E_k^m(\delta) + E_k^m(\delta)^+$ для $k = 1, 2$ и следующих за ними полуинтервалов снабжены сплошными и пунктирными стрелками со знаками $+$, $-$, указывающими на принадлежность частей этих разбиений множеств Att_ε и Spir_ε . Двойные пунктирные стрелки, выходящие из $G_{F_{m+1}-1}^m(\delta)$, указывают на то, что полуинтервалы $-G_{F_{m+1}-1}^m(\delta)$ и $G_{F_{m+1}-1}^m(\delta)^+$ переводятся двухцветным сдвигом S_ε соответственно в множества Spir_ε и Att_ε .

3.7. Динамические графы и двухцветный сдвиг. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. В случае $m \equiv 1 \pmod{6}$ двухцветный сдвиг $S_\varepsilon = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}$, (3.1), представим динамическими графами D_c^m или D_v^m , изображенными на рис. 8, 9, рис. 14 или рис. 12, 13, рис. 15, если параметр ε принадлежит полуинтервалам C^m или V^m , (3.2), соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы состоит в проверке:

- 1) включения по одному разу всех полуинтервалов разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$, (3.6), в качестве вершин графов D_c^m , D_v^m ;
- 2) правильности раскраски полуинтервалов в динамических графах или принадлежности полуинтервалов из $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ множествам $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$, $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$;
- 3) соответствия сложному сдвигу S_ε ребер, S - и S_ε -ветвлений графов из п. 3.5.

Проверим, что в случае $m > 1$ и $\varepsilon \in C^m$ все полуинтервалы $G_k^m(\delta)$, $0 \leq k < F_{m+2}$, и $E_k^m(\delta)$, $0 \leq k < F_{m+1}$, из δ -разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$, (3.6), (2.9), присутствуют по одному разу в графе D_c^m (см. рис. 14). Поскольку четность чисел Фибоначчи F_n определяется сравнениями

$$F_n \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2}, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{3}, \\ 1 \pmod{2}, & \text{если } m \equiv 1, 2 \pmod{3}, \end{cases} \quad (3.29)$$

 Рис. 16. Динамический граф D_c^m , $m \equiv 4 \pmod{6}$

то число Фибоначчи F_{m+2} четное, а числа F_{m+1} , F_m нечетные. Учитывая неравенство $F_{m+1} > 1$, видим, что цепи

$$\begin{aligned} G_0^m(\delta) &\rightarrow G_2^m(\delta) \rightarrow \cdots \rightarrow G_{F_{m+2}-2}^m(\delta), \\ G_1^m(\delta) &\rightarrow \cdots \rightarrow G_{F_m}^m(\delta) \xrightarrow{-} \cdots \rightarrow G_{F_{m+2}-1}^m(\delta) \end{aligned}$$

включают в себя все полуинтервалы $G_k^m(\delta)$, а цепи

$$\begin{aligned} E_0^m(\delta) &\rightarrow E_1^m(\delta) \rightarrow \cdots \rightarrow E_{F_{m+1}-2}^m(\delta), \\ E_2^m(\delta) &\rightarrow \cdots \rightarrow E_{F_{m+1}-1}^m(\delta) \end{aligned}$$

содержат все полуинтервалы $E_k^m(\delta)$ из δ -разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$. Если $m = 1$, то δ -разбиение $\text{Til}(\varepsilon_1, \delta)$ (см. рис. 3) состоит из полуинтервалов $G_0^1(\delta)$, $G_1^1(\delta)$, $E_0^1(\delta)$ и все они содержатся в качестве вершин графа D_c^1 (см. рис. 8, 9).

Раскраска полуинтервалов δ -разбиений $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ определяется положением параметра $\varepsilon \in C^m$ относительно множества

$$X^m(\delta) = G_0^m(\delta) \sqcup E_0^m(\delta) \sqcup G_{F_m}^m(\delta) \pmod{1}. \quad (3.30)$$

Покажем, что $X^m(\delta)$ представляет собой последовательность приложенных по mod 1 друг к другу полуинтервалов, т. е. координаты конца полуинтервалов и начала следующих за ними полуинтервалов сравнимы по mod 1. Другими словами, мы отождествляем единичный полуинтервал $I = [0, 1)$ с окружностью $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Примыкание полуинтервалов $G_0^m(\delta)$ и $E_0^m(\delta)$ вытекает непосредственно из формул (2.10), (2.11). Бескоординатный способ определения последовательности соседних полуинтервалов в $X^m(\delta)$, (3.30), основан на применении алгоритма 1 для нечетных m (см. п. 2.4). По первому этапу алгоритма строим последовательность $G_0^m(\delta)$, $E_0^m(\delta)$, $G_k^m(\delta) \pmod{1}$ и затем согласно формуле (2.21)

вычисляем номер

$$k = 0^{-*} = -F_{m+1} \pmod{F_{m+2}} = F_m.$$

Теперь для $\varepsilon \in C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2})$, (3.2), рассмотрим полуинтервал

$$Y^m(\delta) = E_0^m(\delta) \sqcup G_{F_m}^m(\delta) \pmod{1} \quad (3.31)$$

из $X^m(\delta)$, (3.30). Для $\varepsilon = \varepsilon_m$ по формуле (3.8) находим $\delta = g_m$, где g_m – длина полуинтервалов $G_k^m(\delta)$. Докажем равенства

$$Y^m(g_m) = Y^m(g_m)_+ = I_{\varepsilon_m}^+, \quad (3.32)$$

где $Y^m(g_m)_+$ – пересечение $Y^m(g_m)$ с полуинтервалом $I_{\varepsilon_m}^+ = [\varepsilon_m, 1)$. В силу (2.4) имеем длину полуинтервала $Y^m(g_m)$:

$$|Y^m(\delta)| = |E_0^m| + |G_{F_m}^m| = e_m + g_m = e_{m-1} = 1 - \varepsilon_m. \quad (3.33)$$

Ввиду соотношений (2.11), (2.2) левый конец полуинтервала E_0^m имеет координату $\langle -F_{m+2}\tau \rangle = 1 - \tau^{-(m+2)}$, а по формуле (2.4) длина полуинтервала $G_{F_m}^m$ равна $g_m = \tau^{-(m+1)}$. Поскольку полуинтервал $E_0^m(g_m)$ имеет вид $E_0^m - g_m$, (3.7), (3.6), то его левая координата будет равна $1 - \tau^{-m} = \varepsilon_m$. Из этого равенства и (3.33) вытекают оба равенства в (3.32).

В общем случае для $\varepsilon \in C^m$ по определению (3.8) полуинтервалы $Y^m(\delta)$, (3.31), и $Y^m(g_m)$ связаны между собой сдвигом $Y^m(\delta) = Y^m(g_m) - (\varepsilon - \varepsilon_m)$. Поскольку длина $|G_{F_m}^m(\delta)| = |G_{F_m}^m|$ равна g_m , (2.4), и по формуле (2.2) выполнено $g_m = \varepsilon_{m+2} - \varepsilon_m$, то получаем равенство

$$Y^m(\delta)_+ = I_{\varepsilon}^+ \quad (3.34)$$

для всех $\varepsilon \in C^m$, где

$$Y^m(\delta)_+ = E_0^m(\delta) \sqcup {}^+G_{F_m}^m(\delta), \quad {}^+G_{F_m}^m(\delta) = G_{F_m}^m(\delta) \cap I_{\varepsilon}^+.$$

Из равенства (3.34) следует, что, кроме $E_0^m(\delta)$ и ${}^+G_{F_m}^m(\delta)$, все оставшиеся полуинтервалы δ -разбиения $\text{Tit}(\varepsilon_m, \delta)$ принадлежат полуинтервалу I_{ε}^- , тем самым, найдена раскраска динамического графа D_c^m .

Рассмотрим ветвления графа D_c^m для $m > 1$. Полуинтервалы $E_{F_{m+1}-2}^m(\delta)$, $G_{F_{m+2}-2}^m(\delta)$ и $E_{F_{m+1}-1}^m(\delta)$, $G_{F_{m+2}-1}^m(\delta)$ принадлежат I_{ε}^- в силу неравенства $F_{m+1} > 2$, и, следовательно, ограничение на них двухцветного сдвига S_{ε} совпадает с S . Поэтому первое S -ветвление из (3.23) – это переключивание полуинтервалов (2.19), а второе S -ветвление получается по формулам (2.10), (2.11), если действовать на равенство (2.19) простым сдвигом S .

Пусть $m = 1$. Согласно (3.34) δ -разбиение $\text{Tit}(\varepsilon_1, \delta)$ имеет следующую раскраску:

$$G_0^1(\delta), G_1^1(\delta)^- \subset I_{\varepsilon}^-, \quad E_0^1(\delta), {}^+G_1^1(\delta) \subset I_{\varepsilon}^+. \quad (3.35)$$

По формуле (2.19) множество $\text{Att}_{\varepsilon} = G_0^1(\delta) \oplus E_0^1(\delta)$ является полуинтервалом, и в силу (3.35) справедливы равенства

$$S_{\varepsilon}(\text{Att}_{\varepsilon}) = E_1^1(\delta) \sqcup G_2^1(\delta) = \text{Att}_{\varepsilon}, \quad (3.36)$$

т. е. действие двухцветного сдвига S_ε на множестве Att_ε сводится к перекладыванию его полуинтервалов $G_0^1(\delta)$ и $E_0^1(\delta)$. Из этого факта вытекает существование S -ветвления (3.18).

Учитывая (3.35) и (3.36), получаем включение

$$S_\varepsilon(G_1^1(\delta)) = G_2^1(\delta) \subset \text{Att}_\varepsilon. \quad (3.37)$$

Теперь подействуем двухцветным сдвигом S_ε на полуинтервал $G_1^1(\delta)$ и воспользуемся разложением (3.19). Разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_3)$, (2.9) (см. рис. 3), содержит $F_{m+2} = 5$ и $F_{m+1} = 3$ полуинтервалов вида G_k^3 и E_k^3 соответственно. Поэтому можем записать

$$S^2(G_1^1(\delta)) = G_4^3(\delta) \sqcup S(E_3^3(\delta) \sqcup G_5^3(\delta)) \pmod{1},$$

где согласно (2.19) выполнено $E_3^3(\delta) \sqcup G_5^3(\delta) = G_0^3(\delta) \sqcup E_0^3(\delta)$, а по формулам (2.10), (2.11) последняя сумма совпадает с полуинтервалом $E_0^1(\delta)$. Отсюда для $S^2(G_1^1(\delta))$ вытекает разбиение

$$S^2(G_1^1(\delta)) = G_4^3(\delta) \sqcup E_1^1(\delta) \pmod{1},$$

из которого следует равенство $S^2(G_1^1(\delta)) \cap G_1^1(\delta) = G_4^3(\delta)$. Из этого равенства, а также из раскраски δ -разбиения $\text{Til}(\varepsilon_1, \delta)$, (3.35), и включения (3.37) получаем S_ε -ветвление (3.19), (3.20).

Теперь, учитывая формулы рекурсии (2.10) и (2.11), видим, что сложный сдвиг S_ε для $\varepsilon \in C^m$ представляется динамическими графами D_c^m (см. рис. 8, 9 и рис. 14).

Динамические графы D_v^m (см. рис. 12, 13 и рис. 15) отличаются от рассмотренных графов D_c^m своей окраской и перемещением S_ε -ветвления из полуинтервала $G_{F_m}^m(\delta)$ на $G_0^m(\delta)$. Рассмотрим I_ε^+ -часть полуинтервала $X^m(\delta)$, (3.30), для параметра ε из $V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m)$, (3.2). Для таких ε по определению (3.8) имеем $\delta = g_m$. Покажем, что полуинтервал

$$X^m(g_m)_+ = G_0^m(g_m)^+ \sqcup E_0^m(g_m) \sqcup G_{F_m}^m(g_m) \pmod{1},$$

где $G_0^m(g_m)^+$ – пересечение $G_0^m(g_m)$ с полуинтервалом I_ε^+ , удовлетворяет равенству

$$X^m(g_m)_+ = I_\varepsilon^+, \quad (3.38)$$

если $\varepsilon \in V^m$. Для доказательства (3.38) достаточно проверить равенство

$$|X^m(g_m)_+| = 1 - \varepsilon. \quad (3.39)$$

По определению вложения t_{g_m} , (3.7), (3.6), имеем $G_0^m(g_m) = G_0^m - g_m$, где в силу (2.4) $g_m = 1 - \varepsilon_{m+1}$ и по (2.10), (2.2) выполнено $G_0^m = [\langle -F_m\tau \rangle, \langle -F_{m+2}\tau \rangle) = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2})$ для нечетных уровней m . Используя рекуррентное соотношение (2.2) для чисел ε_m , выводим для полуинтервала $G_0^m(g_m)$ равенства

$$G_0^m(g_m) = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m) = V^m. \quad (3.40)$$

Поскольку по условию имеем $\varepsilon \in V^m$, то из явной формулы (3.40) для I_ε^+ -части полуинтервала $G_0^m(g_m)$ получаем также явную формулу $G_0^m(g_m)_+ = [\varepsilon, \varepsilon_m)$. Применяя снова (2.4) и (2.2), получаем равенство (3.39):

$$|X^m(g_m)_+| = (\varepsilon_m - \varepsilon) + e_m + g_m = 1 - \varepsilon.$$

Из раскраски (3.38) полуинтервалов δ -разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ вытекают S_ε -ветвления (3.25) для $m > 1$ и S_- , S_ε -ветвления (3.21), (3.22) для $m = 1$. Теорема доказана.

Рис. 17. Динамический граф D_v^m , $m \equiv 4 \pmod{6}$

ТЕОРЕМА 3.2. Если $m \equiv 4 \pmod{6}$, то двухцветный сдвиг $S_\varepsilon = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}$, (3.1), представим динамическими графами D_c^m для $\varepsilon \in C^m$ и D_v^m для $\varepsilon \in V^m$ (см. (3.2)), изображенными соответственно на рис. 16 и рис. 17.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по той же схеме, что и в теореме 3.1 для уровня $m \equiv 1 \pmod{6}$. По условию m четное, поэтому δ -разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$, (3.6), (2.5), состоит из полуинтервалов $G_k^m(\delta)$, $0 \leq k < F_{m+1}$, и $E_k^m(\delta)$, $0 \leq k < F_{m+2}$. Поскольку согласно формуле (3.29) число Фибоначчи F_{m+1} нечетное, а числа F_{m-1} , F_{m+2} четные и $F_m > 2$, то непосредственно из вида графов D_c^m , D_v^m следует, что они в качестве своих вершин содержат ровно по одному все полуинтервалы δ -разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$.

Для уровня $m \equiv 4 \pmod{6}$ по определению (3.8) вектор сдвига δ вложения t_δ не зависит от параметра ε из полуинтервала $W^m = V^m \oplus C^m$. Поэтому рассмотрение динамических графов D_v^m и D_c^m удастся объединить. Раскраску полуинтервалов δ -разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$ определяет только положение параметра $\varepsilon \in W^m$ относительно множества (ср. с (3.30))

$$X^m(\delta) \equiv E_0^m(\delta) \sqcup E_{F_{m+1}}^m(\delta) \sqcup G_{F_{m-1}}^m(\delta) \pmod{1}. \quad (3.41)$$

Используя алгоритм 1 для четных m (см. п. 2.4), убеждаемся, что $X^m(\delta)$ – последовательность примыкающих друг к другу полуинтервалов. Действительно, согласно первому этапу алгоритма (2.20) выписываем следующую последовательность полуинтервалов:

$$E_0^m, G_{0-*}^m, E_{0-*}^m, G_{0-2*}^m \pmod{1}. \quad (3.42)$$

По формуле (2.21) вычисляем соседние индексы

$$\begin{aligned} 0^{-*} &\equiv F_m \pmod{F_{m+2}} = F_{m+1}, \\ 0^{-2*} &= (F_{m+1})^{-*} \equiv F_{m+1} - F_m \pmod{F_{m+2}} = F_{m-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $0^{-*} \geq F_{m+1}$, то по второму этапу алгоритма 1 полуинтервал $G_{0^{-*}}^m$ последовательности (3.42) вычеркивается, таким образом, убеждаемся, что $X^m(\delta)$, (3.41), – полуинтервал по mod 1.

Проверим выполнимость соотношений

$$E_0^m(\delta) \equiv V^m \pmod{1}, \quad E_{F_{m+1}}^m(\delta) \equiv C^m \pmod{1}. \quad (3.43)$$

С помощью формул (2.4) и (3.3) вычисляем длины полуинтервалов из соотношений (3.43):

$$|E_0^m(\delta)| = e_m = \tau^{-(m+1)}, \quad |V^m| = |C^m| = \tau^{-(m+1)}. \quad (3.44)$$

Видим, что все эти полуинтервалы имеют одинаковую длину, и по определению (3.2) получаем $V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m)$, $C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2})$. Согласно (2.8) и (2.2) полуинтервал E_0^m имеет начальную координату, равную $\langle -F_{m+1} \cdot \tau \rangle = \varepsilon_{m+1}$. Для любого $\varepsilon \in W^m$ по формулам (3.9) и (2.4) находим $\delta = g_{m-1} = 1 - \varepsilon_m$. В силу (3.6) записываем $E_0^m(\delta) = E_0^m - g_{m-1}$. Поэтому полуинтервал $E_0^m(\delta)$ ввиду соотношения (2.2) имеет начальную координату $\varepsilon_{m+1} - g_{m-1} = \varepsilon_{m-1}$, совпадающую с началом полуинтервала V^m . Отсюда и из равенства длин (3.44) выводим первое равенство в (3.43), из которого в совокупности с (3.41) вытекает второе соотношение в (3.43).

Поскольку полуинтервал $W^m = V^m \oplus C^m$ имеет вид $[\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_{m+2})$ и по формуле (2.4) длина полуинтервала $G_{F_{m-1}}^m(\delta)$ равна $|G_{F_{m-1}}^m(\delta)| = 1 - \varepsilon_{m+2}$, то из соотношений (3.43) для полуинтервала $X^m(\delta)$, (3.41), следует равенство $X^m(\delta) = I_{\varepsilon_{m-1}}^+$, из которого, в свою очередь, вытекает более общее равенство

$$X^m(\delta)_+ = I_\varepsilon^+, \quad (3.45)$$

где

$$X^m(\delta)_+ \equiv \begin{cases} E_0^m(\delta)^+ \sqcup E_{F_{m+1}}^m(\delta) \sqcup G_{F_{m-1}}^m(\delta) \pmod{1} & \text{для } \varepsilon \in V^m, \\ E_{F_{m+1}}^m(\delta) \sqcup G_{F_{m-1}}^m(\delta) \pmod{1} & \text{для } \varepsilon \in C^m. \end{cases} \quad (3.46)$$

Равенство (3.45) определяет раскраску δ -разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$: полуинтервалы из разбиения $X^m(\delta)_+$, (3.46), и только они содержатся в I_ε^+ для $\varepsilon \in W^m$.

Из (3.45), (3.46) и из формулы перекладывания полуинтервалов (2.17) вытекают S - и S_ε -ветвления (3.26)–(3.28) динамических графов D_c^m , D_v^m (см. рис. 16, 17) для $m \equiv 4 \pmod{6}$, а из формул сдвига (2.7), (2.8) следует предсказуемость указанными графами двухцветного сдвига S_ε для всех $\varepsilon \in W^m$. Теорема доказана.

§ 4. Аттрактор и его область притяжения

4.1. Аттрактор. В п. 3.5 приведено формальное определение аттрактора Att_ε как подмножества полуинтервалов $G_k^m(\delta)$, $E_k^m(\delta)$ из δ -разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$, соединенных сплошными ребрами в динамических графах D_c^m , D_v^m (см. рис. 8–17). Основные свойства аттрактора Att_ε будут доказаны в § 5. Здесь

мы дадим явное описание аттрактора Att_ε и вычислим его меру. С этой целью удобно аттрактор Att_ε представить в виде цепей из последовательных полуинтервалов, соединенных ребрами графов D_c^m , D_v^m .

Пусть $m \equiv 1 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in C^m$, (3.2). Согласно динамическим графам D_c^m (см. рис. 8 и рис. 14) для аттрактора Att_ε имеем разбиение

$$\text{Att}_\varepsilon = \widehat{G_0^m(\delta)} \sqcup \widehat{E_0^m(\delta)} \quad (4.1)$$

на цепи $\widehat{G_0^m(\delta)}$, $\widehat{E_0^m(\delta)}$, которые в обозначениях из п. 3.5 можно записать в виде

$$\begin{aligned} \widehat{G_0^m(\delta)} &= G_0^m(\delta) \twoheadrightarrow G_{F_{m+2}-2}^m(\delta), \\ \widehat{E_0^m(\delta)} &= E_0^m(\delta)_+ \rightarrow E_1^m(\delta) \rightarrow E_{F_{m+1}-2}^m(\delta), \end{aligned} \quad (4.2)$$

если $m > 1$, и в виде

$$\widehat{G_0^1(\delta)} = G_0^1(\delta), \quad \widehat{E_0^1(\delta)} = E_0^1(\delta)_+, \quad (4.3)$$

если $m = 1$. Здесь и далее двойные $\twoheadrightarrow$ и простые $\rightarrow$ стрелки соединяют соответственно полуинтервалы с четными и нечетными индексами.

Пусть $m \equiv 1 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in V^m$, (3.2). Согласно динамическим графам D_v^m (см. рис. 13 и рис. 15) в аттракторе Att_ε появляется S_ε -ветвление (см. п. 3.5), что приводит к его перестройке

$$\text{Att}_\varepsilon = \widehat{-G_0^m(\delta)} \sqcup \widehat{G_0^m(\delta)^+} \sqcup \widehat{E_0^m(\delta)}, \quad (4.4)$$

состоящей из цепей

$$\begin{aligned} \widehat{-G_0^m(\delta)} &= -G_0^m(\delta) \twoheadrightarrow -G_{F_{m+2}-2}^m(\delta), \\ \widehat{G_0^m(\delta)^+} &= G_0^m(\delta)^+ \rightarrow G_1^m(\delta)^+ \rightarrow G_{F_m}^m(\delta)^+ \\ &\quad \rightarrow G_{F_{m+1}}^m(\delta)^+ \twoheadrightarrow G_{F_{m+2}-2}^m(\delta)^+, \\ \widehat{E_0^m(\delta)} &= E_0^m(\delta)_+ \rightarrow E_1^m(\delta) \rightarrow E_{F_{m+1}-2}^m(\delta), \end{aligned} \quad (4.5)$$

если $m > 1$, и цепей

$$\begin{aligned} \widehat{-G_0^1(\delta)} &= -G_0^1(\delta), \quad \widehat{G_0^1(\delta)^+} = G_0^1(\delta)^+ \rightarrow G_1^1(\delta)^+, \\ \widehat{E_0^1(\delta)} &= E_0^1(\delta)_+, \end{aligned} \quad (4.6)$$

если $m = 1$.

Пусть $m \equiv 4 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in C^m$, (3.2). Из динамических графов D_c^m (см. рис. 16) следует

$$\text{Att}_\varepsilon = \widehat{G_0^m(\delta)} \sqcup \widehat{E_0^m(\delta)}, \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{G_0^m(\delta)} &= G_0^m(\delta) \twoheadrightarrow G_{F_{m-1}}^m(\delta)_+ \rightarrow G_{F_{m-1}+1}^m(\delta) \rightarrow G_{F_{m+1}-2}^m(\delta), \\ \widehat{E_0^m(\delta)} &= E_0^m(\delta) \twoheadrightarrow E_{F_{m+2}-2}^m(\delta). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Пусть $m \equiv 4 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in V^m$, (3.2). Тогда согласно динамическому графу D_v^m (см. рис. 17) S_ε -ветвление преобразует аттрактор Att_ε , (4.7), к следующему виду:

$$\text{Att}_\varepsilon = \widehat{G_0^m(\delta)} \sqcup \widehat{-E_0^m(\delta)} \sqcup \widehat{E_0^m(\delta)}^+, \quad (4.9)$$

где цепь $\widehat{G_0^m(\delta)}$ осталась без изменений, (4.8), а $\widehat{E_0^m(\delta)}$ раздвоилась на цепи

$$\widehat{-E_0^m(\delta)} = \widehat{-E_0^m(\delta)} \twoheadrightarrow \widehat{-E_{F_{m+2}-2}^m(\delta)}, \quad (4.10)$$

$$\widehat{E_0^m(\delta)}^+ = \widehat{E_0^m(\delta)}^+ \rightarrow \widehat{E_1^m(\delta)}^+ \twoheadrightarrow \widehat{E_{F_{m+1}}^m(\delta)}_+^+ \rightarrow \widehat{E_{F_{m+1}+1}^m(\delta)}^+ \twoheadrightarrow \widehat{E_{F_{m+2}-2}^m(\delta)}^+.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть аттрактор Att_ε определен равенствами (4.1), (4.4), (4.7), (4.9), и пусть $\text{Spir}_\varepsilon = I \setminus \text{Att}_\varepsilon$ – его дополнение до единичного полуинтервала $I = [0, 1)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) аттрактор Att_ε замкнут,

$$S_\varepsilon(\text{Att}_\varepsilon) \subseteq \text{Att}_\varepsilon, \quad (4.11)$$

относительно действия двухцветного сдвига S_ε , (3.1);

2) для любого $\varepsilon \in I$ существует такая степень $k(\varepsilon)$, что выполняются включения

$$S_\varepsilon^k(\text{Spir}_\varepsilon) \subseteq \text{Att}_\varepsilon \quad (4.12)$$

для всех $k \geq k(\varepsilon)$, и, следовательно, Spir_ε является областью притяжения аттрактора Att_ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся динамическими графами D_c^m , D_v^m (см. рис. 8–17). Включение (4.11) вытекает из того факта, что из образующих аттрактор Att_ε полуинтервалов не выходит ни одна стрелка. Согласно динамическим графам множество Spir_ε состоит из конечного набора полуинтервалов $E_k^m(\delta)$, $G_k^m(\delta)$. Двигаясь по пунктирным стрелкам, т.е. оставаясь в Spir_ε , каждый из этих полуинтервалов можно пройти не более двух раз. Отсюда получаем включение (4.12). Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Двухцветные сдвиги S_ε имеют ранг вращения $d = 2$. Известно [3], что такие двухцветные сдвиги являются отображениями конечного типа. Отсюда и из (4.11) сразу следуют включения (4.12). Доказательство предложения 4.1 показывает, как включения (4.12) вытекают непосредственно из динамических графов D_c^m , D_v^m . Более того, используя динамические графы, можно описать строение области притяжения Spir_ε аналогично тому, как это было сделано для аттрактора Att_ε .

4.2. Мера аттрактора. Определим меру $|\text{Att}_\varepsilon|$ аттрактора Att_ε из п. 4.1 как сумму длин входящих в него полуинтервалов. Для вычисления $|\text{Att}_\varepsilon|$ необходимо знать длины цепей $\# \widehat{G_0^m(\delta)}$, $\# \widehat{E_0^m(\delta)}$ и других, образующих аттрактор $|\text{Att}_\varepsilon|$. Длина цепи по определению – это количество ее полуинтервалов.

Пусть $m \equiv 1 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2})$, (3.2). Согласно формулам (4.2) и (4.3) имеем длины цепей $\widehat{G_0^m(\delta)}$, $\widehat{E_0^m(\delta)}$:

$$\# \widehat{G_0^m(\delta)} = \frac{1}{2} F_{m+2}, \quad \# \widehat{E_0^m(\delta)} = \frac{1}{2} (F_{m+1} + 1). \quad (4.13)$$

Поскольку одноименные полуинтервалы имеют равные длины и при этом выполнено $|G_0^m(\delta)| = |G_0^m|$ и $|E_0^m(\delta)| = |E_0^m|$, то в силу (2.4) записываем

$$|\text{Att}_\varepsilon| = \frac{1}{2}F_{m+2}|G_0^m| + \frac{1}{2}(F_{m+1} + 1)|E_0^m| = \frac{1}{2}\tau^{-(m+2)}(F_{m+2}\tau + F_{m+1} + 1).$$

Степени τ^n золотого сечения $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ и числа Фибоначчи F_n связаны соотношением

$$\tau^n = F_{n-1} + F_n\tau \quad (4.14)$$

для $n \geq 1$. Применяя (4.14) к $|\text{Att}_\varepsilon|$, находим меру аттрактора:

$$|\text{Att}_\varepsilon| = \frac{1}{2}(1 + \tau^{-(m+2)}). \quad (4.15)$$

Пусть $m \equiv 1 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m)$, (3.2). Цепи аттрактора Att_ε , (4.5), (4.6), имеют длины

$$\# \widehat{G_0^m(\delta)^-} = \frac{1}{2}F_{m+2}, \quad \# \widehat{G_0^m(\delta)^+} = \frac{1}{2}F_{m+2} + 1, \quad \# \widehat{E_0^m(\delta)} = \frac{1}{2}(F_{m+1} + 1), \quad (4.16)$$

и длины составляющих их полуинтервалов ввиду формул (3.13) и (2.4) имеют вид

$$|G_0^m(\delta)^-| = \varepsilon - \varepsilon_{m-1}, \quad |G_0^m(\delta)^+| = \varepsilon_m - \varepsilon, \quad |E_0^m(\delta)| = |E_0^m| = \tau^{-(m+2)}. \quad (4.17)$$

Используя равенства (4.16), (4.17), для $\varepsilon \in V^m$ вычисляем меру аттрактора:

$$\begin{aligned} |\text{Att}_\varepsilon| &= \frac{1}{2}F_{m+2}(\varepsilon - \varepsilon_{m-1}) + \frac{1}{2}(F_{m+2} + 1)(\varepsilon_m - \varepsilon) + \frac{1}{2}(F_{m+1} + 1)\tau^{-(m+2)} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \tau^{-(m+2)}) + (\varepsilon_m - \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.18)$$

поскольку ввиду (3.3) можем записать, что $\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1} = |V^m| = \tau^{-(m+1)}$.

Пусть $m \equiv 4 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in C^m$. Согласно (4.8) имеем

$$\# \widehat{G_0^m(\delta)} = \frac{1}{2}(F_{m+1} + 1), \quad \# \widehat{E_0^m(\delta)} = \frac{1}{2}F_{m+2} \quad (4.19)$$

и, применяя формулы (2.4), для меры $|\text{Att}_\varepsilon|$ вновь получаем равенство (4.15).

Наконец, пусть $m \equiv 4 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m)$, (3.2). Применяя представления (4.10), находим длины цепей:

$$\# \widehat{G_0^m(\delta)} = \frac{1}{2}(F_{m+1} + 1), \quad \# \widehat{E_0^m(\delta)^-} = \frac{1}{2}F_{m+2}, \quad \# \widehat{E_0^m(\delta)^+} = \frac{1}{2}F_{m+2} + 1, \quad (4.20)$$

а также длины соответствующих полуинтервалов:

$$|G_0^m(\delta)| = |G_0^m| = \tau^{-(m+2)}, \quad |E_0^m(\delta)^-| = \varepsilon - \varepsilon_{m-1}, \quad |E_0^m(\delta)^+| = \varepsilon_m - \varepsilon. \quad (4.21)$$

В этом случае, как видно, мы снова возвращаемся к формуле (4.18).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. 1) Пусть аттрактор Att_ε определен равенствами (4.1), (4.4), (4.7) и (4.9). Тогда его мера $|\text{Att}_\varepsilon|$ вычисляется по формуле

$$|\text{Att}_\varepsilon| = \frac{1}{2}(1 + \tau^{-(m+2)}) \quad (4.22)$$

для ε из полуинтервалов $C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2})$, (3.2), и по формуле

$$|\text{Att}_\varepsilon| = \frac{1}{2}(1 + \tau^{-(m+2)}) + (\varepsilon_m - \varepsilon) \quad (4.23)$$

для $\varepsilon \in V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m)$, (3.2), и любого уровня $m \equiv 1 \pmod{3}$, $m \geq 1$.

2) Мера аттрактора $|\text{Att}_\varepsilon|$ как функция от $\varepsilon \in I$ непрерывна, убывает на полуинтервалах V^m , постоянна на C^m и имеет предельное значение

$$\lim_{\varepsilon \uparrow 1} |\text{Att}_\varepsilon| = \frac{1}{2}. \quad (4.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (4.22) и (4.23) были доказаны выше. При $\varepsilon \uparrow 1$ индекс m содержащего ε полуинтервала $W^m = V^m \oplus C^m$, (3.2), ввиду (2.2) стремится к бесконечности, и формула (4.24) вытекает из (4.22) и (4.23). Оставшиеся утверждения следуют из (4.22), (4.23) и из разложения (3.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В § 6 будет установлена связь между мерой аттрактора $|\text{Att}_\varepsilon|$ и распределением точек на единичном полуинтервале I под действием двухцветного сдвига S_ε . Поэтому естественно возникает задача о вычислении меры аттрактора $|\text{Att}_\varepsilon|$. Существование подобной связи для двухцветных сдвигов $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ (см. (1.1)) в случае ранга вращения $d = 3$ остается открытой проблемой. Здесь ситуация усложняется появлением аттракторов Att_ε , являющихся канторовыми множествами. Если $d = 2$, как для сдвига S_ε , то аттрактор Att_ε всегда состоит из конечного числа полуинтервалов.

§ 5. Отображения первого возвращения и интегральные отображения

Отображение первого возвращения $d^m S = S|I^m$ или ограничение простого сдвига S на полуинтервал $I^m = G_0^m \oplus E_0^m$ из $I = [0, 1)$ подобно исходному сдвигу S или ему обратному сдвигу S^{-1} в зависимости от четности уровня m . В предложении 5.1 будет показано, что указанным свойством также обладают ограничения $d^m S_\varepsilon = S_\varepsilon|I^m(\delta)$ двухцветного сдвига S_ε на полуинтервалы $I^m(\delta) = G_0^m(\delta) \oplus E_0^m(\delta)$. Отсюда по теореме 5.1 будет следовать, что отображение первого возвращения $S_\varepsilon|I^m(\delta)$ является автоморфизмом аттрактора Att_ε , изоморфным интегральному отображению T_ε , построенному по отображению простого сдвига $S^{\pm 1}$ и некоторой функции d_ε . Это дает полное описание действия двухцветного сдвига S_ε на аттракторе Att_ε . Так, например, в теореме 5.2 будет доказано, что для любой начальной точки x из аттрактора Att_ε точки ее орбиты $x_k = S_\varepsilon^k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, равномерно распределены на множестве Att_ε относительно некоторой инвариантной меры.

5.1. Отображения первого возвращения. Для уровня $m \equiv 1 \pmod{3}$, $m \geq 1$, из вложенного δ -разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m, \delta)$, (3.6), выделим полуинтервал

$$I^m(\delta) = G_0^m(\delta) \oplus E_0^m(\delta) \quad (5.1)$$

и рассмотрим для $\varepsilon \in W^m = V^m \oplus C^m$, (3.2), ограничение двухцветного сдвига $S_\varepsilon = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$, (3.1), на полуинтервал $I^m(\delta)$ или его отображение первого возвращения

$$d^m S_\varepsilon = S_\varepsilon|I^m(\delta). \quad (5.2)$$

В п. 2.5 были определены отображения первого возвращения $d^m S = S|I^m$ для простого сдвига S , (2.6), и описаны их свойства (2.35). Обоснование возможности переноса понятия отображения первого возвращения на двухцветный сдвиг S_ε приведем ниже, опираясь на тот факт, что отображение $d^m S_\varepsilon$, (5.2), изоморфно простому сдвигу $S^{\pm 1}$.

Пусть $m \equiv 1 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in C^m$. Из динамических графов D_c^m (см. рис. 8, 9 и рис. 14) следует, что ограничение двухцветного сдвига S_ε на полуинтервал $I^m(\delta)$, (5.1), производит на нем, аналогично (2.19), перекладывание

$$G_0^m(\delta) \oplus E_0^m(\delta) = E_{F_{m+1}}^m(\delta) \oplus G_{F_{m+2}}^m(\delta) \quad (5.3)$$

полуинтервалов $G_0^m(\delta)$ и $E_0^m(\delta)$, так как имеет место равенство длин $|G_0^m(\delta)| = |G_{F_{m+2}}^m(\delta)|$ и $|E_0^m(\delta)| = |E_{F_{m+1}}^m(\delta)|$. При этом согласно (4.2), (4.3) и (4.13) каждая точка x из $G_0^m(\delta)$ или $E_0^m(\delta)$ возвращается в полуинтервал $I^m(\delta)$ через $\frac{1}{2}F_{m+2}$ или $\frac{1}{2}(F_{m+1} + 1)$ шагов соответственно. По формулам (3.8), (2.32) имеем $|I^m(\delta)| = |I^m| = \tau^{-m}$, а по формулам (2.4) – $|E_0^m(\delta)| = |E_0^m| = \tau^{-(m+2)}$. Имеем отношение длин

$$\frac{|E_0^m(\delta)|}{|I^m(\delta)|} = \tau^{-2} = 2 - \tau \equiv -\tau \pmod{1}, \quad (5.4)$$

следовательно, отображение первого возвращения $d^m S_\varepsilon$, (5.2), изоморфно

$$d^m S_\varepsilon \simeq S^{-1}. \quad (5.5)$$

Пусть $m \equiv 1 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in V^m$, (3.2). Учитывая динамические графы D_v^m (см. рис. 12, 13 и рис. 15), рассмотрим подразбиение (ср. (4.4))

$$I^m(\delta) = {}^-G_0^m(\delta) \oplus G_0^m(\delta)^+ \oplus E_0^m(\delta) \quad (5.6)$$

полуинтервала (5.1) и учтем появившееся S_ε -ветвление $G_0^m(\delta) = {}^-G_0^m(\delta) \oplus G_0^m(\delta)^+$, где ${}^-G_0^m(\delta) = G_0^m(\delta) \cap I_\varepsilon^-$, $G_0^m(\delta)^+ = G_0^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+$ – пересечения с полуинтервалами $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$ и $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$, задающими раскраску полуинтервала $G_0^m(\delta)$. Динамические графы D_v^m и формулы (4.5), (4.6) для цепей $\widehat{{}^-G_0^m(\delta)}$, $\widehat{G_0^m(\delta)^+}$, $\widehat{E_0^m(\delta)}$ показывают, что ограничение двухцветного сдвига S_ε на полуинтервал $I^m(\delta)$, (5.6), перекладывает составляющие его полуинтервалы следующим образом:

$$I^m(\delta) = E_{F_{m+1}}^m(\delta) \oplus {}^-G_{F_{m+2}}^m(\delta) \oplus G_{F_{m+1}}^m(\delta)^+. \quad (5.7)$$

Поскольку справедливо разбиение $G_{F_{m+2}}^m(\delta) = {}^-G_{F_{m+2}}^m(\delta) \oplus G_{F_{m+1}}^m(\delta)^+$, то, сравнивая (5.7) с (5.3), видим, что для параметра $\varepsilon \in V^m$ отображение первого возвращения $d^m S_\varepsilon$ перекладывает циклически подынтервалы из (5.6). Поэтому $d^m S_\varepsilon$ остается изоморфной обратному сдвигу (5.5), и в силу (4.16) точки из ${}^-G_0^m(\delta)$, $G_0^m(\delta)^+$, $E_0^m(\delta)$ возвращаются в полуинтервал $I^m(\delta)$, (5.6), через $\frac{1}{2}F_{m+2}$, $\frac{1}{2}F_{m+2} + 1$, $\frac{1}{2}(F_{m+1} + 1)$ шагов соответственно.

Пусть $m \equiv 4 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in C^m$, (3.2). Воспользуемся динамическим графом D_c^m (см. рис. 16). В данной ситуации двухцветный сдвиг S_ε производит перекладывание аналогично (2.17):

$$G_0^m(\delta) \oplus E_0^m(\delta) = E_{F_{m+2}}^m(\delta) \oplus G_{F_{m+1}}^m(\delta), \quad (5.8)$$

и точки из полуинтервалов $G_0^m(\delta)$, $E_0^m(\delta)$ возвращаются сдвигом S_ε в силу (4.19) через $\frac{1}{2}(F_{m+1}+1)$, $\frac{1}{2}F_{m+2}$ шагов соответственно. Длина полуинтервала $I^m(\delta)$, (5.1), не зависит от четности m и равна τ^{-m} , а согласно формуле (2.4) длина полуинтервала $E_0^m(\delta)$ в нашем случае стала равной $\tau^{-(m+1)}$. Поскольку отношение этих длин определяется формулой

$$\frac{|E_0^m(\delta)|}{|I^m(\delta)|} = \tau^{-1} = \tau - 1 \equiv \tau \pmod{1}, \quad (5.9)$$

отображение первого возвращения $d^m S_\varepsilon$, (5.2), изоморфно S :

$$d^m S_\varepsilon \simeq S. \quad (5.10)$$

Наконец, пусть $m \equiv 4 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in V^m$, (3.2). Теперь согласно динамическому графу D_v^m (см. рис. 17) S_ε -ветвление переместилось на полуинтервал $E_0^m(\delta) = -E_0^m(\delta) \oplus E_0^m(\delta)^+$, где $-E_0^m(\delta) = E_0^m(\delta) \cap I_\varepsilon^-$, $E_0^m(\delta)^+ = E_0^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+$, и подразбиение полуинтервала $I^m(\delta)$, (5.1), принимает вид (ср. с (4.9))

$$I^m(\delta) = G_0^m(\delta) \oplus -E_0^m(\delta) \oplus E_0^m(\delta)^+. \quad (5.11)$$

Из формул (4.8) и (4.10) следует, что двухцветный сдвиг S_ε перекладывает полуинтервалы из (5.11):

$$I^m(\delta) = -E_{F_{m+2}}^m(\delta) \oplus E_{F_{m+2}}^m(\delta)^+ \oplus G_{F_{m+1}}^m(\delta)^+, \quad (5.12)$$

при этом имеет место разбиение $E_{F_{m+2}}^m(\delta) = -E_{F_{m+2}}^m(\delta) \oplus E_{F_{m+2}}^m(\delta)^+$. Следовательно, как и для параметра $\varepsilon \in C^m$, (5.10), отображение первого возвращения $d^m S_\varepsilon$ изоморфно простому сдвигу S , и точки из полуинтервалов $G_0^m(\delta)$, $-E_0^m(\delta)$, $E_0^m(\delta)^+$ ввиду формул (4.20) возвращаются сдвигом S_ε в $I^m(\delta)$, (5.11), через $\frac{1}{2}(F_{m+1}+1)$, $\frac{1}{2}F_{m+2}$, $\frac{1}{2}F_{m+2}+1$ шагов соответственно.

Из доказанных соотношений (5.5) и (5.10) вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть S_ε – двухцветный сдвиг (см. (3.1)) и $d^m S_\varepsilon = S_\varepsilon|I^m(\delta)$ – его отображение первого возвращения в полуинтервал $I^m(\delta)$, (5.1). Тогда имеют место изоморфизмы

$$d^m S_\varepsilon \simeq S^{\pm 1}, \quad (5.13)$$

где S – простой сдвиг (2.6), и справа в (5.13) стоит S или S^{-1} , если параметр ε принадлежит полуинтервалу $W^m = V^m \oplus C^m$ четного или нечетного уровня m соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В работе [3] доказано, что если $d = 3$, то для почти всех параметров $\alpha, \beta, \varepsilon$ двухцветный сдвиг $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ сводится к простому сдвигу единичного полуинтервала I . В нашем случае $d = 2$ и изоморфизм (5.13) имеет место для всех значений параметра $\varepsilon \in I$.

5.2. Интегральные отображения. Пусть $m \equiv 1 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in C^m$. Сравним разбиение полуинтервала $I^m(\delta) = G_0^m(\delta) \oplus E_0^m(\delta)$ с разбиением аттрактора $\text{Att}_\varepsilon = \widehat{G_0^m(\delta)} \sqcup \widehat{E_0^m(\delta)}$, (4.1), на цепи $\widehat{G_0^m(\delta)}$, $\widehat{E_0^m(\delta)}$, (4.2). Аттрактор Att_ε можно рассматривать как “башню”, основанием которой служит полуинтервал $I^m(\delta)$. Проекция

$$P_\varepsilon: \text{Att}_\varepsilon \rightarrow I^m(\delta) \quad (5.14)$$

ставит в соответствие точке x из полуинтервала $G_k^m(\delta)$ или $E_k^m(\delta)$ ее S_ε -образ $x' = P_\varepsilon(x)$ из $G_0^m(\delta)$ или $E_0^m(\delta)$ соответственно, т. е. $x = S_\varepsilon^{k'}(x')$, где k' – порядковый относительно сдвига S_ε номер полуинтервала в цепи $\widehat{G_0^m(\delta)}$ или $\widehat{E_0^m(\delta)}$, (4.2). Слои над $G_0^m(\delta)$ и $E_0^m(\delta)$ изоморфны циклическим группам по модулю $\frac{1}{2}F_{m+2}$ и $\frac{1}{2}(F_{m+1} + 1)$, (4.13), соответственно.

Теперь рассмотрим отображения первого возвращения $d^m S_\varepsilon = S_\varepsilon|I^m(\delta)$. В предложении 5.1 было доказано, что для любого $\varepsilon \in I$ эти отображения изоморфны простому сдвигу S или ему обратному S^{-1} . Следовательно, естественно возникает желание показать, что ограничение сложного сдвига S_ε на аттрактор Att_ε является интегральным отображением, которое можно построить на основе простого сдвига $S^{\pm 1}$ и проекции P_ε , (5.14), или, в общем случае, аналогичной проекции P_ε , отвечающей разбиениям (4.4), (4.7) и (4.9) аттрактора Att_ε .

Приведем для любого параметра $\varepsilon \in I = [0, 1)$ точную конструкцию интегрального отображения T_ε [2]. Определение отображения T_ε использует обратный сдвиг S^{-1} , если параметр ε принадлежит полуинтервалу W^m нечетного уровня m , или сам сдвиг S , если уровень m четный (ср. (5.5) и (5.10)), а также некоторую подходящую целозначную функцию $d_\varepsilon = d_\varepsilon(x)$ на единичном полуинтервале I .

Пусть сначала $m \equiv 1 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in C^m$. Тогда для определения T_ε нам потребуется следующее разбиение единичного полуинтервала:

$$I = [0, \langle \tau \rangle) \oplus [\langle \tau \rangle, 1). \quad (5.15)$$

В этом разбиении отношение длин полуинтервалов $[[\langle \tau \rangle, 1)]/|I| = 1 - \langle \tau \rangle$ такое же, как в (5.4). Функцию $d_\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, зададим условиями (4.13):

$$d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} F_{m+2}, & \text{если } x \in [0, \langle \tau \rangle), \\ \frac{1}{2} (F_{m+1} + 1), & \text{если } x \in [\langle \tau \rangle, 1). \end{cases} \quad (5.16)$$

Интегральное отображение T_ε действует на пространстве

$$\hat{I}_\varepsilon = \{(x, i): x \in I, 0 \leq i < d_\varepsilon(x)\} \quad (5.17)$$

по правилу

$$T_\varepsilon(x, i) = \begin{cases} (x, i+1), & \text{если } i+1 < d_\varepsilon(x), \\ (S^{-1}(x), 0), & \text{если } i+1 = d_\varepsilon(x). \end{cases} \quad (5.18)$$

Пусть μ – нормированная мера Хаара на торе $I \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, инвариантная относительно сдвига S^{-1} . Она индуцирует меру μ_ε на пространстве $\hat{I}_\varepsilon$, (5.17), удовлетворяющую равенству

$$\mu_\varepsilon((X, i)) = \frac{\mu(X)}{\int_I d_\varepsilon(x) d\mu} \quad (5.19)$$

на подмножествах вида $(X, i) \subset \hat{I}_\varepsilon$. Мера μ_ε нормирована и инвариантна относительно интегрального преобразования T_ε , (5.18).

Пусть $m \equiv 1 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in V^m$. Выберем другое разбиение единичного полуинтервала:

$$I = [0, \varepsilon'] \oplus [\varepsilon', \langle \tau \rangle] \oplus [\langle \tau \rangle, 1), \quad (5.20)$$

где $\varepsilon' = (\varepsilon - \varepsilon_{m-1})/|I^m(\delta)| = \tau^m(\varepsilon - \varepsilon_{m-1})$, подобное разбиению (5.6) полуинтервала $I^m(\delta)$. Функцию d_ε зададим согласно формулам (4.16):

$$d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} F_{m+2}, & \text{если } x \in [0, \varepsilon'), \\ \frac{1}{2} F_{m+2} + 1, & \text{если } x \in [\varepsilon', \langle \tau \rangle), \\ \frac{1}{2} (F_{m+1} + 1), & \text{если } x \in [\langle \tau \rangle, 1). \end{cases} \quad (5.21)$$

Пространство представления $\hat{I}_\varepsilon$ и правило действия на нем (5.18) интегрального отображения T_ε определяются в соответствии с функцией d_ε , (5.21).

Пусть $m \equiv 4 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in C^m$. Перекладываем полуинтервалы в разбиении (5.15):

$$I = [0, \langle -\tau \rangle] \oplus [\langle -\tau \rangle, 1). \quad (5.22)$$

Следуя формулам (4.19), зададим функцию d_ε следующим образом:

$$d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (F_{m+1} + 1), & \text{если } x \in [0, \langle -\tau \rangle), \\ \frac{1}{2} F_{m+2}, & \text{если } x \in [\langle -\tau \rangle, 1). \end{cases} \quad (5.23)$$

Пусть $m \equiv 4 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in V^m$. Разбиваем единичный полуинтервал I подобно полуинтервалу $I^m(\delta)$, (5.11):

$$I = [0, \langle -\tau \rangle] \oplus [\langle -\tau \rangle, \varepsilon'] \oplus [\varepsilon', 1), \quad (5.24)$$

где

$$\varepsilon' = \langle -\tau \rangle + \frac{\varepsilon - \varepsilon_{m-1}}{|I^m(\delta)|} = \langle -\tau \rangle + \tau^m(\varepsilon - \varepsilon_{m-1}),$$

а функцию d_ε согласовываем с формулами (4.20):

$$d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (F_{m+1} + 1), & \text{если } x \in [0, \langle -\tau \rangle), \\ \frac{1}{2} F_{m+2}, & \text{если } x \in [\langle -\tau \rangle, \varepsilon'), \\ \frac{1}{2} F_{m+2} + 1, & \text{если } x \in [\varepsilon', 1). \end{cases} \quad (5.25)$$

В обоих случаях при $m \equiv 4 \pmod{6}$ для интегрального отображения T_ε пространство представления $\hat{I}_\varepsilon$, (5.17), согласовано с функциями d_ε , (5.23), (5.25), а правило действия (5.18) на нем отображения T_ε естественно заменяется на правило

$$T_\varepsilon(x, i) = \begin{cases} (x, i + 1), & \text{если } i + 1 < d_\varepsilon(x), \\ (S(x), 0), & \text{если } i + 1 = d_\varepsilon(x). \end{cases} \quad (5.26)$$

Нормирующий множитель в (5.19) тесно связан с мерой аттрактора Att_ε , вычисленной в предложении 4.2. Разбиения полуинтервала $I^m(\delta)$ (см. п. 5.1)

подобны соответствующим разбиениям единичного полуинтервала I . Поскольку общий коэффициент подобия имеет вид $|I|/|I^m(\delta)| = \tau^m$, (2.31), (3.8), то нормирующий множитель и мера аттрактора связаны соотношением

$$\int_I d_\varepsilon(x) d\mu = \tau^m |\text{Att}_\varepsilon|, \quad (5.27)$$

где мера $|\text{Att}_\varepsilon|$ вычисляется по формулам (4.22) и (4.23).

5.3. Изоморфизм. Переходим к цели данного параграфа – изучению ограничения двухцветного сдвига $S_\varepsilon = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$ (см. (3.1)) на аттрактор Att_ε или его отображения первого возвращения $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$. Согласно включению (4.13) аттрактор Att_ε замкнут относительно действия двухцветного сдвига S_ε . Поэтому формально мы имеем право рассмотреть отображение $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ и определить меру $\mu|_{\text{Att}_\varepsilon}$ на аттракторе $\text{Att}_\varepsilon \subset I$, полагая

$$\mu|_{\text{Att}_\varepsilon}(X) = \frac{\mu(X)}{|\text{Att}_\varepsilon|}, \quad (5.28)$$

где μ – мера Хаара на торе $I \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и $|\text{Att}_\varepsilon| = \mu(\text{Att}_\varepsilon)$ – отвечающая μ мера аттрактора. Вопрос об инвариантности меры $\mu|_{\text{Att}_\varepsilon}$ относительно преобразования $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ остается пока открытым.

Покажем, что отображение первого возвращения $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ и интегральное отображение T_ε , (5.18), (5.26), метрически изоморфны. Рассматривая изоморфизм

$$S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon} \simeq T_\varepsilon, \quad (5.29)$$

будем предполагать существование взаимно однозначного измеримого отображения

$$\iota_\varepsilon: \text{Att}_\varepsilon \xrightarrow{\sim} \hat{I}_\varepsilon, \quad (5.30)$$

сохраняющего меры

$$\mu|_{\text{Att}_\varepsilon} = \mu_\varepsilon \circ \iota_\varepsilon, \quad (5.31)$$

где μ_ε – инвариантная мера (5.19) на пространстве $\hat{I}_\varepsilon$, (5.17), и сопрягающего

$$\iota_\varepsilon(S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon})(x) = T_\varepsilon \iota_\varepsilon(x) \quad (5.32)$$

отображение первого возвращения $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ с интегральным отображением T_ε .

ТЕОРЕМА 5.1. 1) Для двухцветного сдвига $S_\varepsilon(x) = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$, (3.1), отображение первого возвращения $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ является автоморфизмом аттрактора Att_ε , (4.1), (4.4), (4.7), (4.9), с инвариантной мерой $\mu|_{\text{Att}_\varepsilon}$, (5.28).

2) Отображение $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ метрически изоморфно, (5.29), (5.36),

$$S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon} \stackrel{\iota_\varepsilon}{\simeq} T_\varepsilon, \quad (5.33)$$

интегральному отображению $T_\varepsilon = T(S^{\pm 1}, d_\varepsilon)$, (5.18), (5.26), построенному по отображению простого сдвига $S^{\pm 1}(x) = \langle x \pm \tau \rangle$ единичного полуинтервала I и функции d_ε , (5.16), (5.21), (5.23), (5.25). При этом отображение T_ε получается из сдвига S или ему обратного сдвига S^{-1} в зависимости от того, принадлежит параметр ε из разбиения

$$I = W^1 \oplus W^4 \oplus W^7 \oplus W^{10} \oplus \dots$$

полуинтервалу $W^m = V^m \oplus C^m$, (3.2), четного или нечетного уровня m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \equiv 1 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in C^m$. Любое x из аттрактора Att_ε ввиду разбиения (4.1) принадлежит цепи $\widehat{G_0^m(\delta)}$ или $\widehat{E_0^m(\delta)}$ и, значит, по (4.2), (4.3) принадлежит одному из полуинтервалов цепи $G_k^m(\delta)$ или $E_k^m(\delta)$. Обозначим через k' порядковый номер полуинтервала в цепи относительно действия на ней двухцветного сдвига S_ε , т.е. k' – минимальное число, $k' \geq 0$, с условием

$$S_\varepsilon^{k'}(G_0^m(\delta)) = G_k^m(\delta) \quad \text{или} \quad S_\varepsilon^{k'}(E_0^m(\delta)) = E_k^m(\delta)$$

соответственно. В силу равенств (4.13) число k' удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq k' < \frac{1}{2}F_{m+2} \quad \text{или} \quad 0 \leq k' < \frac{1}{2}(F_{m+1} + 1) \quad (5.34)$$

в зависимости от того, принадлежит точка x полуинтервалу $G_k^m(\delta)$ или $E_k^m(\delta)$.

Пусть x_ε обозначает расстояние от точки x до начала содержащего ее полуинтервала, и пусть

$$\begin{aligned} x' &= \tau^m x_\varepsilon, & x &\in \widehat{G_0^m(\delta)}, \\ x' &= \tau^m(x_\varepsilon + g_m) = \tau^m x_\varepsilon + \langle \tau \rangle, & x &\in \widehat{E_0^m(\delta)}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Здесь g_m – длина, (2.4), полуинтервалов $G_k^m(\delta)$ из цепи $\widehat{G_0^m(\delta)}$. В приведенных обозначениях отображение ι_ε , (5.30), можно определить следующим образом:

$$\text{Att}_\varepsilon \xrightarrow{\iota_\varepsilon} \hat{I}: x \mapsto \iota_\varepsilon(x) = (x', k'). \quad (5.36)$$

В силу равенства (2.31) имеем $|I^m(\delta)| = \tau^{-m}$, поэтому (5.36) задает взаимно однозначное аффинное отображение

$$\iota_\varepsilon: I^m(\delta) = G_0^m(\delta) \oplus E_0^m(\delta) \xrightarrow{\sim} I = [0, \langle \tau \rangle) \oplus [\langle \tau \rangle, 1), \quad (5.37)$$

где единичный полуинтервал I отождествлен с подмножеством $(I, 0) \subset \hat{I}_\varepsilon$, (5.17), и отображение (5.37) сохраняет разбиения. Поэтому из неравенств (5.34) и определения пространства $\hat{I}_\varepsilon$, (5.16), (5.17), заключаем, что ι_ε , (5.36), представляет собой взаимно однозначное измеримое отображение. Свойство коммутирования (5.32) вытекает из строения аттрактора Att_ε , (4.1)–(4.3), изоморфизма (5.5) и из определения интегрального отображения T_ε , (5.18), (5.26). Отсюда и из равенств мер

$$\mu|\text{Att}_\varepsilon(I^m(\delta)) = \frac{|I^m(\delta)|}{|\text{Att}_\varepsilon|} = \frac{\tau^{-m}}{|\text{Att}_\varepsilon|}, \quad \mu_\varepsilon(I) = \frac{\mu(I)}{\int_I d_\varepsilon(x) d\mu} = \frac{1}{\tau^m |\text{Att}_\varepsilon|},$$

вытекающих из (4.15), (5.19) и (5.27), следует сохранение мер (5.31) и инвариантность меры $\mu|\text{Att}_\varepsilon$, (5.28), относительно действия отображения первого возвращения $S_\varepsilon|\text{Att}_\varepsilon$. Тем самым, изоморфизм (5.29) доказан.

Пусть $m \equiv 1 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in V^m$. Согласно (4.4) аттрактор Att_ε состоит из трех цепей $\widehat{G_0^m(\delta)}$, $\widehat{G_0^m(\delta)}^+$ и $\widehat{E_0^m(\delta)}$, длины которых вычисляются по формулам (4.16). Изоморфизм ι_ε определяется так же, как в (5.36). При этом полагаем

$$x' = \begin{cases} \tau^m x_\varepsilon, & \text{если } x \in \widehat{G_0^m(\delta)}, \\ \tau^m(x_\varepsilon + \varepsilon - \varepsilon_{m-1}), & \text{если } x \in \widehat{G_0^m(\delta)}^+, \\ \tau^m x_\varepsilon + \langle \tau \rangle, & \text{если } x \in \widehat{E_0^m(\delta)}. \end{cases} \quad (5.38)$$

Пусть $m \equiv 4 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in C^m$. Согласно (4.7) аттрактор Att_ε снова состоит из двух цепей $\widehat{G_0^m(\delta)}$ и $\widehat{E_0^m(\delta)}$, но изменилось отношение длин полуинтервалов (5.9). Поэтому в определении изоморфизма ι_ε , (5.36), полагаем

$$x' = \begin{cases} \tau^m x_\varepsilon, & \text{если } x \in \widehat{G_0^m(\delta)}, \\ \tau^m x_\varepsilon + \langle -\tau \rangle, & \text{если } x \in \widehat{E_0^m(\delta)}. \end{cases} \quad (5.39)$$

Пусть $m \equiv 4 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in V^m$. Используем разбиение аттрактора Att_ε , (4.9), и заменяем отображение (5.39) на следующее:

$$x' = \begin{cases} \tau^m x_\varepsilon, & \text{если } x \in \widehat{G_0^m(\delta)}, \\ \tau^m x_\varepsilon + \langle -\tau \rangle, & \text{если } x \in \widehat{E_0^m(\delta)}, \\ \tau^m(x_\varepsilon + \varepsilon - \varepsilon_{m-1}) + \langle -\tau \rangle, & \text{если } x \in \widehat{E_0^m(\delta)}^+. \end{cases} \quad (5.40)$$

Для доказательства изоморфизма (5.29) в случае $m \equiv 4 \pmod{6}$ необходимо применить формулы (4.19), (4.20) для длин цепей, определение интегрального преобразования T_ε , (5.26), и изоморфизм (5.10).

Таким образом, изоморфизм (5.33) доказан для любого $\varepsilon \in I$. Свойство отображения первого возвращения $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ быть автоморфизмом аттрактора Att_ε вытекает из аналогичного свойства интегрального отображения T_ε , (5.18), (5.26). Теорема доказана.

Согласно предложению 5.1 ограничение $S_\varepsilon|_{I^m(\delta)}$ двухцветного сдвига S_ε на полуинтервал $I^m(\delta)$ изоморфно простому сдвигу $S^{\pm 1}(x) = \langle x \pm \tau \rangle$ единичного полуинтервала I . Поскольку τ иррационально, то отображение $S_\varepsilon|_{I^m(\delta)}$ эргодично. Тогда согласно [2] эргодично интегральное отображение T_ε , а по теореме 5.1 эргодичным будет и ограничение $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ двухцветного сдвига S_ε на аттрактор Att_ε . Отсюда для двухцветного сдвига S_ε вытекает свойство асимптотической равномерности траекторий на аттракторе Att_ε для почти каждой точки x из Att_ε . Покажем, что в нашем случае данное свойство выполняется для каждой точки x из Att_ε .

ТЕОРЕМА 5.2. *Для любой начальной точки x из аттрактора Att_ε точки ее орбиты $x_k = S_\varepsilon^k(x)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ и S_ε^k обозначает k -кратную композицию двухцветного сдвига S_ε , (3.1), равномерно распределены на множестве Att_ε относительно меры $\mu|_{\text{Att}_\varepsilon}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось выше, интегральное отображение T_ε является эргодическим автоморфизмом на пространстве $\hat{I}_\varepsilon$, (5.17), а согласно определениям (5.18), (5.26) отображение T_ε наследует свойство равномерной распределенности орбиты любой точки $\hat{x} \in \hat{I}_\varepsilon$. Это следует из того, что в каждый момент времени k распределение точек орбиты $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ на подмножествах $([0, \langle \tau \rangle], i)$ и $([\langle \tau \rangle, 1], j)$ из пространства $\hat{I}_\varepsilon$ совпадает с распределением на подмножествах $([0, \langle \tau \rangle], 0)$ и $([\langle \tau \rangle, 1], 0)$. Совпадение происходит с точностью, возможно, до одной точки. Последние подмножества из $\hat{I}_\varepsilon$ отождествляются с подмножествами $[0, \langle \tau \rangle]$ и $[\langle \tau \rangle, 1]$, разбивающими единичный полуинтервал I , (5.15), в случае $m \equiv 1 \pmod{6}$ и $\varepsilon \in C^m$. На этих же подмножествах и на самом интервале I распределение точек орбиты равномерное. Для остальных случаев m и $\varepsilon \in V^m$ или $\varepsilon \in C^m$ доказательство проводится аналогично. Теорема доказана.

Из теоремы 5.2, в частности, следует минимальность замыкания аттрактора Att_ε относительно действия на нем двухцветного сдвига S_ε .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Используемая индукционная процедура сведения изучения двухцветного сдвига S_ε к отображению первого возвращения $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$ восходит к работе [9] (Rauzy induction). Данная процедура нами применяется дважды: сначала к $S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon}$, а затем к отображению

$$S_\varepsilon|_{I^m(\delta)} = (S_\varepsilon|_{\text{Att}_\varepsilon})|_{I^m(\delta)}.$$

При этом оказывается, что $S_\varepsilon|_{I^m(\delta)}$ изоморфно вращению окружности $S^{\pm 1}$. Для произвольных двухцветных сдвигов $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ (см. определение (1.1)), имеющих ранг вращения $d = 3$ (см. [3]), последний факт выполняется для почти всех параметров $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

Если τ в определении двухцветного сдвига $S_\varepsilon = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$ заменить произвольным углом α , то отображение $S_\varepsilon|_{I^m(\delta)}$ будет изоморфно вращению окружности на некоторый угол $\alpha' = R(\alpha)$, где $R(x)$ – возвратное отображение (backward continued fraction map [10]). Аналогичная ситуация наблюдается и для двухцветных сдвигов $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$, когда $R(x)$ заменяется двумерным $G(x)$ [4] или трехмерным $T(x)$ [3] отображениями Гаусса.

§ 6. Частотное распределение точек орбит

Согласно теореме 5.2 для любых начальных точек $x \in \text{Att}_\varepsilon$ и любого ε из $I = [0, 1)$ существует предел

$$\nu(\varepsilon, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{k: 0 \leq S_\varepsilon^k(x) < \varepsilon, k = 0, 1, \dots, n-1\}, \quad (6.1)$$

равный частоте попадания точек орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(x) = \{S_\varepsilon^k(x)\}_{k=0}^\infty$ в полуинтервал $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$ при действии на x двухцветным сдвигом S_ε . Более того, предел $\nu(\varepsilon) = \nu(\varepsilon, x)$ не зависит от выбора начальной точки $x \in \text{Att}_\varepsilon$. Поскольку в силу равенства (4.12) для любой точки x из I существует такой номер итерации $k(\varepsilon)$, зависящий только от параметра ε , что $S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(x)$ принадлежит аттрактору Att_ε , то предел (6.1) существует для всех $x \in I$ и не зависит от выбора начальной точки x . Этот общий предел $\nu(\varepsilon)$ назовем *частотой* попадания точек орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(x)$ в полуинтервал I_ε^- . Технически удобно сначала рассмотреть частоту попадания

$$\nu^+(\varepsilon) = 1 - \nu^-(\varepsilon), \quad (6.2)$$

где $\nu^-(\varepsilon) = \nu(\varepsilon)$, точки $x \in I$ в дополнительный полуинтервал $I_\varepsilon^+ = I \setminus I_\varepsilon^- = [\varepsilon, 1)$. По теореме 5.2 частота попадания $\nu^+(\varepsilon)$ имеет вид

$$\nu^+(\varepsilon) = \frac{\mu(\text{Att}_\varepsilon^+)}{\mu(\text{Att}_\varepsilon)},$$

где $\text{Att}_\varepsilon^+ = \text{Att}_\varepsilon \cap I_\varepsilon^+$. Учитывая определение (5.28) меры $\mu|_{\text{Att}_\varepsilon}$, записываем равенство $\mu|_{\text{Att}_\varepsilon}(\text{Att}_\varepsilon) = 1$, поэтому получаем $\mu(\text{Att}_\varepsilon^+) = |\text{Att}_\varepsilon^+|/|\text{Att}_\varepsilon|$, при этом было использовано сокращение $|\text{Att}_\varepsilon^+| = \mu(\text{Att}_\varepsilon^+)$. В получающейся формуле

$$\nu^+(\varepsilon) = \frac{|\text{Att}_\varepsilon^+|}{|\text{Att}_\varepsilon|} \quad (6.3)$$

для частоты попадания точек в полуинтервал I_ε^+ мера аттрактора $|\text{Att}_\varepsilon|$ уже вычислена в предложении 4.2, осталось найти только меру $|\text{Att}_\varepsilon^+|$. Для ее вычисления применим полученные в п. 4.1 разбиения аттрактора Att_ε на образующие его цепи $\widehat{G_0^m(\delta)}$ и $\widehat{E_0^m(\delta)}$.

Для уровня $m \equiv 1 \pmod{6}$, $m \geq 1$, и параметра $\varepsilon \in C^m$ по формулам (4.1)–(4.3) имеем равенство

$$\text{Att}_\varepsilon^+ = E_0^m(\delta)_+, \quad (6.4)$$

а для $\varepsilon \in V^m$, используя разложение на цепи (4.4)–(4.6), получаем разбиение

$$\text{Att}_\varepsilon^+ = G_0^m(\delta)^+ \sqcup G_{F_m}^m(\delta)_+^+ \sqcup E_0^m(\delta)_+. \quad (6.5)$$

В случае $m \equiv 4 \pmod{6}$, $m \geq 1$, и $\varepsilon \in C^m$ из формул (4.7) и (4.8) выводим равенство

$$\text{Att}_\varepsilon^+ = G_0^m(\delta)_+. \quad (6.6)$$

Если $\varepsilon \in V^m$, то из (4.9) и (4.10) для множества Att_ε следует разбиение

$$\text{Att}_\varepsilon^+ = G_{F_{m-1}}^m(\delta)_+ \sqcup E_0^m(\delta)^+ \sqcup E_{F_{m+1}}^m(\delta)_+^+. \quad (6.7)$$

В равенствах (6.5)–(6.7) использованы обозначения из п. 3.5. Нижний индекс $+$ для $G_k^m(\delta)$ и $E_k^m(\delta)$ указывает на принадлежность всех полуинтервалов $G_k^m(\delta)$ и $E_k^m(\delta)$ множеству I_ε^+ . Верхние индексы $+$ для полуинтервалов

$$G_k^m(\delta) = -G_k^m(\delta) \oplus G_k^m(\delta)^+, \quad E_k^m(\delta) = -E_k^m(\delta) \oplus E_k^m(\delta)^+ \quad (6.8)$$

с индексом $k = 0$ указывают на их правые полуинтервалы $G_k^m(\delta)^+ = G_k^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+$ и $E_k^m(\delta)^+ = E_k^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+$. Если индекс $k \neq 0$, то $G_k^m(\delta)$ и $E_k^m(\delta)$ предполагаются разбитыми на полуинтервалы в той же пропорции, что в (6.8) для $k = 0$. При этом верхние индексы $+$ снова указывают на правые полуинтервалы соответствующих разбиений.

Применим разложения на полуинтервалы (6.4)–(6.7) множества Att_ε^+ для вычисления его меры $|\text{Att}_\varepsilon^+|$, которая, как и мера аттрактора $|\text{Att}_\varepsilon|$, (4.22), (4.23), зависит от принадлежности параметра ε полуинтервалу C^m или V^m . Так, для $\varepsilon \in C^m = [\varepsilon_m, \varepsilon_{m+2})$ из равенств (6.4), (6.6) и формул (2.4) находим меру

$$|\text{Att}_\varepsilon^+| = \tau^{-(m+2)}. \quad (6.9)$$

Если ε принадлежит $V^m = [\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m)$, то длины полуинтервалов $G_0^m(\delta)^+$ из разложения (6.5) и $E_0^m(\delta)^+$ из (6.7) равны $\varepsilon_m - \varepsilon$. Снова применяя формулы (2.4), в этом случае приходим к равенству

$$|\text{Att}_\varepsilon^+| = \tau^{-(m+2)} + (\varepsilon_m - \varepsilon). \quad (6.10)$$

Сопоставляя формулы (4.22), (6.9) и (4.23), (6.10), находим простое соотношение

$$|\text{Att}_\varepsilon^+| = 2|\text{Att}_\varepsilon| - 1 \quad (6.11)$$

между мерами множества Att_ε^+ и аттрактора Att_ε из п. 4.1, справедливое для любого параметра $\varepsilon \in I$. Из соотношений (6.11) и (6.3) вытекает формула

$$\nu^+(\varepsilon) = 2 - \frac{1}{|\text{Att}_\varepsilon|} \quad (6.12)$$

для частоты $\nu^+(\varepsilon)$ попадания точек орбит в множество $\text{Att}_\varepsilon^+ = \text{Att}_\varepsilon \cap I_\varepsilon^+$, а из формулы (6.12) и равенства (6.2) следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть x – произвольная точка из единичного полуинтервала $I = [0, 1)$ и $\text{Orb}_\varepsilon(x) = \{S_\varepsilon^k(x)\}_{k=0}^\infty$ – ее орбита относительно действия двухцветного сдвига $S_\varepsilon(x) = S_{(2\tau, \tau, \varepsilon)}(x)$, (3.1). Тогда частота $\nu(\varepsilon) = \nu^-(\varepsilon)$ попадания точек орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(x)$ в полуинтервал $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in I$ вычисляется по формуле

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{|\text{Att}_\varepsilon|} - 1, \quad (6.13)$$

где $|\text{Att}_\varepsilon|$ – мера, (4.22), (4.23), аттрактора Att_ε , определенного в п. 4.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Дополнительное к Att_ε^+ множество $\text{Att}_\varepsilon^- = \text{Att}_\varepsilon \cap I_\varepsilon^- = \text{Att}_\varepsilon \setminus \text{Att}_\varepsilon^+$ имеет, естественно, меру

$$|\text{Att}_\varepsilon^-| = |\text{Att}_\varepsilon| - |\text{Att}_\varepsilon^+|.$$

Из (6.11) и (6.12) вытекает двойственное к (6.11) соотношение

$$|\text{Att}_\varepsilon^-| = 1 - |\text{Att}_\varepsilon| \quad (6.14)$$

между мерами множества Att_ε^- и аттрактора Att_ε . Из (6.14) следует, что множество Att_ε^- как бы является дополнением аттрактора Att_ε до единичного полуинтервала $I = [0, 1)$. Однако таким дополнением в действительности является область притяжения $\text{Spir}_\varepsilon = I \setminus \text{Att}_\varepsilon$ (см. пп. 3.5, 4.1) аттрактора Att_ε . Поэтому в силу формулы (6.14) имеем

$$|\text{Spir}_\varepsilon| = |\text{Att}_\varepsilon^-|, \quad (6.15)$$

т.е. совпадают меры области притяжения аттрактора Spir_ε и множества Att_ε^- , что изначально совсем не очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Из предложений 4.2 и 6.1 для частоты $\nu(\varepsilon)$ вытекают формулы (1.10) и (1.11). Данные формулы указывают на различие между двухцветными сдвигами $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$, имеющими ранги вращения $d = 2$ и $d = 3$. В [3] показано, что в случае ранга $d = 3$ график функции $\nu(\varepsilon)$ может быть подобен “чертовой лестнице” (devil’s staircase): он состоит из одних плато. В случае $d = 2$ по формулам (1.10) и (1.11) у функции $\nu(\varepsilon)$ плато чередуются участками непрерывного роста. Более того, функция $\nu(\varepsilon)$ непрерывна на всем единичном полуинтервале I . Вопрос о непрерывности функции $\nu(\varepsilon)$ в случае $d = 3$ остается открытым.

Список литературы

1. M. Boshernitzan, I. Kornfeld, “Interval translation mappings”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **15**:5 (1995), 821–832.
2. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980; англ. пер.: I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, Ya. G. Sinai, *Ergodic theory*, Grundlehren Math. Wiss., **245**, Springer-Verlag, New York, 1982.
3. H. Suzuki, Sh. Ito, K. Aihara, “Double rotations”, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **13**:2 (2005), 515–532.
4. H. Bruin, S. Troubetzkoy, “The Gauss map on a class of interval translation mappings”, *Israel J. Math.*, **137**:1 (2003), 125–148.

5. A. V. Shutov, “On the distribution of the two-color shift values modulo one”, *Abstracts of 5th International Algebraic Conference in Ukraine*, Odessa, 2005, 194.
6. V. G. Zhuravlev, *One-dimensional Fibonacci tilings and derivatives of two-colour rotations of a circle*, preprint Max-Planck-Institut für Mathematik, **59**, 2004, 1–43.
7. В. Г. Журавлев, “Одномерные разбиения Фибоначчи”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:2 (2007), 89–112; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “One-dimensional Fibonacci tilings”, *Izv. Math.*, **71**:2 (2007), 307–340.
8. В. Г. Журавлев, “Одномерные разбиения Фибоначчи”, *Тр. XVII Международной летней школы по современным проблемам теоретической и математической физики* (Волга, XVII-2005), Изд-во КГУ, Казань, 2006, 63–78.
9. G. Rauzy, “Echanges d’intervalles et transformations induites”, *Acta Arith.*, **34**:4 (1979), 315–328.
10. V. G. Zhuravlev, A. V. Shutov, *Derivatives of circles and similarity of orbits*, preprint Max-Planck-Institut für Mathematik, **62**, 2004, 1–11.

В. Г. ЖУРАВЛЕВ (V. G. ZHURAVLEV)
Владимирский государственный педагогический
университет
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило в редакцию
10.10.2005
23.10.2007