Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, О неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 5, 79–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/im603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:45:17

УДК 517.5

Н. Б. Енгибарян

О неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае

Рассматривается задача построения положительного неподвижного элемента x монотонного оператора φ , действующего в конусе K банахова пространства E . Предполагается, что $\|\varphi x\| \leq \|x\| + \gamma$, $\gamma > 0$, для любого $x \in K$. При наличии у оператора φ так называемого нетривиального функционала диссипации решение строится в некотором расширении пространства E : в банаховом пространстве или пространстве Фреше. В качестве примеров доказывается разрешимость консервативного интегрального уравнения на полупрямой с суммарно-разностным ядром и одного нелинейного интегрального уравнения типа Урысона в критическом случае.

Библиография: 25 наименований.

§ 1. Введение

Пусть E – банахово пространство с нулем θ и конусом K неотрицательных элементов $x \geq \theta$. Пусть φ – положительный монотонный оператор в K , т.е. из $\theta \leq x \leq y$ следует $\theta \leq \varphi(x) \leq \varphi(y)$. Рассмотрим задачу построения положительного неподвижного элемента x оператора φ (см. [1], [2]):

$$x = \varphi x, \quad x \geq \theta. \quad (1.1)$$

В линейном случае уравнение (1.1) принимает вид

$$x = g + Ax, \quad (1.2)$$

где $g \in K$ и A – линейный положительный оператор.

В ряде случаев удастся построить решение задачи (1.1) как предел итерационной последовательности x_n , определяемой посредством формул

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi x_n, & n &= 0, 1, \dots, \\ x_0 &= \alpha \geq \theta. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если $\alpha = \theta$, то x_n возрастает с ростом n . Если конус K вполне правильный (т.е. монотонная по конусу и ограниченная по норме последовательность в K сходится), то для сходимости итерационной последовательности (1.3) в E достаточно установить ограниченность последовательности $\|x_n\|$.

Соотношения (1.3) можно интерпретировать как эволюционное уравнение с дискретным временем n и начальным состоянием α , а решение x уравнения (1.1) – как предельное (установившееся) или равновесное состояние рассматриваемой системы S . Поэтому изучение асимптотического поведения

Работа выполнена при поддержке МНТЦ (грант А-823).

последовательности x_n представляет самостоятельный интерес независимо от законности предельного перехода в (1.3) и разрешимости задачи (1.1).

Задача построения неподвижной точки монотонного оператора представляет большой интерес в математической физике, в теории стохастических процессов и др. (см. [3]–[13]). Широкий круг применений имеют линейные и нелинейные уравнения (1.1) в случае, когда φ удовлетворяет условию

$$\|\varphi x\| \leq \|x\| + \gamma \quad \forall x \in K, \quad (1.4)$$

где $\gamma \geq 0$, $q \leq 1$.

В линейном случае (1.2) условие (1.4) выполняется при $q = \|A\| \leq 1$, $\gamma = \|g\|$. Неравенство (1.4) связано с сохранением, диссипацией (потерей) и источниками тех или иных аддитивных количественных характеристик системы S в процессе ее эволюции. В определенных условиях такой характеристикой (являющейся в E нормой) могут быть полная энергия физической системы или общее количество частиц (при изучении статистических ансамблей), общие ресурсы и др.

Случай, когда $q < 1$, назовем *докритическим*. Случай, когда условие (1.4) выполняется при $q = 1$ и нарушается при $q < 1$, назовем *критическим*.

В докритическом случае из соотношения (1.3) и (1.4) следует оценка

$$\|x_n\| \leq \gamma(1 - q)^{-1} + \|\alpha\|,$$

которая обеспечивает сходимость последовательности x_n в случае полной правильности конуса K .

Решения однородного ($g = 0$) и неоднородного линейных уравнений вида (1.2) с некомпактным оператором A в критическом случае, когда оператор $I - A$ необратим (I – единичный оператор), могут существовать как в самом E , так и в его расширениях. Ряд результатов по решению скалярных и векторных интегральных уравнений свертки на полупрямой в критическом (консервативном) случае получен с применением прямой оценки итераций (1.3), принципа инвариантности В. Амбарцумяна, тауберовых теорем, теоретико-вероятностных построений, метода специальной факторизации и других методов (см. [3]–[15]). При использовании метода нелинейных уравнений факторизации, предложенного автором, доказана разрешимость уравнений (1.2) различных классов в критическом случае (см. [16]–[23]). Нелинейное уравнение (1.1) в критическом случае изучено в меньшей степени.

В настоящей работе предлагается один способ изучения нелинейных и линейных уравнений (1.1) с монотонным оператором φ , удовлетворяющим условию (1.4). Рассматривается вопрос сходимости итерационной последовательности (1.3) с начальным приближением

$$x_0 = \theta. \quad (1.5)$$

В критическом случае предполагается наличие у оператора φ так называемого нетривиального функционала диссипации. Предел x последовательности (1.3) строится в некотором расширении $\tilde{E}$ пространства E – банаховом пространстве или пространстве Фреше, порожденном нормой или полунормами в E . Вводится понятие S -решения уравнения (1.1): оператор φ монотонно продолжается в некоторую часть пространства $\tilde{E}$, в котором x является единственным решением “расширенного” уравнения (1.1). Данный результат применяется к интегральным уравнениям. Доказывается разрешимость консервативного интегрального уравнения свертки на полупрямой с суммарно-разностным

ядром и одного нелинейного интегрального уравнения типа Урысона в критическом случае.

§ 2. Вспомогательные предложения

2.1. Банахово пространство с конусом. Приведем некоторые основные понятия и факты из теории банаховых пространств с конусом (см. [1]).

Конус $K \subset E$ вводит частичный порядок $\geq$ в банаховом пространстве E . Запись $x_n \uparrow$ означает, что последовательность x_n из E возрастает по конусу, а $x_n \uparrow x$ означает, что возрастающая последовательность x_n сходится к x . Конус K называется *воспроизводящим*, если любой $x \in E$ может быть представлен в виде $x = y - z$, $y, z \in K$. Тогда класс K^* линейных положительных функционалов образует конус в сопряженном пространстве E^* .

Конус K называется *правильным*, если из соотношений

$$\theta \leq x_n \uparrow, \quad x_n \leq y \quad (2.1)$$

следует сходимость $x_n \rightarrow x$, $\theta \leq x \leq y$. Из полной правильности конуса (см. § 1) следует его правильность.

Конус K называется *минимизмическим*, если для любых $x, y \in E$ существует $z = \sup(x, y)$.

Направленным множеством (направленностью) называется множество B , наделенное частичным порядком $\leq$, причем для любых $x, y \in B$ существует $z \in B$ такой, что $x \leq z$, $y \leq z$ (свойство Мура–Смита).

Пусть $\theta \leq \alpha \leq \beta$. *Конусным отрезком* называется множество

$$[\alpha, \beta] = \{x \in K; \alpha \leq x \leq \beta\}.$$

Произвольный конусный отрезок является направленным множеством.

Пусть P – класс положительных (линейных или нелинейных) операторов, оставляющих конус K инвариантным. Оператор $\varphi \in P$ может не быть определен вне K . Класс P образует полугруппу относительно умножения, определяемого как композиция отображений: $(\varphi\psi)x = \varphi(\psi x)$. Единицей полугруппы P служит тождественное отображение I .

Через φ^m обозначена m -я степень оператора φ , $m = 1, 2, \dots$.

Обозначим через $P_0 \supset K^*$ класс положительных (линейных или нелинейных) функционалов, переводящих K в $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Если $\varphi \in P$, $Z \in P_0$, то функционал $Z\varphi$ определяется посредством равенства

$$(Z\varphi)(x) = Z(\varphi x).$$

Минимальным решением уравнения (1.1) с положительным оператором φ называется решение x такое, что $\theta \leq x \leq y$, где y – произвольное положительное решение (1.1):

$$\nu = \varphi y, \quad y \geq \theta. \quad (2.2)$$

Пусть уравнение (1.1) с условием (1.4) обладает положительным решением. Сравнивая (2.2) и (1.3) при $\alpha = \theta$, индукцией по n получаем $x_n \leq y$. Если конус K правильный и оператор φ непрерывен, то имеет место (2.1); в (1.3)

можно совершить предельный переход. Поэтому существует минимальное решение уравнения (1.1), которое является пределом итерационной последовательности (1.3). Если существует минимальное решение x , то к нему стремится последовательность x_n^α , определяемая из (1.3) с произвольным начальным приближением $x_0^\alpha = \alpha$ из конусного отрезка $[\theta, \varphi(\theta)]$.

2.2. Нормы, полунормы, пространство Фреше. При рассмотрении критического случая уравнения (1.1) возникает необходимость исследовать сходимость последовательности (1.3) не только по норме пространства E , но и по другим, более слабым, топологиям. Для этого приведем некоторые построения. Для простоты и единообразия используемые нормы и полунормы будут записаны через функционалы.

Введем класс $P_{\text{ad}} \subset P_0$ полунорм (или норм) p в E , аддитивных в конусе K :

$$p(x + y) = p(x) + p(y), \quad x, y \in K.$$

Будем считать, что исходная норма Y пространства E принадлежит классу P_{ad} :

$$Y(\cdot) = \|\cdot\|_E \in P_{\text{ad}}. \quad (2.3)$$

Тогда конус K вполне правильный, норма монотонно зависит от x в K .

Условие (2.3) выполняется в пространствах Лебега суммируемых функций, которые будут рассмотрены в следующем пункте.

Пусть функционал $p \in P_0$ является некоторой нормой в пространстве E . Обозначим через $E(p)$ пополнение E по этой норме.

Пусть $F = \{p_k\}_{k=1}^\infty \subset P_{\text{ad}}$ — полная система полунорм, аддитивных в K . Полнота означает, что если $x \geq \theta$, $x \neq \theta$, то существует $k \geq 1$ такое, что $p_k(x) > 0$. Система $\{p_k\}$ определяет топологию в E . Пространство E является метрическим пространством со стандартной инвариантной метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_k \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)}. \quad (2.4)$$

Обозначим через $E(\{p_k\})$ пространство Фреше, представляющее собой пополнение (замыкание) E по метрике (2.4).

Далее $\tilde{E}$ будем рассматривать как одно из пространств $E(p)$ или $E(F) = E(\{p_k\})$. В пространствах $\tilde{E}$ можно ввести частичный порядок $\geq$ с помощью конуса $\tilde{K}$, представляющего собой замыкание исходного конуса K по соответствующей топологии.

2.3. Пространство $L(G, \mu)$ и его расширения. Пусть (G, μ) — пространство с неотрицательной, полной, σ -аддитивной мерой, а $L(G, \mu)$ — банахово пространство вещественных, интегрируемых по Лебегу функций на G с нормой

$$Y(x) = \int_G |x| d\mu < +\infty$$

(см. [24], [25]). Эта норма аддитивна в конусе K неотрицательных функций. Конус K является воспроизводящим и вполне правильным.

Рассмотрим следующий функционал $p \in P_{\text{ad}}$:

$$p(x) = p(x, h) = \int_G |x| h d\mu, \quad x \in L(G, \mu), \quad (2.5)$$

где $h \geq 0$ – измеримая ограниченная функция. Этот функционал является нормой или полунормой, в зависимости от h . Если

$$h(t) \geq c > 0, \quad t \in G, \quad (2.6)$$

то p является нормой, эквивалентной исходной норме Y .

В случае $\mu(G) = \infty$ мы рассмотрим следующие полунормы p_k . Пусть множество G представлено в виде счетного объединения расширяющихся измеримых подмножеств G_k :

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k, \quad G_1 \subset G_2 \subset \dots, \quad \mu(G_k) < +\infty.$$

Введем полунормы $p_k = p(x, h_k)$, где $p(x, h)$ определяется согласно (2.5), а h_k – характеристическая функция множества G_k . Система таких полунорм удовлетворяет условию полноты. С их помощью можно построить пространство Фреше с метрикой (2.4).

Пусть теперь $L(G, \mu)$ совпадает с пространством $L_1(0, \infty)$, а $h = h(t) \geq 0$ – непрерывная ограниченная функция на $[0, \infty)$. Рассмотрим аддитивную в K полунорму

$$p(x) = \int_0^{\infty} |x(t)| h(t) dt, \quad x \in L_1(0, \infty). \quad (2.7)$$

Если $h(t) > 0$ почти всюду, то p является нормой. Если $h(t) = 0$ на множестве положительной меры, то p не является нормой. Если $h(t) > 0$ и $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ или множество нулей функции h непусто, то норма $p(x)$ слабее исходной нормы пространства $L_1(0, \infty)$. В случае (2.6) эти нормы эквивалентны.

В качестве множеств G_k возьмем конечные отрезки $G_k = [0, r_k]$, $r_k \uparrow \infty$. Полунормы $p_k = p(x, h_k)$ суть

$$p_k(x) = \int_0^{r_k} |x(t)| dt. \quad (2.8)$$

Соответствующим пространством Фреше является $L^{\text{loc}}(0, \infty)$. Оно состоит из функций, интегрируемых на каждом конечном промежутке.

§ 3. Классы операторов

3.1. Классы $\Omega(\gamma)$, $\Omega_c(\gamma)$. Введем некоторые классы положительных операторов, в случае которых будет рассмотрено уравнение (1.1).

Пусть $\gamma \geq 0$. Обозначим через $\Omega(\gamma) \subset P$ класс операторов $\varphi \in P$, удовлетворяющих условию

$$Y\varphi(x) \leq Y(x) + \gamma, \quad x \geq \theta. \quad (3.1)$$

Обозначим через $\gamma(\varphi)$ наименьшее из чисел γ , для которых имеет место неравенство (3.1), т. е.

$$\gamma(\varphi) = \sup_{x \in K} [Y\varphi(x) - Y(x)] \geq 0. \quad (3.2)$$

Неотрицательность числа $\gamma(\varphi)$ следует из неравенства

$$Y\varphi(\theta) - Y(\theta) = Y\varphi(\theta) \geq 0.$$

Оператор φ назовем γ -консервативным, если

$$Y\varphi(x) = Y(x) + \gamma \quad \forall x \geq \theta. \quad (3.3)$$

Обозначим через $\Omega_c(\gamma) \subset \Omega(\gamma)$ класс γ -консервативных операторов. Число γ назовем *допустимой мощностью источников* в случае $\varphi \in \Omega(\gamma)$ и *мощностью источников* в случае $\varphi \in \Omega_c(\gamma)$.

Обозначим

$$\Omega = \bigcup_{\gamma \geq 0} \Omega(\gamma), \quad \Omega_c = \bigcup_{\gamma \geq 0} \Omega_c(\gamma).$$

Легко проверить, что классы $\Omega(\gamma)$, $\Omega_c(\gamma)$, Ω , Ω_c являются выпуклыми множествами.

Рассмотрим произведение $\psi\varphi$, где $\varphi, \psi \in \Omega$. Имеем

$$Y\psi\varphi(x) \leq Y\varphi(x) + \gamma(\psi) \leq Y(x) + \gamma(\varphi) + \gamma(\psi), \quad (3.4)$$

поэтому $\psi\varphi \in \Omega[\gamma(\varphi) + \gamma(\psi)]$. Если $\varphi, \psi \in \Omega_c$, то в (3.4) вместо неравенств имеют место равенства. Нами доказана

ЛЕММА 3.1. *Класс Ω является полугруппой с единицей I , класс Ω_c является ее подполугруппой.*

3.2. Функционал диссипации. Пусть $\varphi \in \Omega(\gamma)$, т. е. выполняется условие (3.1). Введем функционал $Z(\varphi, x) \in P_0$ согласно равенству

$$Y\varphi(x) + Z(\varphi, x) = Y(x) + \gamma. \quad (3.5)$$

Его мы назовем *функционалом диссипации* оператора φ , а оператор φ назовем *Z -диссипативным*. Из соотношения (3.2) следует, что

$$\inf_{x \in K} Z(\varphi, x) = 0.$$

Если функционал Z ограничен на всем конусе: $Z(\varphi, x) \leq c$, то назовем его *несущественным*. Если же $\sup_{x \in K} Z(\varphi, x) = +\infty$, то функционал Z назовем *существенным (нетривиальным)*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $p \in P_{\text{ad}}$ – норма или полунорма в E . Функционал $J \in P_0$ назовем *p -существенным*, если из $p(x_n) \rightarrow \infty$ следует $J(x_n) \rightarrow \infty$, где x_n – последовательность из K . Оператор $\varphi \in \Omega$ назовем *p -диссипативным*, если его функционал диссипации $Z(\varphi, x)$ p -существенный.

Рассмотрим функционал диссипации произведения $\psi\varphi$, где $\varphi, \psi \in \Omega$. Из равенства (3.5) имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} Z(\psi\varphi, x) + Y(\psi\varphi x) &= Y(x) + \gamma(\psi\varphi), \\ Z(\psi, \varphi x) + Y(\psi\varphi x) &= Y(\varphi x) + \gamma(\psi), \\ Z(\varphi, x) + Y(\varphi x) &= Y(x) + \gamma(\varphi). \end{aligned} \quad (3.6)$$

ЛЕММА 3.2. *Пусть $\varphi, \psi \in \Omega$. Тогда:*

а) *справедлива формула*

$$Z(\psi\varphi, x) = Z(\psi, \varphi x) + Z(\varphi, x) + \varepsilon, \quad \varepsilon = \gamma(\psi\varphi) - \gamma(\varphi) - \gamma(\psi) \leq 0; \quad (3.7)$$

- б) класс p -диссипативных операторов (где $p \in P_{\text{ad}}$ – норма или полунорма в E) образует правосторонний идеал в полугруппе Ω ;
 в) имеет место рекуррентная формула

$$Z_m(x) = Z_{m-1}(x) + Z(\varphi, \varphi^{m-1}x) + \delta_m, \quad \delta_m = \text{const}, \quad m \geq 2, \quad (3.8)$$

где $Z_m(x) = Z(\varphi^m, x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (3.7) следует из соотношений (3.6). Неравенство $\varepsilon \leq 0$ следует из (3.4). Из формулы (3.7) имеем $Z(\psi\varphi, x) \geq Z(\varphi, x) + \varepsilon$, откуда следует утверждение б). Формула (3.8) следует из (3.7). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Пусть $g \in K$ и A – линейный положительный оператор. Оператор $\varphi(x) = g + Ax \in \Omega$ Y -диссипативный тогда и только тогда, когда A является оператором сжатия: $q = \|A\| < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q = 1$. Выберем последовательность x_n такую, чтобы $Y(x_n) = 1$, и $r_n = YA(x_n) \rightarrow 1$, $r_n < 1$. Пусть $t_n = (1 - r_n)^{-1}$. С учетом аддитивности нормы Y в K имеем

$$YA(t_n x_n) + Z(\varphi, t_n x_n) + Y(g) = Y\varphi(t_n x_n) + Z(\varphi, t_n x_n) \leq Y(t_n x_n) + \gamma,$$

откуда получаем

$$Z(t_n x_n) \leq t_n - t_n r_n + \gamma - Y(g) = 1 + \gamma - Y(g),$$

т.е. несмотря на то, что $Y(t_n x_n) \rightarrow \infty$, функция $Z(\varphi, t_n x_n)$ остается ограниченной. Поэтому φ не является Y -диссипативным. Показано, что из Y -диссипативности оператора φ следует $q < 1$.

Обратное утверждение очевидно. Лемма доказана.

3.3. F -диссипативность. Приведем некоторые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Функционал $J \in P_0$ назовем F -существенным относительно системы функционалов $F = \{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset P_{\text{ad}}$, если из $p_k(x_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторого $k \geq 1$ следует $J(x_n) \rightarrow \infty$. Оператор $\varphi \in \Omega$ назовем F -диссипативным, если его функционал диссипации $Z(\varphi, x)$ F -существенный.

Рассмотрим один пример. Пусть $h = h(t) > 0$ – непрерывная весовая функция на $[0, \infty)$, причем $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть p – функционал, определяемый согласно равенству (2.7). Нетрудно убедиться в том, что p является F -существенным относительно системы функционалов (2.8), но не является Y -существенным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Функционал $J \in P_0$ называется слабо F -существенным, если для любого $k \geq 1$ существует $m = m_k \geq 1$ такое, что из $x_n \geq \theta$, $p_k(x_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ следует $Z_m(x_n) = Z(\varphi^m, x_n) \rightarrow \infty$. Оператор $\varphi \in \Omega$ называется слабо F -диссипативным, если его функционал диссипации $Z(x) = Z(\varphi, x)$ слабо F -существенный.

§ 4. Сходимость итерационной последовательности (1.3)

4.1. Основное неравенство. Перейдем к изучению итерационной последовательности (1.3).

Пусть $\varphi \in \Omega$ и $Z(\varphi, x)$ – его функционал диссипации.

ЛЕММА 4.1. *Имеют место неравенства*

$$Z(\varphi, x_n) \leq \gamma, \quad (4.1)$$

$$Z_m(x_n) = Z(\varphi^m, x_n) \leq \gamma_m, \quad \gamma_m = \text{const}, \quad m \geq 1. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $x = x_n$ в равенстве (3.5), с учетом (1.3) будем иметь

$$Y(x_{n+1}) + Z(\varphi, x_n) = Y(x_n) + \gamma.$$

С учетом $x_{n+1} \geq x_n$ и монотонности нормы Y приходим к равенству (4.1). Подставляя $x = x_n$ в формулу (3.8), получаем

$$Z_m(x_n) = Z_{m-1}(x_n) + Z(\varphi, \varphi^{m-1}x_n) + \delta_m.$$

С учетом равенства $\varphi^{m-1}x_n = x_{n+m-1}$ и неравенства (4.1) имеем

$$Z_m(x_n) \leq Z_{m-1}(x_n) + \gamma + \delta_m,$$

откуда неравенство (4.2) следует индукцией по m (при соответствующем выборе γ_m). Лемма доказана.

Неравенство (4.1) имеет очевидный смысл: если система S монотонно эволюционирует по дискретному времени, то общие потери на каждом шаге не превосходят мощности источников.

4.2. Существование предела последовательности (1.3). Пусть оператор ψ действует в некотором множестве B банахова пространства с миниед-рательным конусом. Его мы назовем *непрерывным снизу* (по направлению $\leq$), если из $t_n \uparrow a$ следует $\psi(t_n) \rightarrow \psi(a)$.

Данное определение аналогично понятию сходимости по Муру–Смиту.

ТЕОРЕМА 4.1. а) Пусть оператор $\varphi \in \Omega$ строго диссипативный и непрерывный снизу. Тогда последовательности (1.3), (1.5) сходятся по норме Y к минимальному положительному решению $x \in E$ уравнения (1.1). Имеет место равенство

$$Z(\varphi, x) = \gamma. \quad (4.3)$$

б) Пусть $p \in P_{\text{ад}}$ – некоторая норма в E , а оператор $\varphi \in \Omega$ является p -диссипативным. Тогда итерационная последовательность (1.3) сходится по норме p к элементу $x \in E(p)$.

в) Пусть оператор $\varphi \in \Omega$ слабо F -диссипативен относительно полной системы полуноrm $F = \{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset P_0$. Тогда итерационная последовательность (1.3) сходится по метрике (2.4) к элементу $x \in E(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (4.1) следует ограниченность последовательности $p(x_n)$ в случае p -диссипативности φ . При $p = Y$ (или если норма p эквивалентна Y) в силу полной правильности конуса K (см. п. 2.2) последовательность (1.3) сходится в E . Вследствие условия непрерывности φ снизу

в (1.3) можно совершить предельный переход, что приведет к равенству (1.1). Подставляя в равенство (3.5) решение x уравнения (1.1), получим (4.3). Утверждение а) доказано.

Пусть теперь норма $p \in P_{\text{ад}}$ слабее Y . Из аддитивности p и монотонности последовательности x_n следует равенство

$$p(x_{n+m} - x_n) = p(x_{n+m}) - p(x_n).$$

Отсюда и из фундаментальности числовой последовательности $p(x_n)$ следует, что последовательность x_n фундаментальна по норме p и сходится в замыкании $E(p)$ пространства E . Утверждение б) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения в). Покажем, что числовые последовательности $p_k(x_n)$ ограничены при произвольном k . Предположим обратное. Пусть $p_k(x_n) \rightarrow \infty$ при некотором k . Выберем число $m = m_k$ в соответствии с определением 3.3. Рассмотрим подпоследовательность $y_n = x_{mn}$ монотонной последовательности x_n . Имеем $p_k(y_n) = p_k(x_{mn}) \rightarrow \infty$. Из (1.3) получаем

$$y_{n+1} = \varphi^m y_n, \quad y_0 = \theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно определению 3.3 $Z_m(y_n) = Z(\varphi^m, y_n) \rightarrow \infty$, т.е. $Z_m(x_{mn}) \rightarrow \infty$, что противоречит неравенству (4.2).

Итак, последовательности $p_k(x_n)$ при произвольном k монотонны и ограничены. Поэтому для любого $k \geq 1$

$$p_k(x_{n+m} - x_n) = p_k(x_{n+m}) - p_k(x_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

(равномерно по $m \geq 0$). Согласно формуле (2.4) имеем

$$\rho(x_{n+m}, x_n) = \sum_k \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x_{n+m} - x_n)}{1 + p_k(x_{n+m} - x_n)}.$$

Поскольку ряд в правой части последнего равенства сходится равномерно по n и m , то можно совершить почленный предельный переход при $n \rightarrow \infty$, что приводит к фундаментальности последовательности x_n по метрике ρ . Поэтому x_n сходится в $E(\{p_k\})$. Теорема доказана.

§ 5. С-решение уравнения (1.1)

5.1. Определение С-решения. Пусть, как и раньше, $\tilde{K} \subset \tilde{E}$ – конус, представляющей собой замыкание исходного конуса K по топологии пространства $\tilde{E}$.

Для интерпретации полученного предела $x \in \tilde{K}$ последовательности (1.3) в условиях утверждений б) и в) теоремы 4.1 как решения (или обобщенного решения) уравнения (1.1) можно руководствоваться различными критериями. Ниже мы приведем некоторые соображения, связанные с данным вопросом.

Пусть предел x последовательности (1.3) принадлежит “естественной области определения” оператора φ (который аналитически представлен через интегралы, сдвиги и др.). В ряде случаев, когда (1.1) представляет собой линейное или нелинейное интегральное уравнение, вопрос о выполнении равенства (1.1)

решается с помощью теорем Лебега и Леви о предельном переходе под знаком интеграла (см. [25]). Такой путь будет реализован в случае интегральных уравнений, рассмотренных в § 6, 7.

В общем случае необходимо решить вопросы о возможности построения монотонного оператора $\tilde{\varphi}$, являющегося продолжением φ в некоторое расширение B множества K , содержащее точку x :

$$(K \cup x) \subset B \subset \tilde{K}, \quad (5.1)$$

и о законности предельного перехода в (1.3). Для этого наложим дополнительные условия (непрерывность в том или ином смысле и др.), обеспечивающие единственность такого продолжения.

Оператор φ может не обладать монотонным продолжением во всем конусе $\tilde{K}$. Желательно, чтобы множество B было достаточно широким. С физической точки зрения существенно требование осмысления предела x в качестве решения первоначальной физической задачи, сводящейся к уравнению (1.1).

Если элемент x удовлетворяет “продолженному” уравнению

$$x = \tilde{\varphi}x, \quad (5.2)$$

то его мы назовем *C-решением* исходного уравнения (1.1).

Оператор $\tilde{\varphi}$ назовем *СС-продолжением* φ в A (см. (5.1)), если конус $\tilde{K}$ миниедральный, а $\tilde{\varphi}$ – монотонный и непрерывный снизу (по конусу $\tilde{K}$) в A .

Поскольку множество K плотно в $\tilde{K}$, то СС-продолжение единственное.

Ниже будут рассмотрены некоторые аспекты продолжения оператора φ .

5.2. Общая схема продолжения. Конус K мы будем считать вполне правильным и миниедральным (определение см. в п. 2.1), а конус $\tilde{K}$ – правильным и миниедральным. Миниедральный конус в банаховом пространстве является направленным множеством (с направлением $\leq$).

В качестве множества B , в котором предполагается построить *C-решение* уравнения (1.1), рассмотрим конусный отрезок $[\theta, x] \subset \tilde{K}$.

Продолжим оператор φ на отрезок $[\theta, x]$. Пусть последовательность x_n определяется согласно (1.3) и $y \in [\theta, x]$. Обозначим $y_n = \min(y, x_n) \in K$. Из $x_n \uparrow x$ и $y \in [\theta, x]$ следует, что $y_n \uparrow y$ в $\tilde{K}$. Рассмотрим последовательность $z_n = \varphi(y_n) \in K$. Имеем $z_n \uparrow$ (по конусам $K, \tilde{K}$) и $z_n \leq x$.

Согласно предположению о правильности конуса $\tilde{K}$ имеем $z_n \uparrow z \in [\theta, x]$.

Определим оператор $\tilde{\varphi}$ в точке y согласно равенству

$$\tilde{\varphi}(y) = z. \quad (5.3)$$

ЛЕММА 5.1. *Отображение (5.3) монотонное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{aligned} y, u \in B, \quad \theta \leq y \leq u \leq x, \\ y_n = \min(y, x_n), \quad u_n = \min(u, x_n), \\ \varphi(y) = z, \quad \varphi(u) = \nu, \quad \varphi(y_n) = z_n \rightarrow z, \quad \varphi(u_n) = \nu_n \rightarrow \nu, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где сходимость предполагается по топологии пространства $\tilde{E}$.

Из равенства (5.3) следует, что $y_n \leq u_n$, стало быть, $z_n \leq \nu_n$ и $z \leq \nu$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о непрерывности оператора $\tilde{\varphi}$. Обозначим через $u^\alpha = (x_n^\alpha)$ последовательность (1.3) с начальным приближением $\alpha \in [\theta, \varphi(\theta)]$ (траекторию точки в эволюционном процессе). Очевидно, имеем $x_n \leq x_n^\alpha \leq x_{n+1}$, где, как и раньше, $x_n = x_n^0$. Поэтому

$$x_n^\alpha \rightarrow x \quad \forall \alpha. \quad (5.5)$$

Сходимость имеет место по конусу $\tilde{K}$ монотонно по x .

Множество $B_0 = \{u^\alpha\} \cup x \subset \tilde{K}$ является направленным множеством, обладающим наибольшим элементом x . Покажем, что оператор $\tilde{\varphi}$ непрерывен в точке x по направленности B_0 . Пусть $y_n \in B_0$, $y_n \neq x$, $y_n \uparrow x$, $z_n = \varphi(y_n)$. Имеем $z_n \in B_0$, $z_n \uparrow$. Из (5.5) легко следует, что $z_n \rightarrow x (= \tilde{\varphi}(x))$. Отсюда и из леммы 5.1 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.1. *В условиях 6) и в) теоремы 4.1 оператор φ допускает монотонное продолжение $\tilde{\varphi}$ в конусный отрезок $[\theta, x]$, которое непрерывно в точке x по направленности A_0 . Имеет место равенство (5.2).*

Рассмотрим случай “минимального” расширения, когда $A = K \cup x$. Тогда единственное продолжение $\tilde{\varphi}$ строится доопределением (5.2) оператора φ в точке x . Монотонность этого продолжения и непрерывность в точке x по направленности A_0 следуют из теоремы 5.1.

Другим вариантом изучения непрерывности отображения $\tilde{\varphi}$ в конусном отрезке $B = [\theta, x]$ при $\tilde{E} = E(p)$ является рассмотрение B в качестве единичного шара в банаховом пространстве x -измеримых (x -ограниченных) элементов $u \geq \theta$ с x -нормой ≤ 1 (см. [1]):

$$p_x(u) = \inf\{\lambda \geq 0; \theta \leq u \leq \lambda x\} \leq 1.$$

§ 6. Интегральное уравнение свертки на полупрямой с суммарно-разностным ядром в особом случае

6.1. Предварительный анализ. Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$x(\tau) = g(\tau) = \int_0^\infty T(\tau - t)x(t) dt + \int_0^\infty T_0(\tau + t)x(t) dt, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (6.1)$$

где $0 \leq g \in L_1(0, \infty)$, $0 \leq T_0 \in L_1(0, \infty)$, а ядро T удовлетворяет условиям консервативности:

$$0 \leq T \in L_1(-\infty, \infty), \quad \int_{-\infty}^\infty T(\tau) d\tau = 1. \quad (6.2)$$

Условия (6.2) означают, что функция T является плотностью распределения случайной величины.

Скалярные и векторные уравнения вида (6.1) занимают особое место по важности и степени изученности среди линейных уравнений (1.2), (1.4). Такими уравнениями, в частности, описывается ряд консервативных физических процессов, происходящих в полупространстве. В этих задачах ядро T_0 учитывает отражательную способность границы $\tau = 0$ полупространства.

При $T_0 = 0$ уравнение (6.1) при условии (6.2) обращается в консервативное интегральное уравнение Винера–Хопфа (ИУВХ), играющее важную роль в ряде разделов математической физики и теории вероятностей.

Уравнение (6.1) и его частный случай – ИУВХ – обладают следующей интересной особенностью: при определенных дополнительных условиях одновременно существуют положительные решения как однородного ($g = 0$), так и неоднородного уравнения (см. [3]–[8], [16]–[18]).

Из результатов работы [17] следует, что при выполнении условия $T_0(\tau) \leq \lambda T(\tau)$, $\lambda < 1$, и конечности второго момента функции T уравнение (6.1) обладает локально интегрируемым решением $x \geq 0$ для произвольного $g \in L_1(0, \infty)$, $g \geq 0$. Имеет место асимптотика

$$\int_0^\tau x(t) dt = o(\tau^2), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (6.3)$$

Далее мы покажем, что в силу теоремы 4.1 существует локально интегрируемое решение уравнения (5.1) при более слабых ограничениях на T_0 . Однако таким путем не удастся получить оценку (6.3) и ряд других интересных свойств решения.

В качестве исходного пространства E рассмотрим $L_1(0, \infty)$ с конусом K неотрицательных функций. Запишем уравнение (6.1) в форме (1.1), где $x \geq 0$ и оператор φ определяется посредством соотношения

$$\varphi x(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty T(\tau - t)x(t) dt + \int_0^\infty T_0(\tau + t)x(t) dt \geq 0, \quad (6.4)$$

или

$$\varphi x = g + \hat{T}x + \hat{T}_0x = g + \hat{T}_1x,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{T}x(\tau) &= \int_0^\infty T(\tau - t)x(t) dt, & \hat{T}_0x(\tau) &= \int_0^\infty T_0(\tau + t)x(t) dt, \\ \hat{T}_1x(\tau) &= \int_0^\infty T_1(\tau, t)x(t) dt, & T_1(\tau, t) &= T(\tau - t) + T_0(\tau + t). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Хорошо известно, что оператор Винера–Хопфа $\hat{T}$ и оператор ганкелева типа $\hat{T}_0$ ограничены в $L_1(0, \infty)$, причем $\hat{T}_0$ является компактным, а $\hat{T}$ – некомпактным (см. [24]).

Обозначим

$$h(t) = \sigma(t) - \sigma_0(t) \in C_0[0, \infty), \quad (6.6)$$

где

$$\sigma(t) = \int_t^\infty K(-\tau) d\tau, \quad \sigma_0(t) = \int_t^\infty K_0(\tau) d\tau.$$

Имеем

$$|h(t)| \leq \frac{1}{2} + \int_0^\infty K_0(\tau) d\tau, \quad h(\infty) = 0.$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется условие

$$h(t) \geq 0. \quad (6.7)$$

Пусть p – функционал, определяемый согласно (2.7). Обозначим через $G_0 \subset [0, \infty)$ множество нулей функции h :

$$G_0 = \{t \in [0, \infty); h(t) = 0\}, \quad 0 \leq \text{mes } G_0 \leq \infty. \quad (6.8)$$

Если $\text{mes } G_0 = 0$, то функционал p является нормой в $L_1(0, \infty)$, а если $\text{mes } G_0 > 0$, то – полунормой. Интегрируя (6.4) от 0 до ∞ , получаем

$$\begin{aligned} Y\varphi(\tau) &= \gamma + \int_0^\infty \left[\int_{-\tau}^\infty T(y) dy \right] x(t) dt \\ &\quad + \int_0^\infty \left[\int_\tau^\infty T_0(y) dy \right] x(t) dt = \gamma + Y(x) - p(x), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\varphi \in \Omega(\gamma)$ и

$$Z(\varphi, x) = p(x) = \int_0^\infty x(t)h(t) dt, \quad x(t) \geq 0, \quad (6.9)$$

является его функционалом диссипации.

Рассмотрим итерационную последовательность (1.3) в случае выполнения уравнения (6.1):

$$x_{n+1}(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty T_1(\tau, t)x_n(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0(\tau) = 0. \quad (6.10)$$

Согласно лемме 4.1 имеем

$$\int_0^\infty x_n(t)h(t) dt \leq \gamma. \quad (6.11)$$

6.2. Случай $\text{mes } G_0 = 0$. В случае $\text{mes } G_0 = 0$ функционал p является нормой. Обозначим через $L_{1,h}(0, \infty) \supset L_1(0, \infty)$ банахово пространство вещественных, интегрируемых с весом h функций x на $(0, \infty)$ с нормой $p(x)$.

Из неравенства (6.11), монотонности последовательности x_n и теоремы Б. Леви (см. [25]) следует сходимость

$$x_n \uparrow x \quad \text{в } L_{1,h}(0, \infty), \quad x_n(\tau) \leq x(\tau), \quad \int_0^\infty x(t)h(t) dt \leq \gamma. \quad (6.12)$$

Докажем законность предельного перехода в (6.10). Из соотношений (6.10) и (6.12) имеем

$$\int_0^\infty T_1(\tau, t)x_n(t) dt \leq x(\tau) - g(\tau), \quad (6.13)$$

поэтому почти для всех $\tau \in (0, \infty)$ интегралы в левой части (6.13) ограничены. Согласно теореме Б. Леви в (6.13) при $n \rightarrow \infty$ можно совершить предельный переход:

$$\int_0^\infty T(\tau - t)f(t) dt \leq f(\tau) - g(\tau). \quad (6.14)$$

С другой стороны, из соотношения (6.10) имеем неравенство

$$x_{n+1}(\tau) \leq g(\tau) + \int_0^\infty T_1(\tau, t)f(t) dt,$$

предельный переход в котором на основании теоремы Лебега приводит к неравенству, противоположному (6.14). Поэтому при $\text{mes } G_0 = 0$ функция $x \in L_{1,h}(0, \infty)$ удовлетворяет уравнению (6.1) и является его минимальным решением.

6.3. Случай $0 < \text{mes } G_0 \leq \infty$. Рассмотрим теперь случай $\text{mes } G_0 > 0$, который возникает, например, если $T(-t) = 0$, $T_0(t) = 0$ при достаточно больших значениях t . Предположим дополнительно, что $h(0) > 0$, т.е. согласно (6.6) имеем

$$\int_0^\infty K_0(t) dt < \int_0^\infty K(-t) dt. \quad (6.15)$$

В силу непрерывности функции h существует $r_0 = \min G_0 > 0$.

Пусть $r < r_0$. Согласно определению r_0 имеем $h(t) > 0$, $0 \leq t \leq r$. Поэтому

$$h(t) \geq \beta > 0, \quad 0 \leq t \leq r, \quad Z(\varphi, x) \geq \beta \int_0^r x(t) dt, \quad (6.16)$$

где $\beta = \min h(t)$, $0 \leq t \leq r$.

Рассмотрим отрезок $[r - \delta, r]$, где $r_0/2 < r < r_0$, а $\delta \in (0, r_0/4]$ фиксировано. Покажем, что функция σ , фигурирующая в (6.6), не может быть постоянной на этом отрезке при r , достаточно близких к r_0 . В противном случае мы имели бы $\sigma(r) = \sigma(r - \delta)$, $r < r_0$. Поскольку функция σ непрерывно зависит от r , то $\sigma(r_0) = \sigma(r_0 - \delta)$. Из условия (6.7) и неотрицательности функции σ_0 следует, что тогда $\sigma_0(r_0) = \sigma_0(r_0 - \delta)$, т.е. $\rho(r_0 - \delta) = \rho(r_0) = 0$, что противоречит определению r_0 . Итак, при произвольном $\delta \in (0, r_0/4]$ и подходящем выборе r , $r_0/2 < r < r_0$, имеет место неравенство

$$\eta = \int_{r-\delta}^r T(-t) dt > 0. \quad (6.17)$$

Далее мы получим оценки снизу для функционалов $Z_m(x) = Z(\varphi^m, x)$.

ЛЕММА 6.1. Пусть оператор φ определяется согласно соотношению (6.4), причем выполняются условия (6.12) и (6.13), а $\psi \in \Omega$ – оператор, удовлетворяющий условию

$$Z(\psi, x) \geq \alpha \int_0^a x(t) dt + \varepsilon, \quad \alpha > 0. \quad (6.18)$$

Тогда:

а) существуют постоянные $\tilde{\alpha} > 0$ и $\tilde{\varepsilon}$ такие, что имеет место неравенство

$$Z(\psi\varphi, x) \geq \tilde{\alpha} \int_0^{a+r-\delta} x(t) dt + \tilde{\varepsilon}; \quad (6.19)$$

б) существуют постоянные $\beta_m > 0$ и ε_m такие, что имеет место неравенство

$$Z_m(x) = Z(\varphi^m, x) \geq \beta_m \int_0^{(r-\delta)m} x(t) dt + \varepsilon_m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (3.7), выражение (6.4) для φ и равенство (6.9), получаем

$$\begin{aligned} Z(\psi\varphi, x) &\geq Z(\psi, \hat{K}x) + Z(\varphi, x) + \varepsilon \\ &\geq \alpha \int_0^a d\tau \int_0^\infty T(\tau - t)x(t) dt + \int_0^\infty x(t)h(t) dt + \varepsilon. \end{aligned}$$

С учетом неравенства (6.16) будем иметь

$$Z(\psi\varphi, x) \geq \alpha \int_0^\infty x(t) dt \int_{-t}^{-t+a} T(s) ds + \beta \int_0^r x(t) dt + \varepsilon.$$

Пусть $t \in [r, a+r-\delta]$. Тогда $[-r, -r+\delta] \subset [-t, a-t]$. Поэтому согласно (6.17) имеем

$$\int_{-t}^{-t+a} T(s) ds \geq \eta.$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} Z(\psi\varphi, x) &\geq \alpha \int_r^{a+r-\delta} x(t) dt \int_{-t}^{-t+a} T(s) ds + \beta \int_0^r x(t) dt + \varepsilon \\ &\geq \tilde{\alpha} \int_0^{a+r-\delta} x(t) dt + \varepsilon, \end{aligned}$$

где $\tilde{\alpha} = \min(\alpha\eta, \beta)$. Утверждение а) доказано.

Имеем $Z_m(x) = Z(\psi\varphi, x)$, где $\psi = \psi_m = \varphi^{m-1}$, откуда утверждение б) доказывается индукцией по m в силу неравенств (6.16), (6.19). Лемма доказана.

Рассмотрим пространство Фреше $L^{\text{loc}}(0, \infty)$ с определяющей системой функционалов вида (2.8):

$$p_k(x) = \int_0^{k(r-\delta)} x(t) dt, \quad x \geq 0. \quad (6.20)$$

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполнены условия (6.2), (6.7) и множество G_0 определяется согласно (6.8). Тогда:

а) если $\text{mes } G_0 = 0$, то уравнение (6.1) обладает минимальным положительным решением $x \in L_{1,h}(0, \infty)$, удовлетворяющим условию (6.12), где h задается посредством (6.6);

б) если $\text{mes } G_0 > 0$ и выполняется условие (6.15), то уравнение (6.1) обладает минимальным положительным решением в F -пространстве $L^{\text{loc}}(0, \infty)$;

в) оператор φ непрерывен снизу в конусном отрезке $[\theta, x]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) доказано в п. 6.2. Сходимость в пространстве $L^{\text{loc}}(0, \infty)$ последовательности (6.10) в условиях утверждения б) следует из леммы 6.1 и утверждения в) теоремы 4.1. Законность предельного перехода доказывается так же, как в п. 6.2. Утверждение в) следует из теоремы Лебега. Теорема доказана.

§ 7. Одно интегральное уравнение типа Урысона

Рассмотрим следующее интегральное уравнение типа Урысона на полупрямой:

$$x(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty U\left(\frac{\tau}{x(t)}, t\right) dt, \quad (7.1)$$

где $0 < g \in L_1(0, \infty)$, а функция $U(z, t) \geq 0$, определенная на квадранте $[0, \infty) \times [0, \infty)$, обладает свойствами:

а) она убывает по z ,

$$U(+\infty, t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (7.2)$$

$$\int_0^\infty U(z, t) dz = \sigma(t) < 1, \quad t \in [0, \infty); \quad (7.3)$$

б) в качестве U можно взять, например, конечные или бесконечные суммы вида

$$U(z, t) = \sum_j U_j(z) \sigma_j(t),$$

где $U_j \in L_1(0, \infty)$ – убывающие функции, стремящиеся к нулю при $z \rightarrow \infty$ и такие, что выполняется условие (7.2), причем $\int_0^\infty U_j(z) dz = 1$, а функции $\sigma_j(t) \geq 0$ такие, что $\sigma(t) = \sum_j \sigma_j(t) < 1$.

Рассмотрим интегральный оператор

$$\varphi(x)(\tau) = \int_0^\infty U\left(\frac{\tau}{x(t)}, t\right) dt + g(\tau). \quad (7.4)$$

Если $x(t) = 0$ в некоторой точке, то в соответствии с условием (6.2) считается, что подынтегральная функция равна нулю в данной точке.

Пусть $x \in L_1(0, \infty)$, $x(t) > 0$. Интегрируя равенство (7.4) от 0 до ∞ и изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\|\varphi(x)\| = \int_0^\infty dt \int_0^\infty U\left(\frac{\tau}{x(t)}, t\right) d\tau + \gamma = \int_0^\infty \sigma(t)x(t) dt + \gamma, \quad (7.5)$$

где σ определяется согласно (7.3), а $\gamma = \|g\| = \int_0^\infty g(t) dt$.

Из равенства (7.5) следует, что положительный оператор φ действует в пространстве $L_1(0, \infty)$. Из условия (7.2) следует, что оператор φ монотонный. Из (7.5) следует равенство (3.5), где функционал диссипации Z имеет вид

$$Z(\varphi, x) = \int_0^\infty x(t)h(t) dt, \quad h(t) = 1 - \sigma(t) < 1.$$

Из утверждения 6) теоремы 4.1 следует сходимость итерационной последовательности (1.3) в $L_{1,h}(0, \infty) \supset L_1(0, \infty)$ (определение см. в начале п. 6.2) в случае уравнения (7.1). Законность предельного перехода доказывается так же, как в п. 6.2.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть выполнены условия (7.2) и (7.3). Тогда уравнение (7.1) обладает минимальным положительным решением $x \in L_{1,h}(0, \infty)$. Имеет место неравенство

$$\int_0^\infty x(t)h(t) dt \leq \gamma.$$

§ 8. Замечания

Поставленная и изученная в настоящей работе задача построения С-решения уравнения (1.1) выходит за рамки применения классических принципов неподвижной точки (принципов Шаудера, Биркгофа–Тарского и др). Построение

неподвижной точки x оператора в критическом случае сопровождается построением некоторого расширения B исходного пространства и одновременным монотонным

продолжением оператора φ в B , обладающим некоторыми свойствами непрерывности. Возможность такого продолжения заранее не предполагается и (самосогласованным образом) следует из сходимости последовательностей (1.3), (1.5) в $\tilde{E}$.

В настоящей работе по существу была использована аддитивность нормы Y в конусе K исходного пространства E . Поэтому пространства $L(G, \mu)$ играют особую роль в рассмотрении данного вопроса.

Требование непрерывности оператора φ только “снизу” указывает на возможность изучения некоторых физических задач, связанных с достижением состояния фазового перехода, подходом, предложенным в настоящей работе.

Полученные результаты мы рассматриваем в первую очередь как простой признак разрешимости задачи (1.1), за которым должно следовать более детальное изучение свойств решения с привлечением специальных методов.

Список литературы

1. Красносельский М. А., *Положительные решения операторных уравнений*, Физматлит, М., 1962.
2. Ниренберг Л., *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Мир, М., 1977.
3. Hopf E., *Mathematical problems of radiative equilibrium*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys., no. 31, Cambridge Univ. Press, London, 1934.
4. Spitzer F., “The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density”, *Duke Math. J.*, **24**:3 (1957), 327–343.
5. Busbridge I. W., *The mathematics of radiative transfer*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys., no. 50, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1960.
6. Соболев В. В., *Курс теоретической астрофизики*, Наука, М., 1967.
7. Масленников М. В., “Проблема Милна с анизотропным рассеянием”, *Тр. МИАН СССР*, **97** (1968), 1–133.
8. Соболев В. В., *Рассеяние света в атмосферах планет*, Наука, М., 1972.
9. Черчиньяни К., *Теория и приложения уравнения Больцмана*, Мир, М., 1978.
10. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1984.
11. Веденяпин В. В., *Кинетические уравнения Больцмана и Власова*, Физматлит, М., 2001.
12. Козлов В. В., *Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2002.
13. Batisheva Ya. G., Vedenyapin V. V., Kuchanov S. L., “A mathematical problem of the theory of gelation”, *J. Math. Phys.*, **43**:7 (2002), 3695–3703.
14. Рудин У., *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975.
15. Крейн М. Г., Шмудьян Ю. Л., “Уравнения Винера–Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты”, *Изв. АН АрмССР, Математика*, **17**:4 (1982), 307–327; № 5, 335–375.
16. Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б., *Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения*, Итоги науки и техники, Матем. анализ, **22**, ВИНТИ, М., 1984.
17. Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г., “О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки”, *Дифференц. уравнения*, **26**:8 (1990), 1442–1452.

18. Енгибарян Б. Н., “Применение многократной факторизации к однородному уравнению свертки”, *Изв. НАН РА, Математика*, **32**:1 (1997), 38–48.
19. Енгибарян Н. Б., “Постановка и решение некоторых задач факторизации интегральных операторов”, *Матем. сб.*, **191**:12 (2000), 61–76.
20. Енгибарян Н. Б., “Уравнения в свертках, содержащие сингулярные вероятностные распределения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:2 (1996), 21–48.
21. Енгибарян Н. Б., “Консервативные системы интегральных уравнений свертки на полупрямой и всей прямой”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 61–82.
22. Yengibarian N. B., “Renewal equation on the whole line”, *Stochastic Process. Appl.*, **85**:2 (2000), 237–247.
23. Yengibarian N. B., “Factorization of Markov chains”, *J. Theoret. Probab.*, **17**:2 (2004), 459–481.
24. Красносельский М. А., Забрейко П. П. и др, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
25. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1972.

Н. Б. ЕНГИБАРЯН (N. B. ENGIBARYAN)
Институт Математики НАН Республики Армения
E-mail: yengib@instmath.sci.am

Поступило в редакцию
11.05.2005