Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Илларионов, Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток фиксированного определителя, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 3, 111–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/im6035>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 10:15:14

УДК 511.36+511.9

А. А. Илларионов

Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток фиксированного определителя

Получена асимптотическая формула для среднего значения количества относительных минимумов трехмерных целочисленных полных решеток заданного определителя. Она обобщает классический результат Хейль-бронна о средней длине конечной цепной дроби фиксированного знаменателя.

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: относительный минимум, многомерная непрерывная дробь, средняя длина непрерывной дроби.

Введение

Полной целочисленной s -мерной решеткой называется множество вида

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^s k_i m^{(i)} : k_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

где $m^{(i)}$, $i = \overline{1, s}$, – линейно независимые векторы из $\mathbb{Z}^s$ (базис Γ). Матрица M со столбцами $(m^{(i)})^T$ называется *базисной*, число $\det \Gamma = |\det M|$ – *определителем* решетки Γ . Пусть $\mathcal{L}_s(\mathbb{Z})$ – множество s -мерных целочисленных полных решеток, $\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)$ – множество решеток из $\mathcal{L}_s(\mathbb{Z})$ с определителем N .

Ненулевой узел $\gamma \in \Gamma$ называется *относительным минимумом* решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z})$, если не существует другого ненулевого узла $\gamma' \in \Gamma$, для которого

$$|\gamma'_i| \leq |\gamma_i|, \quad i = \overline{1, s}; \quad \sum_{i=1}^s |\gamma'_i| < \sum_{i=1}^s |\gamma_i|.$$

Через $\mathfrak{M}(\Gamma)$ обозначим множество всех относительных минимумов решетки Γ .

Понятие относительного минимума появилось в конце XIX в. в работах [1] и [2] в связи с многомерным обобщением алгоритма непрерывных дробей. Согласно классической теореме Лагранжа если $\alpha \in (0, 1/2)$, а Γ_α – решетка с базисом $(1, \alpha)$, $(0, 1)$, то

$$\mathfrak{M}(\Gamma_\alpha) = \{ \pm(Q_i, \alpha Q_i - P_i) : i = 0, 1, \dots \},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-12004-офи_м-2011, 11-01-00628-а), ДВО РАН (проект № 12-I-П19-01) и Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-1922.2012.1).

где $Q_0 = 0$, $P_0 = 1$ и P_i/Q_i — i -я подходящая дробь к α при $i \geq 1$, т. е. если разложение α в непрерывную дробь имеет вид

$$\alpha = [0; q_1, q_2, q_3, \dots] = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}},$$

то $P_i/Q_i = [0; q_1, q_2, \dots, q_{i-1}]$.

Понятие относительного минимума возникает также при изучении теоретико-числовых квадратурных формул (см. [3], [4]), в целочисленном многокритериальном линейном программировании и других областях математики.

Хорошо известна следующая неутрачиваемая оценка сверху (см. [3]–[6]):

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma) \ll_s \ln^{s-1} N, \quad \Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N), \quad N \geq 2. \quad (0.1)$$

Здесь и далее $\#X$ — количество элементов конечного множества X .

Запись $f(x) \ll g(x)$ (либо $f(x) = O(g(x))$) при $x \in X$ означает, что существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что $|f(x)| \leq Cg(x)$ для любого $x \in X$. Если C зависит от параметра θ , то записываем $f(x) \ll_{\theta} g(x)$ (либо $f(x) = O_{\theta}(g(x))$). Запись $f \asymp g$ означает, что $f \ll g \ll f$.

В [7] была получена аналогичная (0.1) оценка для неполных решеток.

Пусть $\mathcal{R}_s(N) = \#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)$, и пусть

$$E_s(N) = \frac{1}{\mathcal{R}_s(N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)} \#\mathfrak{M}(\Gamma)$$

— среднее количество относительных минимумов s -мерных целочисленных полных решеток с определителем N .

Из классического результата Хейльбронна [8] о средней длине конечной цепной дроби нетрудно вывести (см. [9]) асимптотическую формулу

$$E_2(N) = \frac{4 \ln 2}{\zeta(2)} \ln N + O(\ln \ln N), \quad N > e. \quad (0.2)$$

Здесь и далее ζ — дзета-функция Римана.

В настоящей статье доказывается аналог формулы (0.2) следующего вида.

ТЕОРЕМА 0.1. *Для любого целого $N \geq 3$ справедлива асимптотическая формула*

$$E_3(N) = \frac{4\mathcal{C}}{\zeta(2)\zeta(3)} \ln^2 N + O((\ln \ln N)^{\chi} \ln N),$$

где $\chi = 0$, если N — простое число, и $\chi = 1$, если составное; $\mathcal{C}$ — абсолютная постоянная, которая определяется формулой (1.2) (см. далее).

Данная статья является продолжением работы автора [9], в которой для величины

$$\tilde{E}_s(N) = \frac{1}{\sum_{n=1}^N \mathcal{R}_s(n)} \sum_{n=1}^N \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; n)} \#\mathfrak{M}(\Gamma)$$

(среднее количество относительных минимумов s -мерных целочисленных полных решеток с определителем из отрезка $[1, N]$) было доказано, что

$$\tilde{E}_3(N) = \frac{4\mathcal{C}}{\zeta(2)\zeta(3)} \ln^2 N + O(\ln N).$$

Результаты работы были анонсированы в [10].

Автор благодарен В. А. Быковскому за внимание к работе и полезные советы.

§ 1. Инвариантная мера и формула для константы $\mathcal{C}$

Будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{M}_s(X)$ – множество матриц размера $s \times s$ с элементами из X , где $X = \mathbb{Z}$ либо $X = \mathbb{R}$; $\mathcal{M}_s(X; N)$ – множество матриц из $\mathcal{M}_s(X)$ с определителем N ; $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ – множество невырожденных матриц из $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$; $\mathrm{SL}_s(X)$ – множество матриц из $\mathcal{M}_s(X)$ с определителем ± 1 ; $\mathbb{R}_+$ – множество положительных вещественных чисел; $\mathcal{D}_s(\mathbb{R}_+)$ – множество диагональных матриц из $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ с положительными элементами на главной диагонали.

Рассмотрим многообразие $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_3(\mathbb{R}_+) \setminus \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, являющееся проективизацией группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ относительно левого действия группы $\mathcal{D}_3(\mathbb{R}_+)$. Через $\mathcal{P}(\Omega)$ обозначим образ $\Omega \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ при проектировании $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ на $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. Для любой перестановки $k = (k_1, k_2, k_3)$ из $\{1, 2, 3\}$ и набора $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\theta_i = \pm 1$, определим

$$\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}; k; \theta) = \{((x_{ij}))_{i,j=1}^3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) : x_{ik_i} = \theta_i, i = 1, 2, 3\}.$$

Множество всех карт вида $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}; k) = \mathcal{P}(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}; k; \theta))$ образует атлас на $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$.

На каждом $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}; k; \theta)$ определим меру μ_P следующим образом:

$$\mu_P(w) = \int_W \frac{dW(M)}{|\det M|^3}, \quad w \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}; k; \theta),$$

где W – прообраз w при проектировании $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}; k; \theta)$ на $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}; k; \theta)$, а $dW(M)$ – дифференциал 6-мерной меры Лебега на множестве $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}; k; \theta)$, рассматриваемом на $\mathbb{R}^6$, в точке M .

Нетрудно проверить, что μ_P не зависит от выбора карты. Поэтому мера μ_P определена на всем многообразии $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. Также несложно заметить, что мера μ_P инвариантна относительно правого действия группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

Пусть, например, множество Ω имеет вид

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_1 x'_2 & x_1 x'_3 \\ y_2 y'_1 & y_2 & y_2 y'_3 \\ z_3 z'_1 & z_3 z'_2 & z_3 \end{pmatrix} : (x'_2, x'_3) \in W_1, (y'_1, y'_3) \in W_2, \right. \\ \left. (z'_1, z'_2) \in W_3, x_1, y_2, z_3 \in \mathbb{R}^+ \right\},$$

где W_i , $i = 1, 2, 3$, – измеримые по Лебегу множества из $\mathbb{R}^2$. Тогда

$$\mu_P(\mathcal{P}(\Omega)) = \int_{W_1 \times W_2 \times W_3} \frac{dx'_2 dx'_3 dy'_1 dy'_3 dz'_1 dz'_2}{\left| \det \begin{pmatrix} 1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & 1 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & 1 \end{pmatrix} \right|^3}. \quad (1.1)$$

Интеграл (1.1) существует и конечен, если, например, выполняется следующее условие: существует положительная постоянная C (зависящая от Ω) такая, что

$$x_1 y_2 z_3 \leq C \det M \quad \forall M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \Omega.$$

Введем следующие множества матриц:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 \\ y_1 & y_2 & -y_3 \\ z_1 & -z_2 & z_3 \end{pmatrix} : x_1 < x_2 + x_3 \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & -z_2 & z_3 \end{pmatrix} : y_1 > y_3 \text{ либо } x_1 > x_2 \right\}, \\ \Omega_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 \\ y_1 & y_2 & -y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right\}, \\ \Omega_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & -y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} : y_2 < y_1 + y_3, x_2 > x_3 \right\}, \end{aligned}$$

где $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, 2, 3$, $x_1 > \max\{x_2, x_3\}$, $y_2 > \max\{y_1, y_3\}$, $z_3 > z_1 > z_2$.

Формула для константы $\mathcal{C}$ из теоремы 0.1 имеет следующий вид:

$$\mathcal{C} = \mu_P(\mathcal{P}(\Omega_1)) + \mu_P(\mathcal{P}(\Omega_2)) + 2\mu_P(\mathcal{P}(\Omega_3)) + 2\mu_P(\mathcal{P}(\Omega_4)). \quad (1.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Приближенные вычисления дают следующий результат:

$$\begin{aligned} \mu_P(\mathcal{P}(\Omega_1)) &\approx 0.0442, & \mu_P(\mathcal{P}(\Omega_2)) &\approx 0.0922, \\ \mu_P(\mathcal{P}(\Omega_3)) &\approx 0.1119, & \mu_P(\mathcal{P}(\Omega_4)) &\approx 0.0268, \\ \mathcal{C} &\approx 0.4120, & C(3) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_3(N)}{\ln^2 N} = \frac{4\mathcal{C}}{\zeta(2)\zeta(3)} &\approx 0.8335. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$C(2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_2(N)}{\ln N} = \frac{4 \ln 2}{\zeta(2)} \approx 1.6855.$$

§ 2. Предварительные сведения

Будем использовать следующие обозначения: ∂U и $\bar{U}$ – граница и замыкание множества U ; $\Omega(\mathbb{Z}; N) = \Omega \cap \mathcal{M}_s(\mathbb{Z}; N)$ при $\Omega \subset \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$; $\sigma_{-1}(d) = \sum_{d|N} d^{-1}$.

ЛЕММА 2.1. *Для любой решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)$ существует единственная базисная матрица вида*

$$M = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & \nu_2 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & \nu_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{s1} & m_{s2} & m_{s3} & \dots & \nu_s \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где $0 < m_{ij} \leq \nu_i$, $j = \overline{1, i-1}$, $i = \overline{1, s}$, $\nu_1 \cdots \nu_s = N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование матрицы (2.1) хорошо известно (см., например, [11, гл. 1]). Единственность нетрудно непосредственно доказать (см., например, [9]).

Из леммы 2.1 вытекает формула

$$\mathcal{R}_s(N) = \sum_{\nu_2 \nu_3 \cdots \nu_s | N} \nu_2 \nu_3^2 \cdots \nu_s^{s-1} = N^{s-1} \sum_{d_s | N} \frac{1}{d_s} \sum_{d_{s-1} | d_s} \frac{1}{d_{s-1}} \cdots \sum_{d_2 | d_3} \frac{1}{d_2}.$$

В частности,

$$\mathcal{R}_3(N) = N^2 \sum_{d|N} \frac{\sigma_{-1}(d)}{d}. \quad (2.2)$$

В [9] был доказан следующий результат.

ЛЕММА 2.2. *Для любого натурального N справедлива формула*

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{R}_3(N)}{8} E_3(N) &= \#\Omega_1(\mathbb{Z}; N) + \#\Omega_2(\mathbb{Z}; N) + 2 \cdot \#\Omega_3(\mathbb{Z}; N) + 2 \cdot \#\Omega_4(\mathbb{Z}; N) \\ &\quad + O\left(\sum_{i=1}^4 \#\partial\Omega_i(\mathbb{Z}; N)\right) + O_\varepsilon(N^{1+\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

§ 3. Количество матриц из $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}; N)$ в заданной области

Если $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, то через $M(x, y, z)$ обозначаем матрицу со строками x, y, z , т. е.

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

В этом параграфе мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть W_i – ограниченные связные множества из $\mathbb{R}^2$ с границами ∂W_i , $i = 1, 2, 3$, состоящими из фиксированного числа кривых класса C^1 ,

$$\Omega = \left\{ M(x, y, z) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \right) \in W_1, \left(\frac{y_1}{y_2}, \frac{y_3}{y_2} \right) \in W_2, \left(\frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3} \right) \in W_3, x_1, y_2, z_3 \in \mathbb{R}^+ \right\},$$

причем существует константа $C = C(\Omega) > 0$ такая, что при всех матрицах $M(x, y, z) \in \Omega$ выполняется оценка

$$x_1 y_2 z_3 \leq C \det M(x, y, z). \quad (3.1)$$

Тогда для любого натурального $N \geq 3$ справедлива асимптотическая формула

$$\#\Omega(\mathbb{Z}; N) = \frac{\mathcal{R}_3(N)}{2\zeta(2)\zeta(3)} \left(\mu_P(\mathcal{P}(\Omega)) \ln^2 N + O_N(\ln N |\ln \ln N|^\chi) \right), \quad (3.2)$$

где $\chi = 0$, если N – простое число, и $\chi = 1$, если N составное.

Теорема будет доказана в конце параграфа.

Будем использовать следующие обозначения: $|x| = (|x_1|^2 + \dots + |x_s|^2)^{1/2}$ при $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$; $\text{НОД}(n_1, \dots, n_s)$ – наибольший общий делитель целых $n_1, \dots, n_s$; μ – функция Мёбиуса; $C^n(D)$ – множество n раз непрерывно дифференцируемых на множестве $D \subset \mathbb{R}^s$ функций; mes – мера Лебега.

Если $a, b \in \mathbb{Z}^3$, то $D_i(a, b)$, $i = 1, 2, 3$, – миноры 2-го порядка матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$, полученные вычеркиванием i -го столбца. Через $\sum_{(a,b) \in U}^{(d)} \Phi(a, b)$ обозначим сумму величин $\Phi(a, b)$ по всем $(a, b) \in U$, удовлетворяющим условию

$$\text{НОД}(D_1(a, b), D_2(a, b), D_3(a, b)) = d. \quad (3.3)$$

Если $b \in \mathbb{Z}^3$, $d \in \mathbb{N}$, то $\Gamma(b, d)$ – решетка, состоящая из решений $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$ системы сравнений

$$D_i(a, b) \equiv 0 \pmod{d}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

Если $r = \text{НОД}(b_1, b_2, b_3)$ является делителем d , то

$$\det \Gamma(b, d) = \left(\frac{d}{r} \right)^2. \quad (3.5)$$

Любая решетка $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z})$ имеет единственную базисную матрицу вида (2.1). Будем записывать $\nu_i = \nu_i(\Gamma)$, имея в виду, что ν_i – числа из (2.1).

Скажем, что поверхность $L \subset \mathbb{R}^s$ принадлежит классу C_k^1 , где $k \in \{1, \dots, s\}$, если

$$L \subset \{x \in \mathbb{R}^s : x_k = f(x'), x' = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^{s-1}\},$$

где $f \in C^1(\mathbb{R}^{s-1})$, $|\nabla f| = O(1)$ в $\mathbb{R}^{s-1}$. Здесь и далее ∇f – градиент функции f .

Если $C \in \mathbb{R}_+$, то

$$T(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : 1 \leq x_1, y_2; x_1 y_2 \leq C D_3(x, y); \max\{|x_2|, |x_3|\} \leq C x_1; \max\{|y_1|, |y_3|\} \leq C y_2\}. \quad (3.6)$$

3.1. О количестве узлов решетки в фиксированной области. Определим

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \right) \in W_1, x_1 \geq 1 \right\}, \\ V_2 &= \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{y_1}{y_2}, \frac{y_3}{y_2} \right) \in W_2, y_2 \geq 1 \right\}, \\ V_3 &= \left\{ z \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3} \right) \in W_3, z_3 \neq 0 \right\} \cup \{0\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Используя (3.1), заметим, что если $\det M(a, b, c) = N$, $a \in V_1$, $b \in V_2$, $c \in V_3$, то $c_3 > 0$ (где c_3 – третья координата точки $c = (c_1, c_2, c_3)$). Поэтому

$$\Omega(\mathbb{Z}; N) = \{M(a, b, c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}; N) : a \in V_1, b \in V_2, c \in V_3\}.$$

Зафиксируем $a \in V_1 \cap \mathbb{Z}^3$, $b \in V_2 \cap \mathbb{Z}^3$ и положим

$$K(a, b, N) = \#\{c \in \mathbb{Z}^3 : M(a, b, c) \in \Omega(\mathbb{Z}; N)\}.$$

Чтобы вычислить $\#\Omega(\mathbb{Z}; N)$, мы должны просуммировать $K(a, b, N)$ по всем возможным наборам (a, b) .

В этом пункте мы выведем асимптотическую формулу для $K(a, b, N)$. Нетрудно заметить, что

$$K(a, b, N) = \#\{(c_1, c_2) \in Q(a, b, N) \cap \mathbb{Z}^2 : D_1 c_1 - D_2 c_2 \equiv N \pmod{D_3}\}, \quad (3.8)$$

где $D_i = D_i(a, b)$, $i = 1, 2, 3$,

$$Q(a, b, N) = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : (z_1, z_2) \in W_3 z_3, z_3 = \frac{N - z_1 D_1 + z_2 D_2}{D_3} \right\},$$

т.е. $K(a, b, N)$ равно количеству узлов некоторой сдвинутой решетки из $\mathbb{Z}^2$, лежащих в $Q(a, b, N)$.

Пусть $\lambda_1(\Gamma)$, $\lambda_2(\Gamma)$ – последовательные минимумы решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ относительно евклидовой нормы $|\cdot|$, т.е. $\lambda_1(\Gamma) = \min_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} |\gamma|$, и если $u \in \Gamma$, $|u| = \lambda_1(\Gamma)$, то $\lambda_2(\Gamma) = \min |\gamma|$, где минимум берется по всем узлам решетки Γ , которые линейно независимы с u .

ЛЕММА 3.1. Пусть U – ограниченное связное множество из $\mathbb{R}^2$, ∂U состоит из фиксированного числа спрямляемых кривых, $\Gamma \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z}; D)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\Gamma_x = \{\gamma + x : \gamma \in \Gamma\}$. Тогда

$$\#(\Gamma_x \cap U) = \frac{1}{D} \text{mes } U + O\left(\frac{\lambda_2(\Gamma)}{D} \text{mes } \partial U + 1\right),$$

где $\text{mes } \partial U$ – длина кривой ∂U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, считаем, что $x = 0$ (в противном случае заменяем U на $U - x$). Пусть $u, v \in \Gamma$, $|u| = \lambda_1(\Gamma)$, $|v| = \lambda_2(\Gamma)$. Как

хорошо известно (см., например, [12]), узлы u, v образуют базис решетки Γ . Тогда очевидно, что

$$\#(\Gamma_x \cap U) = \#(\mathbb{Z}^2 \cap M^{-1}U),$$

где

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}, \quad M^{-1}U = \{M^{-1}x : x \in U\}.$$

Известно, что

$$\#(\mathbb{Z}^2 \cap M^{-1}U) = \text{mes}(M^{-1}U) + O(\text{mes } \partial(M^{-1}U) + 1).$$

Для выпуклой области $M^{-1}U$ это вытекает из неравенства Ярника. Доказательство для общего случая можно найти, например, в [13]. Поскольку

$$\text{mes}(M^{-1}U) = |\det M^{-1}| \text{mes } U = \frac{1}{D} \text{mes } U,$$

осталось оценить $\text{mes } \partial(M^{-1}U)$. Для этого заметим, что максимальный по модулю элемент матрицы M^{-1} не превосходит $\lambda_2(\Gamma)/D$, и поэтому

$$|M^{-1}x - M^{-1}y| = |M^{-1}(x - y)| \leq \frac{2\lambda_2(\Gamma)}{D} |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Отсюда сразу вытекает, что

$$\text{mes } \partial(M^{-1}U) \leq \frac{2\lambda_2(\Gamma)}{D} \text{mes } \partial U.$$

Лемма доказана.

Чтобы использовать лемму 3.1 при нахождении $K(a, b, N)$, необходимо вычислить $\text{mes } Q(a, b, N)$ и оценить длину $\text{mes } \partial Q(a, b, N)$ кривой $\partial Q(a, b, N)$.

Для любых $(z_1, z_2) \in W_3$ определим

$$D(a, b, z_1, z_2) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из условия (3.1) следует, что

$$0 < a_1 b_2 \leq CD(a, b, z_1, z_2). \quad (3.9)$$

ЛЕММА 3.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.1, $N \in \mathbb{N}$, $a \in V_1$, $b \in V_2$, $D_i = D_i(a, b)$, $i = 1, 2, 3$, $D_3 \neq 0$. Тогда

$$\text{mes } Q(a, b, N) = N^2 |D_3| \int_{W_3} \frac{dz_1 dz_2}{|D(a, b, z_1, z_2)|^3}, \quad (3.10)$$

$$\text{mes } \partial Q(a, b, N) \leq \frac{N}{\Omega a_1 b_2}. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости положим $D(z_1, z_2) = D(a, b, z_1, z_2)$. Сделаем в интеграле

$$\text{mes } Q(a, b, N) = \int_{Q(a, b, N)} dz_1 dz_2$$

замену

$$z_i = N \frac{z'_i}{D(z'_1, z'_2)}, \quad i = 1, 2,$$

т. е. $z'_i = z_i/z_3$, где $z_3 = (N - z_1 D_1 + z_2 D_2)/D_3$. Это преобразование переводит множество $Q(a, b, N)$ в W_3 . Поэтому, учитывая, что

$$dz_1 dz_2 = N^2 |D_3| \frac{dz'_1 dz'_2}{|D(z'_1, z'_2)|^3},$$

получаем формулу (3.10).

Докажем (3.11). Поскольку множества W_1, W_2 ограничены, то

$$\max\{|a_2|, |a_3|\} \ll_{W_1} a_1, \quad \max\{|b_1|, |b_3|\} \ll_{W_2} b_2 \quad a \in V_1, \quad b \in V_2. \quad (3.12)$$

Поэтому, используя (3.9), получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_i}{\partial z'_j} \right| &\ll_{\Omega} N \left(\frac{1}{D(z'_1, z'_2)} + \frac{z_i}{(D(z'_1, z'_2))^2} \frac{\partial D(z'_1, z'_2)}{\partial z'_j} \right) \\ &\ll_{\Omega} \frac{N}{D(z'_1, z'_2)} \ll_{\Omega} \frac{N}{a_1 b_2}, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{mes } \partial Q(a, b, N) \ll_{\Omega} \frac{N}{a_1 b_2} \text{mes } \partial W_3.$$

Лемма доказана.

Опираясь на леммы 3.1, 3.2, вычислим $K(a, b, N)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть выполняются условия теоремы 3.1, $N \in \mathbb{N}$, $a \in V_1 \cap \mathbb{Z}^3$, $b \in V_2 \cap \mathbb{Z}^3$, $D_i = D_i(a, b)$, $i = 1, 2, 3$, $D_3 \neq 0$, $d = \text{НОД}(D_1, D_2, D_3)$. Тогда

$$K(a, b, N) = \begin{cases} 0, & \text{если } d \nmid N, \\ N^2 d \cdot f(a, b) + O_{\Omega}(\xi(a, b, N, d)), & \text{если } d \mid N, \end{cases} \quad (3.13)$$

где

$$f(a, b) = \int_{W_3} \frac{dz_1 dz_2}{|D(a, b, z_1, z_2)|^3}, \quad \xi(a, b, N, d) = 1 + Nd \cdot \frac{a_1 + b_2}{a_1 b_2 |D_3|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $K(a, b, N)$ определяется в (3.8). Рассмотрим сравнение

$$D_1 c_1 - D_2 c_2 \equiv N \pmod{D_3} \quad (3.14)$$

относительно неизвестных $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$. Если $d \nmid N$, то (3.14) не имеет решений, и поэтому $K(a, b, N) = 0$. Пусть $d \mid N$. Тогда существует решение

$n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ сравнения (3.14). Определим решетку Γ , состоящую из узлов $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}^2$ таких, что

$$D_1\gamma_1 - D_2\gamma_2 \equiv 0 \pmod{D_3}.$$

Тогда

$$K(a, b, N) = \#(\Gamma_n \cap Q(a, b, N)), \quad \Gamma_n = \{\gamma + n : \gamma \in \Gamma\}.$$

Нетрудно заметить, что $\det \Gamma = |D_3|/d$. Векторы $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ линейно независимы и принадлежат Γ . Поэтому, учитывая (3.12), получаем $\lambda_2(\Gamma) \ll_{\Omega} a_1 + b_2$. Осталось применить леммы 3.1, 3.2. Следствие доказано.

Из (3.13) вытекает, что

$$\#\Omega(\mathbb{Z}; N) = \sum_{d|N} \sum_{a \in V_1, b \in V_2}^{(d)} (N^2 d \cdot f(a, b) + O_{\Omega}(\xi(a, b, N, d))). \quad (3.15)$$

При вычислении этой суммы будем использовать следующие соображения.

1. Пусть $M(a, b, c) \in \Omega(\mathbb{Z}; N)$. Тогда из (3.1) вытекает $a_1 b_2 c_3 \leq CN$. Поскольку множества W_i ограничены, то

$$\max_{i=1,2,3} |a_i| \ll_{W_1} a_1, \quad \max_{i=1,2,3} |b_i| \ll_{W_2} b_2, \quad \max_{i=1,2,3} |c_i| \ll_{W_3} c_3.$$

Значит, $N = \det M(a, b, c) \ll_{\Omega} a_1 b_2 c_3$, и, таким образом, $a_1 b_2 c_3 \gtrsim_{\Omega} N$ для всех $M(a, b, c) \in \Omega(\mathbb{Z}; N)$.

2. Множество Ω можно разбить на части, в зависимости от того, какой из элементов a_1, b_2, c_3 является максимальным. Пусть, например, $c_3 \geq a_1, b_2$. Тогда

$$\max\{a_1^2 b_2, a_1 b_2^2\} \ll_{\Omega} N.$$

3. Используя (3.9), (3.12), нетрудно проверить следующие свойства функции f :

$$|f(x, y)| \ll_{\Omega} \frac{1}{x_1^3 y_2^3}, \quad \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} \right| \ll_{\Omega} \frac{1}{x_1^4 y_2^3}, \quad \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_i} \right| \ll_{\Omega} \frac{1}{x_1^3 y_2^4} \quad (3.16)$$

при $i = 1, 2, 3, x \in V_1, y \in V_2$.

4. Не умаляя общности, можно считать (см. лемму 3.10 ниже), что

$$x_1 y_2 \ll_{\Omega} D_3(x, y) \quad \forall x \in V_1, \quad y \in V_2. \quad (3.17)$$

В следующем пункте мы докажем некоторые вспомогательные леммы. Потом вычислим сумму (3.15) и в п. 3.4 завершим доказательство теоремы 3.1.

3.2. Вспомогательные леммы. Для оценки суммы остаточного члена формулы (3.15) будем использовать следующий результат.

ЛЕММА 3.3. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z})$, $\nu_i = \nu_i(\Gamma)$, $i = \overline{1, s}$, – постоянные из базисной матрицы (2.1). Пусть множество U имеет вид

$$U = \{x \in \mathbb{R}^s : x_1 \in I, r_i(x_1, \dots, x_{i-1}) \leq x_i \leq r_i(x_1, \dots, x_{i-1}) + h_i(x_1), i = \overline{2, s}\},$$

где I – интервал из $\mathbb{R}$, r_i – заданные функции $i - 1$ переменных, h_i – неотрицательные функции одной переменной, $i = \overline{2, s}$. Тогда для любой функции $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \cap U} f(\gamma_1) \leq \sum_{\substack{\gamma_1 \in I \\ \gamma_1 \equiv 0 \pmod{\nu_1}}} f(\gamma_1) \cdot \prod_{i=2}^s \left(\frac{h_i(\gamma_1)}{\nu_i} + 1 \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – базисная матрица решетки Γ из леммы 2.1. Тогда любой узел $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s) \in \Gamma$ имеет вид

$$\gamma_1 = n_1 \nu_1, \quad \gamma_2 = n_1 m_{12} + n_2 \nu_2, \quad \dots, \quad \gamma_s = \sum_{i=1}^{s-1} n_i m_{is} + n_s \nu_s,$$

где $n_i \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \cap U} f(\gamma_1) = \sum_{\substack{\gamma_1 \in I \\ \gamma_1 \equiv 0 \pmod{\nu_1}}} f(\gamma_1) F(\gamma_1),$$

где $F(\gamma_1)$ – число целых $\gamma_2, \dots, \gamma_s$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} r_i(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}) &\leq \gamma_i \leq r_i(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}) + h_i(\gamma_1), \\ \gamma_i &\equiv g_i(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}) \pmod{\nu_i}, \quad i = \overline{2, s}, \end{aligned}$$

g_i – некоторые линейные формы (конкретный вид g_i не важен). Осталось заметить, что

$$F(\gamma_1) \leq \prod_{i=2}^s \left(\frac{h_i(\gamma_1)}{\nu_i} + 1 \right).$$

Лемма доказана.

Для заданного вектора $\nu \in \mathbb{R}_+^s$ и множества $U \subset \mathbb{R}^s$ положим

$$|x|_{\infty, \nu} = \max_{1 \leq i \leq s} \frac{1}{\nu_i} |x_i|, \quad \rho_{\infty, \nu}(x, \partial U) = \inf_{y \in \partial U} |x - y|_{\infty, \nu} \quad \forall x \in \mathbb{R}^s,$$

$$B(U, \nu) = \{x \in U : \rho_{\infty, \nu}(x, \partial U) \leq s\},$$

т.е. $B(U, \nu)$ состоит из $x \in U$, для которых существует точка $y \in \partial U$ такая, что $|x_i - y_i| \leq s \nu_i$, $i = \overline{1, s}$.

Будем говорить, что функция g не возрастает на множестве U по всем переменным, если

$$g(x) \leq g(y) \quad \forall x, y \in U, \quad x_i \geq y_i, \quad i = \overline{1, s}.$$

Через $|\nabla g|$ обозначаем модуль градиента функции g .

При вычислении суммы главного члена формулы (3.15) будем использовать следующие результаты.

ЛЕММА 3.4. Пусть U – ограниченное связное измеримое по Лебегу множество из $\mathbb{R}^s$, $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; D)$, $\nu_i = \nu_i(\Gamma)$, $i = \overline{1, s}$, $\hat{\nu} = \max\{\nu_1, \dots, \nu_s\}$, функция $f \in C^1(\overline{U})$ неотрицательная и удовлетворяет условию

$$|\nabla f| \leq g(x) \quad \forall x \in \overline{U}, \quad (3.18)$$

где g – непрерывная и невозрастающая по всем переменным функция на $\overline{U}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in U \cap \Gamma} f(\gamma) &= \frac{1}{D} \int_U f(x) dx + O_s(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3), \\ \xi_1 &= \frac{1}{D} \int_{B(U, \nu)} f(x) dx, \quad \xi_2 = \sum_{\gamma \in \Gamma \cap B(U, \nu)} f(\gamma), \quad \xi_3 = \hat{\nu} \sum_{\gamma \in U \cap \Gamma} g(\gamma). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – базисная матрица вида (2.1) решетки Γ . Через $e^{(1)}, \dots, e^{(s)}$ обозначим ее столбцы. Для заданного $\gamma \in \Gamma$ положим, что

$$\Pi(\gamma) = \left\{ \gamma + \sum_{i=1}^s t_i e^{(i)} : t_i \in [0, 1], i = \overline{1, s} \right\}$$

– основным параллелепипед решетки. Из условий (2.1) вытекает

$$|x_i - y_i| \leq s\nu_i, \quad i = \overline{1, s}, \quad \forall x, y \in \Pi(\gamma). \quad (3.19)$$

Пусть Γ' – множество точек $\gamma \in \Gamma \cap U$ таких, что $\Pi(\gamma)$ не пересекается с ∂U и

$$U' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \Pi(\gamma).$$

Из (3.19) следует, что $(U \setminus U') \subset B(\partial U, \nu)$. Значит,

$$\sum_{\gamma \in U \cap \Gamma} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma'} f(\gamma) + O(\xi_2), \quad \frac{1}{D} \int_{U'} f(x) dx = \frac{1}{D} \int_U f(x) dx + O(\xi_1). \quad (3.20)$$

Используя теорему о среднем для интегралов и формулу конечных приращений Лагранжа, получим, что для любого $\gamma \in \Gamma'$ существуют точки $y_\gamma, x_\gamma \in \Pi(\gamma)$ такие, что

$$\left| \frac{1}{D} \int_{\Pi(\gamma)} f(x) dx - f(\gamma) \right| \leq |\nabla f(y_\gamma)| |y_\gamma - x_\gamma|.$$

Учитывая (3.18) и (3.19), заключаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{D} \int_{\Pi(\gamma)} f(x) dx - f(\gamma) \right| &\leq_s g(y_\gamma) \hat{\nu} \leq \hat{\nu} g(\gamma) \\ \implies \sum_{\gamma \in \Gamma'} f(\gamma) &= \frac{1}{D} \int_{U'} f(x) dx + O_s(\xi_3). \end{aligned}$$

Из последнего равенства и (3.20) вытекает нужная нам формула. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $D \in \mathbb{N}$, $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; D)$ и выполняются условия:

(а) V – связное множество из $\mathbb{R}^3$ с границей ∂V , содержащейся в объединении фиксированного числа гиперповерхностей видов $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3: x_1 = \text{const}\}$, $L_2 \in C_2^1 \cup C_3^1$, причем

$$x_1 \geq 1, \quad \max\{|x_2|, |x_3|\} \ll_V x_1 \quad \forall x \in V; \quad (3.21)$$

(б) $f \in C^1(\bar{V})$, причем существует постоянная $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$0 \leq f(x) \leq \frac{K}{x_1^3}, \quad |\nabla f(x)| \leq \frac{K}{x_1^4} \quad \forall x \in V;$$

(в) множества $V(R)$ и $V(R; r)$ определяются формулами

$$V(R) = \{x \in V: x_1 \leq R\}, \quad V(R; r) = \{x \in V: r \leq x_1 \leq R\}.$$

Тогда

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \cap V(R; r)} f(\gamma) = \frac{1}{D} \int_{V(R)} f(x) dx + O_V \left(\frac{K}{D} (\ln r + 1) \right), \quad R, r \in \mathbb{R}_+, \quad r \geq D^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что постоянные в оценках $\ll$, $O(\cdot)$ зависят от V и специально это не указываем. Если $r > R$, то

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma \cap V(R; r)} f(\gamma) &= 0, \\ \frac{1}{D} \int_{V(R)} f(x) dx &\leq \frac{K}{D} \int_{\substack{1 \leq x_1 \leq r \\ |x_2|, |x_3| \ll x_1}} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{x_1^3} \ll \frac{K}{D} \int_1^r \frac{dx_1}{x_1} = K \frac{\ln r}{D}, \end{aligned}$$

и утверждение леммы выполнено.

Пусть $r \leq R$. Поскольку $\nu_i(\Gamma) \leq D$, $i = 1, 2, 3$, то согласно лемме 3.4 и условиям (б)

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \cap V(R; r)} f(\gamma) = \frac{1}{D} \int_{V(R; r)} f(x) dx + O(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3), \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{D} \int_B \frac{K}{x_1^3} dx, \quad \xi_2 = \sum_{\gamma \in \Gamma \cap B} \frac{K}{\gamma_1^3}, \quad \xi_3 = \sum_{\gamma \in \Gamma \cap V(R; r)} \frac{DK}{\gamma_1^4}, \\ B &= \{x \in V(R; r): \rho_\infty(x, \partial V(R; r)) \leq 3D\}. \end{aligned}$$

Используя (3.21) и условие $r \geq D^2$, получим

$$\xi_3 \ll D \sum_{r \leq \gamma_1 \leq R} \frac{K}{\gamma_1^2} \ll \frac{DK}{r} \leq \frac{K}{D}.$$

Оценим ξ_1, ξ_2 . Из условий (а) вытекает, что B содержится в объединении фиксированного числа множеств следующих видов:

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^3: C \leq x_1 \leq C + 3D, \max\{|x_2|, |x_3|\} \ll x_1\},$$

$$B_i = \{x \in \mathbb{R}^3: r \leq x_1 \leq R, \max\{|x_2|, |x_3|\} \ll x_1, \rho_\infty(x, L_i) \ll D\}, \quad i = 2, 3,$$

где $C = \text{const} \geq r$, $L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3: x_2 = \varphi_2(x_1, x_3)\}$, $L_3 = \{x \in \mathbb{R}^3: x_3 = \varphi_3(x_1, x_2)\}$, $\varphi_i \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $|\nabla \varphi_i| = O(1)$ в $\mathbb{R}^2$, $i = 2, 3$. Поэтому достаточно оценить соответствующие интегралы и суммы по B_i , $i = 1, 2, 3$.

Поскольку $C \geq r \geq D^2$, то

$$\frac{1}{D} \int_{B_1} \frac{K}{x_1^3} dx \ll \frac{1}{D} \int_C^{C+3D} \frac{K}{x_1} dx_1 = \frac{K}{D} \ln\left(1 + \frac{3D}{C}\right) \leq \frac{3K}{C} \leq \frac{3K}{D^2},$$

$$\sum_{\gamma \in B_1 \cap \Gamma} \frac{K}{\gamma_1^3} \leq \sum_{\gamma \in B_1} \frac{K}{\gamma_1^3} \ll \sum_{C \leq \gamma_1 \leq C+D} \frac{K}{\gamma_1} \ll \frac{K}{C} + K \ln\left(1 + \frac{D}{C}\right) \leq \frac{2K}{D}.$$

Оценим интеграл и сумму по B_2 . Нетрудно проверить, что из условия $\rho_\infty(x, L) \ll D$ вытекает оценка $|x_2 - \varphi_2(x_1, x_3)| \ll D$. Для этого достаточно учесть, что $|\nabla \varphi_2| = O(1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \int_{B_2} \frac{K}{x_1^3} dx &\ll \frac{1}{D} \int_r^{+\infty} \frac{K}{x_1^2} D dx_1 \leq \frac{K}{r} \leq \frac{K}{D^2}, \\ \sum_{\gamma \in B_2 \cap \Gamma} \frac{K}{\gamma_1^3} &\leq \sum_{\gamma \in B_2} \frac{K}{\gamma_1^3} \ll \sum_{r \leq \gamma_1 < +\infty} \frac{K}{\gamma_1^2} D \ll \frac{K}{r} D \leq \frac{K}{D}. \end{aligned}$$

Интеграл и сумма по B_3 оцениваются аналогично. Мы доказали, что

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \ll \frac{K}{D}.$$

Осталось воспользоваться (3.22) и заметить, что

$$\frac{1}{D} \int_{V(R) \setminus V(R; r)} f(x) dx \ll \frac{K}{D} \int_1^r \frac{1}{x_1} dx_1 = \frac{K}{D} \ln r.$$

Следствие доказано.

При вычислении (3.15) область суммирования будет разбита на несколько частей. Получим оценку суммы по множеству, у которого a_1 и b_2 “достаточно” малы.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\theta, C \in [1, +\infty)$,

$$X_\theta(d) = \{(a, b) \in T(C): a, b \in \mathbb{Z}^3, a_1, b_2 \leq d^\theta, D_i(a, b) \equiv 0 \pmod{d}, i = 1, 2, 3\},$$

где $T(C)$ определяется формулой (3.6). Тогда для любого натурального d

$$\sum_{(a, b) \in X_\theta(d)} \frac{1}{a_1^3 b_2^3} \ll_{\theta, C} \frac{\ln^3 d + 1}{d^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что постоянные в оценках $O(\cdot)$, $\ll$ зависят только от C и θ , и специально это не указываем.

Для любого натурального D , кратного d , обозначим через $f(D) = f(D; C; d)$ количество $(a, b) \in T(C)$ таких, что

$$a, b \in \mathbb{Z}^3; \quad D_i(a, b) \equiv 0 \pmod{d}, \quad i = 1, 2; \quad D_3(a, b) = D. \quad (3.23)$$

Если $a_1, b_2 \leq d^\theta$, то $D = D_3(a, b) \leq 2Ca_1b_2 \leq 2Cd^{2\theta}$. Поэтому

$$\sum_{(a,b) \in X_\theta(d)} \frac{1}{a_1^3 b_2^3} \leq (2C)^3 \sum_{\substack{d \leq D \leq 2C\theta^{2\theta} \\ D \equiv 0 \pmod{d}}} \frac{f(D)}{D^3}. \quad (3.24)$$

Оценим $f(D)$. Пусть $H(D) = H(D; C)$ – множество наборов (a_1, a_2, b_1, b_2) таких, что

$$a_1, b_2 \in \mathbb{N}, \quad a_2, b_1 \in \mathbb{Z}, \quad |a_2| \leq Ca_1, \quad |b_1| \leq Cb_2, \quad a_1b_2 \leq CD, \quad a_1b_2 - a_2b_1 = D.$$

Для любого набора $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in H(D)$ через $g(a_1, a_2, b_1, b_2)$ обозначим количество пар (a_3, b_3) таких, что $(a, b) \in T(C)$ и выполняются (3.23). Тогда

$$f(D) \leq \sum_{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in H(D)} g(a_1, a_2, b_1, b_2). \quad (3.25)$$

Оценим $g(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Обозначая $D_1 = a_1b_3 - b_1a_3$, $D_2 = a_2b_3 - b_2a_3$, получаем

$$g(a_1, a_2, b_1, b_2) \ll \#\{(D_1, D_2) \in \Gamma(a, b, D): |D_i| \ll D; D_i \equiv 0 \pmod{d}, i = 1, 2\},$$

где решетка $\Gamma(a, b, D)$ состоит из решений $(D_1, D_2) \in \mathbb{Z}^2$ системы сравнений

$$a_1D_1 - a_2D_2 \equiv 0 \pmod{D}, \quad b_1D_1 - b_2D_2 \equiv 0 \pmod{D}.$$

Пусть $D' = D/d$. Тогда

$$\begin{aligned} & \#\{(D_1, D_2) \in \Gamma(a, b, D): |D_i| \ll D, D_i \equiv 0 \pmod{d}, i = 1, 2\} \\ &= \#\{(D'_1, D'_2) \in \Gamma(a, b, D'): |D'_1|, |D'_2| \ll D'\}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$\det \Gamma(a, b, D') \geq \frac{D'}{\text{НОД}(a_1, b_1, a_2, b_2)}.$$

Из леммы 3.1 вытекает оценка

$$\#\{\gamma \in \Gamma: |\gamma_i| \leq R\} \ll \frac{R^2}{D_0} + R + 1, \quad \Gamma \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z}; D_0), \quad D_0 \in \mathbb{N}, \quad R \in \mathbb{R}_+,$$

используя которую, получаем

$$\begin{aligned} g(a_1, a_2, b_1, b_2) &\ll \frac{(D')^2}{\det \Gamma(a, b, D')} + D' \ll D' \text{НОД}(a_1, b_1, a_2, b_2) \\ &= \frac{D}{d} \text{НОД}(a_1, b_1, a_2, b_2). \end{aligned}$$

Подставляя последнюю оценку в (3.25), приходим к соотношению

$$f(D) \leq \frac{D}{d} \sum_{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in H(D)} \text{НОД}(a_1, b_1, a_2, b_2). \quad (3.26)$$

Докажем, что

$$\sum_{(a, b) \in H(D)} \text{НОД}(a_1, a_2, b_1, b_2) \ll_C D \sigma_{-1}^2(D) \ln D. \quad (3.27)$$

Для этого получим сначала неравенство

$$\#H(D) \ll D \sigma_{-1}(D) \ln D. \quad (3.28)$$

Разобьем множество $H(D)$ на две части $H_1(D)$ и $H_2(D)$, где $H_1(D)$ состоит из наборов, удовлетворяющих условию $a_1 \leq b_2$, а $H_2(D)$ – условию $a_1 > b_2$. Оценим $\#H_1(D)$. Пусть $h(a_1, a_2)$ – количество (b_1, b_2) таких, что $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in H_1(D)$. Элемент b_2 однозначно определяется по b_1 из уравнения $a_1 b_2 - a_2 b_1 = D$. Целое b_1 должно удовлетворять условиям

$$a_2 b_1 \equiv D \pmod{a_1}, \quad |b_1| \ll b_2 \ll \frac{D}{a_1}.$$

Поэтому $h(a_1, a_2) \leq D a_1^{-2} \text{НОД}(a_1, a_2) + 1$. Из условий $a_1 \ll b_2$, $a_1 b_2 \ll D$ вытекает условие $a_1 \ll D^{1/2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \#H_1(D) &\ll \sum_{\substack{1 \leq a_1 \ll D^{1/2} \\ |a_2| \ll a_1}} \left(\frac{D}{a_1^2} \text{НОД}(a_1, a_2) + 1 \right) \\ &\leq \sum_{r|D} \sum_{\substack{1 \leq a_1 \ll D^{1/2}, |a_2| \ll a_1 \\ a_1, a_2 \equiv 0 \pmod{r}}} \frac{Dr}{a_1^2} + O(D) \ll D \sigma_{-1}(D) \ln D. \end{aligned}$$

Оценка $\#H_2(D)$ выводится аналогично. Доказано неравенство (3.28), используя которое, приходим к оценкам

$$\begin{aligned} \sum_{(a, b) \in H(D)} \text{НОД}(a_1, a_2, b_1, b_2) &\leq \sum_{d^2 | D} d \cdot \#H\left(\frac{D}{d^2}\right) \\ &\ll \sum_{d^2 | D} d \cdot \frac{D}{d^2} \sigma^{-1}\left(\frac{D}{d^2}\right) \ln\left(\frac{D}{d^2}\right) \leq D \sigma_{-1}^2(D) \ln D. \end{aligned}$$

Неравенство (3.27) доказано.

Используя (3.24), (3.26), (3.27), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{(a, b) \in X_\theta(d)} \frac{1}{a_1^3 b_2^3} &\ll \frac{1}{d} \sum_{\substack{d \leq D \leq 2C d^{2\theta} \\ D \equiv 0 \pmod{d}}} \frac{1}{D} \sigma_{-1}^2(D) \ln D \\ &\ll \frac{\ln d + 1}{d} \sum_{\substack{d \leq D \leq 2C d^{2\theta} \\ D \equiv 0 \pmod{d}}} \frac{\ln D}{D} \ll \frac{\ln d + 1}{d} \frac{\ln^2 d + 1}{d}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. Для любого натурального $N > e$ справедливы оценки

$$\sum_{d|N} \frac{\sigma_{-1}(d) \ln d}{d} \ll (\ln \ln N) \sum_{d|N} \frac{\sigma_{-1}(d)}{d}, \quad (3.29)$$

$$\sum_{d|N} \frac{\ln^t d}{d} \ll_t (\ln \ln N)^{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (3.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стандартным образом доказывается, что

$$\sum_{p|N} \frac{\ln^\theta p}{p} \ll_\theta (\ln \ln N)^\theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_+, \quad (3.31)$$

где сумма берется по простым делителям N . Для этого достаточно учесть, что $p_k \asymp k \ln k$ для всех простых p_k , занумерованных по возрастанию, а число простых делителей N оценивается величиной $O(\ln N)$.

Из (3.31) вытекает неравенство

$$\sum_{p^\alpha|N} \frac{\ln^\theta p^\alpha}{p^\alpha} \ll_\theta (\ln \ln N)^\theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_+, \quad (3.32)$$

где сумма берется по делителям вида $d = p^\alpha$, p – простое число, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Для любой числовой функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ нетрудно получить следующую формулу:

$$\sum_{d|N} f(d) \ln d = \sum_{p^\alpha|N} \ln p^\alpha \sum_{\substack{d|(N/p^\alpha) \\ \text{НОД}(p, d)=1}} f(p^\alpha d). \quad (3.33)$$

Докажем (3.29). Поскольку $\sigma_{-1}(p^\alpha) \leq 2$, то $\sigma_{-1}(p^\alpha d) \leq 2\sigma_{-1}(d)$. Поэтому, выбирая $f(d) = \sigma_{-1}(d)/d$ в (3.33), получаем

$$\sum_{d|N} \frac{\sigma_{-1}(d) \ln d}{d} = \sum_{p^\alpha|N} \ln p^\alpha \sum_{d|(N/p^\alpha)} \frac{\sigma_{-1}(p^\alpha d)}{p^\alpha d} \leq 2 \sum_{p^\alpha|N} \frac{\ln p^\alpha}{p^\alpha} \sum_{d|N} \frac{\sigma_{-1}(d)}{d}$$

и, применяя оценку (3.32), приходим к (3.29).

Докажем (3.30). Для целых t обоснование проводится по математической индукции. При $t = 0$ неравенство (3.30) общеизвестно. Проведем индуктивный переход от $t - 1$ к t . Для этого выберем $f(d) = (\ln d)^{t-1}/d$ в (3.33). Получаем

$$\sum_{d|N} \frac{\ln^t d}{d} \leq \sum_{p^\alpha|N} \frac{\ln p^\alpha}{p^\alpha} \sum_{d|N} \frac{\ln^{t-1}(p^\alpha d)}{d} \ll_t \sum_{p^\alpha|N} \frac{\ln p^\alpha}{p^\alpha} \sum_{d|N} \left(\frac{\ln^{t-1} p^\alpha}{d} + \frac{\ln^{t-1} d}{d} \right).$$

Применяя (3.32), оценку $\sigma_{-1}(N) \ll \ln \ln N$ и предположение индукции, приходим к (3.30).

Неравенство (3.30) при целых t доказано. Пусть t – нецелое число, $[t]$ – целая часть t . Представим t в виде $t = [t]\alpha + ([t] + 1)\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha + \beta = 1$.

Используя неравенство Гёльдера, получаем оценку

$$\begin{aligned} \sum_{d|N} \frac{\ln^t d}{d} &= \sum_{d|N} \frac{(\ln d)^{\alpha[t]}}{d^\alpha} \frac{(\ln d)^{\beta([t]+1)}}{d^\beta} \\ &\leq \left(\sum_{d|N} \left(\frac{(\ln d)^{\alpha[t]}}{d^\alpha} \right)^{1/\alpha} \right)^\alpha \left(\sum_{d|N} \left(\frac{(\ln d)^{\beta([t]+1)}}{d^\beta} \right)^{1/\beta} \right)^\beta \\ &= \left(\sum_{d|N} \frac{\ln^{[t]} d}{d} \right)^\alpha \left(\sum_{d|N} \frac{\ln^{[t]+1} d}{d} \right)^\beta, \end{aligned}$$

из которой следует (3.30) для нецелых t . Лемма доказана.

3.3. Вычисление суммы вида (3.15). Вычислим сумму главного члена из (3.15). Напомним, что множество $T(C)$ определяется формулой (3.6).

ЛЕММА 3.7. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $C_1, C \in \mathbb{R}_+$ и выполнены следующие условия:

(а) V_i – ограниченное связное множество из $\mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$, ∂V_i состоит из фиксированного числа гиперповерхностей видов $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3: x_i = \text{const}\}$, $L_2 \in \bigcup_{k \in \{1,2,3\} \setminus \{i\}} C_k^1$, причем $V_1 \times V_2 \subset T(C_1)$, $V(N) = \{(x, y) \in V_1 \times V_2: \max\{x_1^2 y_2, x_1 y_2^2\} \leq CN\}$;

(б) функция $f \in C^1(\overline{V_1 \times V_2})$ удовлетворяет неравенствам (3.16), в которых Ω заменяется на C_1 .

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{d|N} d \sum_{(a,b) \in V(N)}^{(d)} f(a, b) \\ = \frac{1}{\zeta(2)\zeta(3)} \sum_{d|N} \frac{\sigma_{-1}(d)}{d} \left(\int_{V(N)} f(x, y) dx dy + O_{C, V_1, V_2}(|\ln \ln N|^\chi \ln N) \right), \end{aligned}$$

где $\chi = 0$, если N – простое число, и $\chi = 1$, если N составное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что постоянные в оценках $\ll, O(\cdot)$ зависят от C, V_1, V_2 , и специально это не указываем. Положим

$$S(N, d) = \sum_{(a,b) \in V(N)}^{(d)} f(a, b).$$

В силу (3.29) и (3.30) достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} S(N, d) &= \frac{1}{\zeta(2)\zeta(3)} \frac{\sigma_{-1}(d)}{d^2} \int_{V(N)} f(x, y) dx dy \\ &\quad + O\left(\frac{\sigma_{-1}(d)(\ln d + 1)}{d^2} \ln N + \frac{\ln^3 d + 1}{d^2} \right), \quad d | N. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Разобьем $S(N, d)$ на две части: $S(N, d) = S_1(N, d) + S_2(N, d)$, где $S_1(N, d)$ состоит из слагаемых $S(N, d)$, удовлетворяющих условию $a_1 \geq b_2$, а $S_2(N, d)$ –

условию $a_1 < b_2$. Выведем соответствующую формулу для $S_1(N, d)$. Сумма $S_2(N, d)$ вычисляется аналогично.

Положим

$$V_a(N, b_2) = \left\{ x \in V_1 : b_2 \leq x_1 \leq \sqrt{\frac{CN}{b_2}} \right\}, \quad V_b(N) = \{ y \in V_2 : y_2 \leq (CN)^{1/3} \}.$$

Используя свойства функции Мёбиуса, стандартным образом получаем

$$S_1(N, d) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(n) \sum_{\substack{b \in V_b(N) \\ a \in V_a(N, b_2) \cap \Gamma(b, nd)}} f(a, b).$$

Напомним, что решетка $\Gamma(b, d)$ состоит из решений $a \in \mathbb{Z}^3$ системы сравнений (3.4).

Сумму $S_1(N, d)$ также разобьем на две части: $S_1(N, d) = S'_1(N, d) + S''_1(N, d)$, где $S'_1(N, d)$ состоит из слагаемых $S_1(N, d)$, которые удовлетворяют условию $a_1 \geq (nd)^4$, т. е.

$$S'_1(N, d) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(n) \sum_{\substack{b \in V_b(N) \\ a \in V_a(N, b_2, nd) \cap \Gamma(b, nd)}} f(a, b),$$

где $V_a(N, b_2, nd) = \{ x \in V_1 : \max\{(nd)^4, b_2\} \leq x_1 \leq \sqrt{CN/b_2} \}$.

Докажем, что сумма $S''_1(N, d)$ “достаточно” мала. Используя первое из неравенств (3.16) и условие $b_2 \leq a_1$, получаем

$$S''_1(N, d) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(a, b) \in X_4(nd)} \frac{1}{a_1^3 b_2^3},$$

где обозначение $X_4(nd)$ введено в лемме 3.5, применяя которую, заключаем

$$S''_1(N, d) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3(nd) + 1}{(nd)^2} \ll \frac{\ln^3 d + 1}{d^2}, \quad (3.35)$$

т. е. $S''_1(N, d)$ оценивается остаточным членом формулы (3.34).

Осталось вычислить сумму $S'_1(N, d)$. Запишем ее в виде

$$S'_1(N, d) = \sum_{r|d} \sum_{\substack{b \in V_b(N) \\ \text{НОД}(b_1, b_2, b_3) = r}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) g(b, nd), \quad (3.36)$$

$$g(b, nd) = \sum_{a \in V_a(N, b_2, nd) \cap \Gamma(b, nd)} f(a, b).$$

Вычислим $g(b, nd)$. Согласно (3.5) имеем $\det \Gamma(b, nd) = (nd/r)^2$ и, используя следствие 3.2 (в котором $K = C_1/b_2^3$, $D = (nd/r)^2$, $r = (dn)^4$), получаем

$$g(b, nd) = \frac{r^2}{n^2 d^2} F(b) + O\left(\frac{r^2 (\ln nd + 1)}{n^2 d^2} \frac{1}{b_2^3}\right), \quad F(b) = \int_{V_a(N, b_2)} f(x, b) dx.$$

Подставляя последнее соотношение в (3.36), приходим к формуле

$$S'_1(N, d) = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{r|d} \frac{r^2}{d^2} \sum_{\substack{b \in V_b(N) \\ \text{НОД}(b_1, b_2, b_3) = r}} F(b) + O(\eta(N, d)), \quad (3.37)$$

$$\eta(N, d) = \sum_{r|d} \frac{r^2(\ln d + 1)}{d^2} \sum_{\substack{b \in V_b(N) \\ \text{НОД}(b_1, b_2, b_3) = r}} \frac{1}{b_2^3}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{\substack{b \in V_b(N) \\ \text{НОД}(b_1, b_2, b_3) = r}} \frac{1}{b_2^3} \leq \sum_{\substack{b_i \equiv 0 \pmod{r} \\ |b_{1,3}| \ll b_2 \ll N, b_2 \geq 1}} \frac{1}{b_2^3} \ll \frac{1}{r^3} \ln N.$$

Следовательно,

$$\eta(N, d) \ll \frac{\sigma_{-1}(d)(\ln d + 1)}{d^2} \ln N, \quad (3.38)$$

т. е. $\eta(N, d)$ оценивается остаточным членом формулы (3.34).

Применяя свойства функции Мёбиуса, стандартным образом получаем

$$S'_1(N, d) = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{r|d} \frac{r^2}{d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) G(N, rn) + O(\eta(N, d)), \quad (3.39)$$

$$G(N, rn) = \sum_{\substack{b \in V_b(N) \\ b_1, b_2, b_3 \equiv 0 \pmod{rn}}} F(b).$$

Нетрудно проверить (используя (3.16) и условия для V_1), что

$$|F(y)| \ll \frac{1}{y_2^3} \int_{V_1} \frac{dx}{x_1^3} \ll \frac{\ln N}{y_2^3}, \quad (3.40)$$

$$\left| \frac{\partial F(y)}{\partial y_i} \right| \leq \frac{1}{y_2^4} \int_{V_1} \frac{dx}{x_1^3} \ll \frac{\ln N}{y_2^4}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.41)$$

Поэтому, применяя для вычисления суммы $G(N, rn)$ и следствие 3.2, получаем

$$G(N, rn) = \frac{1}{r^3 n^3} \int_{V_b(N)} F(y) dy + O\left(\frac{\ln(nr) + 1}{n^3 r^3} \ln N\right).$$

Подставляя последнее соотношение в (3.39) и учитывая (3.38), находим

$$S'_1(N, d) = \frac{1}{\zeta(2)\zeta(3)} \frac{\sigma_{-1}(d)}{d^2} \int_{V_b(N)} F(y) dy + O\left(\frac{\sigma_{-1}(d)(\ln d + 1)}{d^2} \ln N\right).$$

Используя (3.35), окончательно получаем

$$S_1(N, d) = S'_1(N, d) + S''_1(N, d) = \frac{1}{\zeta(2)\zeta(3)} \frac{\sigma_{-1}(d)}{d^2} \int_{V_b(N)} \int_{V_a(N, b_2)} f(x, y) dx dy$$

$$+ O\left(\frac{\sigma_{-1}(d)(\ln d + 1)}{d^2} \ln N + \frac{\ln^3 d + 1}{d^2}\right).$$

Формула для суммы $S_2(N, d)$ выводится аналогично. Соотношение (3.34) доказано. Из (3.29), (3.30) (и оценки $\sigma_{-1}(N) \ll \ln \ln N$) следует, что

$$\sum_{d|N} d \left(\frac{\sigma_{-1}(d) \ln d}{d^2} \ln N + \frac{\ln^3 d + 1}{d^2} \right) \ll |\ln \ln N|^x \ln N \sum_{d|N} \frac{\sigma_{-1}(d)}{d}. \quad (3.42)$$

Поэтому из (3.34) вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Получим теперь оценку для суммы остаточного члена из (3.15).

ЛЕММА 3.8. Пусть выполняются условия леммы 3.7. Тогда

$$\sum_{d|N} d \sum_{(a,b) \in V(N)}^{(d)} \frac{a_1 + b_2}{a_1^2 b_2^2} \ll_{C, V_1, V_2} N |\ln \ln N|^x \ln N \sum_{d|N} \frac{\sigma_{-1}(d)}{d}. \quad (3.43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что постоянные в оценках $\ll, O(\cdot)$ зависят от C, C_1, V_1, V_2 , и специально это не указываем. Как и в лемме 3.7, сначала покажем, что

$$\tilde{S}(N, d) = \sum_{(a,b) \in V(N)}^{(d)} \frac{a_1 + b_2}{a_1 b_2 D_3(a, b)} \ll \frac{\sigma_{-1}(d)}{d^2} N \ln N + N \frac{\ln^3 d + 1}{d^2}. \quad (3.44)$$

Разобьем сумму (3.44) на две части $\tilde{S}_1(N, d)$ и $\tilde{S}_2(N, d)$, где $\tilde{S}_1(N, d)$ состоит из слагаемых, удовлетворяющих условию $a_1 \geq b_2$, а $\tilde{S}_2(N, d)$ – условию $a_1 \leq b_2$. Оценим, например, $\tilde{S}_1(N, d)$. Для этого разобьем $\tilde{S}_1(N, d)$ еще на две части:

$$\tilde{S}_1(N, d) = \tilde{S}'_1(N, d) + \tilde{S}''_1(N, d),$$

где сумма $\tilde{S}'_1(N, d)$ состоит из слагаемых, для которых $a_1 > d^2$, а $\tilde{S}''_1(N, d)$ – для которых $a_1 \leq d^2$. Используя лемму 3.5 и учитывая, что $a_1^2 b_2 \ll N$, получаем оценку

$$\tilde{S}''_1(N, d) \ll \sum_{(a,b) \in X_2(d)}^{(d)} \frac{1}{a_1 b_2^2} \ll N \sum_{(a,b) \in X_2(d)}^{(d)} \frac{1}{a_1^3 b_2^3} \ll N \frac{\ln^3 d + 1}{d^2}.$$

Используя лемму 3.3, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{S}'_1(N, d) &\ll \sum_{r|d} \sum_{\substack{b \in V_b(N) \\ \text{НОД}(b_1, b_2, b_3) = r}} \frac{1}{b_2^2} \sum_{\substack{a \in V_a(N, b_2) \\ a \in \Gamma(b, d)}} \frac{1}{a_1} \\ &\ll \sum_{r|d} \sum_{\substack{b \in V_b(N) \\ \text{НОД}(b_1, b_2, b_3) = r}} \frac{1}{b_2^2} \sum_{\substack{d^2 \leq a_1 \leq \sqrt{N/b_2} \\ a_1 \equiv 0 \pmod{\nu_1}}} \frac{1}{a_1} \left(\frac{a_1}{\nu_2} + 1 \right) \left(\frac{a_1}{\nu_3} + 1 \right), \end{aligned}$$

где $\nu_i = \nu_i(\Gamma(b, d))$ и множества $V_b(N)$ и $V_a(N, b_2)$ определены при доказательстве леммы 3.7. Из (3.5) вытекает

$$\nu_1 \nu_2 \nu_3 = \det \Gamma(b, d) = \left(\frac{d}{r} \right)^2 \implies \frac{a_1}{\nu_i} \geq 1, \quad a_1 \geq d^2, \quad i = 2, 3. \quad (3.45)$$

Нетрудно проверить, что $\nu_1 = \text{НОД}(d, b_1)$. Поэтому $\nu_1 \leq |b_1| \ll b_2 \ll N^{1/3}$ и

$$\sqrt{\frac{N}{b_2}} \frac{1}{\nu_2 \nu_3} = \sqrt{\frac{N}{b_2}} \frac{\nu_1}{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \ll \frac{N^{5/6}}{b_2^{1/2}} \left(\frac{r}{d}\right)^2 \leq \frac{N}{b_2} \left(\frac{r}{d}\right)^2.$$

Учитывая, что $\nu_i \leq a_1$ при $i = 2, 3$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d^2 \leq a_1 \leq \sqrt{N/b_2} \\ a_1 \equiv 0 \pmod{\nu_1}}} \frac{1}{a_1} \left(\frac{a_1}{\nu_2} + 1\right) \left(\frac{a_1}{\nu_3} + 1\right) &\ll \sum_{\substack{d^2 \leq a_1 \leq \sqrt{N/b_2} \\ a_1 \equiv 0 \pmod{\nu_1}}} \frac{a_1}{\nu_2 \nu_3} \\ &\ll \frac{N}{b_2 \nu_1 \nu_2 \nu_3} + \sqrt{\frac{N}{b_2}} \frac{1}{\nu_2 \nu_3} \ll \frac{N}{b_2} \left(\frac{r}{d}\right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{S}'_1(N, d) &\ll \sum_{r|d} \sum_{\substack{b \in V_b(N) \\ \text{НОД}(b_1, b_2, b_3) = r}} \frac{1}{b_2^2} \frac{N}{b_2} \left(\frac{r}{d}\right)^2 \ll \frac{N}{d^2} \sum_{r|d} \left(\sum_{\substack{1 \leq |b_1|, |b_3| \leq b_2 \ll N \\ b_1, b_2, b_3 \equiv 0 \pmod{r}}} \frac{r^2}{b_2^3} \right) \\ &\ll N \frac{\sigma_{-1}(d)}{d^2} \ln N. \end{aligned}$$

Значит,

$$\tilde{S}_1(N, d) \leq \tilde{S}'_1(N, d) + \tilde{S}''_1(N, d) \ll \frac{\sigma_{-1}(d)}{d^2} N \ln N + N \frac{\ln^3 d + 1}{d^2}.$$

Оценка для $\tilde{S}_2(N, d)$ выводится аналогично. Формула (3.44) доказана. Применяя (3.42), получаем (3.43). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть выполняются условия леммы 3.7, функция $\xi(a, b, N, d)$ определена в следствии 3.1. Тогда

$$\sum_{d|N} \sum_{(a,b) \in V(N)}^{(d)} \xi(a, b, N, d) \ll_{C, V_1, V_2} \mathcal{R}_3(N) |\ln \ln N|^x \ln N. \quad (3.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что

$$\xi(a, b, N, d) \ll_{V_1, V_2} Nd \cdot \frac{a_1 + b_2}{a_1^2 b_2^2}, \quad (a, b) \in V(N),$$

воспользоваться леммой 3.8 и формулой (2.2). Следствие доказано.

ЛЕММА 3.9. Пусть $C \in \mathbb{R}_+$, $N \geq 2$,

$$\hat{T}(C; N) = \{(x, y) \in T(C) : x_1^2 y_2 \asymp_C N \text{ либо } x_1 y_2^2 \asymp_C N\}.$$

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{d|N} d \sum_{(a,b) \in \hat{T}(C; N)}^{(d)} \frac{1}{a_1^3 b_2^3} \ll_C |\ln \ln N|^x \ln N \sum_{d|N} \frac{\sigma_{-1}(d)}{d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторим рассуждения, использованные при обосновании леммы 3.7. Достаточно только учесть, что

$$\sum_{(a,b) \in \widehat{T}(C;N)} \frac{1}{a_1^3 b_2^3} \ll_C \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ m \asymp N/n^2}} \frac{1}{nm} \ll_C \ln N.$$

3.4. Доказательство теоремы 3.1. Пусть X – множество множеств Ω , которые удовлетворяют условиям теоремы 3.1; X' – подмножество из X , состоящее из множеств Ω , удовлетворяющих условию

$$x_1 y_2 \ll_{\Omega} D_3(x, y) \quad \forall M(x, y, z) \in \Omega. \quad (3.47)$$

Если $\Omega \in X$, то через $\mathcal{F}(\Omega)$ обозначаем множество правых действий F группы $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ таких, что

$$a_1 \underset{\Omega, F}{\succ} a'_1, \quad b_2 \underset{\Omega, F}{\succ} b'_2, \quad c_3 \underset{\Omega, F}{\succ} c'_3,$$

при $M(a', b', c') = F(M(a, b, c))$, $M(a, b, c) \in \Omega$.

ЛЕММА 3.10. Любое множество $\Omega \in X$ можно разбить на фиксированное число частей $U_1, \dots, U_s$ так, что для каждого номера i существует преобразование $F_i \in \mathcal{F}(U_i)$, удовлетворяющее условию $F_i U_i \in X'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega \in X$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$C x_1 y_2 z_3 \leq z_1 D_1 - z_2 D_2 + z_3 D_3, \quad (3.48)$$

$$|x_2|, |x_3| \leq C x_1, \quad |y_1|, |y_3| \leq C y_2, \quad |z_1|, |z_2| \leq C z_3 \quad \forall M(x, y, z) \in \Omega, \quad (3.49)$$

где $D_i = D_i(x, y)$. Не умаляя общности, можно считать, что

$$z_1 \geq 0, \quad z_2 \leq 0, \quad (3.50)$$

$$|x_3| \leq C' x_1, \quad |y_3| \leq C' y_2 \quad \forall M(x, y, z) \in \Omega, \quad (3.51)$$

где положительная постоянная $C' < 1$ зависит только от Ω .

Если не выполняются условия (3.50), то Ω разбиваем на части, в которых c_1, c_2 знакопостоянные, и применяем преобразования вида $F^{(i)}$, которые меняют знак сначала у элементов i -й строки, а потом у элементов i -го столбца.

Если (3.51) не выполняется, то нужно разбить Ω на части, в которых x_3, y_3 знакопостоянные, а потом к каждой части применить преобразование, переводящее матрицу со столбцами u, v, w в матрицу со столбцами $(u + \varepsilon_1 w), (v + \varepsilon_2 w), w$, где

$$\varepsilon_i = \mathrm{sign} z'_i, \quad i = 1, 2, \quad \mathrm{sign} t = \begin{cases} t/|t| & \text{при } t \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее считаем, что условия (3.50), (3.51) выполнены.

Предположим, что существует постоянная $r > 0$ такая, что

$$rx_1y_2z_3 \leq \theta_1 z_1 D_1 + \theta_2 |z_2| D_2 + z_3 D_3, \quad D_i = D_i(x, y) \quad \forall M(x, y, z) \in \Omega, \quad (3.52)$$

где

$$\theta_i = \begin{cases} 1, & \text{если функция } D_i = D_i(x, y) \text{ знакопостоянная и } D_i \neq 0 \text{ в } \Omega, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку $|z_1|, |z_2| \leq Cz_3$, то

$$x_1y_2 \leq \theta_1^+ D_1 + \theta_2^+ D_2 + D_3, \quad \theta_i^+ = \begin{cases} 1 & \text{при } D_i \geq 0 \text{ в } \Omega, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.53)$$

Рассмотрим отображение F , которое матрице M со столбцами u, v, w ставит в соответствие матрицу M' со столбцами $u' = \theta_1^+ w, v = \theta_2^+ w, w$. Учитывая соотношения из (3.51), проверим, что $F: X \rightarrow X$, и поэтому F принадлежит $\mathcal{F}(\Omega)$. Кроме того, если $M(x', y', z') = F(M(x, y, z))$, то

$$D_3(x', y') = \theta_1^+ D_1(x, y) + \theta_2^+ D_2(x, y) + D_3(x, y) \geq x_1y_2 \geq_F x'_1y'_2,$$

и утверждение леммы выполнено.

Осталось доказать, что множество Ω можно разбить на части из класса X так, что для каждой выполнено условие (3.52). В силу (3.49) множество Ω можно разбить на фиксированное число частей вида

$$U = U(h, n_1, n_2, k_1, k_2) = \left\{ M(x, y, z) \in \Omega: \right. \\ \left. n_i h \leq \frac{x_i}{x_1} < (n_i + 1)h, \quad i = 2, 3, \quad k_j h \leq \frac{y_j}{y_2} < (k_j + 1)h, \quad j = 1, 3 \right\},$$

где $n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, h – достаточно малая (по сравнению с константой C из неравенств (3.48), (3.49)) положительная постоянная. Пусть $i \in \{1, 2\}$, D_i меняет знак на множестве U . Тогда нетрудно заметить, что

$$\max \left\{ \frac{D_i(x, y)}{x_1y_2} : M(x, y, z) \in U \right\} \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow +0$ равномерно по n_1, n_2, k_1, k_2 , и из (3.48), (3.49) вытекает, что при достаточно малом h множество U удовлетворяет условию (3.52). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.11. Пусть выполнены условия теоремы 3.1, $C^* \in \mathbb{R}_+$,

$$\omega(N) = \{M(a, b, c) \in \Omega(\mathbb{Z}; N) : a_1^2 b_2, a_1 b_2^2 \leq_{\Omega} C^* N\},$$

$$\omega'(N) = \{M(a, b, c) \in \Omega(\mathbb{Z}; N) : a_1^2 b_2 \asymp_{\Omega} N \text{ либо } a_1 b_2^2 \asymp_{\Omega} N\}.$$

Тогда

$$\#\omega(N) = \frac{\mathcal{R}_3(N)}{6\zeta(2)\zeta(3)} (\mu_P(\mathcal{P}(\Omega)) \ln^2 N + O_{\Omega, C^*}(|\ln \ln N|^x \ln N)),$$

$$\#\omega'(N) \ll_{\Omega, C^*} \mathcal{R}_3(N) |\ln \ln N|^x \ln N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая лемму 3.10 и инвариантность меры μ_P относительно правого действия группы $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, можно, не умаляя общности, считать, что выполняется условие (3.47).

Согласно следствию 3.1 имеем

$$\begin{aligned} \#\omega(N) &= \sum_{d|N} \sum_{(a,b) \in V(N)}^{(d)} (N^2 d \cdot f(a,b) + O(\xi(a,b,N,d))), \\ \#\omega'(N) &\ll \sum_{d|N} \sum_{(a,b) \in V'(N)}^{(d)} \left(N^2 d \cdot f(a,b) + 1 + Nd \cdot \frac{a_1 + b_2}{a_1 b_2 D_3(a,b)} \right), \end{aligned}$$

$$V(N) = \{(x,y) \in V_1 \times V_2 : x_1^2 y_2, x_1 y_2^2 \leq C^* N\},$$

$$V'(N) = \{(x,y) \in V_1 \times V_2 : x_1^2 y_2 \asymp N \text{ либо } x_1 y_2^2 \asymp N\},$$

где множества V_1, V_2 определяются формулами (3.7). Здесь и ниже постоянные в оценках $O(\cdot)$, $\ll$ зависят от Ω и C^* . Докажем, что для вычисления и оценки этих сумм можно применять леммы 3.7, 3.9. Учитывая (3.47), а также неравенства (3.12), получаем $V_1 \times V_2 \in T(C)$ для некоторой постоянной $C = C(\Omega)$. Из условий леммы и (3.12) вытекает выполнение оценок (3.16). Выполнение условия (а) леммы 3.7 очевидно. Все условия леммы 3.7 выполнены. Поэтому, применяя для вычисления суммы от главного члена лемму 3.7, а для оценки суммы остатка – следствие 3.3, а также учитывая (2.2), получаем

$$\#\omega(N) = \frac{\mathcal{R}_3(N)}{\zeta(2)\zeta(3)} \left(\int_{V(N)} f(x,y) dx dy + O(|\ln \ln N|^x \ln N) \right).$$

Для оценки $\#\omega'(N)$ достаточно учесть, что

$$N^2 d \cdot f(a,b) + 1 + Nd \cdot \frac{a_1 + b_2}{a_1 b_2 D_3(a,b)} \ll \frac{N^2 d}{a_1^3 b_2^3},$$

и воспользоваться леммой 3.9.

Для вычисления интеграла

$$\int_{V(N)} f(x,y) dx dy$$

сделаем следующую замену переменных:

$$x'_1 = x_1, \quad x'_i = \frac{x_i}{x_1}, \quad i = 2, 3,$$

$$y'_2 = y_2, \quad y'_j = \frac{y_j}{y_2}, \quad j = 1, 3,$$

$$z'_k = z_k, \quad k = 1, 2.$$

Тогда

$$\int_{V(N)} f(x, y) dx dy = \int_{G(N)} \frac{dx'_1 dy'_2}{x'_1 y'_2} \cdot \int_{W_1 \times W_2 \times W_3} \frac{dx'_2 dx'_3 dy'_1 dy'_3 dz'_1 dz'_2}{D^3},$$

где

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & 1 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G(N) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x, y; x^2 y, y^2 x \leq C^* N\}.$$

Поэтому

$$\int_{V(N)} f(x, y) dx dy = \frac{\ln^2 N}{6} \mu_P(\mathcal{P}(\Omega)) + O(\ln N).$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Обозначим через $\Omega^{(i)}(\mathbb{Z}; N)$ множество матриц из $\Omega(\mathbb{Z}; N)$, у которых элемент, находящийся на пересечении i -й строки и i -го столбца, не меньше, чем любой из двух оставшихся на главной диагонали. Докажем сначала, что

$$\#\Omega^{(i)}(\mathbb{Z}; N) = \frac{\mathcal{R}_3(N)}{6\zeta(2)\zeta(3)} (\mu_P(\mathcal{P}(\Omega)) \ln^2 N + O_\Omega(|\ln \ln N|^x \ln N)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.54)$$

Не умаляя общности, считаем, что $i = 3$. Согласно условиям теоремы существуют постоянные $0 < C_* < C^*$ такие, что

$$C_* N \leq x_1 y_2 z_3 \leq C^* N \quad \forall M(x, y, z) \in \Omega. \quad (3.55)$$

Положим

$$\begin{aligned} \omega(N) &= \{M(x, y, z) \in \Omega(\mathbb{Z}; N): x_1^2 y_2, x_1 y_2^2 \leq C^* N\}, \\ \omega''(N) &= \omega(N) \setminus \Omega^{(3)}(\mathbb{Z}; N). \end{aligned}$$

Используя (3.55), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \Omega^{(3)}(\mathbb{Z}; N) &\subset \omega(N), \quad \omega''(N) \subset \omega'(N) \\ \implies \#\Omega^{(3)}(\mathbb{Z}; N) &= \#\omega(N) + O_\Omega(\#\omega'(N)). \end{aligned}$$

Множество $\omega'(N)$ определено в лемме 3.11, применяя которую, получаем соотношение (3.54). Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что

$$\begin{aligned} \#\Omega(N) &= \sum_{i=1}^3 \#\Omega^{(i)}(\mathbb{Z}; N) + O(\omega'''(N)) \\ &= \frac{\mathcal{R}_3(N)}{2\zeta(2)\zeta(3)} (\mu_P(\mathcal{P}(\Omega)) \ln^2 N + O(|\ln \ln N|^x \ln N)) + O(\omega'''(N)), \end{aligned}$$

где

$$\omega'''(N) = \bigcup_{k \neq l} (\Omega^{(k)}(\mathbb{Z}; N) \cap \Omega^{(l)}(\mathbb{Z}; N)).$$

Нетрудно увидеть, что

$$\#\omega'''(N) \ll \mathcal{R}_3(N) |\ln \ln N|^x \ln N.$$

Например, согласно (3.55) имеем

$$\Omega^{(k)}(\mathbb{Z}; N) \cap \Omega^{(3)}(\mathbb{Z}; N) \subset \omega'(N), \quad k = 1, 2,$$

и поэтому соответствующая оценка вытекает из леммы 3.11. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1. Согласно лемме 2.2 достаточно вычислить $\#\Omega_i(\mathbb{Z}; N)$ и оценить $\#\partial\Omega_i(\mathbb{Z}; N)$. Нетрудно заметить, что множества Ω_i и $\partial\Omega_i$ удовлетворяют условиям теоремы 3.1, применяя которую, получаем

$$\begin{aligned} \#\Omega_i(\mathbb{Z}; N) &= \frac{\mathcal{R}_3(N)}{2\zeta(2)\zeta(3)} (\mu_P(\mathcal{P}(\Omega_i)) \ln^2 N + O(|\ln \ln N|^x \ln N)), \\ \#\partial\Omega_i(\mathbb{Z}; N) &= O(\mathcal{R}_3(N) |\ln \ln N|^x \ln N), \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

(так как $\mu_P(\mathcal{P}(\partial\Omega_i)) = 0$).

Из этих формул и леммы 2.2 вытекает утверждение теоремы.

Список литературы

1. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, т. 1, Изд-во АН УССР, Киев, 1952.
2. H. Minkowski, “Généralisation de la théorie des fractions continues”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **13** (1896), 41–60.
3. В. А. Быковский, “О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул”, *Докл. РАН*, **389**:2 (2003), 154–155; англ. пер.: V. A. Bykovskii, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, *Dokl. Math.*, **67**:2 (2003), 175–176.
4. Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, МЦНМО, М., 2004.
5. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский, “Об оценках гиперболической дзета-функции решеток”, *Чебышевский сб.*, **6**:2 (2005), 129–137.
6. М. О. Авдеева, В. А. Быковский, “Верхние и нижние оценки константы Вороного–Минковского”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 483–491; англ. пер.: M. O. Avdeeva, V. A. Bykovskii, “Upper and lower bounds for the Voronoi–Minkowski constant”, *Math. Notes*, **87**:3–4 (2010), 457–465.
7. А. А. Илларионов, “Оценка количества относительных минимумов целочисленных неполных решеток произвольного ранга”, *Докл. РАН*, **418**:2 (2008), 155–158; англ. пер.: A. A. Illarionov, “Estimate for the number of relative minima of arbitrary-rank incomplete integer lattices”, *Dokl. Math.*, **77**:1 (2008), 31–34.
8. H. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions”, *Number theory and analysis*, Plenum, New York, 1969, 87–96.
9. А. А. Илларионов, “Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток”, *Алгебра и анализ*, **23**:3 (2011), 189–215.

10. А. А. Илларионов, “Статистические свойства многомерных аналогов непрерывных дробей”, *Наука – Хабаровскому краю: материалы XII краевого конкурса молодых ученых*, Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, Хабаровск, 2010, 5–15.
11. Дж. В. Касселс, *Введение в геометрию чисел*, Мир, М., 1995; пер. с англ.: J. W. S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
12. П. Г. Л. Дирихле, *Лекции по теории чисел*, ОНТИ, М.–Л., 1936; пер. с нем.: P. G. L. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1894.
13. А. В. Устинов, “Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 131–160; англ. пер.: A. V. Ustinov, “The solution of Arnold’s problem on the weak asymptotics of Frobenius numbers with three arguments”, *Sb. Math.*, **200**:4 (2009), 597–627.

А. А. ИЛЛАРИОНОВ (A. A. ILLARIONOV)
Хабаровское отделение
Института прикладной математики ДВО РАН
E-mail: illar_a@list.ru

Поступило в редакцию
05.11.2010