Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Рябченко, Е. А. Самосват, О числе подграфов в случайном графе Барабаши–Альберт, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 3, 183–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/im6036>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:46:49

УДК 519.175.4

А. А. Рябченко, Е. А. Самосват

О числе подграфов в случайном графе Барабаши–Альберт

Изучена модель случайного графа типа модели предпочтительного присоединения Барабаши–Альберт. Разработана техника, позволяющая оценить для достаточно широкого класса случайных величин в рассмотренной модели их математическое ожидание. С помощью этой техники доказана теорема об асимптотике математического ожидания числа подграфов в случайных графах изученной модели, изоморфных некоторому фиксированному графу.

Библиография: 4 наименования.

Ключевые слова: случайный граф, граф Интернета, предпочтительное присоединение, модель Барабаши–Альберт, число подграфов.

§ 1. Введение и история задачи

В последнее десятилетие появилось много работ, посвященных изучению Интернета и моделированию его свойств с помощью случайных графов. Одной из первых и самых популярных моделей является модель предпочтительного присоединения, предложенная А. Л. Барабаши и Р. Альберт в 1999 г. (см. [1], [2]). Эта модель замечательна тем, что в ней выполняются многие свойства, наблюдаемые в графе Интернета, такие, например, как степенной закон распределения степеней вершин и малая величина диаметра.

Приведем описание этой модели, как его предложили А. Л. Барабаши и Р. Альберт: «... вначале мы имеем малое число m_0 вершин, на каждом шаге мы добавляем новую вершину с $m \leq m_0$ ребрами, которые соединяют новую вершину с m разными вершинами, уже присутствующими в системе. Мы предполагаем, что вероятность P того, что новая вершина будет соединена с вершиной i , зависит от степени k_i этой вершины, так что $P(k_i) = k_i / \sum_j k_j$. После t шагов возникает случайная сеть с $t + m_0$ вершинами и mt ребрами».

Мотивировка создания этой модели состоит в том, чтобы получить упрощенную модель роста Интернета, в которой предполагается, что ссылки с новых сайтов с большей вероятностью ведут на более “популярные” сайты (т. е. новые ребра *предпочитают* идти в вершины с большей степенью). Однако описание, данное Барабаши и Альберт, не является точным, так как недостаточно задать безусловную вероятность появления ребра. Так, m ребер на очередном шаге могут проводиться независимо, а могут существовать и сложные зависимости. Количество моделей, получаемых при устранении этой неточности, столь велико и модели столь разнообразны по свойствам, что справедлива следующая теорема (см. [3]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(n)$, $n \geq 2$, – произвольная целочисленная функция такая, что $f(2) = 0$, $f(n) \leq f(n+1) \leq f(n) + 1$ для всех $n \geq 2$ и $f(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда существует такая модель типа Барабаши–Альберт, что в ней с вероятностью, стремящейся к единице при $n \rightarrow \infty$, случайный граф содержит в точности $f(n)$ треугольников.

Одним из популярных способов устранения указанной выше неточности является использование LCD-модели (LCD – Linearized Chord Diagram), предложенной Б. Боллобашем и О. Риорданом (см. [3], [4]).

Опишем эту модель. Мы будем строить случайный граф с t вершинами и mt ребрами, $m \in \mathbb{N}$. Разберем сначала случай $m = 1$. Рассмотрим последовательность вершин $\{v_1, v_2, \dots\}$. Пусть $d_G(v)$ – степень вершины v в графе G . Мы индуктивно определим процесс $(G_1^{(t)})_{t \geq 1}$ так, что $G_1^{(1)}$ является графом на множестве вершин $\{v_i : 1 \leq i \leq t\}$. Сначала построим граф $G_1^{(1)}$ с одной вершиной и одной петлей. Имея $G_1^{(t-1)}$, мы построим $G_1^{(t)}$, добавляя вершину v_t вместе с ребром между вершиной v_t и вершиной v_i , где i выбирается случайно с вероятностью

$$P(i = s) = \begin{cases} \frac{d_{G_1^{(t-1)}}(v_s)}{2t-1}, & 1 \leq s \leq t-1, \\ \frac{1}{2t-1}, & s = t. \end{cases}$$

В случае, когда $m > 1$, добавим m ребер из вершины v_t по одному последовательно (независимо от всех предыдущих ребер), каждый раз пересчитывая степени вершин. Это определение эквивалентно следующему: сначала построим процесс $(G_1^{(t)})_{t \geq 1}$ на последовательности вершин $\{v'_1, v'_2, \dots\}$, а потом сформируем графы $(G_m^{(t)})_{t \geq 1}$ из графов $(G_1^{(mt)})_{t \geq 1}$ посредством склеивания вершин $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$ в вершину v_1 , склеивания вершин $\{v'_{m+1}, v'_{m+2}, \dots, v'_{2m}\}$ в вершину v_2 и т. д.

Для графов в LCD-модели было получено много интересных результатов, среди них наиболее близок к нашему исследованию следующий результат, который можно найти в [3].

Пусть S – граф на вершинах $V(S) = \{1, 2, \dots, n\}$, возможно, с петлями. Пусть каждое ребро ij в S при $i \leq j$ ориентировано из j в i . Обозначим через $V^-(S)$ множество вершин, в которые приходят ребра. Для $i \in V(S)$ обозначим через $d_S^{\text{in}}(i)$ степень по входящим ребрам вершины i в S . Обозначим через $C_S(t)$ число ребер в S , “пересекающих” t , т. е. число ребер ij в S , для которых $i \leq t \leq j$. Будем говорить, что S – *подграф* графа $G_1^{(n)}$, и обозначать $S \subseteq G_1^{(n)}$, если в точности ребра S встречаются в $G_1^{(n)}$, а не $G_1^{(n)}$ содержит подграф, изоморфный S . Будем говорить также, что S является *допустимым*, если степени по исходящим ребрам всех вершин S не превосходят 1. Таким образом, S допустимый, если $P(S \subseteq G_1^{(n)}) \neq 0$.

Справедлива следующая теорема (см. [3]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть S – допустимый подграф. Тогда для вероятности p_S того, что $S \subseteq G_1^{(n)}$, справедливо равенство

$$p_S = \prod_{i \in V^-(S)} d_S^{\text{in}}(i)! \prod_{ij \in E(S)} \frac{1}{2\sqrt{ij}} \exp \left\{ O \left(\sum_{i \in V(S)} \frac{C_S(i)^2}{i} \right) \right\},$$

где $\sum_{i \in V(S)} (C_S(i))^2 / i \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Непосредственным следствием этой теоремы является

ТЕОРЕМА 3 (о произвольном подграфе). Пусть задан граф G_0 , степени вершин которого равны $d_1, \dots, d_s$. Обозначим через $\#(d_i = k)$ число вершин в G_0 , степень каждой из которых равна k . Обозначим через $\#(G_0, G_m^{(n)})$ число подграфов, изоморфных графу G_0 , в графе $G_m^{(n)}$. Тогда

$$\mathbb{E}(\#(G_0, G_m^{(n)})) = \Theta(n^{\#(d_i=0)} (\sqrt{n})^{\#(d_i=1)} (\ln n)^{\#(d_i=2)} m^{\sum \frac{d_i}{2}}).$$

Такого следствия авторы не встречали в других работах, и оно, в частности, не приводится в [3]. Однако в [3] приводятся следующие результаты, которые согласуются с теоремой 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $m \geq 2$ фиксировано, и пусть K_3 – полный граф на трех вершинах. Тогда

$$\mathbb{E}(\#(K_3, G_m^{(n)})) = (1 + o(1)) \frac{m(m-1)(m+1)}{48} (\ln n)^3$$

при $n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть фиксированы $m \geq 2$ и $l \geq 3$, и пусть C_l – цикл на l вершинах. Тогда

$$\mathbb{E}(\#(C_l, G_m^{(n)})) = (1 + o(1)) c_{m,l} (\ln n)^l$$

при $n \rightarrow \infty$, где $c_{m,l}$ – положительная константа. Более того, при $m \rightarrow \infty$ имеем $c_{m,l} = \Theta(m^l)$.

В настоящей работе мы рассмотрим еще одну модель типа Барабаши–Альберт. С одной стороны, эта модель очень близка к только что описанной, с другой – она чуть более естественна. В этой модели нам удастся получить два весьма общих результата, которые мы называем *теоремами о длинном и коротком спуске*. Из этих теорем следует теорема, аналогичная теореме 3 (о произвольном подграфе), а также некоторые другие результаты.

§ 2. Описание модели

Опишем модель, во многом схожую с LCD, но более удобную для ряда вычислений. Рассмотрим последовательность вершин $\{1, 2, \dots\}$. Мы индуктивно определим процесс $(G_m^t)_{t \geq 1}$ так, что G_m^t является графом на множестве вершин $\{1, \dots, t\}$ с mt ребрами. Сначала построим граф G_m^1 с одной вершиной и m петлями. Имея G_m^{t-1} , мы построим G_m^t , добавляя вершину t вместе с m ребрами,

выходящими из нее. Ребра взаимно независимы, и каждое ребро соединяет вершину t с вершиной i , где $i \in \{1, \dots, t\}$ выбирается случайно, причем

$$P(i = s) = \begin{cases} \frac{d_s^{t-1}}{m(2t-1)}, & 1 \leq s \leq t-1, \\ \frac{1}{2t-1}, & s = t. \end{cases}$$

Здесь $d_s^{t-1} = d_{G_m^{t-1}}(s)$ – степень вершины s в графе G_m^{t-1} .

В текущих обозначениях, в отличие от обозначений для LCD, нет скобок в верхнем индексе у G_m^t . Будем использовать это отличие для указания того, какая модель рассматривается.

Главное отличие нашей модели от LCD-модели состоит в том, что мы проводим сразу все m ребер из очередной вершины, а в LCD-модели ребра проводятся последовательно и после проведения каждого ребра степени вершин пересчитываются.

Дальнейшая структура статьи следующая. В § 3 мы найдем математическое ожидание числа треугольников в случайном графе G_m^t . Тем самым, мы разовьем необходимую нам технику. С ее помощью мы получим в § 4, 5 предельно общие формулировки теорем о подсчете средних в случайном графе и о количестве вхождений того или иного графа в случайный граф.

§ 3. Подсчет количества треугольников

Обозначим через $\#(K_3, G_m^n)$ количество подграфов, изоморфных K_3 , в графе G_m^n .

ТЕОРЕМА 6 (о числе треугольников). *Имеет место асимптотика*

$$E(\#(K_3, G_m^n)) = \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) \frac{(m-1)m(m+1)}{48} \ln^3 n.$$

Для доказательства теоремы 6 нам потребуется ввести вспомогательные обозначения и доказать ряд вспомогательных утверждений. Через e_{ij} обозначим количество ребер между i -й и j -й вершинами. Для числа треугольников тогда имеем

$$\#(K_3, G_m^n) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} e_{ij} e_{jk} e_{ik},$$

где $e_{ij}e_{jk}e_{ik}$ – количество треугольников с вершинами i, j и k . В свою очередь, для искомого математического ожидания получаем формулу

$$E(\#(K_3, G_m^n)) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} E(e_{ij}e_{jk}e_{ik}). \quad (1)$$

Обозначим через D_n суммарную степень вершин на n -м шаге:

$$D_n = \sum_{i=1}^{n+1} d_i^n = (2n+1)m,$$

где мы формально полагаем $d_{n+1}^n = m$, это будет удобно нам далее при применении рекуррентных соотношений.

Сначала докажем две технические леммы.

ЛЕММА 1. *При $a < b$ имеет место асимптотика*

$$\prod_{k=a}^b \left(1 + \frac{m}{D_k}\right) = \left(1 + O\left(\frac{1}{a}\right)\right) \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем произведение:

$$\prod_{k=a}^b \left(1 + \frac{m}{D_k}\right) = \exp\left\{\ln\left(\prod_{k=a}^b \left(1 + \frac{m}{D_k}\right)\right)\right\} = \exp\left\{\sum_{k=a}^b \ln\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)\right\}.$$

Используя оценку $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, получим

$$\begin{aligned} \exp\left\{\sum_{k=a}^b \left(\frac{1}{2k+1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right\} &= \exp\left\{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + O\left(\frac{1}{a}\right)\right\} \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}} \exp\left\{O\left(\frac{1}{a}\right)\right\} = \left(1 + O\left(\frac{1}{a}\right)\right) \sqrt{\frac{b}{a}}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. *При $a < b$ имеет место асимптотика*

$$\prod_{k=a}^b \left(1 + \frac{2m}{D_{k-1}} + \frac{m(m-1)}{(D_{k-1})^2}\right) = \left(1 + O\left(\frac{1}{a}\right)\right) \frac{b}{a}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем произведение:

$$\begin{aligned} \prod_{k=a}^b \left(1 + \frac{2m}{D_{k-1}} + \frac{m(m-1)}{(D_{k-1})^2}\right) &= \exp\left\{\ln\left(\prod_{k=a}^b \left(1 + \frac{2m}{D_{k-1}} + \frac{m(m-1)}{(D_{k-1})^2}\right)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{k=a}^b \ln\left(1 + \frac{2m}{D_{k-1}} + \frac{m(m-1)}{(D_{k-1})^2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Используя оценку $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, получим

$$\begin{aligned} \exp\left\{\sum_{k=a}^b \left(\frac{2}{2k-1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right\} &= \exp\left\{\ln\left(\frac{b}{a}\right) + O\left(\frac{1}{a}\right)\right\} \\ &= \frac{b}{a} \exp\left\{O\left(\frac{1}{a}\right)\right\} = \left(1 + O\left(\frac{1}{a}\right)\right) \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Теперь перейдем к оценке величины $E(e_{ij}e_{jk}e_{ik})$. Введем случайную величину $I(\langle i; j \rangle)_\alpha$, которая представляет собой индикатор события, состоящего в том, что при добавлении j -й вершины α -е ребро из нее ($\alpha \in \{1, \dots, m\}$) было проведено в i -ю вершину.

Заметим, что

$$d_i^k = d_i^{k-1} + \sum_{\alpha=1}^m I(\langle i; k \rangle)_\alpha. \quad (2)$$

Последнее соотношение верно для $k > i$ по определению случайного процесса; для $k = i$ оно тоже верно, так как мы положили $d_i^{i-1} = m$.

Поскольку ребра между вершинами i и j , $i < j$, появляются только при добавлении вершины j , имеем

$$e_{ij} = \sum_{\alpha=1}^m I(\langle i; j \rangle)_\alpha, \quad i < j. \quad (3)$$

В дальнейшем нам часто придется вычислять условные математические ожидания произведений индикаторов вида $I(\langle i; j \rangle)_\alpha$, при этом индикаторы могут быть либо независимыми, либо несовместными, либо совпадающими. Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(I(\langle i; n \rangle)_\mu I(\langle j; n \rangle)_\nu \mid G_m^{n-1}) \\ &= \begin{cases} \mathbb{E}(I(\langle i; n \rangle)_\mu \mid G_m^{n-1}) \mathbb{E}(I(\langle j; n \rangle)_\nu \mid G_m^{n-1}), & \text{если } \mu \neq \nu, \\ 0, & \text{если } \mu = \nu, i \neq j, \\ \mathbb{E}(I(\langle i; n \rangle)_\mu \mid G_m^{n-1}), & \text{если } \mu = \nu, i = j. \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь условные математические ожидания берутся относительно сигма-алгебры графа G_m^{n-1} , под которой подразумевается естественная фильтрация процесса в момент времени $n - 1$.

Техника доказательства последующих лемм состоит в применении соотношений (2) и (3) и в аккуратном раскрытии произведений индикаторов с учетом описанных трех случаев.

ЛЕММА 3. *Имеет место соотношение*

$$\mathbb{E}(e_{ij}e_{jk}e_{ik}) = \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \frac{m-1}{4m} \frac{1}{k^2} \mathbb{E}(e_{ij}d_i^{k-1}d_j^{k-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся выражением (3):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e_{ij}e_{jk}e_{ik}) &= \mathbb{E}\left(e_{ij} \sum_{\alpha} I(\langle j; k \rangle)_\alpha \sum_{\beta} I(\langle i; k \rangle)_\beta\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e_{ij} \sum_{\alpha=\beta} I(\langle j; k \rangle)_\alpha I(\langle i; k \rangle)_\beta\right) + \mathbb{E}\left(e_{ij} \sum_{\alpha \neq \beta} I(\langle j; k \rangle)_\alpha I(\langle i; k \rangle)_\beta\right). \quad (5) \end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое в выражении (5) обращается в нуль, так как одно и то же ребро не может идти в разные вершины. Во втором слагаемом выражения (5), переходя к условному математическому ожиданию (используя формулу полной вероятности), получим

$$\mathbb{E}\left(e_{ij} \sum_{\alpha \neq \beta} I(\langle j; k \rangle)_\alpha I(\langle i; k \rangle)_\beta\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(e_{ij} \sum_{\alpha \neq \beta} I(\langle j; k \rangle)_\alpha I(\langle i; k \rangle)_\beta \mid G_m^{k-1}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left(e_{ij} \sum_{\alpha \neq \beta} \mathbb{E}(I(\langle j; k \rangle)_\alpha I(\langle i; k \rangle)_\beta \mid G_m^{k-1}) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(e_{ij} \sum_{\alpha \neq \beta} \mathbb{E}(I(\langle j; k \rangle)_\alpha \mid G_m^{k-1}) \mathbb{E}(I(\langle i; k \rangle)_\beta \mid G_m^{k-1}) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(e_{ij} m(m-1) \frac{d_i^{k-1} d_j^{k-1}}{(D_{k-1})^2} \right) = \frac{m-1}{m} \frac{1}{(2k-1)^2} \mathbb{E}(e_{ij} d_i^{k-1} d_j^{k-1}) \\
&= \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) \frac{m-1}{4m} \frac{1}{k^2} \mathbb{E}(e_{ij} d_i^{k-1} d_j^{k-1}),
\end{aligned}$$

где в третьем равенстве использовалась формула (4) при $\alpha \neq \beta$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Имеет место соотношение*

$$\mathbb{E}(e_{ij} d_i^{k-1} d_j^{k-1}) = \left(1 + O\left(\frac{1}{j}\right) \right) \frac{k}{j} \mathbb{E}(e_{ij} d_i^j d_j^j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся соотношением (2) и получим

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e_{ij} d_i^{k-1} d_j^{k-1}) &= \mathbb{E} \left(e_{ij} \left(d_i^{k-2} + \sum_{\alpha} I(\langle i; k-1 \rangle)_\alpha \right) \left(d_j^{k-2} + \sum_{\beta} I(\langle j; k-1 \rangle)_\beta \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(e_{ij} \left(d_i^{k-2} d_j^{k-2} + d_i^{k-2} \sum_{\beta} I(\langle j; k-1 \rangle)_\beta + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + d_j^{k-2} \sum_{\alpha} I(\langle i; k-1 \rangle)_\alpha + \sum_{\alpha} I(\langle i; k-1 \rangle)_\alpha \sum_{\beta} I(\langle j; k-1 \rangle)_\beta \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(e_{ij} \left(d_i^{k-2} d_j^{k-2} + d_i^{k-2} m \frac{d_j^{k-2}}{D_{k-2}} + d_j^{k-2} m \frac{d_i^{k-2}}{D_{k-2}} + m(m-1) \frac{d_i^{k-2} d_j^{k-2}}{(D_{k-2})^2} \right) \right) \\
&= \mathbb{E}(e_{ij} d_i^{k-2} d_j^{k-2}) \left(1 + \frac{2m}{D_{k-2}} + \frac{m(m-1)}{(D_{k-2})^2} \right) \\
&= \mathbb{E}(e_{ij} d_i^j d_j^j) \prod_{l=j}^{k-2} \left(1 + \frac{2m}{D_l} + \frac{m(m-1)}{(D_l)^2} \right) \\
&\stackrel{\text{лемма 2}}{=} \left(1 + O\left(\frac{1}{j}\right) \right) \frac{k}{j} \mathbb{E}(e_{ij} d_i^j d_j^j).
\end{aligned}$$

В третьем равенстве мы, как в лемме 3, сделали переход к условному математическому ожиданию относительно сигма-алгебры графа, полученного на предыдущем шаге процесса, в четвертом – мы получили рекуррентное соотношение и применили его несколько раз. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Имеет место соотношение*

$$\mathbb{E}(e_{ij} d_i^j d_j^j) = \left(1 + O\left(\frac{1}{j}\right) \right) \frac{m}{2j} \left(\mathbb{E}((d_i^{j-1})^2) + \mathbb{E}(d_i^{j-1}) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся выражениями (2) и (3):

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(e_{ij}d_i^j d_j^j) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha}\right)\left(d_i^{j-1} + \sum_{\beta} I(\langle i; j \rangle)_{\beta}\right)\left(d_j^{j-1} + \sum_{\gamma} I(\langle j; j \rangle)_{\gamma}\right)\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(d_i^{j-1} d_j^{j-1} \left(\sum_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha}\right)\right) + \mathbb{E}\left(d_i^{j-1} \sum_{\alpha, \gamma} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} I(\langle j; j \rangle)_{\gamma}\right) \\
 &\quad + \mathbb{E}\left(d_j^{j-1} \sum_{\alpha, \beta} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\beta}\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{\alpha, \beta, \gamma} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\beta} I(\langle j; j \rangle)_{\gamma}\right). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Упростим каждое слагаемое в (6), заменяя d_j^{j-1} на m , учитывая формулу (4) и совершая переходы к условному математическому ожиданию относительно сигма-алгебры графа, полученного на предыдущем шаге процесса.

Для первого слагаемого в (6) имеем

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left(d_i^{j-1} d_j^{j-1} \left(\sum_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha}\right)\right) &= \mathbb{E}\left(d_i^{j-1} m \frac{m d_i^{j-1}}{D_{j-1}}\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(d_i^{j-1} m^2 \frac{d_i^{j-1}}{D_{j-1}}\right) = \mathbb{E}\left((d_i^{j-1})^2\right) \frac{m^2}{D_{j-1}}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Для второго слагаемого получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left(d_i^{j-1} \sum_{\alpha, \gamma} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} I(\langle j; j \rangle)_{\gamma}\right) &= \mathbb{E}\left(d_i^{j-1} \sum_{\alpha \neq \gamma} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} I(\langle j; j \rangle)_{\gamma}\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(d_i^{j-1} m(m-1) \frac{d_i^{j-1}}{D_{j-1}} \frac{d_j^{j-1}}{D_{j-1}}\right) = \mathbb{E}\left(d_i^{j-1} m^2(m-1) \frac{d_i^{j-1}}{(D_{j-1})^2}\right) \\
 &= \mathbb{E}\left((d_i^{j-1})^2\right) \frac{m^2}{D_{j-1}} \frac{m-1}{D_{j-1}}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Для третьего слагаемого имеем

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left(d_j^{j-1} \sum_{\alpha, \beta} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\beta}\right) &= \mathbb{E}\left(d_j^{j-1} \sum_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha}\right) + \mathbb{E}\left(d_j^{j-1} \sum_{\alpha \neq \beta} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\beta}\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\frac{m^2 d_i^{j-1}}{D_{j-1}}\right) + \mathbb{E}\left(m^2(m-1) \left(\frac{d_i^{j-1}}{D_{j-1}}\right)^2\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(d_i^{j-1}\right) \frac{m^2}{D_{j-1}} + \mathbb{E}\left((d_i^{j-1})^2\right) \frac{m^2}{D_{j-1}} \frac{m-1}{D_{j-1}}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Наконец, для четвертого слагаемого получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left(\sum_{\alpha, \beta, \gamma} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\beta} I(\langle j; j \rangle)_{\gamma}\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{\alpha=\beta \neq \gamma} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} I(\langle j; j \rangle)_{\gamma}\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{\alpha \neq \beta \neq \gamma} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\beta} I(\langle j; j \rangle)_{\gamma}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left(m(m-1) \frac{d_i^{j-1}}{D_{j-1}} \frac{d_j^{j-1}}{D_{j-1}} \right) + \mathbb{E} \left(m(m-1)(m-2) \left(\frac{d_i^{j-1}}{D_{j-1}} \right)^2 \frac{m}{D_{j-1}} \right) \\
&= \mathbb{E}(d_i^{j-1}) \frac{m^2}{D_{j-1}} \frac{m-1}{D_{j-1}} + \mathbb{E}((d_i^{j-1})^2) \frac{m^2}{D_{j-1}} \frac{(m-1)(m-2)}{(D_{j-1})^2}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Подставим равенства (7)–(10) в соотношение (6) и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e_{ij} d_i^j d_j^j) &= \mathbb{E}((d_i^{j-1})^2) \frac{m^2}{D_{j-1}} \left(1 + 2 \cdot \frac{m-1}{D_{j-1}} + \frac{(m-1)(m-2)}{(D_{j-1})^2} \right) \\
&\quad + \mathbb{E}(d_i^{j-1}) \frac{m^2}{D_{j-1}} \left(1 + \frac{m-1}{D_{j-1}} \right) \\
&= \left(1 + O\left(\frac{1}{j}\right) \right) \frac{m}{2j} \left(\mathbb{E}((d_i^{j-1})^2) + \mathbb{E}(d_i^{j-1}) \right),
\end{aligned}$$

где в последнем равенстве использовано то, что $D_{j-1} = (2j-1)m$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Имеет место соотношение*

$$\mathbb{E}(d_i^j) = \left(1 + O\left(\frac{1}{j}\right) \right) m \sqrt{\frac{j}{i}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Делая переход к условному математическому ожиданию относительно сигма-алгебры графа, полученного на предыдущем шаге процесса, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(d_i^j) &= \mathbb{E} \left(d_i^{j-1} + \sum_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(d_i^{j-1} \left(1 + \frac{m}{D_{j-1}} \right) \right) = \mathbb{E} \left(d_i^{j-1} \prod_{k=i-1}^{j-1} \left(1 + \frac{m}{D_k} \right) \right).
\end{aligned}$$

Подставляя $d_i^{i-1} = m$ и используя лемму 1, получим искомое равенство.

ЛЕММА 7. *Имеет место соотношение*

$$\mathbb{E}((d_i^j)^2) = \left(1 + O\left(\frac{1}{j}\right) \right) m(m+1) \frac{j}{i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся выражением (2):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((d_i^j)^2) &= \mathbb{E} \left(\left(d_i^{j-1} + \sum_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} \right) \left(d_i^{j-1} + \sum_{\beta} I(\langle i; j \rangle)_{\beta} \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(d_i^{j-1} d_i^{j-1} + d_i^{j-1} \sum_{\beta} I(\langle i; j \rangle)_{\beta} + d_i^{j-1} \sum_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\alpha=\beta} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\beta} + \sum_{\alpha \neq \beta} I(\langle i; j \rangle)_{\alpha} I(\langle i; j \rangle)_{\beta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left((d_i^{j-1})^2 + 2d_i^{j-1} \frac{md_i^{j-1}}{D_{j-1}} + \frac{md_i^{j-1}}{D_{j-1}} + m(m-1) \left(\frac{d_i^{j-1}}{D_{j-1}} \right)^2 \right) \\
&= \mathbb{E}((d_i^{j-1})^2) \left(1 + \frac{2m}{D_{j-1}} + \frac{m(m-1)}{(D_{j-1})^2} \right) + \mathbb{E}(d_i^{j-1}) \frac{m}{D_{j-1}}, \quad (11)
\end{aligned}$$

где в третьем равенстве мы произвели сокращение совпадающих индикаторов и сделали переход к условному математическому ожиданию относительно сигма-алгебры графа, полученного на предыдущем шаге процесса. Теперь применим полученное рекуррентное соотношение (11) несколько раз, затем подставим $d_i^{i-1} = m$ и воспользуемся леммой 6 для $\mathbb{E}(d_i^j)$ и леммой 2. В результате получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((d_i^j)^2) &= \mathbb{E}((d_i^{i-1})^2) \prod_{k=i}^{j-1} \left(1 + \frac{2m}{D_k} + \frac{m(m-1)}{(D_k)^2} \right) \\
&\quad + \sum_{k=i}^{j-1} \mathbb{E}(d_i^k) \left(\prod_{l=k}^{j-1} \left(1 + \frac{2m}{D_l} + \frac{m(m-1)}{(D_l)^2} \right) \right) \frac{m}{D_k} \\
&= \left(1 + O\left(\frac{1}{i}\right) \right) m^2 \frac{j}{i} + \sum_{k=i}^{j-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{i}\right) \right) m \sqrt{\frac{k}{i}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) \frac{j}{k} \frac{m}{D_k} \\
&= \left(1 + O\left(\frac{1}{i}\right) \right) \left(m^2 \frac{j}{i} + \frac{j}{\sqrt{i}} m \sum_{k=i}^{j-1} \frac{1}{k} \sqrt{k} \frac{1}{2k} \right) \\
&= \left(1 + O\left(\frac{1}{i}\right) \right) \left(m^2 \frac{j}{i} + m \frac{j}{\sqrt{i}} \frac{1}{\sqrt{i}} \left(1 + O\left(\frac{1}{i^{\frac{3}{2}}}\right) \right) \right) \\
&= \left(1 + O\left(\frac{1}{i}\right) \right) \left(m^2 \frac{j}{i} + m \frac{j}{\sqrt{i}} \frac{1}{\sqrt{i}} \right) = \left(1 + O\left(\frac{1}{i}\right) \right) m(m+1) \frac{j}{i}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Применим леммы 3–7 в следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\#(K_3, G_m^n)) &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{E}(e_{ij}e_{jk}e_{ik}) \\
&= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) \frac{m-1}{4m} \frac{1}{k^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{j}\right) \right) \frac{k}{j} \frac{m}{2j} \left(\mathbb{E}((d_i^{j-1})^2) + \mathbb{E}(d_i^{j-1}) \right) \\
&= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left(1 + O\left(\frac{1}{j}\right) \right) \frac{m-1}{8j^2k} \left(\mathbb{E}((d_i^{j-1})^2) + \mathbb{E}(d_i^{j-1}) \right) \\
&= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left(1 + O\left(\frac{1}{j}\right) \right) \frac{m-1}{8j^2k} \left(\left(1 + O\left(\frac{1}{i}\right) \right) m(m+1) \frac{j}{i} \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + O\left(\frac{1}{i}\right) \right) m \sqrt{\frac{j}{i}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left(1 + O\left(\frac{1}{i}\right)\right) \frac{(m-1)m(m+1)}{8ijk} \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left(1 + O\left(\frac{1}{i}\right)\right) \frac{(m-1)m}{8i^{\frac{1}{2}}j^{\frac{3}{2}}k} \\
&= \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) \frac{(m-1)m(m+1)}{48} \ln^3 n.
\end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана.

§ 4. Обобщения

Техника, применяемая при подсчете математического ожидания числа треугольников, допускает обобщение, а именно справедливы следующие теоремы о коротком и длинном спуске, которые служат инструментом для решения самых разных задач о подграфах в случайном графе в модели Барабаши–Альберт.

В этих двух теоремах d_i^n – степень вершины i в графе G_m^n , e_{ij} – случайная величина, равная числу ребер между вершинами i, j в графе G_m^n , а ξ_k – произвольная функция от G_m^k , в частности любой многочлен от произвольного числа величин d_i^l, e_{pq} , где $i \leq l \leq k, p \leq q \leq k$.

ТЕОРЕМА 7 (о коротком спуске). *Имеет место соотношение*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\xi_{n-1}(d_{\alpha_1}^n)^{a_1} \cdots (d_{\alpha_k}^n)^{a_k} e_{\beta_1 n} \cdots e_{\beta_r n}) \\
&= \mathbb{E}(\xi_{n-1}(d_{\alpha_1}^{n-1})^{a_1} \cdots (d_{\alpha_k}^{n-1})^{a_k} d_{\beta_1}^{n-1} \cdots d_{\beta_r}^{n-1}) \left(\frac{1}{n}\right)^r \Theta(1) \quad (12)
\end{aligned}$$

при $r \leq m$ и $\beta_i \neq \beta_j$. В соотношении (12) зависимость от величины m имеет вид $1 + O\left(\frac{1}{m}\right)$ и учтена в множителе $\Theta(1)$.

ТЕОРЕМА 8 (о длинном спуске). *Имеет место соотношение*

$$\mathbb{E}(\xi_l(d_{\alpha_1}^n)^{a_1} \cdots (d_{\alpha_k}^n)^{a_k}) = \mathbb{E}(\xi_l(d_{\alpha_1}^l)^{a_1} \cdots (d_{\alpha_k}^l)^{a_k}) \left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{\sum a_i}{2}} \Theta(1). \quad (13)$$

Из теорем 7, 8 вытекает следующая теорема, аналогичная теореме 3 для LCD-модели.

ТЕОРЕМА 9 (о произвольном подграфе). *Пусть задан граф G_0 , степени вершин которого равны $d_1, \dots, d_s$. Обозначим через $\#(d_i = k)$ число вершин в G_0 , степень каждой из которых равна k . Обозначим через $\#(G_0, G_m^n)$ число подграфов, изоморфных графу G_0 , в графе G_m^n . Тогда*

$$\mathbb{E}(\#(G_0, G_m^n)) = \Theta(n^{\#(d_i=0)} (\sqrt{n})^{\#(d_i=1)} (\ln n)^{\#(d_i=2)} m^{\frac{\sum d_i}{2}}).$$

Теперь продемонстрируем применение теорем 7, 8 на примере доказательства теоремы 9 для случая тетраэдра ($G_0 = K_4$). В этом случае теорема 9 утверждает, что математическое ожидание числа тетраэдров ограничено константой.

Далее под $A \approx B$ подразумевается $A = \Theta(B)$. Количество тетраэдров на вершинах i, j, k, l равно $e_{ij}e_{ik}e_{il}e_{jk}e_{jl}e_{kl}$, поэтому для общего числа тетраэдров имеем

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\#(K_4, G_m^n)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i < j < k < l \leq n} e_{ij}e_{ik}e_{il}e_{jk}e_{jl}e_{kl}\right) \\
 &= \sum_{i < j < k < l \leq n} \mathbb{E}(e_{ij}e_{ik}e_{il}e_{jk}e_{jl}e_{kl}) \approx \sum_{i < j < k < l \leq n} \left(\frac{1}{l^3}\right) \mathbb{E}(e_{ij}e_{ik}e_{jk}d_i^{l-1}d_j^{l-1}d_k^{l-1}) \\
 &\stackrel{\text{теор. 7}}{\approx} \sum_{i < j < k < l \leq n} \left(\frac{1}{l^3} \left(\frac{l}{k}\right)^{3/2}\right) \mathbb{E}(e_{ij}e_{ik}e_{jk}d_i^k d_j^k d_k^k) \\
 &\approx \sum_{i < j < k < l \leq n} \left(\frac{1}{l^3} \left(\frac{l}{k}\right)^{3/2} m\right) \mathbb{E}(e_{ij}e_{ik}e_{jk}d_i^k d_j^k), \tag{14}
 \end{aligned}$$

где мы применили теорему 7, считая $\xi_{l-1} = e_{ij}e_{ik}e_{jk}$, и теорему 8, считая $\xi_k = e_{ij}e_{ik}e_{jk}$, а также учли, что $m \leq d_k^k \leq 2m$. Теперь применяя теорему 7 при $\xi_{k-1} = e_{ij}$ и теорему 8 при $\xi_j = e_{ij}$ и учитывая, что $m \leq d_j^j \leq 2m$, продолжим преобразование соотношения (14):

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i < j < k < l \leq n} \left(\frac{1}{l^3} \left(\frac{l}{k}\right)^{3/2} \frac{1}{k^2} m\right) \mathbb{E}(e_{ij}d_i^{k-1}d_j^{k-1}d_i^{k-1}d_j^{k-1}) \\
 &= \sum_{i < j < k < l \leq n} \left(\frac{1}{l^3} \left(\frac{l}{k}\right)^{3/2} \frac{1}{k^2} m\right) \mathbb{E}(e_{ij}(d_i^{k-1})^2(d_j^{k-1})^2) \\
 &\stackrel{\text{теор. 8}}{\approx} \sum_{i < j < k < l \leq n} \left(\frac{1}{l^3} \left(\frac{l}{k}\right)^{3/2} \frac{1}{k^2} \left(\frac{k}{j}\right)^{4/2} m\right) \mathbb{E}(e_{ij}(d_i^j)^2(d_j^j)^2) \\
 &\approx \sum_{i < j < k < l \leq n} \left(\frac{1}{l^3} \left(\frac{l}{k}\right)^{3/2} \frac{1}{k^2} \left(\frac{k}{j}\right)^{4/2} m^3\right) \mathbb{E}(e_{ij}(d_i^j)^2) \\
 &\stackrel{\text{теор. 7}}{\approx} \sum_{i < j < k < l \leq n} \left(\frac{1}{l^3} \left(\frac{l}{k}\right)^{3/2} \frac{1}{k^2} \left(\frac{k}{j}\right)^{4/2} \frac{1}{j} m^3\right) \mathbb{E}((d_i^j)^3) \\
 &\stackrel{\text{теор. 8}}{\approx} \sum_{i < j < k < l \leq n} \left(\frac{1}{l^3} \left(\frac{l}{k}\right)^{3/2} \frac{1}{k^2} \left(\frac{k}{j}\right)^{4/2} \frac{1}{j} \left(\frac{j}{i}\right)^{3/2} m^3\right) \mathbb{E}((d_i^j)^3) \\
 &\approx \sum_{i < j < k < l \leq n} \left(\frac{1}{l^3} \left(\frac{l}{k}\right)^{3/2} \frac{1}{k^2} \left(\frac{k}{j}\right)^{4/2} \frac{1}{j} \left(\frac{j}{i}\right)^{3/2} m^6\right) = \sum_{i < j < k < l \leq n} \left(\frac{1}{lkji}\right)^{3/2} m^6. \tag{15}
 \end{aligned}$$

Последний ряд сходится, а значит, $\mathbb{E}(\#(K_4, G_m^n)) \approx \text{const}$.

Теоремы 7, 8 позволяют оценить математическое ожидание любого многочлена от d_i^l и e_{pq} , в котором степени e_{pq} не превосходят 1. В частности, такими многочленами описывается число подграфов.

§ 5. Доказательства теорем 7–9

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Перепишем выражение (12), используя индикаторы $I(\langle i; j \rangle)_\mu$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\xi_{n-1}(d_{\alpha_1}^n)^{a_1} \cdots (d_{\alpha_k}^n)^{a_k} e_{\beta_1 n} \cdots e_{\beta_r n}) \\ &= \mathbb{E}\left(\xi_{n-1}\left(d_{\alpha_1}^{n-1} + \sum_{\mu} I(\langle \alpha_1; n \rangle)_\mu\right)^{a_1} \cdots \left(d_{\alpha_k}^{n-1} + \sum_{\mu} I(\langle \alpha_k; n \rangle)_\mu\right)^{a_k} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\sum_{\mu} I(\langle \beta_1; n \rangle)_\mu\right) \cdots \left(\sum_{\mu} I(\langle \beta_r; n \rangle)_\mu\right)\right). \quad (16) \end{aligned}$$

Напомним, что для произведений индикаторов верны соотношения (4). Раскрывая скобки в правой части (16) и рассматривая математическое ожидание каждого слагаемого, с учетом (4) получаем, что одна часть слагаемых сократится в силу несовместности индикаторов, а в другой части слагаемых “схлопнутся” совпавшие индикаторы. Независимостью последних мы пока не пользуемся, а потому здесь нет необходимости рассматривать условное математическое ожидание.

В результате каждое слагаемое будет иметь вид

$$\mathbb{E}\left(\xi_{n-1} \prod_{i=1}^k (d_{\alpha_i}^{n-1})^{a'_i} \prod_{j=1}^{r'} I(\langle \gamma_j; n \rangle)_{\mu_j}\right).$$

Здесь $0 \leq a'_i \leq a_i$, $r \leq r' \leq m$, $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \cdots \neq \mu_{r'}$, а $\{\gamma_j\} \subseteq \{\alpha_j\} \cup \{\beta_j\}$.

Избавимся от индикаторов, совершив следующие преобразования (формула полной вероятности):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\xi_{n-1} \prod_{i=1}^k (d_{\alpha_i}^{n-1})^{a'_i} \prod_{j=1}^{r'} I(\langle \gamma_j; n \rangle)_{\mu_j}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\xi_{n-1} \prod_{i=1}^k (d_{\alpha_i}^{n-1})^{a'_i} \prod_{j=1}^{r'} I(\langle \gamma_j; n \rangle)_{\mu_j} \mid G_m^{n-1}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\xi_{n-1} \prod_{i=1}^k (d_{\alpha_i}^{n-1})^{a'_i} \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{r'} I(\langle \gamma_j; n \rangle)_{\mu_j} \mid G_m^{n-1}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\xi_{n-1} \prod_{i=1}^k (d_{\alpha_i}^{n-1})^{a'_i} \prod_{j=1}^{r'} \frac{d_{\gamma_j}^{n-1}}{D_{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что все такие слагаемые мажорируются главным членом

$$A_0 = \frac{m!}{(m-r)!} \xi_{n-1} \prod_{i=1}^k (d_{\alpha_i}^{n-1})^{a_i} \prod_{j=1}^r \frac{d_{\beta_j}^{n-1}}{D_{n-1}},$$

получающимися при приведении подобных из слагаемых вида

$$\xi_{n-1} \prod_{i=1}^k (d_{\alpha_i}^{n-1})^{a_i} \prod_{j=1}^r I(\langle \beta_j; n \rangle)_{\mu_j}.$$

Слагаемые из главного члена получаются, если в каждой скобке $(d_{\alpha_i}^{n-1} + \sum_{\mu} I(\langle \alpha_i; n \rangle)_{\mu})$ взять $d_{\alpha_i}^{n-1}$, а в скобках $(\sum_{\mu} I(\langle \beta_r; n \rangle)_{\mu})$ взять набор независимых индикаторов. Множитель $\frac{m!}{(m-r)!}$ отвечает за число способов выбора попарно различных индексов $\mu_1, \dots, \mu_r$.

Поскольку количество остальных слагаемых – константа, зависящая только от k и r , то и сумма всех слагаемых оценивается как $\Theta(1)A_0$. Поэтому можно записать следующую оценку:

$$\begin{aligned} E(\xi_{n-1} (d_{\alpha_1}^n)^{a_1} \dots (d_{\alpha_k}^n)^{a_k} e_{\beta_1 n} \dots e_{\beta_r n}) &= E(A_0) \Theta(1) \\ &= E\left(\xi_{n-1} \prod_{i=1}^k (d_{\alpha_i}^{n-1})^{a_i} \prod_{j=1}^r \frac{d_{\beta_j}^{n-1}}{D_{n-1}}\right) \frac{m!}{(m-r)!} \Theta(1) \\ &= E\left(\xi_{n-1} \prod_{i=1}^k (d_{\alpha_i}^{n-1})^{a_i} \prod_{j=1}^r d_{\beta_j}^{n-1}\right) \left(\frac{1}{(2n-1)m}\right)^r \frac{m!}{(m-r)!} \Theta(1) \\ &= E(\xi_{n-1} (d_{\alpha_1}^{n-1})^{a_1} \dots (d_{\alpha_k}^{n-1})^{a_k} d_{\beta_1}^{n-1} \dots d_{\beta_r}^{n-1}) \left(\frac{1}{n}\right)^r \Theta(1). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Основные идеи доказательства (переход к индикаторам и избавление от них при помощи формулы полной вероятности) совпадают с идеями доказательства теоремы 7. Точно так же основной вклад в результат даст главный член, но окажется, что количество побочных членов по порядку может совпадать с n , поэтому придется пользоваться более тонкой техникой для их оценки.

Будем доказывать теорему индукцией по $S = \sum_{i=1}^k a_i$. Предположение индукции состоит в том, что для всех таких S , что $k \leq S < S_0$, выполнено

$$E(\xi_l (d_{\alpha_1}^n)^{a_1} \dots (d_{\alpha_k}^n)^{a_k}) = E(\xi_l (d_{\alpha_1}^l)^{a_1} \dots (d_{\alpha_k}^l)^{a_k}) \left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{\sum a_i}{2}} \Theta(1).$$

1. **Доказательство базы индукции.** В качестве базы рассмотрим случай, когда для всех i выполнено $a_i = 1$ и $S_0 = k + 1$. Подставляя индикаторы, имеем

$$\begin{aligned} E(\xi_l (d_{\alpha_1}^n) \dots (d_{\alpha_k}^n)) &= \\ &= E\left(\xi_l \left(d_{\alpha_1}^{n-1} + \sum_{\mu} I(\langle \alpha_1; n \rangle)_{\mu}\right) \dots \left(d_{\alpha_k}^{n-1} + \sum_{\mu} I(\langle \alpha_k; n \rangle)_{\mu}\right)\right). \end{aligned}$$

Раскрыв скобки, получим сумму слагаемых вида

$$\mathbb{E}\left(\xi_l \prod_{i=1}^{k-t} d_{\beta_i}^{n-1} \prod_{j=1}^t I(\langle \gamma_j; n \rangle)_{\mu_j}\right).$$

Здесь $0 \leq t \leq m$, $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \dots \neq \mu_t$, а $\{\beta_i\} \sqcup \{\gamma_i\} = \{\alpha_i\}$. Каждое слагаемое такого вида преобразуем с помощью формулы полной вероятности. Слагаемые с одинаковым значением t совпадают, их сумма равна

$$\mathbb{E}\left(\xi_l A_m^t A_k^t \left(\frac{1}{D_{n-1}}\right)^t \prod_{i=1}^k d_{\alpha_i}^{n-1}\right), \quad (17)$$

где A_m^t отвечает за выбор μ_j , а A_k^t – за выбор γ_j . Здесь используется стандартное обозначение $A_a^b = a!/(a-b)!$.

Суммируя (17) по t , мы получаем рекуррентное соотношение

$$\mathbb{E}(\xi_l(d_{\alpha_1}^n) \dots (d_{\alpha_k}^n)) = \mathbb{E}(\xi_l(d_{\alpha_1}^{n-1}) \dots (d_{\alpha_k}^{n-1})) \left(1 + \sum_{t=1}^m A_m^t A_k^t \left(\frac{1}{D_{n-1}}\right)^t\right),$$

применив которое $n-l$ раз, получим

$$\mathbb{E}(\xi_l(d_{\alpha_1}^n) \dots (d_{\alpha_k}^n)) = \mathbb{E}(\xi_l(d_{\alpha_1}^l) \dots (d_{\alpha_k}^l)) \prod_{i=l}^{n-1} \left(1 + \sum_{t=1}^m A_m^t A_k^t \left(\frac{1}{D_i}\right)^t\right).$$

Для доказательства базы индукции осталось оценить величину

$$\prod_{i=l}^{n-1} \left(1 + \sum_{t=1}^m A_m^t A_k^t \left(\frac{1}{D_i}\right)^t\right),$$

проведя следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \prod_{i=l}^{n-1} \left(1 + \sum_{t=1}^m A_m^t A_k^t \left(\frac{1}{D_i}\right)^t\right) &= \exp\left\{\ln\left(\prod_{i=l}^{n-1} \left(1 + \sum_{t=1}^m A_m^t A_k^t \left(\frac{1}{D_i}\right)^t\right)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{i=l}^{n-1} \ln\left(1 + \sum_{t=1}^m A_m^t A_k^t \left(\frac{1}{(2i+1)m}\right)^t\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{i=l}^{n-1} \ln\left(1 + mk \frac{1}{(2i+1)m} + O\left(\frac{1}{i^2}\right)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{i=l}^{n-1} \left(\frac{k}{(2i+1)} + O\left(\frac{1}{i^2}\right)\right)\right\} = \exp\left\{\frac{k}{2} \ln\left(\frac{n}{l}\right) + O\left(\frac{1}{l}\right)\right\} \\ &= \left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{k}{2}} \exp\left\{O\left(\frac{1}{l}\right)\right\} = \left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{k}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right), \end{aligned}$$

где в четвертом равенстве мы воспользовались приближением $\ln(1+x) = x + O(x^2)$. База индукции доказана.

2. *Доказательство шага индукции.* Нужно доказать, что теорема также справедлива для всех таких $a_1, a_2, \dots, a_k$, что $\sum_{i=1}^k a_i = S_0$.

Как обычно, в левую часть равенства (13) подставим

$$d_{\alpha_i}^n = d_{\alpha_i}^{n-1} + \sum_{\mu} I(\langle \alpha_i; n \rangle)_{\mu}$$

и раскроем скобки. Получившиеся слагаемые можно разделить на два вида. *Хорошие* слагаемые – это те, в которых не было совпавших индикаторов, и *плохие* слагаемые – это те, в которых были совпавшие индикаторы. В доказанной нами базе индукции все слагаемые были хорошими. После применения формулы полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} & \underbrace{E(\xi_l(d_{\alpha_1}^n)^{a_1} \dots (d_{\alpha_k}^n)^{a_k})}_{P_n} \\ &= \underbrace{E(\xi_l(d_{\alpha_1}^{n-1})^{a_1} \dots (d_{\alpha_k}^{n-1})^{a_k})}_{P_{n-1}} \underbrace{\left(1 + \sum_{t=1}^m \left(A_m^t A_{S_0}^t \left(\frac{1}{D_{n-1}}\right)^t\right)\right)}_{Q_{n-1}} \\ &+ \sum_{a'_1, \dots, a'_k} \underbrace{E(\xi_l(d_{\alpha_1}^{n-1})^{a'_1} \dots (d_{\alpha_k}^{n-1})^{a'_k}) A(a'_1, \dots, a'_k) \left(\frac{1}{D_{n-1}}\right)^{\#\{a'_i \neq a_i\}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{R_{n-1}(a'_1, \dots, a'_k)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $0 \leq a'_i \leq a_i$, причем $\sum a'_i < \sum a_i$, и $A(a'_1, \dots, a'_k)$ – функции, не зависящие от n , но зависящие от $a'_1, \dots, a'_k, a_1, \dots, a_k, m, k$. Сумма хороших слагаемых дала главный член $P_{n-1}Q_{n-1}$; сумма плохих слагаемых дала побочный член $\sum_{a'_1, \dots, a'_k} R_{n-1}(a'_1, \dots, a'_k)$.

Поясним структуру слагаемых $R_{n-1}(a'_1, \dots, a'_k)$. Величина $\#\{a'_i \neq a_i\}$ равна минимальному числу независимых индикаторов в слагаемом, в котором после применения формулы полной вероятности получается произведение $(d_{\alpha_1}^{n-1})^{a'_1} \dots (d_{\alpha_k}^{n-1})^{a'_k}$. Это минимальное число независимых индикаторов достигается, когда для каждого α_i совпавшие индикаторы $I(\langle \alpha_i; n \rangle)_{\mu}$ имеют одинаковое μ . Все слагаемые с большим числом независимых индикаторов имеют большую степень множителя $\frac{1}{D_{n-1}}$ и учтены за счет домножения на $1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Равенство (18) можно переписать в виде следующего рекуррентного соотношения:

$$P_n = P_{n-1}Q_{n-1} + \sum_{a'_1, \dots, a'_k} R_{n-1}(a'_1, \dots, a'_k). \quad (19)$$

Применив последнее рекуррентное соотношение $n - l$ раз, получим

$$P_n = P_l \prod_{i=l}^{n-1} Q_i + \sum_{i=l}^{n-1} \left(\prod_{j=i}^{n-1} Q_j \sum_{a'_1, \dots, a'_k} R_i(a'_1, \dots, a'_k) \right). \quad (20)$$

Для величины $\prod_{j=l'}^{n-1} Q_j$ справедливо следующее выражение (см. доказательство базы индукции):

$$\prod_{j=l'}^{n-1} Q_j = \prod_{j=l'}^{n-1} \left(1 + \sum_{t=1}^m \left(A_m^t A_S^t \left(\frac{1}{D_j} \right)^t \right) \right) = \left(\frac{n}{l'} \right)^{\frac{S_0}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{l'} \right) \right). \quad (21)$$

Отсюда для главного члена в (20) имеем

$$P_l \prod_{i=l}^{n-1} Q_i = E(\xi_l(d_{\alpha_1}^l)^{a_1} \dots (d_{\alpha_k}^l)^{a_k}) \left(\frac{n}{l} \right)^{\frac{S_0}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{l} \right) \right).$$

Для доказательства теоремы осталось оценить побочный член в (20). Меняя в нем порядок суммирования, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=l}^{n-1} \left(\prod_{j=i}^{n-1} Q_j \sum_{a'_1, \dots, a'_k} R_i(a'_1, \dots, a'_k) \right) &= \sum_{a'_1, \dots, a'_k} \sum_{i=l}^{n-1} \left(\prod_{j=i}^{n-1} Q_j R_i(a'_1, \dots, a'_k) \right) \\ &\stackrel{(21)}{=} \sum_{a'_1, \dots, a'_k} \sum_{i=l}^{n-1} \left(\left(\frac{n}{i} \right)^{\frac{S_0}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{i} \right) \right) R_i(a'_1, \dots, a'_k) \right) \\ &= \sum_{a'_1, \dots, a'_k} A(a'_1, \dots, a'_k) \sum_{i=l}^{n-1} \left(E\left(\xi_l(d_{\alpha_1}^i)^{a'_1} \dots (d_{\alpha_k}^i)^{a'_k} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{n}{i} \right)^{\frac{\sum a_j}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{i} \right) \right) \left(\frac{1}{D_i} \right)^{\#\{a'_i \neq a_i\}} \right) \\ &= \sum_{a'_1, \dots, a'_k} A(a'_1, \dots, a'_k) \Theta(1) E(\xi_l(d_{\alpha_1}^l)^{a'_1} \dots (d_{\alpha_k}^l)^{a'_k}) \\ &\quad \times \sum_{i=l}^{n-1} \left(\frac{i}{l} \right)^{\frac{\sum a'_j}{2}} \left(\frac{n}{i} \right)^{\frac{\sum a_j}{2}} \left(\frac{1}{D_i} \right)^{\#\{a'_i \neq a_i\}} \left(1 + O\left(\frac{1}{i} \right) \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где в третьем равенстве мы подставили $R_i(a'_1, \dots, a'_k)$, а в четвертом воспользовались предположением индукции, так как $\sum a'_j < \sum a_j = S_0$.

Для последней суммы в (22) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=l}^{n-1} \left(\frac{i}{l} \right)^{\frac{\sum a'_j}{2}} \left(\frac{n}{i} \right)^{\frac{\sum a_j}{2}} \left(\frac{1}{D_i} \right)^{\#\{a'_i \neq a_i\}} \left(1 + O\left(\frac{1}{i} \right) \right) \\ = \left(\frac{n^{\frac{\sum a_j}{2}}}{l^{\frac{\sum a'_j}{2}}} \right) \left(\frac{1}{2m} \right)^{\#\{a'_i \neq a_i\}} \sum_{i=l}^{n-1} \left(\frac{1}{i^{\#\{a'_i \neq a_i\} + \frac{\sum(a_j - a'_j)}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{i} \right) \right) \right) \\ = \left(\frac{n^{\frac{\sum a_j}{2}}}{l^{\frac{\sum a'_j}{2}}} \right) \left(\frac{1}{2m} \right)^{\#\{a'_i \neq a_i\}} \left(\frac{1}{l^{\#\{a'_i \neq a_i\} - 1 + \frac{\sum(a_j - a'_j)}{2}}} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{l} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{\sum a_j}{2}} \left(\frac{1}{2m}\right)^{\#\{a'_i \neq a_i\}} \left(\frac{1}{l^{\#\{a'_i \neq a_i\}-1}}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right),$$

где во втором равенстве мы оценили степенной ряд, имея в виду, что ряд сходится, так как $\#\{a'_i \neq a_i\} + \sum(a_j - a'_j)/2 \geq 1 + 1/2$.

Подставив в (22) последнее равенство, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=l}^{n-1} \left(\prod_{j=i}^{n-1} Q_j \sum_{a'_1, \dots, a'_k} R_i(a'_1, \dots, a'_k) \right) \\ &= \sum_{a'_1, \dots, a'_k} A(a'_1, \dots, a'_k) \Theta(1) \mathbb{E}(\xi_l (d_{\alpha_1}^l)^{a'_1} \dots (d_{\alpha_k}^l)^{a'_k}) \\ & \quad \times \left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{\sum a_j}{2}} \left(\frac{1}{2m}\right)^{\#\{a'_i \neq a_i\}} \left(\frac{1}{l^{\#\{a'_i \neq a_i\}-1}}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right) \\ &= \sum_{\substack{a'_1, \dots, a'_k: \\ \#\{a'_i \neq a_i\}=1}} A(a'_1, \dots, a'_k) \Theta(1) \mathbb{E}(\xi_l (d_{\alpha_1}^l)^{a'_1} \dots (d_{\alpha_k}^l)^{a'_k}) \\ & \quad \times \left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{\sum a_j}{2}} \left(\frac{1}{2m}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right), \end{aligned} \quad (23)$$

где во втором равенстве мы воспользовались тем, что слагаемые, для которых $\#\{a'_i \neq a_i\} > 1$, имеют бóльшую степень по $\frac{1}{l}$ и могут быть занесены в $O\left(\frac{1}{l}\right)$.

Подставим в (23)

$$A(a_1, \dots, a'_t, \dots, a_k) = C_{a_t}^{a'_t-1} C_m^1,$$

где $C_{a_t}^{a'_t-1}$ отвечает за выбор скобок, из которых берутся индикаторы, а C_m^1 — за выбор μ . Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=l}^{n-1} \left(\prod_{j=i}^{n-1} Q_j \sum_{a'_1, \dots, a'_k} R_i(a'_1, \dots, a'_k) \right) = \Theta(1) \sum_{t=1}^k \sum_{a'_t < a_t} C_{a_t}^{a'_t-1} m \\ & \quad \times \mathbb{E}(\xi_l (d_{\alpha_1}^l)^{a_1} \dots (d_{\alpha_t}^l)^{a'_t} \dots (d_{\alpha_k}^l)^{a_k}) \left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{\sum a_j}{2}} \left(\frac{1}{2m}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right) \\ & \leq \Theta(1) \sum_{t=1}^k \sum_{a'_t < a_t} C_{a_t}^{a'_t-1} \mathbb{E}(\xi_l (d_{\alpha_1}^l)^{a_1} \dots (d_{\alpha_t}^l)^{a_t} \dots (d_{\alpha_k}^l)^{a_k}) \\ & \quad \times \left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{\sum a_j}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right) = \mathbb{E}(\xi_l (d_{\alpha_1}^l)^{a_1} \dots (d_{\alpha_k}^l)^{a_k}) \left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{\sum a_j}{2}} \Theta(1). \end{aligned}$$

Мы получили, что вклад побочных членов не превосходит вклад главного члена. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Выражения, подобные (1) и (14), могут быть записаны и для произвольного подграфа. Общий случай отличается тем, что произвольный подграф G_0 может быть вложен в G_m^n разными способами, имеющими одно и то же множество вершин, но разные множества ребер.

Рассмотрим, например, случай $G_0 = K_{2,2}$, который мало отличается от случая произвольного G_0 . В этом случае

$$\#(K_{2,2}, G_m^n) = \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} \left(\underbrace{e_{ij}e_{jk}e_{kl}e_{li}}_{\downarrow} + \underbrace{e_{ik}e_{jl}e_{ij}e_{kl}}_{\downarrow} + \underbrace{e_{ik}e_{jk}e_{jl}e_{il}}_{\downarrow} \right)$$

Перейдем теперь к рассмотрению случая произвольного G_0 . Обозначим через r количество вершин в G_0 . Пусть Ω – множество всех возможных отображений, под действием каждого из которых граф G_0 вкладывается в клику размера r с вершинами $\{1, \dots, r\}$. Пусть $E(\omega(G_0))$ – множество ребер графа $\omega(G_0)$ для $\omega \in \Omega$. Тогда

$$\mathbb{E}(\#(G_0, G_m^n)) = \mathbb{E} \left(\sum_{\omega \in \Omega} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{(p,q) \in E(\omega(G_0))} e_{i_p i_q} \right) \right) \right). \quad (24)$$

Применим к выражению (24) теоремы 7, 8 подобно тому, как это было сделано для тетраэдра (см. (14), (15)). Заметим, что в итоге каждый множитель $e_{i_p i_q}$ перейдет в множитель $\sqrt{\frac{m}{i_p}} \sqrt{\frac{m}{i_q}} \Theta(1)$. Действительно, пусть, например, $i_p > i_q$; тогда в одном из коротких спусков $e_{i_p i_q}$ перейдет в $\frac{1}{i_p} d_{i_q}^{i_p-1} \Theta(1)$. После длинных спусков от p до t_1 , от t_1 до t_2 , ..., от t_n до q получим, что $\frac{1}{i_p} d_{i_q}^{i_p-1} \Theta(1)$ перейдет в $\frac{1}{i_p} \sqrt{\frac{i_p}{i_{t_1}}} \sqrt{\frac{i_{t_1}}{i_{t_2}}} \dots \sqrt{\frac{i_{t_n}}{i_q}} d_{i_q}^{i_q} \Theta(1) = \sqrt{\frac{m}{i_p}} \sqrt{\frac{m}{i_q}} \Theta(1)$, так как $m \leq d_{i_q}^{i_q} \leq 2m$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\#(G_0, G_m^n)) &= \Theta(1) \sum_{\omega \in \Omega} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{(p,q) \in E(\omega(G_0))} \sqrt{\frac{m}{i_p}} \sqrt{\frac{m}{i_q}} \right) \right) \\ &= \Theta(1) \sum_{\omega \in \Omega} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{p \in \{1, \dots, r\}} \left(\sqrt{\frac{m}{i_p}} \right)^{d_{\omega(G_0)}(p)} \right) \right) \\ &= \Theta(1) \sum_{\omega \in \Omega} \left(\int_{i_1=1}^n \dots \int_{i_r=1}^n \left(\prod_{p \in \{1, \dots, r\}} \left(\sqrt{\frac{m}{i_p}} \right)^{d_{\omega(G_0)}(p)} \right) di_1 \dots di_r \right) \\ &= \Theta(1) \sum_{\omega \in \Omega} \left(\prod_{p \in \{1, \dots, r\}} \int_{i_p=1}^n \left(\sqrt{\frac{m}{i_p}} \right)^{d_{\omega(G_0)}(p)} di_p \right) \\ &= \Theta(1) \prod_{\tilde{p} \in \{1, \dots, r\}} \int_{i_{\tilde{p}}=1}^n \left(\sqrt{\frac{m}{i_{\tilde{p}}}} \right)^{d_{G_0}(\tilde{p})} di_{\tilde{p}}. \end{aligned}$$

Здесь все величины, не зависящие от m и n , мы заносили в $\Theta(1)$. После интегрирования в последней формуле получаем требуемое:

$$\Theta \left(n^{\#(d_i=0)} (\sqrt{n})^{\#(d_i=1)} (\ln n)^{\#(d_i=2)} m^{\frac{\sum d_i}{2}} \right).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. A.-L. Barabási, R. Albert, “Emergence of scaling in random networks”, *Science*, **286**:5439 (1999), 509–512.
2. R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabási, “Internet: Diameter of the World-Wide Web”, *Nature*, **401**:6749 (1999), 130–131.
3. B. Bollobás, O. Riordan, “Mathematical results on scale-free random graphs”, *Handbook of graphs and networks*, Wiley, Weinheim, 2003, 1–34.
4. B. Bollobás, O. Riordan, “The diameter of a scale-free random graph”, *Combinatorica*, **24**:1 (2004), 5–34.

А. А. РЯБЧЕНКО (А. А. RYABCHENKO)
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: d-sun-d@ya.ru

Поступило в редакцию
23.11.2010
14.06.2011

Е. А. САМОСВАТ (Е. А. SAMOSVAT)
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: samosvat.egor@gmail.com