Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Сглаживание разрывных колебаний в математической модели генератора с распределенными параметрами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 6, 129–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/im608>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 18:23:51

УДК 517.926

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Сглаживание разрывных колебаний в математической модели генератора с распределенными параметрами

Предложен один из способов сглаживания разрывных колебаний в математических моделях автогенераторов с отрезком длинной линии в цепи обратной связи. Показано, что при определенных условиях в соответствующей краевой задаче реализуется явление буферности, т. е. существует любое наперед заданное конечное число устойчивых циклов (периодических по времени решений).

Библиография: 14 наименований.

Введение

Исследование автоколебаний в линейных системах телеграфных уравнений, дополненных нелинейными граничными условиями на концах конечного отрезка, актуально в связи с тем, что такого типа краевые задачи служат математическими моделями для широкого класса автогенераторов с отрезком длинной линии в цепи обратной связи. В качестве примера сошлемся на известную работу [1], являющуюся, по всей видимости, первой публикацией по данному вопросу.

Предположим, что в задаче об устойчивости нулевого положения равновесия некоторой гиперболической системы из указанного выше класса реализуется критический случай счетного числа чисто мнимых собственных значений, а при изменении некоторых входящих в эту систему параметров происходит смещение части спектра устойчивости в правую комплексную полуплоскость. Тогда, как следует из результатов уже упоминавшейся статьи [1], а также из значительно более поздних работ [2]–[5], при отсутствии определенных резонансных соотношений между собственными частотами системы чаще всего в ней наблюдается феномен буферности: сосуществует некоторое количество квазигармонических (т. е. близких к гармоническим по времени) устойчивых циклов, которое за счет подходящего выбора параметров может быть сделано сколь угодно большим.

Предположим теперь, что спектр собственных частот рассматриваемой гиперболической краевой задачи является эквидистантным (эквидистантность означает, что если занумеровать все собственные частоты в порядке возрастания, то расстояния между любыми двумя соседними из них будут одинаковыми). Как показано в монографии [2], в данной ситуации, весьма часто встречающейся в приложениях, автоколебания при определенных условиях могут

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-01004).

стать асимптотически разрывными, т. е. решения могут стремиться при $t \rightarrow \infty$ к разрывным функциям. Таким образом, естественно возникает проблема регуляризации разрывных колебаний, которая, как правило (см. [6]), решается за счет учета каких-либо дополнительных факторов (паразитных индуктивностей, емкостей и т. д.). Кроме того, представляет интерес вопрос о сохранении в получающихся после регуляризации системах явления буферности.

В настоящей работе на примере RCL-автогенератора, изучавшегося ранее в работах [2], [5], иллюстрируется один из возможных подходов к решению сформулированных выше проблем. С физической точки зрения предлагаемый подход заключается в замене в рассматриваемом генераторе отрезка длиной линии на отрезок прямого соленоида. В математическом плане такая замена приводит к требуемому сглаживанию решений, поскольку принципиально меняет тип уравнений в соответствующей краевой задаче. Устанавливается также, что в случае соленоида буферность не только сохраняется, но и наблюдается в более широком диапазоне изменения коэффициента усиления по сравнению с обычной длиной линии.

§ 1. Физическая постановка задачи

Рассмотрим длинную линию, представляющую собой цепочку элементарных RCL-контуров, показанных на рис. 1. Если связь между любыми двумя соседними ячейками отсутствует ($M = 0$), то для тока $i = i(t, x)$ и напряжения $u = u(t, x)$ в линии справедливы классические телеграфные уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \Phi, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

где $\Phi = Li$ – магнитный поток, $\rho = R/L$. Однако при наличии индуктивной связи между контурами (см. рис. 1), т. е. в случае $M > 0$, в уравнениях (1)

Рис. 1

следует положить [7], [8]

$$\Phi = Li - M \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}. \quad (2)$$

В итоге после стандартного исключения из системы (1), (2) переменной $i(t, x)$ и последующей замены времени $t/\sqrt{LC} \rightarrow t$ для $u(t, x)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u - \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(u - \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3)$$

в котором $\varepsilon = R\sqrt{C/L}$, $\varkappa = M/L$.

С описанной ситуацией сталкиваемся в случае, когда длинная линия имеет вид прямого соленоида. Действительно, каждый отдельно взятый виток соленоида можно интерпретировать как элементарный RCL-контур. Тогда при естественном предположении о наличии индуктивной связи между соседними витками приходим к уравнению (3).

Рис. 2

В настоящей работе объектом исследования является автогенератор, блок-схема которого представлена на рис. 2, а. Предполагаем, что в цепь обратной связи этого генератора включен отрезок $0 \leq x \leq 1$ прямого соленоида с равномерно распределенными индуктивностью L , активным сопротивлением R и емкостью C . Считаем, далее, что вольт-амперная характеристика его нелинейного элемента (в простейшем случае – классической лампы) имеет вид, изображенный на рис. 2, б. Тогда, опираясь на методику работы [9], можно показать, что при дополнительном предположении об идеальности усилителя математической моделью описанного генератора служит уравнение (3), рассматриваемое на отрезке $0 \leq x \leq 1$ и дополненное граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=0} + \varphi(Ku|_{x=1}) = 0. \quad (4)$$

Здесь u – нормированная переменная составляющая напряжения в линии, $K > 0$ – коэффициент усиления, а функция $\varphi(z) \in C^\infty(\mathbb{R})$ получается из нелинейной характеристики усилителя в результате сдвига рабочей точки A (см. рис. 2, б) в начало координат. В связи с этим далее считаем, что

$$\begin{aligned} \varphi'(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \varphi(z) = q_1, \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi(z) = -q_2, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi'(z) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $q_1, q_2 > 0$.

§ 2. Разрешимость задачи Коши

Рассмотрим вопрос о разрешимости краевой задачи (3), (4) в подходящем фазовом пространстве. Пусть E – вещественное гильбертово пространство, состоящее из функций $u(x) \in W_2^2(0, 1)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=0} + u|_{x=1} = 0.$$

Скалярное произведение для любых функций $u_1, u_2 \in E$ определим равенством

$$(u_1, u_2)_E = \int_0^1 u_1''(x) u_2''(x) dx.$$

Далее, нам потребуется дифференциальный оператор

$$L = -\frac{d^2}{dx^2}: E \subset L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1), \quad (6)$$

обладающий следующими свойствами. Во-первых, все его собственные значения $\lambda_n = \omega_n^2$, $\omega_n = \pi(2n - 1)$, $n = 1, 2, \dots$, двукратны, так как каждому из них наряду с собственной функцией $\cos(\omega_n x)$ отвечает одна присоединенная функция $(2\omega_n)^{-1}(1 - x) \sin(\omega_n x)$. Во-вторых, система функций

$$e_{n,1}(x) = \cos(\omega_n x), \quad e_{n,2}(x) = (x - 1) \sin(\omega_n x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

образует базис Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$, а после деления на ω_n^2 будет базисом в E (доказательство этого факта приведено, например, в [5]).

Из всего сказанного выше следует, что при любом $\varkappa > 0$ оператор $I + \varkappa L$, где I – единичный оператор, имеет ограниченный обратный $(I + \varkappa L)^{-1}$, действующий из $L_2(0, 1)$ в E по формуле

$$\begin{aligned} (I + \varkappa L)^{-1} u(x) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \varkappa \omega_n^2} \left[\alpha_n e_{n,1}(x) + \beta_n \left(e_{n,2}(x) + \frac{2\varkappa \omega_n}{1 + \varkappa \omega_n^2} e_{n,1}(x) \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь α_n, β_n , $n \geq 1$, – коэффициенты разложения

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\omega_n x) + \beta_n (x - 1) \sin(\omega_n x) \quad (9)$$

произвольной функции $u(x) \in L_2(0, 1)$ по базису (7).

В формулируемом ниже утверждении в качестве фазового пространства (пространства начальных условий $(u, \partial u / \partial t)$) краевой задачи (3), (4) взято нелинейное многообразие

$$\begin{aligned} \Sigma = \{ (u_0(x), u_1(x)) : u_0, u_1 \in W_2^2(0, 1), u_0'(1) = u_1'(1) = 0, \\ u_0(0) + \varphi(K u_0(1)) = 0, u_1(0) + K \varphi'(K u_0(1)) u_1(1) = 0 \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь и ниже штрихом обозначаем производные функций, зависящих от одного аргумента (от какого именно, ясно из контекста).

ТЕОРЕМА 1. Пусть в краевой задаче (3), (4) параметры $\varepsilon, \varkappa > 0$ и коэффициент усиления $K > 0$ произвольно фиксированы. Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$ решение

$$u = u(t, x) : u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x), \quad (11)$$

данной задачи с произвольными начальными условиями $(u_0, u_1) \in \Sigma$ существует, единственно и обладает следующими свойствами. Во-первых, функции u , $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ непрерывны по $t \in \mathbb{R}$ в метрике пространства $W_2^2(0, 1)$, а функции h_j , $\frac{\partial h_j}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 h_j}{\partial t^2}$, где $h_j = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}$, $j = 1, 2$, обладают тем же свойством в метрике $L_2(0, 1)$. Во-вторых, справедливо включение

$$\left\{ \left(u(t, x), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right) : t \in \mathbb{R} \right\} \subset \Sigma,$$

а уравнению (3) решение (11) при каждом t удовлетворяет в смысле $L_2(0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основная идея обоснования заключается в сведении исходной краевой задачи (3), (4) к абстрактному нелинейному дифференциальному уравнению в пространстве $E \times E$ с ограниченными операторными коэффициентами. Для построения замены переменных, осуществляющей указанное сведение, подставим в граничные условия (4) соотношение

$$u = v + l(v), \quad (12)$$

где v – произвольная функция из пространства E , а $l(\cdot) : E \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторый (пока неизвестный) нелинейный функционал. В результате для нахождения $l(v)$ получаем уравнение

$$l(v) - v|_{x=1} + \varphi(K(v|_{x=1} + l(v))) = 0. \quad (13)$$

Введем в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$w + \varphi(Kw) = 2z \quad (14)$$

на плоскости $(z, w) \in \mathbb{R}^2$ и заметим, что в силу выполнения предполагаемых свойств (5) нелинейности $\varphi(z)$ оно однозначно разрешимо по w при любом $z \in \mathbb{R}$, а его решение $w = F(z) \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет аналогичным (5) соотношениям:

$$\begin{aligned} F'(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad F(0) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} (F(z) - 2z) = -q_1, \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} (F(z) - 2z) = q_2, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} (F'(z) - 2) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где q_1, q_2 – постоянные из (5). Решением исходного уравнения (13), как нетрудно видеть, является функционал

$$l(v) = F(v|_{x=1}) - v|_{x=1}. \quad (16)$$

На следующем этапе доказательства подставим формулу (12) в уравнение (3). В результате оно преобразуется к виду

$$(I + \kappa L) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) l(v) = -Lv, \quad (17)$$

где L – оператор (6). Применяя к левой и правой частям равенства (17) оператор $(I + \kappa L)^{-1}$ (см. (8), (9)), приходим к уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) (v + f(x)l(v)) = -(I + \kappa L)^{-1}Lv, \quad (18)$$

где

$$f(x) = 1 - \frac{2 \operatorname{ch}((x-1)/\sqrt{\varkappa})}{1 + \operatorname{ch}(1/\sqrt{\varkappa})} \in E, \quad (19)$$

а оператор $(I + \varkappa L)^{-1}L$ действует из E в E и ограничен.

Анализ уравнения (18) затрудняет тот факт, что оно не разрешено относительно старшей производной по времени. Поэтому предварительно выполним в нем замену

$$h = v + f(x)l(v), \quad (20)$$

а переменную v , в свою очередь, выразим через новую переменную $h \in E$ посредством аналогичного (20) равенства

$$v = h + f(x)g(h). \quad (21)$$

Здесь $g(h) = G(h|_{x=1})$, а функция $w = G(z) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – решение аналогичного (14) вспомогательного уравнения

$$(1 - f(1))w + F(z + f(1)w) = z. \quad (22)$$

Привлекая свойства (15) функции $F(z)$ и вытекающие из (19) оценки $0 < f(1) < 1$, без труда убеждаемся, что уравнение (22) однозначно разрешимо по w при всех $z \in \mathbb{R}$, а его решение $w = G(z)$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} G(0) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(G(z) + \frac{z}{1 + f(1)} \right) &= \frac{q_1}{1 + f(1)}, \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(G(z) + \frac{z}{1 + f(1)} \right) &= -\frac{q_2}{1 + f(1)}, \\ \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \left(G'(z) + \frac{1}{1 + f(1)} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, нелинейная замена переменных (21) заведомо корректна, а результатом ее применения оказывается система

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} = \Omega(h), \quad (24)$$

где нелинейный ограниченный оператор $\Omega(h)$, $\Omega(0) = 0$, задается формулой

$$\Omega(h) = -(I + \varkappa L)^{-1}L(h + f(x)g(h)). \quad (25)$$

Обращаем внимание на то, что (24) – это и есть искомое уравнение в пространстве E с ограниченными операторными коэффициентами. Поэтому дополним его произвольными начальными условиями

$$h|_{t=0} = h_0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{t=0} = h_1, \quad (h_0, h_1) \in E \times E, \quad (26)$$

и обозначим через $h = h(t, x)$ решение получившейся задачи Коши. Из свойств (23) функции $G(z)$ и из явного вида (25) оператора Ω вытекает справедливость при любых $h_1, h_2 \in E$ неравенства

$$\|\Omega(h_1) - \Omega(h_2)\|_E \leq M \|h_1 - h_2\|_E,$$

где $\|\cdot\|_E$ – норма в E , а постоянная $M > 0$ не зависит от h_1, h_2 . Отсюда, как известно, следуют требуемые существование и единственность решения задачи Коши (24), (26) при всех $t \in \mathbb{R}$. Более того, функция $h(t, x)$ оказывается бесконечно дифференцируемой по t в метрике пространства E в силу ограниченности оператора $(I + \varkappa L)^{-1}L$ и аналогичных свойств гладкости нелинейного функционала $g(h)$.

Заключительный этап доказательства теоремы состоит в перенесении результатов, полученных для задачи (24), (26), на исходную краевую задачу (3), (4). Для этого нам потребуется нелинейный оператор

$$V: (v_0, v_1) \in E \times E \rightarrow (u_0, u_1) \in \Sigma, \quad (27)$$

где

$$u_0 = v_0 + l(v_0), \quad u_1 = v_1 + l'(v_0)v_1, \quad (28)$$

а l' – производная Фреше функционала (16). Убедимся прежде всего в том, что отображение (27) задает диффеоморфизм между пространством $E \times E$ и нелинейным многообразием (10).

Рассмотрим сначала первое уравнение системы (28) и попытаемся выразить из него компоненту v_0 через u_0 . На этом пути приходим к равенству

$$v_0 = u_0 + \tilde{l}(u_0), \quad (29)$$

где $\tilde{l}(u_0) = H(u_0|_{x=1})$, а функция $w = H(z) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – решение уравнения

$$F(z + w) - z = 0. \quad (30)$$

Для компоненты v_1 из (28) получаем соотношение

$$v_1 = u_1 + \tilde{\tilde{l}}(u_0, u_1), \quad (31)$$

где нелинейный функционал $\tilde{\tilde{l}}$ задается формулой

$$\tilde{\tilde{l}}(u_0, u_1) = \frac{(1 - F'(v_0|_{x=1}))u_1|_{x=1}}{F'(v_0|_{x=1})},$$

в которой следует учесть уже найденное выражение (29). Остается добавить, что в силу неравенства $F'(z) > 0$ (см. (15)) все перечисленные операции законны и, в частности, вспомогательное уравнение (30) однозначно разрешимо по w при любом $z \in \mathbb{R}$.

Факт взаимной однозначности отображения (27) позволяет построить решение (11) исходной задачи (3), (4) с произвольными начальными условиями $(u_0, u_1) \in \Sigma$. Для этого сначала по фиксированным u_0, u_1 определим функции $v_0, v_1 \in E$ с помощью равенств (29), (31), а затем положим

$$h_0 = v_0 + f(x)l(v_0), \quad h_1 = v_1 + f(x)l'(v_0)v_1. \quad (32)$$

После этого дополним уравнение (24) начальными условиями (32) и обозначим через $h(t, x)$ решение соответствующей задачи Коши, которое, как было установлено выше, существует и единственно при всех $t \in \mathbb{R}$. И наконец, интересующее нас решение (11) задачи (3), (4) зададим равенствами

$$u = v(t, x) + l(v(t, x)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + l'(v(t, x)) \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (33)$$

где $v(t, x) = h(t, x) + f(x)g(h(t, x))$ (см. (21)).

Из формул (33), а также из отмеченных выше свойств $h(t, x)$ следует, что функция $u(t, x)$ заведомо удовлетворяет всем требуемым в теореме условиям гладкости. Более того, $u \in C^\infty$ по переменной t в метрике $W_2^2(0, 1)$, а для $\partial u / \partial x$, $\partial^2 u / \partial x^2$ аналогичное свойство справедливо в метрике пространства $L_2(0, 1)$. Теорема полностью доказана.

Проведенный анализ показывает, что на многообразии Σ определен поток

$$\Pi^t(u_0, u_1) = \left(u(t, x), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (34)$$

где u – решение задачи Коши (3), (4), (11). Далее, опираясь на развитые при доказательстве теоремы 1 конструкции, нетрудно убедиться в том, что поток (34) имеет любую конечную гладкость как по параметрам ε , $\varkappa$, K , так и по начальному условию $(u_0, u_1) \in \Sigma$, а это, в свою очередь, позволяет распространить на краевую задачу (3), (4) без каких-либо существенных изменений основные положения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений: теоремы Ляпунова и Андронова–Витта об устойчивости по первому приближению, результаты об интегральных многообразиях и т. д.

§ 3. Линейный анализ

Всюду ниже объектом исследования является краевая задача (3), (4), в которой параметры ε и $\varkappa$, характеризующие активные потери в линии и эффект взаимной индукции между витками соленоида, малы, а коэффициент усиления K близок к единице. Точнее, предположим, что

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad \varkappa = \varkappa_0 \varepsilon, \quad K = 1 + \varepsilon^2 \gamma, \quad (35)$$

а параметры $\varkappa_0$, $\gamma > 0$ имеют порядок единицы. Считаем, далее, что нелинейная характеристика $\varphi(z)$ удовлетворяет дополнительным условиям:

$$\varphi''(0) = 0, \quad \varphi'''(0) < 0, \quad (36)$$

первое из которых, характеризующее симметрию, наложено лишь для простоты, а второе, соответствующее случаю так называемой мягкой нелинейности, вызвано существом дела.

Учитывая в (3), (4) соотношения (35), (36) и проводя аппроксимацию функции $\varphi(z)$ отрезком ее ряда Тейлора в точке $z = 0$ до кубического слагаемого включительно, приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u - \varepsilon \varkappa_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(u - \varepsilon \varkappa_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0, \quad u|_{x=0} + (1 + \varepsilon^2 \gamma) u|_{x=1} - u^3|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

В дальнейшем будем интересоваться вопросами о существовании и устойчивости ее автоколебаний, бифурцирующих из нулевого положения равновесия при увеличении γ . Однако для того, чтобы убедиться в осмысленности данной постановки проблемы, сначала необходимо разобраться со свойствами устойчивости нулевого решения этой краевой задачи.

Итак, отбросим во втором граничном условии из (37) нелинейное слагаемое и положим в получившейся линейной краевой задаче $u = h(x) \exp\{\lambda t\}$. В результате для нахождения $h(x)$ приходим к задаче

$$h'' - \mu^2 h = 0, \quad h'(1) = 0, \quad h(0) + (1 + \varepsilon^2 \gamma) h(1) = 0, \quad (38)$$

где $\mu^2 = (\lambda^2 + \varepsilon \lambda) / (1 + \varepsilon^2 \kappa_0 \lambda + \varepsilon \kappa_0 \lambda^2)$.

Заметим, что решение уравнения (38), удовлетворяющее первому граничному условию, имеет вид $h = c \cdot \text{ch}[\mu(x - 1)]$, где $c \neq 0$ – произвольная постоянная. Подставляя его во второе граничное условие, для определения спектра устойчивости нулевого состояния равновесия приходим к характеристическому уравнению

$$\text{ch } \mu + 1 + \gamma \varepsilon^2 = 0. \quad (39)$$

Будем считать сначала μ в уравнении (39) независимой комплексной переменной. Несложный анализ показывает, что это уравнение имеет два семейства корней

$$\begin{aligned} \pm \mu_n(\varepsilon), \quad \pm \bar{\mu}_n(\varepsilon), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \mu_n = i\omega_n + \mu_*(\varepsilon), \\ \mu_*(\varepsilon) = \sqrt{2\gamma} \varepsilon + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где числа ω_n , $n \geq 1$, те же, что и в (7)–(9), а μ_* – положительный корень уравнения $\text{ch } \mu = 1 + \varepsilon^2 \gamma$. Используя затем связь между λ и μ , убеждаемся, что собственные значения λ краевой задачи (38) определяются из последовательности квадратных уравнений

$$(1 + \varepsilon^2 \kappa_0 \lambda + \varepsilon \kappa_0 \lambda^2) \mu_n^2(\varepsilon) = \lambda^2 + \varepsilon \lambda, \quad n \geq 1, \quad (40)$$

а также уравнений, получающихся из (40) при замене μ_n на $\bar{\mu}_n$. И наконец, решая уравнения (40), приходим к выводу, что их корни $\lambda_n^1(\varepsilon)$, $\lambda_n^2(\varepsilon)$ допускают асимптотику:

$$\begin{aligned} \lambda_n^1 &= i\omega_n + \left(\sqrt{2\gamma} - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \kappa_0 \omega_n^3 \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ \lambda_n^2 &= -i\omega_n - \left(\sqrt{2\gamma} + \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \kappa_0 \omega_n^3 \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (41)$$

Следует, однако, заметить, что асимптотические представления (41) заведомо не являются равномерно пригодными при всех $n \geq 1$. В самом деле, поскольку при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ имеем $|\mu_n(\varepsilon)| \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, то при $n \rightarrow \infty$ корни λ_n^1 , λ_n^2 стремятся к конечным пределам

$$-\frac{\varepsilon}{2} \pm i \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \kappa_0} - \frac{\varepsilon^2}{4}}. \quad (42)$$

Из формул (41), (42) следует, что $\text{Re } \lambda_n^2 \leq -\varepsilon/2$, $n \geq 1$. При любом фиксированном $\gamma > 1/8$ в правой комплексной полуплоскости $\{\lambda: \text{Re } \lambda > 0\}$ находится асимптотически большое (стремящееся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$), но конечное число корней λ_n^1 , $n \geq 1$. Таким образом, становится понятной причина специального выбора коэффициента усиления K в (35), и обретает смысл вопрос о существовании и устойчивости периодических по t решений задачи (37), бифурцирующих из нуля при прохождении γ через значение $1/8$. Решению этого вопроса посвящен следующий параграф.

§ 4. Основной результат

Из проведенного выше анализа следует, что линейная краевая задача

$$\Pi(u) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=0} + u|_{x=1} = 0, \quad (43)$$

получающаяся из (37) при $\varepsilon = 0$ и при отбрасывании кубического слагаемого во втором граничном условии, допускает семейство периодических решений

$$u = \exp\{\pm i\omega_n t\} \cos(\omega_n x), \quad n \geq 1,$$

где частоты ω_n те же, что и в (41). В связи с этим возможные автоколебательные режимы исходной задачи (37) будем искать в виде формального ряда

$$u = \varepsilon u_0(t, \tau, x) + \varepsilon^2 u_1(t, \tau, x) + \varepsilon^3 u_2(t, \tau, x) + \dots, \quad (44)$$

где $\tau = \varepsilon t$,

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (z_n(\tau) \exp\{i\omega_n t\} + \bar{z}_n(\tau) \exp\{-i\omega_n t\}) \cos(\omega_n x), \quad (45)$$

а подлежащие определению комплексные амплитуды z_n таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_n^4 |z_n|^2$ (в этом случае $u_0 \in W_2^2$ по переменной x).

Подставляя (44), (45) в (37) и приравнивая коэффициенты при ε^2 , для нахождения u_1 получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \Pi(u_1) &= - \left(2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t} \right) u_0 + \varkappa_0 \frac{\partial^4 u_0}{\partial t^2 \partial x^2}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0, \quad u_1|_{x=0} + u_1|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (46)$$

где Π – оператор из (43), а переменная τ рассматривается как параметр. Ее решение будем искать в виде формального ряда той же структуры, что и получившаяся неоднородность, т. е. в виде

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x, \tau) \exp\{i\omega_n t\} + \bar{C}_n(x, \tau) \exp\{-i\omega_n t\}. \quad (47)$$

В результате для фигурирующих в (47) коэффициентов C_n , $n \geq 1$, приходим к серии линейных неоднородных краевых задач

$$\begin{aligned} C_n'' + \omega_n^2 C_n &= i\omega_n [2\dot{z}_n + (1 + i\varkappa_0 \omega_n^3) z_n] \cos(\omega_n x), \\ C_n'|_{x=1} &= 0, \quad C_n|_{x=0} + C_n|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x , а точкой – производная по τ .

Следует отметить, что хотя задачи (48) и являются вырожденными, но их анализ не вызывает затруднений. Действительно, из приведенных в § 2 свойств оператора (6) вытекает, что все они заведомо разрешимы, а их решения задаются равенствами

$$C_n = (2\dot{z}_n + (1 + i\varkappa_0 \omega_n^3) z_n) \frac{i}{2} (x-1) \sin(\omega_n x), \quad n \geq 1. \quad (49)$$

После приравнивания коэффициентов при ε^3 для u_2 получаем аналогичную (46) линейную неоднородную краевую задачу

$$\begin{aligned} \Pi(u_2) = & -\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)u_0 - \left(2\frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t}\right)u_1 \\ & + \kappa_0 \frac{\partial^4 u_1}{\partial t^2 \partial x^2} + 2\kappa_0 \frac{\partial^4 u_0}{\partial t \partial \tau \partial x^2} + \kappa_0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial t \partial x^2}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=1} = & 0, \quad u_2|_{x=0} + u_2|_{x=1} = (-\gamma u_0 + u_0^3)|_{x=1}. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, ее решение ищем в том же виде, что и соответствующие неоднородности, т. е. в виде тригонометрического ряда

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(x, \tau) \exp\{i\omega_n t\} + \bar{D}_n(x, \tau) \exp\{-i\omega_n t\}.$$

Таким образом, проблема сводится к определению коэффициентов D_n , $n \geq 1$, из аналогичных (48) линейных неоднородных краевых задач

$$D_n'' + \omega_n^2 D_n = f_n(x, \tau), \quad D_n'|_{x=1} = 0, \quad D_n|_{x=0} + D_n|_{x=1} = \psi_n, \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} f_n = & (\ddot{z}_n + \dot{z}_n) \cos(\omega_n x) + i\kappa_0 \omega_n^3 (2\dot{z}_n + z_n) \cos(\omega_n x) \\ & + i\omega_n (2\dot{C}_n + C_n) + \kappa_0 \omega_n^2 C_n''. \end{aligned} \quad (51)$$

Неоднородности ψ_n , $n \geq 1$, определяются как коэффициенты при гармониках $\exp\{i\omega_n y\}$ ряда Фурье функции $\gamma v(\tau, y) - v^3(\tau, y)$, где

$$v(\tau, y) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(\tau) \exp\{i\omega_n y\} + \bar{z}_n(\tau) \exp\{-i\omega_n y\}. \quad (52)$$

Заметим, что в отличие от (48) получившиеся задачи (50) не являются разрешимыми автоматически. Выполнения условий их разрешимости

$$\int_0^1 f_n(x, \tau) \sin(\omega_n x) dx = \omega_n \psi_n, \quad n \geq 1, \quad (53)$$

добиваемся за счет имеющих в запасе комплексных амплитуд $z_n(\tau)$, $n \geq 1$. На этом пути после подстановки в (53) формул (49), (51) и последующих преобразований для упомянутых амплитуд приходим к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{8} \left(2 \frac{d}{d\tau} + 1 + i\kappa_0 \omega_n^3 \right)^2 z_n = \psi_n, \quad n \geq 1. \quad (54)$$

И наконец, учитывая способ определения ψ_n , нетрудно увидеть, что счетная система (54) “сворачивается” в краевую задачу

$$\left(2 \frac{\partial}{\partial \tau} + 1 - \kappa_0 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right)^2 v = 8(\gamma v - v^3), \quad v(\tau, y+1) \equiv -v(\tau, y) \quad (55)$$

для функции (52).

Заметим, что вывод краевой задачи (55) из исходной системы (37) носит существенно формальный характер, т. е. не существует корректной бесконечномерной замены переменных, приводящей задачу (37) к виду (54). Действительно, условие $\sum_n \omega_n^4 |z_n|^2 < \infty$ обеспечивает сходимость лишь ряда (45), в то время как ряды для более старших коэффициентов u_j , $j \geq 1$, из (44) в общем случае расходятся (см., например, (47), (49)). В связи с этим всюду ниже по отношению к задаче (55) будем использовать термин “квазинормальная форма”.

Несмотря на все сказанное выше, квазинормальная форма (55) содержит определенную информацию об аттракторах краевой задачи (37), а именно каждому циклу задачи (55) вида

$$v = v_0(\xi), \quad \xi = \sigma_0 \tau + y, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad (56)$$

экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному (в метрике фазового пространства W_2^6 антипериодических с периодом 1 функций), в исходной краевой задаче (37) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ отвечает цикл (периодическое по t решение) той же устойчивости с асимптотикой (44), (45). При этом в формуле (45) следует положить

$$z_n(\tau) = v_n^0 \exp\{i\omega_n \sigma_0 \tau\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где v_n^0 , $\bar{v}_n^0$ – коэффициенты Фурье функции $v_0(\xi)$ по системе $\exp\{\pm i\omega_n \xi\}$, $n \geq 1$.

Доказательство описанного выше соответствия между периодическими решениями задач (55) и (37) можно найти в [2, гл. 4, § 17], где метод квазинормальных форм обоснован в близкой ситуации. Вопрос о существовании у квазинормальной формы (55) периодических решений типа бегущих волн (см. (56)) подлежит отдельному рассмотрению. Как будет показано ниже, при любом фиксированном $\gamma > 1/8$ она имеет сразу счетное число устойчивых бегущих волн.

§ 5. Исследование квазинормальной формы

Для удобства последующего анализа, выполняя в краевой задаче (55) подходящие нормировки переменных и параметров и заменяя τ на t и y на x , перепишем ее в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1 - \alpha_2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right)^2 v = v - v^3, \quad v(t, x+1) \equiv -v(t, x), \quad (57)$$

где $\alpha_1 = 1/\sqrt{8\gamma}$, $\alpha_2 = \kappa_0/\sqrt{8\gamma}$. В силу сказанного в конце предыдущего параграфа основной интерес представляет проблема существования и устойчивости у получившейся задачи периодических решений

$$v = v_n(y), \quad y = \sigma_n t + \pi(2n-1)x, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (58)$$

где σ_n – некоторые вещественные постоянные, а функции $v_n(y)$ таковы, что $v_n(y+\pi) \equiv -v_n(y)$. Опираясь на развитые в работах [2], [10] методы, удается установить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. При условии $\alpha_1 < 1$ квазинормальная форма (57) имеет счетное число устойчивых бегущих волн (58) с номерами $n \geq n_0$, где натуральное n_0 достаточно велико,

$$\sigma_n = -\alpha_2 \pi^3 (2n-1)^3 + O\left(\frac{1}{(2n-1)^6}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (59)$$

и равномерно по $y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$v_n(y) = \sqrt{\frac{4(1-\alpha_1^2)}{3}} \cos y + O\left(\frac{1}{(2n-1)^6}\right). \quad (60)$$

Обоснование сформулированной теоремы начнем с доказательства существования периодических решений (58) с асимптотикой (59), (60). Для этого сначала перейдем от (57) к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha_1 v - \alpha_2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} &= w, & \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha_1 w - \alpha_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= v - v^3, \\ v(t, x+1) &\equiv -v(t, x), & w(t, x+1) &\equiv -w(t, x), \end{aligned} \quad (61)$$

а затем положим в ней

$$v = v(y), \quad w = w(y), \quad y = -\alpha_2 \pi^3 (2n-1)^3 \sigma t + \pi(2n-1)x, \quad (62)$$

где σ – пока неизвестная (подлежащая определению) вещественная постоянная. В результате приходим к вспомогательной краевой задаче

$$\begin{aligned} v''' + \sigma v' &= \nu[\alpha_1 v - w], & w''' + \sigma w' &= \nu[\alpha_1 w - v + v^3], \\ v(y + \pi) &\equiv -v(y), & w(y + \pi) &\equiv -w(y), \end{aligned} \quad (63)$$

где $\nu = \nu_n \equiv 1/(\alpha_2 \pi^3 (2n-1)^3)$, а штрихами обозначены производные по y . Всюду ниже параметр ν считаем непрерывно меняющимся и малым, а относительно постоянных α_1, α_2 предполагаем, что $\alpha_2 > 0, 0 < \alpha_1 < 1$.

ЛЕММА 1. Найдется такое достаточно малое число $\nu_0 > 0$, что при всех $0 \leq \nu \leq \nu_0$ существуют аналитические по своим переменным функции

$$\begin{aligned} \sigma(\nu), v(y, \nu), w(y, \nu): v(y + \pi, \nu) &\equiv -v(y, \nu), \\ w(y + \pi, \nu) &\equiv -w(y, \nu), & \sigma(\nu) &= 1 + O(\nu^3), \\ v(y, 0) &= \sqrt{\frac{4(1-\alpha_1^2)}{3}} \cos y, & w(y, 0) &= \alpha_1 v(y, 0), \end{aligned} \quad (64)$$

обращающие уравнения из (63) в тождества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся изложением алгоритмической части доказательства сформулированной леммы. С этой целью подставим в (63) ряды

$$\begin{aligned} \sigma(\nu) &= 1 + \sigma_1 \nu + \sigma_2 \nu^2 + \sigma_3 \nu^3 + \dots, \\ v &= v_0(y) + \nu v_1(y) + \nu^2 v_2(y) + \dots, \\ w &= w_0(y) + \nu w_1(y) + \nu^2 w_2(y) + \dots, \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$v_0 = \xi_0 \exp\{iy\} + \bar{\xi}_0 \exp\{-iy\}, \quad w_0 = \eta_0 \exp\{iy\} + \bar{\eta}_0 \exp\{-iy\}, \quad (66)$$

а постоянные $\xi_0, \eta_0 \in \mathbb{C}$ и $\sigma_j \in \mathbb{R}$, $j \geq 1$, подлежат определению в ходе алгоритма. Приравнявая затем коэффициенты при одинаковых степенях ν , для фигурирующих в (65) функций v_j, w_j , $j \geq 1$, получаем рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач

$$\begin{aligned} v_j''' + v_j' &= f_{1,j}(y), & w_j''' + w_j' &= f_{2,j}(y), \\ v_j(y + \pi) &\equiv -v_j(y), & w_j(y + \pi) &\equiv -w_j(y). \end{aligned} \quad (67)$$

Решения v_j, w_j этих краевых задач будем искать в том же виде, что и соответствующие неоднородности, т. е. в классе нечетных тригонометрических полиномов степени не выше $2j + 1$.

На первом шаге алгоритма, т. е. при $j = 1$, рассмотрению подлежит краевая задача (67) с неоднородностями

$$f_{1,1} = \alpha_1 v_0 - w_0 - \sigma_1 v_0', \quad f_{2,1} = \alpha_1 w_0 - v_0 - \sigma_1 w_0' + v_0^3. \quad (68)$$

Заметим, что эта задача разрешима в том и только в том случае, когда функции (68) не содержат гармоник $\exp\{\pm iy\}$. Поэтому приравняем коэффициенты при указанных гармониках нулю. В результате для фигурирующих в (66) комплексных амплитуд ξ_0, η_0 и первой поправки к частоте σ_1 приходим к системе

$$\eta_0 = (\alpha_1 - i\sigma_1)\xi_0, \quad (\alpha_1 - i\sigma_1)\eta_0 - \xi_0 + 3|\xi_0|^2\xi_0 = 0, \quad (69)$$

из которой, в свою очередь, имеем

$$\sigma_1 = 0, \quad \eta_0 = \alpha_1 \xi_0, \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{1 - \alpha_1^2}{3}}. \quad (70)$$

После определения постоянных σ_1, η_0, ξ_0 посредством равенств (70) первые гармоники в неоднородностях (68) пропадают и, в частности, неоднородность $f_{1,1}$ становится тождественно равной нулю. Поэтому для v_1, w_1 получаются формулы

$$\begin{aligned} v_1 &= \xi_1 \exp\{iy\} + \bar{\xi}_1 \exp\{-iy\}, \\ w_1 &= \eta_1 \exp\{iy\} + \bar{\eta}_1 \exp\{-iy\} + \frac{i\xi_0^3}{24} (\exp\{3iy\} - \exp\{-3iy\}), \end{aligned} \quad (71)$$

где ξ_1, η_1 — пока произвольные комплексные амплитуды.

При $j = 2$ получаем краевую задачу (67), в которой

$$f_{1,2} = \alpha_1 v_1 - w_1 - \sigma_2 v_1', \quad f_{2,2} = \alpha_1 w_1 - v_1 - \sigma_2 w_1' + 3v_0^2 v_1. \quad (72)$$

Как и выше, ее анализ начнем с того, что приравняем нулю в неоднородностях (72) коэффициенты при первых гармониках. Указанные действия приводят, в отличие от (69), к линейной системе

$$\eta_1 = \alpha_1 \xi_1 - i\sigma_2 \xi_0, \quad \alpha_1 \eta_1 - \xi_1 - i\sigma_2 \alpha_1 \xi_0 + 3\xi_0^2(2\xi_1 + \bar{\xi}_1) = 0 \quad (73)$$

для амплитуд ξ_1, η_1 из (71) и очередной поправки к частоте σ_2 . Отсюда, очевидно, следует, что

$$\sigma_2 = 0, \quad \xi_1 = \eta_1 = 0, \quad (74)$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \xi_2 \exp\{iy\} + \bar{\xi}_2 \exp\{-iy\} - \frac{\xi_0^3}{576} (\exp\{3iy\} + \exp\{-3iy\}), \\ w_2 &= \eta_2 \exp\{iy\} + \bar{\eta}_2 \exp\{-iy\} + \frac{\alpha_1 \xi_0^3}{576} (\exp\{3iy\} + \exp\{-3iy\}), \end{aligned} \quad (75)$$

где, как и в (71), амплитуды $\xi_2, \eta_2 \in \mathbb{C}$ пока произвольны.

При дальнейшей реализации алгоритма принципиально новые моменты не возникают. Действительно, при $j \geq 3$ неоднородности в краевой задаче (67) допускают представления

$$f_{1,j} = \alpha_1 v_{j-1} - w_{j-1} - \sigma_j v'_0 + \tilde{f}_{1,j}, \quad f_{2,j} = \alpha_1 w_{j-1} - v_{j-1} - \sigma_j w'_0 + 3v_0^2 v_{j-1} + \tilde{f}_{2,j},$$

где $\tilde{f}_{1,j}, \tilde{f}_{2,j}$ зависят только от v_s, w_s , $s \leq j-2$, и σ_s , $s \leq j-1$. Поэтому после приравнивания в них нулю коэффициентов при первых гармониках для очередных амплитуд ξ_{j-1}, η_{j-1} (см., например, (71), (75)) и поправки к частоте σ_j приходим к аналогичной (73) линейной неоднородной системе

$$\begin{aligned} \eta_{j-1} &= \alpha_1 \xi_{j-1} - i\sigma_j \xi_0 + \Delta_{1,j}, \\ \alpha_1 \eta_{j-1} - \xi_{j-1} - i\sigma_j \alpha_1 \xi_0 + 3\xi_0^2 (2\xi_{j-1} + \bar{\xi}_{j-1}) &= \Delta_{2,j}. \end{aligned} \quad (76)$$

Анализ получившейся системы не вызывает затруднений. В самом деле, подставляя первое уравнение из (76) во второе, убеждаемся, что ξ_{j-1} и σ_j связаны соотношением

$$-2i\sigma_j \alpha_1 \xi_0 + 3\xi_0^2 (\xi_{j-1} + \bar{\xi}_{j-1}) = \Delta_{2,j} - \alpha_1 \Delta_{1,j},$$

из которого, в свою очередь, вытекают равенства

$$\sigma_j = \frac{1}{2\alpha_1 \xi_0} \operatorname{Im}(\alpha_1 \Delta_{1,j} - \Delta_{2,j}), \quad \xi_{j-1} = \frac{1}{6\xi_0^2} \operatorname{Re}(\Delta_{2,j} - \alpha_1 \Delta_{1,j}).$$

После нахождения $\xi_{j-1}, \eta_{j-1}, \sigma_j$ функции v_j, w_j определяются из (67) с точностью до первых гармоник с амплитудами $\xi_j, \bar{\xi}_j$ и $\eta_j, \bar{\eta}_j$ соответственно. Далее переходим к шагу с номером $j+1$ и весь процесс повторяется.

Доказательство сходимости рядов (65) не приводим, так как оно практически дословно повторяет соответствующее место из [10, гл. 3, § 12]. Близкие построения содержатся также в монографии [2] и в статьях [11], [12]. Лемма доказана.

Лемма 1 решает проблему существования у краевой задачи (57) сразу счетного числа бегущих волн (58) с достаточно большими номерами n . Действительно, из способа вывода вспомогательной задачи (63) следует, что, подставляя в (62) функции (64) и полагая $\nu = \nu_n$, получаем периодические решения задачи (61), а это означает, что исходная краевая задача (57) имеет циклы (58), в которых

$$\begin{aligned} v_n(y) &= v(y, \nu)|_{\nu=\nu_n}, \quad \sigma_n = -\alpha_2 \pi^3 (2n-1)^3 \sigma(\nu)|_{\nu=\nu_n}, \\ n \geq n_0(\nu_0) &\equiv \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi \sqrt[3]{\alpha_2 \nu_0}} \right), \end{aligned} \quad (77)$$

$\nu_0 > 0$ – постоянная, доставляемая леммой 1. Остается добавить, что асимптотические представления (59), (60) – очевидные следствия равенств (66), (70), (71), (74).

Для исследования устойчивости интересующих нас бегущих волн линеаризуем краевую задачу (57) на произвольном цикле (58), (77) с номером n . После этого осуществим переход от получившейся линейной краевой задачи к аналогичной (61) системе, а затем введем новую пространственную переменную $y = \sigma_n t + \pi(2n-1)x$. В результате с учетом равенств (77) приходим к линейной системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} - \alpha_2 \pi^3 (2n-1)^3 \left(\frac{\partial^3 h_1}{\partial y^3} + \sigma(\nu_n) \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + \alpha_1 h_1 &= h_2, \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} - \alpha_2 \pi^3 (2n-1)^3 \left(\frac{\partial^3 h_2}{\partial y^3} + \sigma(\nu_n) \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) + \alpha_1 h_2 &= (1 - 3v^2(y, \nu_n)) h_1, \\ h_j(t, y + \pi(2n-1)) &\equiv -h_j(t, y), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (78)$$

Характерной особенностью системы (78) является тот факт, что ее коэффициенты не зависят от t . Поэтому проблема устойчивости выбранного нами цикла сводится к исследованию спектра краевой задачи

$$h''' + \sigma(\nu)h' = \nu A(y, \nu)h + \lambda h, \quad h(y + \pi(2n-1)) \equiv -h(y), \quad (79)$$

где $h = \text{colon}(h_1(y), h_2(y))$, $\nu = \nu_n$,

$$A(y, \nu) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 \\ 3v^2(y, \nu) - 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (80)$$

получающейся из (78) при подстановках $h_j(t, y) = h_j(y) \exp\{\lambda t\}$, $j = 1, 2$, и последующей замене $\lambda/(\alpha_2 \pi^3 (2n-1)^3) \rightarrow \lambda$.

Из общих результатов монографии [13] следует, что спектр краевой задачи (79) состоит из счетного числа собственных значений. Кроме того, в силу своего происхождения она всегда имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственная функция

$$h = \text{colon} \left(\frac{\partial v}{\partial y}(y, \nu_n), \frac{\partial w}{\partial y}(y, \nu_n) \right),$$

где $v(y, \nu)$, $w(y, \nu)$ – функции, фигурирующие в (64). Все остальные ее собственные значения имеют отрицательные действительные части. Точнее, справедлива следующая

ЛЕММА 2. *Найдется такая не зависящая от n постоянная $\delta_0 > 0$, что при каждом $n \geq n_0(\nu_0)$ весь спектр краевой задачи (79), за исключением простого нулевого собственного значения, лежит в комплексной полуплоскости $\{\lambda: \text{Re } \lambda \leq -\delta_0 \nu_n\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала краевую задачу

$$h''' + h' = \lambda h, \quad h(y + \pi(2n-1)) \equiv -h(y), \quad (81)$$

получающуюся из (79) при $\nu = 0$. Непосредственная проверка показывает, что ее собственные значения исчерпываются равенствами

$$\lambda = i(z - z^3), \quad z = \frac{2m-1}{2n-1}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (82)$$

а отвечающие им собственные функции имеют вид

$$h^{(1)}(y) = e_1 \exp\{izy\}, \quad h^{(2)}(y) = e_2 \exp\{izy\}, \quad (83)$$

где $e_1 = \text{colon}(1, 0)$, $e_2 = \text{colon}(0, 1)$. Поэтому проблема доказательства леммы сводится к нахождению поправок порядка ν к чисто мнимым собственным значениям (82) и, естественно, к обоснованию соответствующих асимптотических формул.

Основная трудность, возникающая при реализации описанной выше схемы, заключается в том, что спектр задачи (81) фактически меняется непрерывно: расстояния между любыми двумя собственными значениями (82) с номерами m и $m + 1$ имеют порядок $\nu^{1/3}$, т. е. асимптотически малы. Для того чтобы избавиться от этой трудности, в работе [11] был предложен следующий специальный прием.

Выполним в краевой задаче (79) замены

$$h \exp\{-izy\} \rightarrow h, \quad \lambda - i\sigma(\nu)z + iz^3 \rightarrow \lambda \quad (84)$$

и вместо получающегося при этом условия $h(y + \pi(2n - 1)) \equiv h(y)$ поставим условие периодичности с периодом π , являющееся более ограничительным. В результате интересующая нас проблема сводится к нахождению собственных значений, обращающихся в нуль при $\nu = 0$, вспомогательной краевой задачи

$$h''' + 3izh'' + (\sigma(\nu) - 3z^2)h' = \nu A(y, \nu)h + \lambda h, \quad h(y + \pi) \equiv h(y) \quad (85)$$

с π -периодическими по y коэффициентами (из формулы (80) следует, что именно такой и будет матрица $A(y, \nu)$). Для удобства последующего анализа параметра ν , z в (85) считаем меняющимися непрерывно.

Полагая $\nu = 0$ в (85), без труда убеждаемся, что у получившейся в итоге спектральной задачи нулевое собственное значение двукратно при $z \neq \pm 1$ и четырехкратно в противном случае. Более того, при $z \neq \pm 1$ ему отвечают собственные функции

$$h_0^{(1)}(y) = e_1, \quad h_0^{(2)}(y) = e_2, \quad (86)$$

где e_1, e_2 – векторы из (83), при $z = 1$ – собственные функции $e_j, e_j \exp\{-2iy\}$, $j = 1, 2$, а при $z = -1$ – функции $e_j, e_j \exp\{2iy\}$, $j = 1, 2$. Поэтому сначала изучим задачу (85) при

$$z \in (-\infty, -1 - \Delta_0 \nu^{1/3}] \cup [-1 + \Delta_0 \nu^{1/3}, 1 - \Delta_0 \nu^{1/3}] \cup [1 + \Delta_0 \nu^{1/3}, +\infty), \quad (87)$$

где $\Delta_0 > 0$ – произвольно фиксированная постоянная, выбор которой произведем позже.

Опишем алгоритмическую часть построения асимптотики интересующих нас собственных значений задачи (85) при условии (87). С этой целью составим матричное выражение

$$H''' + 3izH'' + (\sigma(\nu) - 3z^2)H' = \nu A(y, \nu)H + HD, \quad (88)$$

где π -периодическая по y квадратная матрица H и постоянная матрица D размером 2×2 задаются равенствами

$$\begin{aligned} H &= H_0(y) + \nu H_1(y), \quad H_j(y) = [h_j^{(1)}(y), h_j^{(2)}(y)], \quad j = 0, 1, \\ D &= \nu D_0, \quad D_0 = \|d_{jk}^0\|, \quad j, k = 1, 2, \end{aligned} \quad (89)$$

причем по столбцам $H_0(y)$ стоят известные функции (86). Для функций $h_1^{(j)}(y)$, $j = 1, 2$, после приравнивания в (88) коэффициентов при ν получаем уравнения

$$\left(\frac{d^3}{dy^3} + 3iz \frac{d^2}{dy^2} + (1 - 3z^2) \frac{d}{dy} \right) h_1^{(j)} = A(y, 0)e_j + d_{1j}^0 e_1 + d_{2j}^0 e_2, \quad j = 1, 2,$$

а элементы d_{jk}^0 матрицы D_0 определяем из условий разрешимости этих уравнений в классе π -периодических функций. Проводя соответствующие вычисления, убеждаемся в том, что

$$D_0 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 1 \\ 2\alpha_1^2 - 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad h_1^{(1)} = \text{colon}(0, c_+ \exp\{2iy\} + c_- \exp\{-2iy\}),$$

$$h_1^{(2)} = 0, \quad c_{\pm} = \pm \frac{i\xi_0^2}{2(z \pm 1)^2}. \quad (90)$$

Для придания изложенным построениям необходимой строгости покажем, что существуют матрицы H , D с главной асимптотикой (89), (90), удовлетворяющие уравнению (88). В связи с этим подставим в (88) равенства

$$H = H_0(y) + \nu H_1(y) + \tilde{H}, \quad D = \nu(D_0 + \tilde{D}). \quad (91)$$

В результате для определения $\tilde{H}$, $\tilde{D}$ приходим к уравнению

$$S(z, \nu)\tilde{H} = \nu\Phi(y, \tilde{H}, \tilde{D}, \nu), \quad (92)$$

где

$$S(z, \nu) = \frac{d^3}{dy^3} + 3iz \frac{d^2}{dy^2} + (\sigma(\nu) - 3z^2) \frac{d}{dy}, \quad (93)$$

а для π -периодичной по y и аналитической по совокупности переменных неоднородности Φ справедливо представление

$$\Phi = (1 - \sigma(\nu))H_1' + A(y, \nu) - A(y, 0) + A(y, \nu)(\nu H_1 + \tilde{H}) + \tilde{D} + (\nu H_1 + \tilde{H})(D_0 + \tilde{D}). \quad (94)$$

Для анализа уравнения (92) нам потребуется банахово пространство $\mathcal{U}$, состоящее из π -периодических по y квадратных (2×2) -матриц $H(y)$ класса W_2^3 с нулевым средним значением $M(H) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi H(y) dy$. Норму в $\mathcal{U}$ введем следующим образом. Разложим произвольную матрицу $H(y) \in \mathcal{U}$ в ряд Фурье:

$$H(y) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} H_m \exp\{2imy\}. \quad (95)$$

Тогда по определению

$$\|H\|_{\mathcal{U}} = \left(\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} m^6 \|H_m\|^2 \right)^{1/2}, \quad (96)$$

где $\|\cdot\|$ – некоторая фиксированная матричная норма.

Заметим, что в пространстве $\mathcal{U}$ оператор (93) имеет ограниченный обратный S^{-1} , действующий на любую матрицу (95) по правилу

$$S^{-1}(z, \nu)H = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{iH_m}{2m(m^2 + 3(z+m)^2 - \sigma(\nu))} \exp\{2im\gamma\}.$$

Отсюда и из (96) вытекает равномерная по z из множества (87) оценка

$$\|S^{-1}(z, \nu)\|_{\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}} \leq N\nu^{-2/3}. \quad (97)$$

Здесь и ниже одной и той же буквой N обозначаем различные универсальные (не зависящие от z, ν) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Дальнейший способ действий стандартен. Сначала перейдем от (92) к вспомогательному уравнению

$$S(z, \nu)\tilde{H} = \nu(\Phi - M(\Phi)), \quad (98)$$

где, напомним, $M(\cdot)$ – среднее значение по y , а затем, обращая оператор S , получим интегральное уравнение в пространстве $\mathcal{U}$. Из явного вида (94) неоднородности Φ с учетом оценки (97) и вытекающего из (90) неравенства

$$\|H_1\|_{\mathcal{U}} \leq N\nu^{-2/3} \quad (99)$$

закключаем, что правая часть упомянутого интегрального уравнения порождает оператор в пространстве $\mathcal{U}$, преобразующий в себя некоторый замкнутый шар этого пространства с центром в нуле и радиусом порядка $\nu^{2/3}$ и являющийся сжимающим. А отсюда, в свою очередь, следует, что уравнение (98) имеет единственное решение $\tilde{H} \in \mathcal{U}$, допускающее оценку

$$\|\tilde{H}\|_{\mathcal{U}} \leq N\nu^{2/3}. \quad (100)$$

Заключительный этап доказательства состоит в отыскании из уравнения $M(\Phi) = 0$ элементов фигурирующей в (91), (94) матрицы $\tilde{D}$ размером 2×2 , которая до этого момента была произвольной. Подставляя в данное уравнение формулу (94) вместе с решением $\tilde{H}$ уравнения (98) и учитывая неравенства (99), (100), убеждаемся, что матрица $\tilde{D} = \tilde{D}(z, \nu)$ находится однозначно и удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{D}\| \leq N\nu^{1/3}. \quad (101)$$

Подведем некоторый итог. Из всей совокупности проведенных построений следует существование у исходной краевой задачи (79) двух наборов собственных значений:

$$\lambda = i(z - z^3) + \nu\lambda_k + o(\nu), \quad k = 1, 2, \quad (102)$$

где $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ – спектр матрицы D_0 , который при условии $\alpha_1 < 1$ лежит в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Параметр z пробегает все дискретные значения, $z = (2m - 1)/(2n - 1)$ (см. (82)), из множества (87). И наконец, необходимо отметить, что в силу оценки (101) остатки в формулах (102) имеют указанный порядок малости равномерно по z .

Для завершения доказательства леммы осталось найти поправки порядка ν к собственным значениям (82) в случае, когда параметр z принадлежит множеству

$$(-1 - \Delta_0 \nu^{1/3}, -1 + \Delta_0 \nu^{1/3}) \cup (1 - \Delta_0 \nu^{1/3}, 1 + \Delta_0 \nu^{1/3}). \quad (103)$$

В связи с этим распорядимся имеющейся в запасе свободной постоянной $\Delta_0 > 0$ таким образом, чтобы выполнялось условие $\Delta_0 < 2\pi\alpha_2^{1/3}$. Тогда, как нетрудно видеть, в множестве (103) содержится лишь два из возможных значений $z = (2m - 1)/(2n - 1)$, $m \in \mathbb{Z}$, а именно $z = \pm 1$. Таким образом, как и выше, проблема заключается в нахождении собственных значений, обращающихся в нуль при $\nu = 0$, вспомогательной задачи (85) в случаях $z = \pm 1$. Следует, однако, заметить, что оба эти случая на самом деле совпадают, так как в каждом из них после выполнения замен, обратных к (84), интересующая нас краевая задача (85) преобразуется к виду

$$h''' + \sigma(\nu)h' = \nu A(y, \nu)h + \lambda h, \quad h(y + \pi) \equiv -h(y). \quad (104)$$

Исследование получившейся задачи (104) не вызывает принципиальных затруднений. Действительно, при $\nu = 0$ ее нулевое собственное значение четырехкратно, и ему отвечают четыре собственные функции

$$\begin{aligned} h_0^{(1)}(y) &= e_1 \exp\{iy\}, & h_0^{(2)}(y) &= e_2 \exp\{iy\}, \\ h_0^{(3)}(y) &= \bar{h}_0^{(1)}(y), & h_0^{(4)}(y) &= \bar{h}_0^{(2)}(y). \end{aligned} \quad (105)$$

Поэтому для расчета асимптотики собственных значений этой задачи, обращающихся в нулевые при $\nu = 0$, можно воспользоваться стандартной теорией возмущений [14]. Из результатов монографии [14] вытекает существование таких матриц $H(y, \nu)$, $H(y + \pi, \nu) \equiv -H(y, \nu)$, и $D(\nu)$ размерами 2×4 и 4×4 соответственно, что, во-первых,

$$D(0) = 0, \quad H(y, 0) = H_0(y) \equiv [h_0^{(1)}(y), h_0^{(2)}(y), h_0^{(3)}(y), h_0^{(4)}(y)],$$

где $h_0^{(j)}$, $j = 1, \dots, 4$, — функции (105), во-вторых, справедливо аналогичное (88) равенство

$$H''' + \sigma(\nu)H' = \nu A(y, \nu)H + HD. \quad (106)$$

Кроме того, матрицы H , D можно выбрать аналитически зависящими от ν , что и считаем сделанным.

Итак, интересующая нас проблема свелась к исследованию расположения спектра четырехмерной матрицы $D(\nu)$, что, в свою очередь, требует знания первого члена ее тейлоровского разложения в нуле. В связи с этим подставим в (106) соотношения

$$H = H_0(y) + \nu H_1(y) + \dots, \quad D(\nu) = \nu D_0 + \nu^2 D_1 + \dots$$

и приравняем коэффициенты при ν . В результате для столбцов $h_1^{(j)}$, $j = 1, \dots, 4$, матрицы $H_1(y)$ получаются линейные неоднородные краевые задачи, а элементы d_{jk}^0 , $j, k = 1, \dots, 4$, матрицы D_0 определяются из условий их разрешимости. Опуская вполне понятные вычисления, приведем сразу окончательный результат:

$$D_0 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha_1^2 - 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & 1 \\ \alpha_1^2 - 1 & 0 & 2\alpha_1^2 - 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}. \quad (107)$$

Несложный подсчет показывает, что матрица (107) имеет собственные значения $\lambda = 0, -2\alpha_1$, а два других ее собственных числа определяются из квадратного уравнения $\lambda^2 + 2\alpha_1\lambda + 2(1 - \alpha_1^2) = 0$ и в силу неравенства $\alpha_1 < 1$ лежат в левой комплексной полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Отсюда и из установленных ранее асимптотических представлений (102) следует, что весь спектр исходной краевой задачи (79), за исключением простого нулевого собственного значения, находится в полуплоскости вида $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda \leq -\delta_0\nu\}$. Заметим, что в качестве $-\delta_0$ здесь можно брать любое достаточно малое по модулю отрицательное число, мажорирующее действительные части собственных значений матрицы D_0 из (90) и действительные части ненулевого спектра матрицы (107). Лемма 2, а значит, и теорема 2 полностью доказаны.

Как это часто бывает, аналитическими средствами удастся построить только относительно простые бегущие волны (58), профили $v_n(y)$ которых близки к гармоническим. Однако достаточно ясно, что у краевой задачи (57) существуют и другие установившиеся режимы. Чтобы прояснить суть дела, предположим, что $\alpha_2 \gg 1$. Тогда малость параметра $\nu = 1/(\alpha_2\pi^3(2n-1)^3)$ во вспомогательной задаче (63) достигается за счет малости $1/\alpha_2$, а не за счет увеличения n . Это означает, что в данном случае существуют устойчивые бегущие волны (58) при всех $n \geq 1$. При переходе от асимптотически больших значений α_2 к значениям $\alpha_2 \sim 1$ бегущие волны с младшими номерами n становятся нелокальными, т. е. усложняется зависимость их профилей $v_n(y)$ от y .

§ 6. Заключение

В первую очередь рассмотрим естественно возникающий вопрос о том, какое отношение полученные выше результаты имеют к проблеме сглаживания разрывных колебаний в нелинейных гиперболических системах. В связи с этим обратимся к краевой задаче (37) при $x_0 = 0$, т. е. рассмотрим случай, когда соленоид заменен классической длинной линией. Применяя к получившейся задаче описанный в § 4 метод бесконечномерной нормализации, приходим к аналогичной (55) квазинормальной форме

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{\partial v}{\partial \tau} = 2\left(\gamma - \frac{1}{8}\right)v - 2v^3, \quad v(\tau, y+1) \equiv -v(\tau, y). \quad (108)$$

Предположим, далее, что выполнено неравенство $\gamma > 1/8$. Тогда обыкновенное уравнение

$$\ddot{v} + \dot{v} = 2\left(\gamma - \frac{1}{8}\right)v - 2v^3, \quad (109)$$

получающееся из (108) при отбрасывании граничного условия, имеет два устойчивых состояния равновесия

$$(v, \dot{v}) = \left(\pm\sqrt{\gamma - \frac{1}{8}}, 0\right), \quad (110)$$

что и является причиной разрывности решений задачи (108).

Действительно, дополним краевую задачу (108) начальными условиями

$$v|_{\tau=0} = v_1(y), \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = v_2(y), \quad (111)$$

где v_1, v_2 – произвольные антипериодические с периодом 1 функции класса W_2^2 . Единственное требование, которому должны удовлетворять эти функции, состоит в том, что кривая $\Gamma = \{(v, \dot{v}) = (v_1(y), v_2(y)) : 0 \leq y \leq 2\}$ на фазовой плоскости уравнения (109) пересекает бассейны притяжений обоих состояний равновесия (110). Тогда, очевидно, решение $v = v(\tau, y)$ задачи Коши (108), (111) при $\tau \rightarrow \infty$ поточечно сходится к кусочно постоянной функции, заведомо принимающей два значения $\pm \sqrt{\gamma - 1/8}$.

При любом $\varkappa_0 > 0$, т. е. при наличии эффекта взаимной индукции между витками соленоида, происходит не только сглаживание разрывных колебаний, но и реализуется феномен буферности. В самом деле, квазинормальная форма (55), получающаяся из (108) при учете упомянутого фактора, в случае $\gamma > 1/8$ (данное условие эквивалентно требованию $\alpha_1 < 1$ в краевой задаче (57)) имеет счетное число устойчивых периодических режимов типа бегущих волн. При $\varkappa_0 > 0$, $\gamma > 1/8$ в исходной краевой задаче (37) можно гарантировать существование любого конечного числа устойчивых циклов. Для сравнения напомним (см. [2], [5]), что в случае $\varkappa_0 = 0$ буферность имеет место только при $K = 1 + \varepsilon^2/8 + \varepsilon^3\gamma$ и при некоторых дополнительных условиях на параметр $\gamma > 0$. Таким образом, при $\varkappa_0 > 0$ диапазон изменения коэффициента усиления K , в котором наблюдается это явление, существенно шире.

В отличие от квазинормальной формы (109) строго доказать существование разрывных колебаний при $\varkappa_0 = 0$, $\gamma > 1/8$ в исходной задаче (37) не удастся. Однако это легко сделать для близкой к ней по свойствам краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{4} u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0, \quad u|_{x=0} + (1 + \varepsilon^2\gamma)u|_{x=1} - u^3|_{x=1} = 0, \end{aligned}$$

которая описывает автоколебания в линии без искажений. Соответствующий анализ проведен в монографии [2].

Заметим, что мы стремились предложить такой способ сглаживания разрывных колебаний, который сохранял бы явление буферности. При другом способе сглаживания это явление может разрушиться. В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0, \quad -\varepsilon\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} + u|_{x=0} + (1 + \varepsilon^2\gamma)u|_{x=1} - u^3|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (112)$$

получающуюся из (37) при $\varkappa_0 = 0$ и при учете малой паразитной индуктивности $\varepsilon\alpha$, $\alpha = \text{const} > 0$ в точке $x = 0$. Опираясь в очередной раз на развитие в § 4 конструкции, приходим к выводу, что квазинормальная форма задачи (112) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{\partial v}{\partial \tau} &= 2\left(\gamma - \frac{1}{8}\right)v - 2v^3 - \alpha\left(2\frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ v(\tau, y+1) &\equiv -v(\tau, y). \end{aligned} \quad (113)$$

Выполняя в ней при условии $\gamma > 1/8$ замены

$$\frac{\tau}{\delta} \rightarrow \tau, \quad \delta\sqrt{2}v \rightarrow v, \quad y - \alpha\delta\tau \rightarrow y,$$

где $\delta = 1/\sqrt{2(\gamma - 1/8)}$, а затем обозначая τ через t и y через x , приведем ее к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v - v^3, \quad v(t, x+1) \equiv -v(t, x), \quad (114)$$

где $a = \alpha\delta$.

Предположим, далее, что краевая задача (114) имеет состояние равновесия $v_0(x) \not\equiv 0$, являющееся решением краевой задачи

$$a^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + v - v^3 = 0, \quad v(x+1) \equiv -v(x). \quad (115)$$

Тогда, очевидно, она имеет целое их семейство $\{v_0\} = \{v_0(x+c): c \in \mathbb{R}\}$, а соответствующая спектральная задача

$$a^2 \frac{d^2 h}{dx^2} + (1 - 3v_0^2(x))h = \mu h, \quad h(x+1) \equiv -h(x) \quad (116)$$

имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственная функция $h_0(x) = dv_0/dx$.

Обозначим через μ_n , $n \geq 1$, ненулевые собственные значения краевой задачи (116) и заметим, что семейство $\{v_0\}$ экспоненциально орбитально устойчиво при $\mu_n < 0$, $n \geq 1$, и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение μ_n положительно. Действительно, линеаризуя краевую задачу (114) на состоянии равновесия $v_0(x)$ и полагая в получившейся линейной краевой задаче $v = h(x) \exp\{\lambda t\}$, для определения h приходим к задаче (116) при $\mu = \lambda^2 + \delta\lambda$.

Обращаем внимание на то, что краевая задача (113) не является нормальной формой для исходной краевой задачи (112) (по тем же причинам, что и в § 4). Однако стандартное утверждение о соответствии между решениями этих задач по-прежнему остается в силе. Точнее, каждому семейству состояний равновесия $\{v_0\}$ краевой задачи (114), экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному, в исходной задаче (112) соответствует цикл с теми же свойствами устойчивости.

Динамика состояний равновесия краевой задачи (114) по параметру a изучена в работе [2], где показано, что хотя при $a \rightarrow 0$ их количество неограниченно растет, однако устойчивым среди них является только одно семейство $\{v_*\}$, где $v_* = v_*(x, a)$ – решение задачи (115), существующее при $0 < a < 1/\pi$ и обладающее следующими свойствами:

$$\begin{aligned} v_*(0, a) = v_*(1, a) = 0, \quad v_*(x, a) > 0, \quad 0 < x < 1, \\ v_*(x, 0) = \text{sign}(\sin(\pi x)). \end{aligned} \quad (117)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что при всех $\gamma > 1/8 + \alpha^2\pi^2/2$ (данное неравенство эквивалентно условию $a < 1/\pi$) в исходной задаче (112) семейству $\{v_*\}$ соответствует устойчивый цикл, приобретающий релаксационную форму при $\gamma \rightarrow \infty$ (см. последнее свойство (117)). Отметим, наконец, что этот цикл остается единственным аттрактором системы (112), несмотря на то что при увеличении γ количество возбужденных мод в ней неограниченно растет.

Авторы выражают глубокую признательность рецензенту статьи А. И. Нейштадту за внимательное ознакомление с рукописью и высказанные конструктивные замечания, существенно способствовавшие улучшению содержания статьи.

Список литературы

1. Витт А. А., “Распределенные автоколебательные системы”, *Журн. техн. физики*, **4**:1 (1934), 144–157.
2. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., *Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений*, Тр. МИАН, **222**, Наука; МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 1998.
3. Колесов А. Ю., Розов Н. Х., Сушко В. Г., “Специфика автоколебательных процессов в резонансных гиперболических системах”, *Фундам. и прикл. математика*, **5**:2 (1999), 437–473.
4. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Явление буферности в резонансных системах гиперболических уравнений”, *УМН*, **55**:2 (2000), 95–120.
5. Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Явление буферности в RCLG -автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента”, *Дифференциальные уравнения. Некоторые математические задачи оптимального управления*, Тр. МИАН, **233**, Наука; МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2001, 153–207.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., *Теория колебаний*, Физматгиз, М., 1959.
7. Постников Л. В., Королев В. И. (ред.), *Сборник задач по теории колебаний*, Наука, М., 1978.
8. Рабинович М. И., Трубецков Д. И., *Введение в теорию колебаний и волн*, Наука, М., 1984.
9. Колесов Ю. С., “Математическая теория RC-автогенераторов с распределенными параметрами в цепи обратной связи”, *Дифференц. уравн. и их примен.*, вып. 2, Ин-т физики и математики АН ЛитССР, Вильнюс, 1971.
10. Колесов А. Ю., Розов Н. Х., *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, М., 2004.
11. Колесов А. Ю., “Существование счетного числа устойчивых циклов в средах с дисперсией”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:3 (1995), 141–158.
12. Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Существование счетного числа устойчивых циклов у обобщенного кубического уравнения Шрёдингера в плоской области”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:6 (2003), 137–168.
13. Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
14. Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

А. Ю. КОЛЕСОВ (A. Yu. Kolesov)
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
10.03.2005

Н. Х. РОЗОВ (N. Kh. Rozov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: rozov@rozov.mccme.ru