Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Ю. Семенова, Приближение функций пространств Соболева ступенчатыми функциями и единственность решений дифференциальных уравнений вида $u'' = F(x, u, u')$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 1, 155–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/im609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:12:53

УДК 517.9

Т. Ю. Семенова

Приближение функций пространств Соболева ступенчатыми функциями и единственность решений дифференциальных уравнений вида $u'' = F(x, u, u')$

Изучаются приближения функций из пространств Соболева W_∞^1 и W_2^1 функциями вида $\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{[x_k, x_k+d]}$. Полученные результаты применяются при исследовании устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка специального вида, а также рассматривается вопрос возможности совпадения двух решений при наличии дополнительной информации в виде значений функционалов $l_{x_k}(u) = \frac{1}{d} \int_{x_k}^{x_k+d} u(t) dt$, $k = 1, \dots, n$, определенных на решениях.

Библиография: 11 наименований.

Введение

Пусть $0 < d \leq 1$ и $I_k = [x_k, x_k + d] \subset [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$. Для определенности будем считать, что $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Если $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – фиксированный набор левых концов отрезков, обозначим через

$$\mathcal{L}_n(d, \bar{x}) = \left\{ \varphi \mid \varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{I_k}, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

линейное пространство размерности n ,

$$\mathcal{L}_N(d) = \bigcup_{n \leq N} \bigcup_{\bar{x}} \mathcal{L}_n(d, \bar{x})$$

– объединение по всевозможным наборам $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $n \leq N$ (здесь $\mathcal{L}_N(d)$ можно также получить объединением по $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)$, если допустить возможность выполнения нестрогого неравенства $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$).

Обозначим через

$$e(f, M) = \inf_{\varphi \in M} \|f - \varphi\|_{L^2[0,1]}$$

наилучшее приближение f функциями из множества M в $L^2[0, 1]$,

$$E(W, M) = \sup_{f \in W} e(f, M)$$

– наилучшее приближение класса W множеством M .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00160-а).

Далее будем изучать следующие величины:

$$E_{N,d}(W) = E(W, \mathcal{L}_N(d)),$$

$$D_{N,d}(W) = \inf_{\bar{x}, n \leq N} E(W, \mathcal{L}_n(d, \bar{x})).$$

Величина $E_{N,d}$ дает оценку приближения класса W на основании индивидуального подбора сетки для каждой функции из класса, $D_{N,d}$ определяется выбором оптимальной сетки для всего класса W . Из определения следует неравенство $D_{N,d}(W) \geq E_{N,d}(W)$.

Напомним определение N -поперечника по Колмогорову центрально-симметричного множества W (см., например, [1, с. 186–189] или [2, гл. 3]):

$$d_N(W, X) = \inf_{M \in \text{Lin}_N(X)} \sup_{f \in W} \inf_{\varphi \in M} \|f - \varphi\|_X,$$

где $\text{Lin}_N(X)$ – множество всех линейных подпространств X размерности не больше N . Поскольку $\mathcal{L}_n(d, \bar{x}) \in \text{Lin}_N(L^2[0, 1])$ при $n \leq N$, имеет место неравенство $D_{N,d}(W) \geq d_N(W, L^2[0, 1])$, и сравнение двух значений позволяет судить о том, насколько хорошо приближаются функции данного множества W функциями вида $\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{[x_k, x_k+d]}$.

В работе исследуются величины $D_{N,d}(W)$ и $E_{N,d}(W)$ для классов

$$W = \{f \in W_p^1[0, 1], f(0) = 0, \|f\|_{W_p^1} \leq 1\},$$

$$\widetilde{W} = \{f \in W_p^1[0, 1], f(0) = f(1) = 0, \|f\|_{W_p^1} \leq 1\}$$

при $p = \infty$ и $p = 2$. Для этих величин получены или точные значения, или оценки сверху и снизу. В частности, при $p = 2$ доказаны равенства

$$\min_{d \in [0, 1]} D_{N,d}(W) = d_N(W, L^2[0, 1]), \quad \min_{d \in [0, 1]} D_{N,d}(\widetilde{W}) = d_N(\widetilde{W}, L^2[0, 1]).$$

Таким образом, в этом случае $\mathcal{L}_N(d)$ при оптимально подобранном значении d содержит одно из наилучших аппроксимирующих множеств для рассматриваемых классов.

Далее показано, как полученные оценки могут быть использованы для следующей задачи. На отрезке $[0, 1]$ рассматривается уравнение $u'' = F(x, u, u')$ с определенными условиями, налагаемыми на функцию F . Предполагается, что существуют два решения $u_i \in W_2^1[0, 1]$, $i = 1, 2$. Дополнительно известны также значения функционалов

$$l_{x_k}(u) = \frac{1}{d} \int_{x_k}^{x_k+d} u(t) dt, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $[x_k, x_k + d] \subset [0, 1]$, определенных на решениях. Необходимо оценить уклонение решений друг от друга в метрике $L^2[0, 1]$.

В работе также изучается вопрос о возможности совпадения решений при совпадении значений функционалов l_{x_k} .

Аналогичные задачи нахождения конечного множества функционалов, различающих решения (определяющих функционалов), для некоторых видов дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных исследовались

в работах О. А. Ладыженской, Д. А. Джонса, Е. С. Тити, И. Д. Чуешова (см., например, [3]–[6], развитие общей теории таких функционалов см. в обзоре [7]).

В работе И. Г. Царькова [8] рассматривалась задача Дирихле для уравнения $\Delta u = F(x, u, \nabla u)$ в компактной области из $\mathbb{R}^m$ при условиях более сильной (чем в работах [4]–[7]) нелинейности и в классе обобщенных решений. В качестве функционалов выступали значения решений в точках некоторой ε -сети.

В настоящей работе также в условиях сильной нелинейности для обобщенных решений в одномерном случае построено множество определяющих функционалов конкретного вида

$$l_{x_k}(u) = \frac{1}{d} \int_{x_k}^{x_k+d} u(t) dt,$$

в том числе $l_{x_k}(u) = u(x_k)$ как предельный случай при $d \rightarrow 0$. Указано число и местоположение $x_k \in [0, 1-d]$, когда решения на границе отрезка совпадают, а также в случае, когда такая информация отсутствует. Причем при условии $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega}$ число функционалов, достаточное для различения решений, в определенном смысле совпало с оптимальным (с числом коэффициентов Фурье, необходимых для той же цели) и оказалось зависимым от некоторой числовой характеристики уравнения и не зависимым от значения $d \in [0, 1]$. Заметим, что функционалы $l_{x_k}(u)$, в отличие от тех же коэффициентов Фурье, вычисляются по “локальной” информации о функции (более подробно см. § 3).

§ 1. Приближение функций из W_∞^1

Пусть $W = \{f \in W_\infty^1[0, 1], f(0) = 0, \|f\|_{W_\infty^1} \leq 1\}$. Далее для краткости иногда будем записывать $\mathcal{L}_n(d, \bar{x}) = \mathcal{L}_n(\bar{x})$, $e(f, \mathcal{L}_n(\bar{x}, d)) = e(f, \bar{x})$. Обозначим через $e(f, \mathcal{L}_n(d, \bar{x}), I) = e(f, \bar{x}, I)$ оценку приближения функции f на отрезке $I \subset [0, 1]$, $[x_k, x_k + d] \subset [0, 1]$, $\tilde{f}(x) = \int_x^{x+d} f(t) dt$.

Для любой непрерывной на $[0, 1]$ функции f имеем

$$\begin{aligned} e^2(f, \bar{x}) &= \inf_{\bar{a} \in \mathbb{R}^n} \int_0^1 \left(f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \chi_{I_k}(t) \right)^2 dt = \inf_{\bar{a} \in \mathbb{R}^n} \left(\|f\|_{L^2[0,1]}^2 + d \sum_{k=1}^n a_k^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{k=1}^n a_k \int_0^1 f(t) \chi_{I_k}(t) dt + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1, j \neq k}^n a_k a_j \int_0^1 \chi_{I_k}(t) \chi_{I_j}(t) dt \right) \\ &= \inf_{\bar{a} \in \mathbb{R}^n} (\|f\|_{L^2[0,1]}^2 - 2A^T F + A^T V A), \end{aligned}$$

где $V = (v_{kj})$, $v_{kj} = (\chi_{I_k}, \chi_{I_j})$, – матрица размером $n \times n$, $A = (a_k)$ и $F = (\tilde{f}(x_k))$ – матрицы-столбцы размером $n \times 1$. Матрица A , на которой достигается $\inf_{\bar{a} \in \mathbb{R}^n} (\|f\|_{L^2[0,1]}^2 - 2A^T F + A^T V A)$, находится из равенства $VA = F$ (используется необходимое и достаточное условие экстремума). Таким образом,

$$e^2(f, \bar{x}) = \|f\|_{L^2[0,1]}^2 - F^T V^{-1} F = \|f\|_{L^2[0,1]}^2 - F^T A. \quad (1)$$

Когда отрезки I_k не пересекаются, получим

$$e^2(f, \bar{x}) = \|f\|_{L^2[0,1]}^2 - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^n \tilde{f}^2(x_k). \quad (1')$$

При фиксированном $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ будем говорить, что множество отрезков $\mathcal{J} = \{I_{k_1}, \dots, I_{k_m}\}$, $k_1 < \dots < k_m$, образует цепь $\mathcal{J}[x_{k_1}, x_{k_m} + d]$, если $x_{k_{i+1}} = x_{k_i} + d$ для $i = 1, \dots, m-1$ (начало каждого следующего отрезка совпадает с концом предыдущего) и никакое множество отрезков, содержащее $\mathcal{J}$, этим свойством не обладает. Множество всех отрезков $I_1, \dots, I_n$, участвующих в приближении функции, разбивается на несколько (не больше n) цепей. Движение некоторой цепи влево или вправо назовем *допустимым*, если оно не приводит к изменению количества цепей и их состава.

Рис. 1

Рис. 2

Пусть $M = [\frac{1}{d}]$. Обозначим через $\kappa_1(N)$ множество расположений отрезков $I_1, \dots, I_n$, представляющих собой одну цепь $\mathcal{J}[1 - nd, 1]$, $n \leq \min\{N, M\}$ (рис. 1), и через $\kappa_2(N)$ множество расположений отрезков $I_1, \dots, I_n$, представляющих собой две пересекающиеся цепи $\mathcal{J}_1[0, n_1 d]$ и $\mathcal{J}_2[1 - n_2 d, 1]$, $M < n = n_1 + n_2 \leq \min\{N, 2M\}$ (рис. 2). Обозначим также $\kappa(N) = \kappa_1(N) \cup \kappa_2(N)$.

Пусть $\kappa_2^0(N) \subset \kappa_2(N)$ – множество расположений отрезков $I_1, \dots, I_n$, представляющих собой две пересекающиеся цепи $\mathcal{J}_1[0, n_1 d]$ и $\mathcal{J}_2[1 - n_2 d, 1]$, $M < n = n_1 + n_2 \leq \min\{N, 2M\}$, с дополнительным условием $1 - n_2 d \in (0, d)$ (начало второй цепи принадлежит интервалу $(0, d)$).

ЛЕММА 1. Пусть функция $f \in C[0, 1]$ монотонно возрастает и функция $\tilde{f}(x) = \int_x^{x+d} f(t) dt$ является линейной. Тогда

$$e(f, \mathcal{L}_N(d)) = \inf_{\bar{x} \in \kappa(N)} e(f, \bar{x}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое положение отрезков $\bar{x}$. Рассмотрим оценку приближения функции при допустимом движении какой-нибудь цепи на число δ (влево, если $\delta < 0$, и вправо, если $\delta > 0$, (δ_1, δ_2) – допустимый интервал изменения δ):

$$\Phi(\delta) = \|f\|_{L^2[0,1]}^2 - F^T(\delta)V^{-1}(\delta)F(\delta) = \|f\|_{L^2[0,1]}^2 - F^T(\delta)A(\delta)$$

(формула (1)). При допустимых движениях функция $\Phi(\delta)$ является бесконечно дифференцируемой, поскольку элементы матрицы F – линейные функции от δ , а элементы a_k матрицы A представляют собой выражения $a_k = \frac{P_k(\delta)}{Q(\delta)}$, где $P_k(\delta)$ и $Q(\delta) = \det V(\delta)$ – многочлены от переменной δ и $Q(\delta) \neq 0$ при $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$. Поскольку $VA = F$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \delta^2} = 0$ (элементы V зависят от δ линейным образом), $\frac{\partial^2 F}{\partial \delta^2} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \delta} &= \frac{\partial}{\partial \delta} (\|f\|_{L^2[0,1]}^2 - A^T F) = - \left(\frac{\partial A^T}{\partial \delta} F + A^T \frac{\partial F}{\partial \delta} \right), \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \delta^2} &= - \left(\frac{\partial^2 A^T}{\partial \delta^2} F + 2 \frac{\partial A^T}{\partial \delta} \frac{\partial F}{\partial \delta} \right) = - \left(-2 \frac{\partial A^T}{\partial \delta} \frac{\partial V}{\partial \delta} V^{-1} F + 2 \frac{\partial A^T}{\partial \delta} \frac{\partial F}{\partial \delta} \right) \\ &= -2 \left(- \frac{\partial A^T}{\partial \delta} \frac{\partial V}{\partial \delta} A + \frac{\partial A^T}{\partial \delta} \frac{\partial F}{\partial \delta} \right) = -2 \left(\frac{\partial A^T}{\partial \delta} V \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) \leq 0, \end{aligned}$$

так как V – матрица Грама, которая является положительно определенной.

Если $\frac{\partial A}{\partial \delta}|_{\delta=0} \neq 0$, то $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \delta^2} < 0$ и приближение можно улучшить, двигая цепь вправо при $\frac{\partial \Phi}{\partial \delta}|_{\delta=0} < 0$, двигая цепь влево при $\frac{\partial \Phi}{\partial \delta}|_{\delta=0} > 0$ и двигая цепь в любую сторону при $\frac{\partial \Phi}{\partial \delta}|_{\delta=0} = 0$.

Если $\frac{\partial \Phi}{\partial \delta}|_{\delta=0} = 0$ и $\frac{\partial A}{\partial \delta}|_{\delta=0} = 0$, то в силу равенства

$$\frac{\partial^{k+1} A}{\partial \delta^{k+1}} = -(k+1)V^{-1} \frac{\partial V}{\partial \delta} \frac{\partial^k A}{\partial \delta^k}$$

для любого натурального $k \geq 1$ получаем, что $\frac{\partial^k A}{\partial \delta^k}|_{\delta=0} = 0$ и $\frac{\partial^k \Phi}{\partial \delta^k}|_{\delta=0} = 0$. Поскольку $\Phi(\delta) = \frac{P(\delta)}{Q(\delta)}$, где P и $Q = \det V$ – многочлены, то

$$\frac{\partial^r P}{\partial \delta^r} = \sum_{k=0}^r C_r^k \frac{\partial^k \Phi}{\partial \delta^k} \frac{\partial^{r-k} Q}{\partial \delta^{r-k}} \quad \forall r \geq 1.$$

Значит, $\frac{\partial^r P}{\partial \delta^r}|_{\delta=0} = \Phi(0) \frac{\partial^r Q}{\partial \delta^r}|_{\delta=0}$ для любого $r \geq 1$. Тогда $P(\delta) = p_0 + \Phi(0)z(\delta)$, $Q(\delta) = q_0 + z(\delta)$, где z – многочлен, удовлетворяющий условию $z(0) = 0$, $p_0, q_0 \in \mathbb{R}$. Отсюда

$$\Phi(\delta) = \frac{p_0 - \Phi(0)q_0}{q_0 + z(\delta)} + \Phi(0) = \frac{p_0 - \Phi(0)q_0}{Q(\delta)} + \Phi(0),$$

и если $\frac{\partial^k \Phi}{\partial \delta^k}|_{\delta=0} = 0$ для любого $k \geq 1$, то $\frac{\partial^k Q}{\partial \delta^k}|_{\delta=0} = 0$ для любого $k \geq 1$. Получаем, что в случае, когда $\frac{\partial \Phi}{\partial \delta}|_{\delta=0} = 0$ и $\frac{\partial A}{\partial \delta}|_{\delta=0} = 0$, функция Φ тождественна постоянной при $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, т. е. цепь можно двигать вправо или влево, не меняя значения Φ . Таким образом, $\inf_{\bar{x}} (\|f\|_{L^2[0,1]}^2 - F^T V^{-1} F)$ достигается на расположении отрезков, представляющем собой либо одну цепь $\mathcal{J}[x_1, x_n + d]$, причем $x_1 = 0$ или $x_n + d = 1$, либо две цепи $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$: первая с началом в точке 0, вторая с концом в точке 1. В любом другом случае цепь всегда можно подвинуть, не ухудшив приближение функции. Так как f – неубывающая функция, приближение f цепью $\mathcal{J}[0, nd]$ не лучше приближения цепью $\mathcal{J}[1 - nd, 1]$ (см. формулу (1')).

Рис. 3

Рис. 4

Приближение двумя цепями $\mathcal{J}_1[0, n_1 d]$ и $\mathcal{J}_2[1 - n_2 d, 1]$ при $n_1 d < 1 - n_2 d$ (рис. 3) не лучше приближения цепью $\mathcal{J}[1 - (n_1 + n_2)d, 1]$ (рис. 4). Лемма доказана.

Определим $\bar{x}^*$ следующим образом: при $N \leq M = \lfloor \frac{1}{d} \rfloor$ полагаем, что $\bar{x}^*$ – вектор, задающий расположение отрезков, представляющее собой одну цепь $\mathcal{J}[1 - Nd, 1]$; при $M < N \leq 2M$ считаем, что $\bar{x}^*$ – вектор, задающий расположение отрезков, представляющее собой две цепи $\mathcal{J}_1[0, (N - M)d]$ и $\mathcal{J}_2[1 - Md, 1]$; при $N > 2M$ полагаем, что $\bar{x}^*$ – вектор, задающий расположение отрезков, представляющее собой две цепи $\mathcal{J}_1[0, Md]$ и $\mathcal{J}_2[1 - Md, 1]$.

Обозначим $\psi(x) = x$.

ЛЕММА 2. Выполнено равенство $e(\psi, \mathcal{L}_N(d)) = e(\psi, \bar{x}^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ψ удовлетворяет условиям леммы 1, выполнено равенство $e(\psi, \mathcal{L}_N(d)) = \inf_{\bar{x} \in \kappa(N)} e(\psi, \bar{x})$.

Если $N \leq M$, то $\kappa(N) = \kappa_1(N)$, т. е. состоит из векторов, задающих расположение отрезков, представляющее собой одну цепь $\mathcal{J}[1 - nd, 1]$, $n \leq N$, и $\inf_{\bar{x}}$, очевидно, достигается при $n = N$, т. е. на $\bar{x}^*$.

Если $N > M$, то $\inf_{\bar{x} \in \kappa(N)} e(\psi, \bar{x}) = \inf_{\bar{x} \in \kappa_2(N)} e(\psi, \bar{x})$. Так как имеет место очевидное равенство $\inf_{\bar{x} \in \kappa_2^0(N)} e(\psi, \bar{x}) = e(\psi, \bar{x}^*)$, для доказательства леммы достаточно показать выполнение равенства

$$\inf_{\bar{x} \in \kappa_2(N)} e(\psi, \bar{x}) = \inf_{\bar{x} \in \kappa_2^0(N)} e(\psi, \bar{x}).$$

Поскольку $\kappa_2^0(N) \subset \kappa_2(N)$, то $\inf_{\bar{x} \in \kappa_2(N)} e(\psi, \bar{x}) \leq \inf_{\bar{x} \in \kappa_2^0(N)} e(\psi, \bar{x})$.

Рис. 5

Докажем неравенство в другую сторону. Для этого сравним приближение ψ для двух следующих расположений отрезков: $\bar{x}$ представляет собой две пересекающиеся цепи $\mathcal{J}_1[0, nd]$ и $\mathcal{J}_2[1 - md, 1]$, причем $1 - md \notin (0, d)$ (рис. 5, а), а расположение $\bar{x}^0$ представляет собой две цепи $\mathcal{J}_1^0[0, (m + n - M)d]$ и $\mathcal{J}_2^0[1 - Md, 1]$ (рис. 5, б). Число отрезков, участвующих в приближении функции в обоих случаях равно $n + m$. Число отрезков из $\mathcal{J}_1$, не пересекающихся с $\mathcal{J}_2$, равно $M - m$, число отрезков из $\mathcal{J}_2$, не пересекающихся с $\mathcal{J}_1$, равно $M - n$. Положим $u = 1 - Md$, $h = 1 - (2M - n - m)d$; $2K = 2(m + n - M)$ — число отрезков, участвующих в приближении ψ на $[0, h]$ при расположении отрезков $\bar{x}^0$.

Поскольку для любой функции f , любого действительного числа b и любого отрезка I длины l верно равенство

$$e(f, \mathcal{L}_1(l), I) = e(f + b, \mathcal{L}_1(l), I), \quad (2)$$

получаем

$$\begin{aligned} e^2(\psi, \bar{x}) &= \sum_{k=1}^{M-m} e^2(\psi, \mathcal{L}_1(d), [(k-1)d, kd]) + e^2(\psi, \bar{x}, [(M-m)d, 1 - (M-n)d]) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{M-n} e^2(\psi, \mathcal{L}_1(d), [1 - kd, 1 - kd + d]) \\ &= (2M - n - m)e^2(\psi, \mathcal{L}_1(d), [0, d]) + e^2(\psi + (M - m)d, \bar{x}^0, [0, h]). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$e^2(\psi, \bar{x}^0) = (2M - n - m)e^2(\psi, \mathcal{L}_1(d), [0, d]) + e^2(\psi, \bar{x}^0, [0, h]).$$

Сравним величины $e(\psi, \bar{x}^0, [0, h])$ и $e(\psi + (M - m)d, \bar{x}^0, [0, h])$. Для этого, используя формулу (1), получим

$$\begin{aligned} e^2(f, \bar{x}^0, [0, h]) &= \|f\|_{L^2[0, h]}^2 - F^T V^{-1} F, \\ F &= (\tilde{f}(0), \tilde{f}(u), \tilde{f}(d), \tilde{f}(u + d), \dots, \tilde{f}((K - 1)d), \tilde{f}(u + (K - 1)d))^T, \\ V &= \begin{pmatrix} d & d - u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d - u & d & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & d & d - u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d - u & d & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & d & d - u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d - u & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

– трехдиагональная матрица размером $2K \times 2K$. Обозначим

$$s_1 = \int_0^u f dt, \quad s_2 = \int_u^d f dt, \quad s_3 = \int_d^{u+d} f dt, \quad \dots, \quad s_{2K+1} = \int_{h-u}^h f dt.$$

Тогда

$$\tilde{f}(0) = s_1 + s_2, \quad \tilde{f}(u) = s_2 + s_3, \quad \dots, \quad \tilde{f}(u + (K - 1)d) = s_{2K} + s_{2K+1}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} e^2(f, \bar{x}^0, [0, h]) &= \left(\|f\|_{L^2[0, u]}^2 - \frac{s_1^2}{u} \right) + \left(\|f\|_{L^2[u, d]}^2 - \frac{s_2^2}{d - u} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\|f\|_{L^2[h-u, h]}^2 - \frac{s_{2K+1}^2}{u} \right) + \mathcal{H}(s_1, s_2, \dots, s_{2K+1}), \end{aligned}$$

где квадратичная форма $\mathcal{H}(s_1, s_2, \dots, s_{2K+1})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(s_1, s_2, \dots, s_{2K+1}) &= \left(\frac{s_1^2}{u} + \frac{s_2^2}{d - u} + \dots + \frac{s_{2K+1}^2}{u} \right) \\ &\quad - (s_1 + s_2, s_2 + s_3, \dots, s_{2K} + s_{2K+1}) V^{-1} (s_1 + s_2, s_2 + s_3, \dots, s_{2K} + s_{2K+1})^T. \end{aligned}$$

Обозначим $\lambda_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) V^{-1} (s_1 + s_2, s_2 + s_3, \dots, s_{2K} + s_{2K+1})^T$ (единица находится на i -й позиции в строке). Равенство нулю частных производных по s_i квадратичной формы $\mathcal{H}$ дает однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{s_1}{u} - \lambda_1 = 0 \\ \frac{s_2}{d - u} - \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \\ \frac{s_3}{u} - \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \\ \dots \dots \dots \frac{s_{2K}}{d - u} - \lambda_{2K} - \lambda_{2K-1} = 0 \\ \frac{s_{2K+1}}{u} - \lambda_{2K} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \frac{s_1}{u} = 0 \\ \lambda_2 + \frac{s_1}{u} - \frac{s_2}{d - u} = 0 \\ \lambda_3 - \frac{s_1}{u} + \frac{s_2}{d - u} - \frac{s_3}{u} = 0 \\ \dots \dots \dots \lambda_{2K} + \frac{s_1}{u} - \frac{s_2}{d - u} + \dots - \frac{s_{2K}}{d - u} = 0 \\ \frac{s_1}{u} - \frac{s_2}{d - u} + \dots + \frac{s_{2K+1}}{u} = 0. \end{cases}$$

Матрица системы размером $(2K + 1) \times (2K + 1)$ имеет вид

$$W = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,1} + b_{1,2} & b_{1,2} + b_{1,3} & \dots & b_{1,2K} \\ b_{2,1} & b_{2,1} + b_{2,2} & b_{2,2} + b_{2,3} & \dots & b_{2,2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2K,1} & b_{2K,1} + b_{2K,2} & b_{2K,2} + b_{2K,3} & \dots & b_{2K,2K} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{u} & & & & \\ \frac{1}{u} & \frac{-1}{d-u} & & & 0 \\ \frac{-1}{u} & \frac{1}{d-u} & \frac{-1}{u} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{u} & \frac{-1}{d-u} & \frac{1}{u} & \dots & \frac{-1}{d-u} \\ \frac{1}{u} & \frac{-1}{d-u} & \frac{1}{u} & \dots & \frac{-1}{d-u} & \frac{1}{u} \end{pmatrix},$$

где $b_{i,j}$ – соответствующие элементы матрицы V^{-1} . Поскольку верны следующие равенства для $l = 1, \dots, K$ (проверяются непосредственным вычислением):

$$\begin{aligned} b_{2l-1,1} - \frac{1}{u} &= b_{2l-1,2} + b_{2l-1,3} - \frac{1}{u} = \dots = b_{2l-1,2l-2} + b_{2l-1,2l-1} - \frac{1}{u} \\ &= b_{2l-1,2l} + b_{2l-1,2l+1} = \dots = b_{2l-1,2K-2} + b_{2l-1,2K-1} \\ &= b_{2l-1,2K} = \frac{u - ld}{u((K+1)d - u)}, \\ b_{2l-1,1} + b_{2l-1,2} + \frac{1}{d-u} &= \dots = b_{2l-1,2l-3} + b_{2l-1,2l-2} + \frac{1}{d-u} \\ &= b_{2l-1,2l-1} + b_{2l-1,2l} = \dots = b_{2l-1,2K-1} + b_{2l-1,2K} = -\frac{u - ld}{(d-u)((K+1)d - u)}, \\ b_{2l,1} + \frac{1}{u} &= b_{2l,2} + b_{2l,3} + \frac{1}{u} = \dots = b_{2l,2l-2} + b_{2l,2l-1} + \frac{1}{u} \\ &= b_{2l,2l} + b_{2l,2l+1} = \dots = b_{2l,2K-2} + b_{2l,2K-1} = b_{2l,2K} = \frac{ld}{u((K+1)d - u)}, \\ b_{2l,1} + b_{2l,2} - \frac{1}{d-u} &= \dots = b_{2l,2l-1} + b_{2l,2l} - \frac{1}{d-u} \\ &= b_{2l,2l+1} + b_{2l,2l+2} = \dots = b_{2l,2K-1} + b_{2l,2K} = -\frac{ld}{(d-u)((K+1)d - u)}, \end{aligned}$$

то первые $2K$ строк матрицы W пропорциональны последней. Таким образом, однородная система эквивалентна одному уравнению $\frac{s_1}{u} - \frac{s_2}{d-u} + \dots + \frac{s_{2K+1}}{u} = 0$. Отсюда следует, что квадратичная форма имеет вид

$$\mathcal{H} = c \left(\frac{s_1}{u} - \frac{s_2}{d-u} + \dots + \frac{s_{2K+1}}{u} \right)^2,$$

где c легко находится из уравнения $c \cdot \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u} - b_{1,1}$.

Получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} e^2(f, \bar{x}^0, [0, h]) &= e^2(f, \mathcal{L}_1(u), [0, u]) \\ &+ e^2(f, \mathcal{L}_1(d-u), [u, d]) + \dots + e^2(f, \mathcal{L}_1(u), [h-u, h]) \\ &+ \frac{u(d-u)}{(K+1)d-u} \left(\frac{s_1}{u} - \frac{s_2}{d-u} + \dots + \frac{s_{2K+1}}{u} \right)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $s_1, \dots, s_{2K+1}$ – соответствующие значения для ψ . Заметим, что

$$\frac{s_1}{u} - \frac{s_2}{d-u} + \dots + \frac{s_{2K+1}}{u} > 0.$$

Используя формулы (3) и (2), получаем

$$\begin{aligned} &e^2(\psi + (M-m)d, \bar{x}^0, [0, h]) - e^2(\psi, \bar{x}^0, [0, h]) \\ &= \frac{u(d-u)}{(K+1)d-u} \left(\left(\frac{s_1 + (M-m)du}{u} - \frac{s_2 + (M-m)d(d-u)}{d-u} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots + \frac{s_{2K+1} + (M-m)du}{u} \right)^2 - \left(\frac{s_1}{u} - \frac{s_2}{d-u} + \dots + \frac{s_{2K+1}}{u} \right)^2 \right) \\ &= \frac{u(d-u)}{(K+1)d-u} \left(\left(\frac{s_1}{u} - \frac{s_2}{d-u} + \dots + \frac{s_{2K+1}}{u} + (M-m)d \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{s_1}{u} - \frac{s_2}{d-u} + \dots + \frac{s_{2K+1}}{u} \right)^2 \right) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что $\inf_{\bar{x} \in \kappa_2(N)} e(\psi, \bar{x}) \geq \inf_{\bar{x} \in \kappa_2^0(N)} e(\psi, \bar{x})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Выполнено равенство $E_{N,d}(W) = e(\psi, \mathcal{L}_N(d))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\psi \in W$, то $E_{N,d}(W) \geq e(\psi, \mathcal{L}_N)$. Докажем неравенство в другую сторону. Заметим, что для любой функции $f \in W$ верны простые неравенства

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(I)} &\leq \|\psi\|_{L^2(I)}, & I &\subset [0, 1], \\ e(f, \mathcal{L}_1(l), I) &\leq e(\psi, \mathcal{L}_1(l), I), & I &\subset [0, 1], \quad |I| = l, \end{aligned}$$

а также

$$e(f, \mathcal{L}_N(d)) \leq e(f, \bar{x}^*). \quad (4)$$

Тогда если $N \leq M$, то

$$\begin{aligned} e^2(f, \bar{x}^*) &= \|f\|_{L^2[0, 1-Nd]}^2 + \sum_{i=1}^N e^2(f, \mathcal{L}_1(d), [1-id, 1-id+d]) \\ &\leq \|\psi\|_{L^2[0, 1-Nd]}^2 + \sum_{i=1}^N e^2(\psi, \mathcal{L}_1(d), [1-id, 1-id+d]) \\ &= e^2(\psi, \bar{x}^*) = e^2(\psi, \mathcal{L}_N(d)). \end{aligned} \quad (5)$$

Если $M < N \leq 2M$, то

$$e^2(f, \bar{x}^*) = e^2(f, \bar{x}^*, [0, h]) + \sum_{i=1}^{2M-N} e^2(f, \mathcal{L}_1(d), [1-id, 1-id+d]),$$

где $h = 1 - (2M - N)d$. Как и ранее, обозначим $u = 1 - Md$, а $2K = 2(N - M)$ – число отрезков из расположения $\bar{x}^*$, участвующих в приближении функции f на отрезке $[0, h]$. По формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} e^2(f, \bar{x}^*, [0, h]) &= e^2(f, \mathcal{L}_1(u), [0, u]) + e^2(f, \mathcal{L}_1(d-u), [u, d]) + \dots \\ &\dots + e^2(f, \mathcal{L}_1(u), [h-u, h]) + \frac{u(d-u)}{(K+1)d-u} \left(\frac{s_1}{u} - \frac{s_2}{d-u} + \dots + \frac{s_{2K+1}}{u} \right)^2. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \left| \frac{s_1}{u} - \frac{s_2}{d-u} + \dots + \frac{s_{2K+1}}{u} \right| &\leq \left| \frac{s_1}{u} - f(0) \right| + \left| \frac{s_2}{d-u} - f(d) \right| + \left| \frac{s_3}{u} - f(d) \right| + \dots \\ &\dots + \left| \frac{s_{2K+1}}{u} - f((K-1)d) \right| \leq \frac{u}{2} + \frac{d-u}{2} + \frac{u}{2} + \dots + \frac{d-u}{2} + \frac{u}{2} = \frac{Kd+u}{2}, \end{aligned}$$

причем равенство достигается на функции ψ , то

$$\begin{aligned} e^2(f, \bar{x}^*) &\leq e^2(\psi, \mathcal{L}_1(u), [0, u]) + e^2(\psi, \mathcal{L}_1(d-u), [u, d]) + \dots \\ &\dots + e^2(\psi, \mathcal{L}_1(u), [h-u, h]) + \frac{u(d-u)}{(K+1)d-u} \frac{(Kd+u)^2}{4} \\ &+ \sum_{i=1}^{2M-N} e^2(\psi, \mathcal{L}_1(d), [1-id, 1-id+d]) = e^2(\psi, \bar{x}^*) = e^2(\psi, \mathcal{L}_N(d)). \quad (6) \end{aligned}$$

Если $N > 2M$, то

$$e(f, \mathcal{L}_N(d)) \leq e(f, \mathcal{L}_{2M}(d)) \leq e(\psi, \bar{x}^*) = e(\psi, \mathcal{L}_N(d)).$$

Таким образом, показано, что $e(f, \bar{x}^*) \leq e(\psi, \mathcal{L}_N(d))$ для любой $f \in W$, что в совокупности с (4) дает утверждение леммы. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $W = \{f \in W_\infty^1, f(0) = 0, \|f\|_{W_\infty^1} \leq 1\}$, $M = [1/d]$. Тогда верна формула

$$E_{N,d}(W) = \begin{cases} \left(\frac{(1-Nd)^3 + Nd^3/4}{3} \right)^{1/2}, & N \leq M, \\ \left(\frac{(N-M+1)(1-Md)^3 + (N-M)((M+1)d-1)^3 + (2M-N)d^3}{12} + \frac{(1-Md)((M+1)d-1)(1-(2M-N)d)^2}{4((N+1)d-1)} \right)^{1/2}, & M < N \leq 2M, \\ E_{2M,d}(W), & N > 2M. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 2 и 3 для доказательства теоремы достаточно посчитать значение $e(\psi, \mathcal{L}_N(d)) = e(\psi, \bar{x}^*)$.

При $N \leq M$, используя (5), получаем

$$e^2(\psi, \bar{x}^*) = \int_0^{1-Nd} t^2 dt + 2N \int_0^{d/2} t^2 dt = \frac{(1-Nd)^3 + Nd^3/4}{3}.$$

При $M < N \leq 2M$, используя (6), имеем

$$\begin{aligned} e^2(\psi, \bar{x}^*) &= 2(K+1) \int_0^{u/2} t^2 dt + 2K \int_0^{(d-u)/2} t^2 dt \\ &\quad + \frac{u(d-u)}{(K+1)d-u} \frac{(Kd+u)^2}{4} + 2(2M-N) \int_0^{d/2} t^2 dt, \end{aligned}$$

где $u = 1 - Md$, $2K = 2(N - M)$. Отсюда

$$\begin{aligned} e^2(\psi, \bar{x}^*) &= \frac{1}{4} \left(\frac{(N-M+1)(1-Md)^3}{3} + \frac{(N-M)((M+1)d-1)^3}{3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-Md)((M+1)d-1)}{(N+1)d-1} (1-(2M-N)d)^2 + \frac{(2M-N)d^3}{3} \right) \end{aligned}$$

и $e(\psi, \mathcal{L}_N(d)) = e(\psi, \mathcal{L}_{2M}(d))$ при $N > 2M$. Теорема доказана.

Минимум функции $E_{N,d}(W)$ достигается при $d^* = \frac{1}{N+1/2}$ и равен $\frac{1}{\sqrt{3}(2N+1)}$. Графики функций $E_{1,d}(W)$, $E_{2,d}(W)$, $E_{3,d}(W)$ изображены на рис. 6.

Рис. 6

ТЕОРЕМА 2. Выполнено равенство $D_{N,d}(W) = E_{N,d}(W)$. Расположение отрезков $\bar{x}^*$ является оптимальным для приближения класса W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже было замечено, $D_{N,d}(W) \geq E_{N,d}(W)$. Докажем неравенство в другую сторону:

$$D_{N,d}(W) \leq \sup_{f \in W} e(f, \bar{x}^*) = e(\psi, \bar{x}^*) = E_{N,d}(W).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\widetilde{W} = \{f \in W_\infty^1, f(0) = f(1) = 0, \|f\|_{W_\infty^1} \leq 1\}$. Тогда верны следующие оценки:

$$\begin{aligned} E_{2N,d}(\widetilde{W}) &\leq D_{2N,d}(\widetilde{W}) \leq \frac{1}{2} E_{N,2d}(W) \quad \text{при} \quad d \leq \frac{1}{2}, \\ E_{2N+1,d}(\widetilde{W}) &\leq D_{2N+1,d}(\widetilde{W}) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d^3}{3} + (1-d)^3 E_{N,\frac{2d}{1-d}}^2(W)} \quad \text{при} \quad d \leq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W[0, l] = \{f \in W_\infty^1[0, l], f(0) = 0, \|f\|_{W_\infty^1} \leq 1\}$.

Докажем первое неравенство. Обозначим $X_1 = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2n}): x_n \leq \frac{1}{2} - d, x_{n+1} \geq \frac{1}{2}, n \leq N\}$. Тогда

$$D_{2N,d}^2(\widetilde{W}) \leq \inf_{\bar{x} \in X_1} \sup_{f \in \widetilde{W}} e^2(f, \bar{x}) = 2D_{N,d}^2\left(W\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} E_{N,2d}(W)\right)^2.$$

Докажем второе неравенство. Обозначим $X_2 = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}): x_{n+1} = \frac{1-d}{2}, x_n \leq \frac{1-3d}{2}, x_{n+2} \geq \frac{1+d}{2}, n \leq N\}$. Тогда

$$\begin{aligned} D_{2N+1,d}^2(\widetilde{W}) &\leq \inf_{\bar{x} \in X_2} \sup_{f \in \widetilde{W}} e^2(f, \bar{x}) \\ &\leq D_{1,d}^2(W[0, d]) + 2D_{N,d}^2\left(W\left[0, \frac{1-d}{2}\right]\right) = \frac{d^3}{12} + \frac{(1-d)^3}{4} E_{N,\frac{2d}{1-d}}^2(W). \end{aligned}$$

Следствие доказано.

§ 2. Приближение для функций из пространства W_2^1

Пусть $W = \{f \in W_2^1[0, 1], f(0) = 0, \|f\|_{W_2^1} \leq 1\}$ и $\Upsilon = \{f \in W_2^1[0, 1], \|f\|_{W_2^1} \leq 1\}$.

ЛЕММА 4. Выполнены равенства

$$\begin{aligned} E_{N,1}(W) &= D_{N,1}(W) = D_{1,1}(W) = d_1(\Upsilon, L^2[0, 1]) = \frac{1}{\pi}, \\ E_{N,0}(W) &= D_{N,0}(W) = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [2]), что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} &= d_1(\Upsilon, L^2[0, 1]) \\ &= \inf_{M \in \text{Lin}_1(L^2[0, 1])} \left(\sup_{f \in \Upsilon} \inf_{\varphi \in M} \|f - \varphi\|_{L^2[0, 1]} \right) = \sup_{f \in \Upsilon} \inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_{L^2[0, 1]}. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу равенства (2)

$$\sup_{f \in \Upsilon} \inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_{L^2[0,1]} = \sup_{f \in W} \inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_{L^2[0,1]} = E_{1,1}(W) = E_{N,1}(W) = D_{N,1}(W).$$

Функцией, на которой реализуется значение $E_{N,1}(W)$, является $f^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times (1 - \cos(\pi t))$ (это проверяется непосредственным вычислением $e(f^*, \mathcal{L}_1(1))$).

Поскольку класс W представляет собой центрально-симметричное множество (см. [2, гл. 3] и [9]),

$$E_{N,0}(W) = \sup_{f \in W} \|f\|_{L^2[0,1]} = \left\| \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2} \right\|_{L^2[0,1]} = \frac{2}{\pi}.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Имеем*

$$E_{N,d}(W) = D_{N,d}(W) = \begin{cases} \frac{2(1 - Nd)}{\pi}, & d \in \left[0, \frac{1}{N + 1/2}\right], \\ \frac{d}{\pi}, & d \in \left[\frac{1}{N + 1/2}, \frac{1}{N}\right]. \end{cases}$$

При $d \leq \frac{1}{N}$ оптимальным расположением отрезков для приближения класса W является $\bar{x}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $I_k = [1 - (N - k + 1)d, 1 - (N - k)d]$, $k = 1, \dots, N$. Тогда

$$\begin{aligned} e^2(f, \mathcal{L}_N(d)) &\leq e^2(f, \bar{x}^*) \leq \|f\|_{L^2[0,1-Nd]}^2 + \sum_{k=1}^N e^2(f, \mathcal{L}_1(d), I_k) \\ &\leq E_{1,0}^2(W[0, 1 - Nd])\alpha^2 + \sum_{k=1}^N E_{1,d}^2(W(I_k))\beta_k^2 = T, \end{aligned}$$

где $\|f\|_{W_2^1[0,1-Nd]} = \alpha$, а $\|f\|_{W_2^1(I_k)} = \beta_k$, $\alpha^2 + \sum_{k=1}^N \beta_k^2 \leq 1$. Тогда по лемме 4 имеем

$$T = \frac{4(1 - Nd)^2}{\pi^2} \alpha^2 + \sum_{k=1}^N \frac{d^2}{\pi^2} \beta_k^2 \leq \begin{cases} \frac{4(1 - Nd)^2}{\pi^2}, & d \in \left[0, \frac{1}{N + 1/2}\right], \\ \frac{d^2}{\pi^2}, & d \in \left[\frac{1}{N + 1/2}, \frac{1}{N}\right]. \end{cases} \quad (7)$$

При $d \in \left[0, \frac{1}{N + 1/2}\right]$ для функции

$$f^* = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2(1 - Nd)}}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2(1 - Nd)}, & t \in [0, 1 - Nd], \\ \frac{2\sqrt{2(1 - Nd)}}{\pi}, & t \in [1 - Nd, 1], \end{cases}$$

верно $e(f^*, \mathcal{L}_N(d)) = e(f^*, \bar{x}^*) = \frac{2(1 - Nd)}{\pi}$.

При $d \in [\frac{1}{N+1/2}, \frac{1}{N}]$ для функции

$$f^* = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1 - Nd], \\ \sqrt{\frac{2d}{N}} \frac{1}{\pi} \left(2k - 1 + (-1)^{N-k} \cos \frac{\pi(t-1)}{d} \right), & t \in I_k, \quad k = 1, \dots, N, \end{cases}$$

верно $e(f^*, \mathcal{L}_N(d)) = e(f^*, \bar{x}^*) = \frac{d}{\pi}$ (см. рис. 7, где функция f^* монотонно возрастающая, функция $\tilde{f}^*(x)$ линейная на отрезке $[1 - Nd, 1 - d]$, так как $(\tilde{f}^*)'(x) = f^*(x + d) - f^*(x) = f^*(1 - Nd + d)$, поэтому можно воспользоваться формулой (1') и леммой 1).

Рис. 7

Учитывая оценки (7) сверху для $E_{N,d}$, получаем

$$E_{N,d}(W) = \begin{cases} \frac{2(1 - Nd)}{\pi}, & d \in \left[0, \frac{1}{N+1/2}\right], \\ \frac{d}{\pi}, & d \in \left[\frac{1}{N+1/2}, \frac{1}{N}\right]. \end{cases}$$

При этих условиях ($d \leq \frac{1}{N}$) имеем

$$D_{N,d}(W) = \inf_{\bar{x}} \sup_{f \in W} e(f, \bar{x}) \leq \sup_{f \in W} e(f, \bar{x}^*) \leq e(f^*, \bar{x}^*) = E_{N,d}(W).$$

С другой стороны, по определению имеем $D_{N,d}(W) \geq E_{N,d}(W)$. Таким образом, $D_{N,d}(W) = E_{N,d}(W)$, а $\bar{x}^*$ – оптимальное расположение отрезков. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Определим $\lambda(d)$ как максимальное положительное решение уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{1-d}{\lambda} + 2 \operatorname{tg} \frac{2d-1}{\lambda} = 0$$

при $d \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \cup (\frac{2}{3}, 1]$ и $\lambda(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3\pi}$. Тогда при $d \in [\frac{1}{2}, 1]$ и $N \geq 2$

$$E_{N,d}(W) = D_{N,d}(W) = \lambda(d).$$

Оптимальным расположением отрезков для приближения класса W при $d \geq \frac{1}{2}$ является $\bar{x}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N \geq 2$, а $\frac{1}{2} < d < 1$. Используя формулу (3), получаем

$$e^2(f, \mathcal{L}_N(d)) \leq e^2(f, \bar{x}^*) = \int_0^{1-d} \left(f - \frac{s_1}{1-d}\right)^2 dt + \int_{1-d}^d \left(f - \frac{s_2}{2d-1}\right)^2 dt + \int_d^1 \left(f - \frac{s_3}{1-d}\right)^2 dt + \left(\frac{(1-d)(2d-1)}{3d-1}\right) \left(\frac{s_1}{1-d} - \frac{s_2}{2d-1} + \frac{s_3}{1-d}\right)^2,$$

где $s_1 = \int_0^{1-d} f dt$, $s_2 = \int_{1-d}^d f dt$, $s_3 = \int_d^1 f dt$.

Рассмотрим преобразование $\Psi(f)$ (преобразованную функцию запишем в виде разложения в ряд Фурье):

$$\Psi(f) = g(t) = \begin{cases} f(t) = \sum_{n=1,3,\dots} u_n \sin \frac{\pi n t}{2(1-d)}, & t \in [0, 1-d], \\ f(d) - f(1-t) = \sum_{n=1,3,\dots} w_n \sin \frac{\pi n(t-1+d)}{2(2d-1)}, & t \in [1-d, d], \\ f(t) - f(d) = \sum_{n=1,3,\dots} v_n \sin \frac{\pi n(t-d)}{2(1-d)}, & t \in [d, 1], \end{cases}$$

$$\|\Psi(f)\|_{W_2^1[0,1-d]}^2 + \|\Psi(f)\|_{W_2^1[1-d,d]}^2 + \|\Psi(f)\|_{W_2^1[d,1]}^2 = \|f\|_{W_2^1}^2 \leq 1.$$

Поскольку $f \in W_2^1$, ряд Фурье для $g = \Psi(f)$ сходится к g равномерно, ряд Фурье для g' сходится к g' в среднем квадратичном на каждом из интервалов $[0, 1-d]$, $[1-d, d]$, $[d, 1]$. Тогда

$$\sup_{f \in W} e^2(f, \bar{x}^*) = \sup_{u_n, w_n, v_n} \int_0^{1-d} (g - A)^2 dt + \int_{1-d}^d (g - B)^2 dt + \int_d^1 (g - C)^2 dt + \frac{(2d-1)(1-d)}{3d-1} (A + B + C)^2,$$

где A, B, C – средние интегральные функции g на отрезках $[0, 1-d]$, $[1-d, d]$, $[d, 1]$ соответственно, а супремум находится при условии

$$\sum_{n=1,3,\dots} \frac{(\pi n)^2}{8(1-d)} u_n^2 + \frac{(\pi n)^2}{8(2d-1)} w_n^2 + \frac{(\pi n)^2}{8(1-d)} v_n^2 = \|f\|_{W_2^1}^2 = 1.$$

Подставим в $\sup e^2(f, \bar{x}^*)$ выражение g в виде ряда и $A = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{2}{\pi n} u_n$, $B = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{2}{\pi n} w_n$, $C = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{2}{\pi n} v_n$ и выпишем функцию Лагранжа рассматриваемой задачи:

$$L = \frac{1-d}{2} \sum_{n=1,3,\dots} u_n^2 - (1-d) \left(\sum_{n=1,3,\dots} \frac{2}{\pi n} u_n \right)^2 + \frac{2d-1}{2} \sum_{n=1,3,\dots} w_n^2 - (2d-1) \left(\sum_{n=1,3,\dots} \frac{2}{\pi n} w_n \right)^2 + \frac{1-d}{2} \sum_{n=1,3,\dots} v_n^2 - (1-d) \left(\sum_{n=1,3,\dots} \frac{2}{\pi n} v_n \right)^2 + \frac{(2d-1)(1-d)}{3d-1} \left(\sum_{n=1,3,\dots} \frac{2}{\pi n} (u_n + w_n + v_n) \right)^2 - \mu \left(\sum_{n=1,3,\dots} \frac{(\pi n)^2}{8(1-d)} u_n^2 + \frac{(\pi n)^2}{8(2d-1)} w_n^2 + \frac{(\pi n)^2}{8(1-d)} v_n^2 - 1 \right).$$

Используя необходимое условие экстремума, получим

$$u_n = \frac{\frac{4}{\pi n} \left(\frac{2d-1}{3d-1} (A+B+C) - A \right)}{\mu \left(\frac{\pi n}{2(1-d)} \right)^2 - 1},$$

$$v_n = \frac{\frac{4}{\pi n} \left(\frac{2d-1}{3d-1} (A+B+C) - C \right)}{\mu \left(\frac{\pi n}{2(1-d)} \right)^2 - 1}.$$

Если при некотором n_0 знаменатель дроби в выражениях для u_n и v_n обращается в нуль, то $A = C$. В противном случае получаем

$$\left(\sum_{n=1,3,\dots} \frac{8}{\pi^2 n^2} \frac{1}{\mu \left(\frac{\pi n}{2(1-d)} \right)^2 - 1} \right) \left(\frac{2d-1}{3d-1} (A+B+C) - A \right) = A,$$

$$\left(\sum_{n=1,3,\dots} \frac{8}{\pi^2 n^2} \frac{1}{\mu \left(\frac{\pi n}{2(1-d)} \right)^2 - 1} \right) \left(\frac{2d-1}{3d-1} (A+B+C) - C \right) = C.$$

Если $\sum_{n=1,3,\dots} \frac{8}{\pi^2 n^2} \frac{1}{\mu \left(\frac{\pi n}{2(1-d)} \right)^2 - 1} = 0$, то $A = C = 0$, иначе разделим первое уравнение на второе и получим либо $A + B + C = 0$ (этот случай не является экстремальным), либо опять $A = C$. Условие $A = C$ влечет равенства $u_n = v_n$ для любого n . Значит, для экстремальной функции выполнено $f^*(t) = f^*(t-d) + f^*(d)$ при $t \in [d, 1]$. Отсюда получаем, что $\tilde{f}^*(x)$ – линейная функция и для любого $N \geq 2$ верно

$$E_{N,d}(W) \geq e(f^*, \mathcal{L}_N(d)) = e(f^*, \mathcal{L}_2(d)) = e(f^*, \bar{x}^*) = \sup_{f \in W} e(f, \bar{x}^*) \geq E_{N,d}(W).$$

Таким образом, $E_{N,d}(W) = e(f^*, \mathcal{L}_N(d)) = e(f^*, \bar{x}^*)$. В то же время

$$D_{N,d}(W) \leq \sup_{f \in W} e(f, \bar{x}^*) = e(f^*, \bar{x}^*) = E_{N,d}(W) \leq D_{N,d}(W),$$

значит, $D_{N,d}(W) = E_{N,d}(W)$.

Задача сводится к нахождению супремума положительно определенной квадратичной формы

$$\sum_{n=1,3,\dots} U_n^2 + \sum_{n=1,3,\dots} W_n^2 - \left(\sum_{n=1,3,\dots} U_n \kappa_n + \sum_{n=1,3,\dots} W_n \tau_n \right)^2$$

при условии

$$\sum_{n=1,3,\dots} U_n^2 \zeta_n + \sum_{n=1,3,\dots} W_n^2 \eta_n = 1,$$

где $U_n = u_n \sqrt{1-d}$, $W_n = w_n \sqrt{d - \frac{1}{2}}$, $\kappa_n = \frac{\sqrt{1-d}}{\pi n} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3d-1}}$, $\tau_n = -\frac{\sqrt{d-1/2}}{\pi n} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3d-1}}$, $\zeta_n = \frac{\pi^2 n^2}{4(1-d)^2}$, $\eta_n = \frac{\pi^2 n^2}{4(2d-1)^2}$.

ЛЕММА 5. Пусть $0 < |a_n| < \frac{a}{n}$, $cn^2 < b_n \leq b_{n+1}$, $\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \right)^2$ – положительно определенная квадратичная форма. Тогда ее максимум при условии $\sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n^2 = 1$ равен максимальному положительному решению C уравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1-Cb_n} = 1$, если $b_1 < b_2$, или равен $\frac{1}{b_1}$, если $b_1 = b_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При данных в условии леммы ограничениях на a_n и b_n все рассматриваемые ниже ряды сходятся абсолютно.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \right)^2 - C \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n^2 - 1 \right).$$

В силу положительной определенности квадратичной формы $\mathcal{H}$ необходимое условие экстремума (равенство нулю частных производных) является достаточным. Необходимое условие экстремума дает равенства

$$(1 - Cb_k)h_k = a_k \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если $U = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \neq 0$, то $1 - Cb_k \neq 0$, $h_k = \frac{a_k}{1 - Cb_k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \right)$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k h_k &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1 - Cb_k} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \right), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1 - Cb_n} &= 1, \quad \frac{1}{U^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 b_n}{(1 - Cb_n)^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{(1 - Cb_n)^2} U^2 - U^2 = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{(1 - Cb_n)^2} - 1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 b_n}{(1 - Cb_n)^2}} = C.$$

Уравнение $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1 - Cb_n} = 1$ на любом интервале $(\frac{1}{b_{k+1}}, \frac{1}{b_k})$ при $b_k \neq b_{k+1}$ имеет единственное решение (так как выполнено равенство $\sum_{n \leq k} \frac{a_n^2}{1 - Cb_n} = 1 - \sum_{n > k} \frac{a_n^2}{1 - Cb_n}$ двух положительных непрерывных функций от переменной C , левая часть монотонно возрастает и стремится к $+\infty$ при $C \rightarrow \frac{1}{b_k}$, правая часть монотонно убывает и стремится к $+\infty$ при $C \rightarrow \frac{1}{b_{k+1}}$). Значит, максимальное решение C данного уравнения принадлежит интервалу $(\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1})$ при $b_1 \neq b_2$ или $C < \frac{1}{b_1}$ при $b_1 = b_2$.

В случае $U = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n = 0$ множество $H = \{n: h_n \neq 0\}$ конечно в силу условий для b_k . При этом если $m, k \in H$, то $b_k = b_m = b$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n^2 = b \sum_{n \in H} h_n^2 = 1$ и квадратичная форма $\mathcal{H}$ принимает значение $\frac{1}{b}$. Значит, если $U = 0$ и $1 \notin H$, то $\mathcal{H} \leq \frac{1}{b_2}$, т. е. максимум $\mathcal{H}$ достигается в случае $U \neq 0$. Если $U = 0$ и $1 \in H$, то $b_1 = b_2$ и максимальное значение формы $\mathcal{H}$ равно $\frac{1}{b_1}$. Лемма доказана.

Применим лемму 5 к решению нашей задачи и получим, что при $d \neq \frac{2}{3}$ (случай $\zeta_1 \neq \eta_1$) выполнено $\sup_{f \in W} e(f, \bar{x}^*) = C$, где C – максимальное положительное решение уравнения

$$\sum_{n=1,3,\dots} \frac{1-d}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - C \frac{\pi^2 n^2}{4(1-d)^2}} + \sum_{n=1,3,\dots} \frac{(d-1/2)4}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - C \frac{\pi^2 n^2}{4(2d-1)^2}} = \frac{3d-1}{8}, \quad (8)$$

при $d = \frac{2}{3}$ (случай $\zeta_1 = \eta_1$) выполнено $\sup_{f \in W} e(f, \bar{x}^*) = \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2$.

Обозначим $C = \lambda^2$ и преобразуем выражение (8), используя формулу

$$\sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{t^2 - n^2} = -\frac{\pi}{4t} \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2}.$$

Получим уравнение $\operatorname{tg} \frac{1-d}{\lambda} + 2 \operatorname{tg} \frac{2d-1}{\lambda} = 0$. При этом $\lambda(d) = \frac{d}{\pi}$ при $d = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$, $\lambda(d) > \frac{d}{\pi}$ при $d \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ и $\lambda(d) < \frac{d}{\pi}$ при $d \in (\frac{2}{3}, 1)$, причем функция $\lambda(d)$ монотонно возрастает на обоих интервалах. Теорема доказана.

Графики функций $E_{1,d}(W)$ и $E_{2,d}(W)$ изображены на рис. 8.

Рис. 8

Используя теорему Колмогорова о поперечниках для компактных эллипсоидов в гильбертовом пространстве [9], можно получить значения

$$d_N(W, L^2[0, 1]) = \frac{2}{\pi(2N+1)},$$

которые совпадают со значениями $D_{N,d}(W)$ при $d = \frac{1}{N+1}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $M = \lceil \frac{1}{d} \rceil \geq 2$, $d \in [\frac{1}{M+1}, \frac{1}{M}]$. Определим величины

$$C_1(M, d) = \frac{d}{\pi} \sqrt{\frac{1 - \frac{3d}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{d} + 2 \frac{((M+1)d-1)(1-Md)}{(2M+1)d-1} \cos^2 \frac{\pi}{d}}{1 - \frac{d}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{d}}},$$

$$C_2(M, d) = \begin{cases} \lambda \left(\frac{d}{1 - (M-1)d} \right) (1 - (M-1)d), & d \in \left[\frac{1}{M+1}, \frac{1}{M+1/2} \right], \\ \frac{d}{\pi}, & d \in \left[\frac{1}{M+1/2}, \frac{1}{M} \right]. \end{cases}$$

Тогда для любого $N > M$ верна оценка

$$C_1(M, d) \leq E_{N,d}(W) \leq D_{N,d}(W) \leq C_2(M, d).$$

Верно также, что $C_2(M, d) = C_1(M, d)$ при $d = \frac{1}{M+1}, \frac{1}{M+1/2}, \frac{1}{M}$,

$$C_2(M, d) - C_1(M, d) \leq \begin{cases} d \left(\frac{2}{3\pi - 4 \arctg \sqrt{2}} - \frac{1}{\pi} \right), & d \in \left[\frac{1}{M+1}, \frac{1}{M+1/2} \right], \\ d^2 \left(\frac{1}{2\pi^2 - \pi/2} \right) + o\left(\frac{1}{M^2}\right), & d \in \left[\frac{1}{M+1/2}, \frac{1}{M} \right], \quad M \rightarrow \infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $f \in W$ имеем

$$\begin{aligned} e^2(f, \mathcal{L}_{M+1}(d, \bar{x}^*)) &= e^2(f, \mathcal{L}_2(d, \bar{x}^*), [0, 1 - (M-1)d]) + e^2(f, \mathcal{L}_{M-1}(d, \bar{x}^*), [1 - (M-1)d, 1]) \\ &\leq \lambda^2 \left(\frac{d}{1 - (M-1)d} \right) (1 - (M-1)d)^2 \alpha^2 + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{d^2}{\pi^2} \beta_k^2, \end{aligned}$$

где $\|f\|_{W[0, 1 - (M-1)d]} = \alpha$, $\|f\|_{W[1 - kd, 1 - kd + d]} = \beta_k$, $\alpha^2 + \sum_{k=1}^{M-1} \beta_k^2 = 1$. Тогда

$$e(f, \mathcal{L}_{M+1}(d, \bar{x}^*)) \leq \begin{cases} \lambda \left(\frac{d}{1 - (M-1)d} \right) (1 - (M-1)d), & d \in \left[\frac{1}{M+1}, \frac{1}{M+1/2} \right], \\ \frac{d}{\pi}, & d \in \left[\frac{1}{M+1/2}, \frac{1}{M} \right]. \end{cases}$$

В совокупности с неравенствами

$$E_{N,d}(W) \leq D_{N,d}(W) \leq D_{M+1,d}(W) \leq \sup_{f \in W} e(f, \mathcal{L}_{M+1}(d, \bar{x}^*))$$

это дает оценку $E_{N,d}(W) \leq D_{N,d}(W) \leq C_2(M, d)$.

Оценим снизу величины $E_{N,d}(W)$ и $D_{N,d}(W)$. Рассмотрим функцию

$$f^* = \begin{cases} (-1)^{M+1} \left(\cos \frac{\pi}{d} - \cos \frac{\pi(t-1)}{d} \right), & t \in [0, 1 - Md], \\ 2k + (-1)^{M+1} \cos \frac{\pi}{d} + (-1)^{k+1} \cos \frac{\pi(t-1)}{d}, & t \in I_k, \quad k = 1, \dots, M, \end{cases}$$

где $I_k = [1 - (M+1-k)d, 1 - (M-k)d]$. Поскольку $\tilde{f}^*(x)$ — линейная функция $((\tilde{f}^*)'(x) = f^*(x+d) - f^*(x) = 2)$, то

$$E_{N,d}(W) \geq \frac{e(f^*, \mathcal{L}_N(d))}{\|f^*\|_{W_2^1}} \geq \frac{e(f^*, \mathcal{L}_{2M}(d))}{\|f^*\|_{W_2^1}} = \frac{e(f^*, \mathcal{L}_{2M}(d, \bar{x}^*))}{\|f^*\|_{W_2^1}} = C_1(M, d).$$

Вычислим $C_1(M, d)$:

$$\|f^*\|_{W_2^1}^2 = \left(\frac{\pi}{d} \right)^2 \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi t}{d} dt = \frac{\pi^2}{2d^2} \left(1 - \frac{d}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{d} \right).$$

Значение $e(f^*, \mathcal{L}_{2M}(d, \bar{x}^*))$ получаем, применяя формулу (3) и используя

специального вида функции f^* (для которых $s_{2i+1} = s_1 + 2iu$, $s_{2i} = s_2 + 2(i-1)(d-u)$, $i = 1, \dots, M$):

$$\begin{aligned} e^2(f^*, \mathcal{L}_{2M}(d, \bar{x}^*)) &= (M+1) \left(\int_0^u (f^*)^2 dt - \frac{s_1^2}{u} \right) + M \left(\int_u^d (f^*)^2 dt - \frac{s_2^2}{d-u} \right) \\ &+ \frac{u(d-u)}{(M+1)d-u} \left((M+1) \frac{s_1}{u} - M \frac{s_2}{d-u} + 2M \right)^2, \end{aligned}$$

где $u = 1 - Md$, $s_1 = \int_0^u f^* dt$, $s_2 = \int_u^d f^* dt$. После вычисления имеем

$$e^2(f^*, \mathcal{L}_{2M}(d, \bar{x}^*)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3d}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{d} + 2 \frac{((M+1)d-1)(1-Md)}{(2M+1)d-1} \cos^2 \frac{\pi}{d} \right),$$

откуда получаем значение $C_1(M, d)$. Заметим, что $C_2(M, d) = C_1(M, d)$ при $d = \frac{1}{M+1}$, $\frac{1}{M+1/2}$, $\frac{1}{M}$.

Оценим разность $C_2(M, d) - C_1(M, d)$. При $d \in [\frac{1}{M+1/2}, \frac{1}{M}]$ верно следующее:

$$\begin{aligned} C_2(m, d) - C_1(m, d) &\leq \frac{d}{\pi} - \frac{d}{\pi} \sqrt{\frac{1 - \frac{3d}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{d}}{1 - \frac{d}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{d}}} = \frac{d^2}{2\pi^2} \frac{\sin \frac{2\pi}{d}}{1 - \frac{d}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{d}} + o\left(\frac{1}{M^2}\right) \\ &\leq d^2 \left(\frac{1}{2\pi^2 - \frac{\pi}{2}} \right) + o\left(\frac{1}{M^2}\right) \end{aligned}$$

при $M \rightarrow \infty$.

При $d \in [\frac{1}{M+1}, \frac{1}{M+1/2}]$ получаем

$$\begin{aligned} C_2(M, d) - C_1(M, d) &\leq \lambda \left(\frac{d}{1 - (M-1)d} \right) (1 - (M-1)d) - \frac{d}{\pi} \sqrt{\frac{1 - \frac{3d}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{d}}{1 - \frac{d}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{d}}} \\ &\leq d \max_{x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]} \frac{\lambda(x)}{x} - \frac{d}{\pi} \leq d \left(\frac{2}{3\pi - 4 \arctg \sqrt{2}} - \frac{1}{\pi} \right). \end{aligned}$$

В последнем неравенстве использовались формула $\operatorname{tg} \frac{1-x}{\lambda} + 2 \operatorname{tg} \frac{2x-1}{\lambda} = 0$ и свойства λ . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\widetilde{W} = \{f \in W_2^1, f(0) = f(1) = 0, \|f\|_{W_2^1} \leq 1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} E_{N,d}(\widetilde{W}) &= D_{N,d}(\widetilde{W}) = \frac{1 - Nd}{\pi} \quad \text{при } d \in \left[0, \frac{1}{N+1}\right], \\ E_{N,d}(\widetilde{W}) &\leq D_{N,d}(\widetilde{W}) \leq \begin{cases} \frac{d}{\pi}, & d \in \left[\frac{1}{N+1}, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{1}{2\pi}, & d \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in \widetilde{W}$, то

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1,3,\dots} f_n \sin(\pi n t) + \sum_{n=2,4,\dots} f_n \sin(\pi n t) = f^{\text{неч}}(t) + f^{\text{чет}}(t), \\ e^2(f, \mathcal{L}_1(d)) &\leq \|f\|_{L^2[0,1]}^2 - \frac{1}{d} \left(\tilde{f} \left(\frac{1-d}{2} \right) \right)^2 = \|f\|_{L^2[0,1]}^2 - \frac{1}{d} \left(\tilde{f}^{\text{неч}} \left(\frac{1-d}{2} \right) \right)^2 \\ &\leq \|f^{\text{чет}}\|_{L^2[0, \frac{1-d}{2}]}^2 + 2\|f^{\text{неч}}\|_{L^2[0, \frac{1-d}{2}]}^2 + e^2 \left(f^{\text{неч}}, \mathcal{L}_1(d), \left[\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2} \right] \right) \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \gamma^2 + \frac{(1-d)^2}{\pi^2} \beta^2 + \frac{d^2}{4\pi^2} \alpha^2 \leq \begin{cases} \frac{(1-d)^2}{\pi^2}, & d \in \left[0, \frac{1}{2} \right], \\ \frac{1}{4\pi^2}, & d \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \end{cases} \end{aligned}$$

где $\alpha = \|f^{\text{неч}}\|_{W_2^1[\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}]}$, $\beta = \|f^{\text{неч}}\|_{W_2^1[0, \frac{1-d}{2}] \cup [\frac{1+d}{2}, 1]}$, $\gamma = \|f^{\text{чет}}\|_{W_2^1[0,1]}$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq 1$.

При $Nd \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} e^2(f, \mathcal{L}_N(d)) &\leq \|f\|_{L^2[0, \frac{1-Nd}{2}]}^2 + \|f\|_{L^2[\frac{1+Nd}{2}, 1]}^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^N e^2 \left(f, \mathcal{L}_1(d), \left[\frac{1-Nd}{2} + (k-1)d, \frac{1-Nd}{2} + kd \right] \right) \\ &\leq \frac{(1-Nd)^2}{\pi^2} \alpha^2 + \frac{d^2}{\pi^2} \beta^2 \leq \begin{cases} \frac{(1-Nd)^2}{\pi^2}, & d \in \left[0, \frac{1}{N+1} \right], \\ \frac{d^2}{\pi^2}, & d \in \left[\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N} \right], \end{cases} \end{aligned}$$

где $\alpha = \|f\|_{W_2^1[0, \frac{1-Nd}{2}] \cup [\frac{1+Nd}{2}, 1]}$, $\beta = \|f\|_{W_2^1[\frac{1-Nd}{2}, \frac{1+Nd}{2}]}$, $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$. Значит,

$$E_{N,d}(\widetilde{W}) \leq D_{N,d}(\widetilde{W}) \leq \sup_{f \in \widetilde{W}} e(f, \mathcal{L}_N(d, \bar{x}^{**})) \leq \begin{cases} \frac{1-Nd}{\pi}, & d \in \left[0, \frac{1}{N+1} \right], \\ \frac{d}{\pi}, & d \in \left[\frac{1}{N+1}, \frac{1}{2} \right], \\ \frac{1}{2\pi}, & d \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \end{cases}$$

где $\bar{x}^{**} = (\frac{1-Nd}{2}, \frac{1-Nd}{2} + d, \frac{1-Nd}{2} + 2d, \dots, \frac{1+Nd}{2} - d)$.

С другой стороны, при $d \in [0, \frac{1}{N+1}]$ и симметричной относительно прямой $t = \frac{1}{2}$ функции

$$f^*(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2(1-Nd)}}{\pi} \sin \frac{\pi t}{1-Nd}, & d \in \left[0, \frac{1-Nd}{2} \right], \\ \frac{\sqrt{2(1-Nd)}}{\pi}, & d \in \left[\frac{1-Nd}{2}, \frac{1}{2} \right], \end{cases}$$

верно равенство $e(f^*, \mathcal{L}_N(d)) = \frac{1-Nd}{\pi}$. Теорема доказана.

Используя теорему о поперечниках Колмогорова для компактных эллипсоидов в гильбертовом пространстве (см. [9]), можно получить значения $d_N(\widetilde{W}, L^2[0, 1]) = \frac{1}{\pi(N+1)}$, которые совпадают с $D_{N,d}(\widetilde{W})$ при $d = \frac{1}{N+1}$.

Следующее предложение будет использовано в § 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $\bar{x} = (t, t + d, t + 2d, \dots, t + (N - 1)d)$, где $0 \leq t \leq \frac{d}{2}$ и $0 \leq 1 - (t + Nd) \leq \frac{d}{2}$, для любой функции $f \in \widetilde{W}$ верно

$$e(f, \mathcal{L}_N(d, \bar{x})) \leq \frac{d}{\pi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{x} = (t, t + d, t + 2d, \dots, t + (N - 1)d)$, то

$$\begin{aligned} e^2(f, \mathcal{L}_N(d, \bar{x})) &\leq E_{1,0}^2(W[0, t]) \|f\|_{W[0, t]}^2 \\ &+ \sum_{k=1}^N E_{1,d}^2(W[0, d]) \|f\|_{W(I_k)}^2 + E_{1,0}^2(W[0, 1 - (t + Nd)]) \|f\|_{W[t + Nd, 1]}^2, \end{aligned}$$

где $I_k = [t + (k - 1)d, t + kd]$. Отсюда при помощи леммы 4 получаем

$$\begin{aligned} e^2(f, \mathcal{L}_N(d, \bar{x})) &\leq \frac{4t^2}{\pi^2} \|f\|_{W[0, t]}^2 + \frac{d^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \|f\|_{W(I_k)}^2 \\ &+ \frac{4(1 - (t + Nd))^2}{\pi^2} \|f\|_{W[t + Nd, 1]}^2 \leq \frac{d^2}{\pi^2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Вопросы устойчивости и единственности решений нелинейного дифференциального уравнения второго порядка при наличии дополнительной информации о решениях

Пусть на отрезке $\Omega = [0, 1]$ задано дифференциальное уравнение 2-го порядка $u'' = F(x, u, u')$. Предполагаем, что решения этого уравнения принадлежат пространству $W_2^1[0, 1]$. Из теории дифференциальных уравнений известно (см., например, [10, т. 1, гл. 4]), что если $F = F(x, u)$ – функция класса $\text{Lip } 1$ по u (т. е. существует постоянная $C > 0$ такая, что для любых u, w и x верно $|F(x, u) - F(x, w)| \leq C^2 |u - w|$), то при $C < \pi$ решение единственно, в противном случае о единственности ничего не известно. Однако верно, что если u_1 и u_2 – два решения уравнения с одинаковыми краевыми условиями и

$$\int_0^1 u_1(x) \sin(\pi k x) dx = \int_0^1 u_2(x) \sin(\pi k x) dx \quad (9)$$

при $k = 1, \dots, M = \left[\frac{C}{\pi}\right]$, то $u_1 \equiv u_2$.

Часто на практике вычисление значений интегралов (9) затруднено. Проще использовать функционалы, позволяющие получить локальную информацию о решениях, например

$$l_{x_k}(u) = \frac{1}{d} \int_{x_k}^{x_k + d} u(t) dt, \quad k = 1, \dots, N.$$

Возникают следующие проблемы:

i) можно ли путем конечного числа “измерений” решений u_1 и u_2 (в нашем случае – нахождения значений функционалов $l_{x_k}(u_1)$ и $l_{x_k}(u_2)$, $k = 1, \dots, N$, при некотором наборе $\{x_k\}$) сделать заключение о совпадении u_1 и u_2 ;

ii) как при известных значениях функционалов, определенных на решениях, оценить уклонение решений друг от друга в какой-либо метрике.

Будем рассматривать дифференциальные уравнения $u'' = F(x, u)$, где $F(x, u) = S(x, u) + R(x, u)$, $S(x, u)$ – монотонно возрастающая по u функция и для $F(x, u)$ выполнено одно из следующих условий:

1) *случай липшицевости*: для любых y_1, y_2 выполнено

$$|R(x, y_1) - R(x, y_2)| \leq A(x)|y_1 - y_2|, \quad A(x) \in L_p(\Omega), \quad p \in [1, \infty];$$

2) *случай равномерной устойчивости*: существует B такое, что для любых $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ выполнено

$$|u| > B \implies F(x, u) \operatorname{sign} u > 0,$$

R'_u ограничена на компакте $\Omega \times [-(B+2M), (B+2M)]$ постоянной $E = E(B, M)$;

3) *случай степенного роста*: существует r такое, что для любых $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$, $|u| \geq r$, выполнено

$$\begin{aligned} |F(x, u)| &\leq \alpha(x)|u|^\delta + \beta(x), & \alpha, \beta &\in L_1(\Omega), \quad \delta > 0, \\ F(x, u) \operatorname{sign} u &\geq -D|u| + \lambda(x), & D &\in [0, \pi^{-2}), \quad \lambda \in L_1(\Omega), \end{aligned}$$

и для любых $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ верно

$$|R'_u(x, u)| \leq \eta(x)|u|^\gamma + \mu(x), \quad \eta \in L_p(\Omega), \quad \mu \in L_q(\Omega), \quad p, q \in [1, \infty], \quad \gamma > 0.$$

Рассмотрим также уравнение $u'' = F(x, u, u')$, где $F(x, u, u') = S(x, u, u') + R(x, u, u')$, S – монотонно возрастающая по u функция, при условии:

4) *случай липшицевости по u и u'* : для любых z_1, z_2 выполнено

$$|F(x, y, z_1) - F(x, y, z_2)| \leq H|z_1 - z_2|, \quad H > 0,$$

и для любых y_1, y_2 верно

$$|R(x, y_1, z) - R(x, y_2, z)| \leq A(x)|y_1 - y_2|, \quad A(x) \in L^p(\Omega), \quad p \in [1, \infty].$$

Предположим, что существуют два решения $u_i \in W_2^1$, $i = 1, 2$ (в силу вложения $W_2^1[0, 1] \subset C[0, 1]$ решения непрерывны). О значениях решений на границе во всех случаях известно лишь то, что они по модулю не превосходят некоторого числа M .

ЛЕММА 6. Пусть $\Omega_0 \subset \Omega$ – отрезок и $u = u_1 - u_2|_{\partial\Omega_0} = 0$. Тогда при выполнении для функции F одного из условий 1)–4) существует постоянная C такая, что

$$\|u'\|_{L_2(\Omega_0)} \leq C\|u\|_{L_2(\Omega_0)}.$$

Причем в первом случае $C = C(A)$, во втором $C = C(E, B, M)$, в третьем $C = C(M, r, \alpha, \beta, \delta, D, \lambda, \eta, \mu, \gamma)$, в четвертом $C = C(A, H)$, т. е. постоянная зависит либо только от F , либо от F и M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для 1)–3) имеем

$$\begin{aligned}\|u'\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= - \int_{\Omega_0} u'' u \, dx = - \int_{\Omega_0} (S(x, u_1) - S(x, u_2)) u \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega_0} (R(x, u_1) - R(x, u_2)) u \, dx \leq - \int_{\Omega_0} (R(x, u_1) - R(x, u_2)) u \, dx.\end{aligned}$$

В случае 1) при $p = \infty$ получаем

$$\|u'\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega_0)}^2,$$

лемма верна и $C = \sqrt{\|A\|_{L^\infty(\Omega)}}$. При $p \in [1, \infty)$ положим $Z(x) = \int_0^x A(t) \, dt$. Тогда $\|Z\|_{L^\infty(\Omega)} = \|A\|_{L^1(\Omega)} \leq \|A\|_{L^p(\Omega)}$ и верна оценка

$$\begin{aligned}\|u'\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &\leq \int_{\Omega_0} A(x) u^2 \, dx = - \int_{\Omega_0} Z(x) 2u u' \, dx \\ &\leq 2\|Z\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega_0)} \|u'\|_{L^2(\Omega_0)} \leq 2\|A\|_{L^p(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega_0)} \|u'\|_{L^2(\Omega_0)}.\end{aligned}$$

Тогда $C = 2\|A\|_{L^p(\Omega)}$ и лемма доказана.

В случае 2) сначала докажем, что $\|u_i\|_{L^\infty(\Omega)}$ ограничены постоянной, зависящей от B и M . Обозначим $v = u_i - \tau_i$, где τ_i – линейная функция, принимающая на границе отрезка значения, совпадающие с граничными значениями u_i . Функция v является решением дифференциального уравнения $v'' = F(x, v + \tau_i)$ с краевыми условиями $v|_{\partial\Omega} = 0$. Предположим, что

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{x \in \Omega \setminus \partial\Omega} |v(x)| = |v(x_0)| > B + M.$$

Тогда

$$\begin{aligned}|u_i(x_0)| &= |v(x_0) + \tau_i(x_0)| \geq |v(x_0)| - |\tau_i(x_0)| > B, \\ 0 &< F(x_0, u_i(x_0)) \operatorname{sign} u_i(x_0) = v''(x_0) \operatorname{sign} v(x_0) \leq 0.\end{aligned}$$

Получили противоречие с исходными условиями, наложенными на F . Значит, $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq B + M$ и $\|u_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq B + 2M$. Тогда верна оценка

$$\|u'\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \leq \int_{\Omega_0} |R'_u(x, \xi)| u^2 \, dx \leq E \|u\|_{L^2(\Omega_0)}^2, \quad \xi \in [u_1(x), u_2(x)].$$

Лемма доказана с постоянной $C = \sqrt{E}$.

В случае 3) положим $v = u_i - \tau_i$ и используем лемму 1 из [8]. Получаем следующую оценку:

$$\|v'\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 + C_2 \|v\|_{L^\infty(\Omega)},$$

где

$$C_1 = \frac{(r + M)(\|\alpha\|_{L^1(\Omega)} r^\delta + \|\beta\|_{L^1(\Omega)})}{(1 - D\pi^2)}, \quad C_2 = \frac{\|\lambda\|_{L^1(\Omega)} + DM}{(1 - D\pi^2)}.$$

С другой стороны, по теореме вложения (см. [11, гл. 3]) существует постоянная C_3 такая, что $C_3 \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|v'\|_{L^2(\Omega)}$. Из двух последних неравенств получаем

$$\|u_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + M \leq \frac{1}{2C_3^2} \left(C_2 + \sqrt{C_2^2 + 4C_1 C_3^2} \right) + M = U.$$

Поскольку

$$\|u'\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \leq \int_{\Omega_0} (\eta(x)|\xi|^\gamma + \mu(x))u^2 dx, \quad \xi \in [u_1(x), u_2(x)],$$

используя оценку для $\|u_i\|_{L^\infty(\Omega)}$, получим, что $\|u'\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega_0)}$, где

$$C = \begin{cases} \sqrt{\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}U^\gamma + \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}}, & p = q = \infty, \\ 2(\|\eta\|_{L^p(\Omega)}U^\gamma + \|\mu\|_{L^q(\Omega)}), & p, q \in [1, \infty), \\ \|\mu\|_{L^q(\Omega)} + \sqrt{\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}U^\gamma + \|\mu\|_{L^q(\Omega)}^2}, & p = \infty, \quad q \in [1, \infty), \\ \|\eta\|_{L^p(\Omega)}U^\gamma + \sqrt{\|\eta\|_{L^p(\Omega)}^2U^{2\gamma} + \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}}, & p \in [1, \infty), \quad q = \infty. \end{cases}$$

В случае выполнения 4) имеем

$$\begin{aligned} \|u'\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= - \int_{\Omega_0} u''u dx = - \int_{\Omega_0} (F(x, u_1, u'_1) - F(x, u_2, u'_1))u dx \\ &\quad - \int_{\Omega_0} (F(x, u_2, u'_1) - F(x, u_2, u'_2))u dx \\ &\leq \int_{\Omega_0} A(x)u^2 dx + H \int_{\Omega_0} |u'u| dx = Q. \end{aligned}$$

При $p = \infty$ получим, что

$$Q \leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + H\|u\|_{L^2(\Omega_0)}\|u'\|_{L^2(\Omega_0)},$$

откуда

$$\|u'\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \frac{H + \sqrt{H^2 + 4\|A\|_{L^\infty(\Omega)}}}{2} \|u\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

При $p < \infty$ верно то, что $Q \leq (2\|A\|_{L^p(\Omega)} + H)\|u\|_{L^2(\Omega_0)}\|u'\|_{L^2(\Omega_0)}$, откуда

$$\|u'\|_{L^2(\Omega_0)} \leq (2\|A\|_{L^p(\Omega)} + H)\|u\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Лемма доказана.

Положим $\mathcal{K} = \pi/C$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях леммы 6 если $|\Omega_0| < \mathcal{K}$, то $u|_{\Omega_0} \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из доказанного в лемме 6 неравенства и неравенства Фридрихса (см., например, [11]):

$$\|u\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \frac{|\Omega_0|}{\pi} \|u'\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \frac{|\Omega_0|}{\pi} C\|u\|_{L^2(\Omega_0)} = \frac{|\Omega_0|}{\mathcal{K}} \|u\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Таким образом, при выполнении одного из условий 1)–4) по уравнению можно вычислить некоторую постоянную $\mathcal{K} = \mathcal{K}(F, M)$, характеризующую расстояние между нулями функции $u = u_1 - u_2$.

При помощи леммы 6 и предложения 1 получаем следующую теорему для оценки уклонения друг от друга двух решений уравнения в метрике $L^2[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть N и d таковы, что $d \in [\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N}]$, а $x_1 \leq \frac{d}{2}$, $x_k = x_{k-1} + d$ при $k = 2, \dots, N$. Тогда для любых двух решений $u_1, u_2 \in W_2^1(\Omega)$ дифференциального уравнения $u'' = F(x, u, u')$ с числовой характеристикой $\mathcal{K}$ при условиях $(u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} = 0$ и $d < \mathcal{K}$ верно

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{1 - \frac{d}{\mathcal{K}}} \max_{k=1, \dots, N} |l_{x_k}(u_1 - u_2)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и раньше, $u = u_1 - u_2$. Поскольку отрезки не пересекаются, приближение u записывается в виде

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^N l_{x_k}(u) \chi_{[x_k, x_k+d]}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \|(u - \hat{u}) + \hat{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{d}{\pi} \|u\|_{W_2^1} + \|\hat{u}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{d}{\pi} C \|u\|_{L^2(\Omega)} + \left(d \sum_{k=1}^N |l_{x_k}(u)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{d}{\mathcal{K}} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{dN} \max_{k=1, \dots, N} |l_{x_k}(u)| \\ &\leq \frac{d}{\mathcal{K}} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \max_{k=1, \dots, N} |l_{x_k}(u)|. \end{aligned}$$

Отсюда если $d < \mathcal{K}$, то выполнено

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{1 - \frac{d}{\mathcal{K}}} \max_{k=1, \dots, N} |l_{x_k}(u)|.$$

Теорема доказана.

Подобные результаты можно получать и для других N , d , $\{x_k\}$, используя оценки соответствующей величины $E(\tilde{W}_2^1[0, 1], \mathcal{L}_N(d, \bar{x}))$. Пусть известно, что $E(\tilde{W}_2^1[0, 1], \mathcal{L}_N(d, \bar{x})) \leq \mathcal{E}$. Рассмотрим $u = u_1 - u_2$. Функция, приближающая u , записывается в виде $\hat{u} = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{[x_k, x_k+d]}$, $A = (a_k) = V^{-1}F$, $V = (v_{kj})$, $v_{kj} = (\chi_{I_k}, \chi_{I_j})$, $F = (\tilde{u}(x_k)) = d(l_{x_k}(u))$ (см. вывод формулы (1)). Тогда

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2[0,1]} &= \|(u - \hat{u}) + \hat{u}\|_{L^2[0,1]} \leq \mathcal{E} \|u\|_{W_2^1} + \|\hat{u}\|_{L^2[0,1]} \\ &\leq \mathcal{E} C \|u\|_{L^2[0,1]} + \sqrt{A^T V A} \leq \mathcal{E} C \|u\|_{L^2[0,1]} + \sqrt{F^T V^{-1} F}, \end{aligned}$$

где C – константа из леммы 6, зависящая от дифференциального уравнения.

Теперь если $\mathcal{E}C < 1$, то

$$\|u\|_{L^2[0,1]} \leq \frac{1}{1 - \mathcal{E}C} \sqrt{F^T V^{-1} F}.$$

Величину $F^T V^{-1} F$ можно или вычислить непосредственно, или оценить в той норме, в которой это удобно. Для примера приведем два неравенства, которые получаются при различных векторных нормах.

1. При норме $\|w\|_\infty = \max_{k=1,\dots,N} |w_k|$ подчиненная ей матричная норма является максимальной строчной нормой $\|W\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |w_{ij}|$. Получаем

$$\|u\|_{L^2[0,1]} \leq \frac{d\|V^{-1}\|_{L^\infty}^{1/2}}{1 - \mathcal{E}C} \sqrt{N} \max_{k=1,\dots,N} |l_{x_k}(u)|.$$

2. При норме $\|w\|_2 = (\sum_{k=1}^N |w_k|^2)^{1/2}$ подчиненная ей матричная норма является спектральной нормой $\|W\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda}, \lambda - \text{собственное значение } W^*W\}$. Получаем

$$\|u\|_{L^2[0,1]} \leq \frac{d\|V^{-1}\|_2^{1/2}}{1 - \mathcal{E}C} \left(\sum_{k=1}^N |l_{x_k}(u)|^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим вопрос об однозначной разрешимости дифференциального уравнения. Уже из теоремы 7 видно, что указанный в ней набор $\{l_{x_k}\}$ при $d < \mathcal{K}$ является множеством функционалов, однозначно определяющим решение. Отметим, что в этом случае число функционалов равно $[\frac{1}{d}]$ и стремится к $+\infty$ при $d \rightarrow 0$. Данный результат можно улучшить, ослабив условие $d < \mathcal{K}$ и уменьшив число функционалов.

Зададим на плоскости множество точек следующим образом: $G = \{(\mathcal{K}, d) : 0 < 2\mathcal{K} \leq d < 1\}$ (рис. 9). Это множество является “плохим” в том смысле, что при данных условиях, налагаемых на $\mathcal{K}$ и d , существует пример дифференциального уравнения с числовой характеристикой $\mathcal{K}$, которое нельзя однозначно разрешить по любому, даже бесконечному, набору функционалов l_x (см. ниже теорему 8).

Рис. 9

Множество $(0, +\infty) \times [0, 1) \setminus G$ является “хорошим”, при данных соотношениях на $\mathcal{K}$ и d существуют число N и набор $\{x_k\}_{k=1}^N$, зависящие только от $\mathcal{K}$ и d и не зависящие от решений, гарантирующих совпадение решений при совпадении l_{x_k} , $k = 1, \dots, N$, при условии $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega}$ (см. далее теорему 9 и замечание 1). Здесь $N = [\frac{1}{\mathcal{K}}]$, оно не зависит от d и совпадает в случае липшицевости с оптимальным числом функционалов (числом коэффициентов Фурье; см. формулу (9)), необходимых для различения решений.

Если не известно, совпадают ли решения на границе отрезка, то подобный результат получен для области $G' = \{(\mathcal{K}, d) : 0 < d < \min\{1, 2\mathcal{K}, \frac{1+\mathcal{K}}{2}\}\}$ (см. далее теорему 10), а при дополнительном условии $u_i \in C^1[0, 1]$ — для области $(0, +\infty) \times (0, 1) \setminus (G \cup G')$ (см. ниже замечание 2). При этом N зависит от $\mathcal{K}$ и d , и $N \rightarrow \infty$ при $d \rightarrow 2\mathcal{K}$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $(\mathcal{K}, d) \in G$. Тогда существует дифференциальное уравнение $u'' = F(x, u)$ с числовой характеристикой $\mathcal{K}$ (частный случай условий 1)–4)), имеющее два различных решения u_1 и u_2 , $u_i(0) = a_i$, $u_i(1) = b_i$, таких, что $l_x(u_1) = l_x(u_2)$ для любого $x \in [0, 1 - d]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два решения уравнения $u'' = -\frac{4\pi^2}{d^2}u$ с крайними условиями $u_i(0) = 0$, $u_i(1) = k_i \sin \frac{2\pi}{d}$. В этом случае

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq \frac{4\pi^2}{d^2} |y_1 - y_2| \leq \frac{\pi^2}{\mathcal{K}^2} |y_1 - y_2|.$$

Решения $u_i(x) = k_i \sin(\frac{2\pi}{d}x)$ периодические с периодом d , при этом $l_x(u_1) = l_x(u_2) = 0$ для любого $x \in [0, 1 - d]$. Теорема доказана.

Пусть f – некоторая функция, заданная на отрезке I . Обозначим через $\mathcal{I}(f, I)$ множество максимальных отрезков $\mathcal{N} = [\alpha, \beta] \subset I$, $\alpha \leq \beta$, таких, что $f|_{\mathcal{N}} \equiv 0$. Максимальность $\mathcal{N}$ понимается в следующем смысле: не существует другого отрезка $[\alpha', \beta'] \subset I$ такого, что $\mathcal{N} \subset [\alpha', \beta']$ и $f|_{[\alpha', \beta']} \equiv 0$. Расстояние между двумя элементами $\mathcal{N}_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ и $\mathcal{N}_2 = [\alpha_2, \beta_2]$, $\alpha_1 \leq \beta_1 < \alpha_2 \leq \beta_2$, множества $\mathcal{I}$ определим формулой $\rho(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) = \alpha_2 - \beta_1$.

Заметим, что в силу следствия 2 для функции u , являющейся разностью двух решений дифференциального уравнения с одним из условий 1)–4)), имеет место очевидное неравенство $|\mathcal{I}(u, \Omega)| \leq \frac{1}{\mathcal{K}} + 1$.

ЛЕММА 7. Пусть на отрезке $I = [x, y + d]$, $y \in (x, x + d)$, задана непрерывная функции f , причем $|\mathcal{I}(f, I)| < +\infty$. Пусть также верно то, что $l_x(f) = l_y(f) = 0$. Тогда либо $f|_{[x, y+d]} \equiv 0$, либо $|\mathcal{I}(f, I)| \geq 2$ и существует отрезок $\mathcal{N} \in \mathcal{I}(f, I)$, содержащийся в интервале $(x, y + d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f|_{[x, y+d]} \not\equiv 0$. Тогда $f|_{[x, x+d]} \not\equiv 0$ или $f|_{[y, y+d]} \not\equiv 0$. Рассмотрим один из этих случаев (другой разбирается аналогично). Пусть $f|_{[x, x+d]} \not\equiv 0$. Тогда в силу равенства $l_x(f) = 0$ и непрерывности функции f выполнено $|\mathcal{I}(f, I)| \geq 1$ и существует отрезок $\mathcal{N} \in \mathcal{I}(f, I)$ такой, что $\mathcal{N} \subset (x, x + d)$. Предположим, что $\mathcal{N}$ – единственный элемент множества $\mathcal{I}(f, I)$. Тогда $f|_{[y, y+d]} \not\equiv 0$. Аналогично получаем, что $\mathcal{N} \subset (y, y + d)$. Значит, $\mathcal{N} \subset (y, x + d)$. Пусть $\theta \in \mathcal{N}$. Если $f(t) \geq 0$ для любого $t \in [x, \theta]$, то $f(t) \leq 0$ при $t \in [\theta, y + d]$. В то же время

$$\int_x^y f(t) dt = - \int_y^{x+d} f(t) dt = \int_{x+d}^{y+d} f(t) dt.$$

Противоречие. Аналогично получаем противоречие, если $f(t) \leq 0$ на $[x, \theta]$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $(\mathcal{K}, d) \in (0, +\infty) \times (0, 1) \setminus G = \{0 < d < \min\{1, 2\mathcal{K}\}\}$. Тогда существуют $\{x_k\}_{k=1}^N \subset [0, 1 - d]$, $N = [\frac{1}{\mathcal{K}}]$ такие, что для любых двух решений $u_1, u_2 \in W_2^1(\Omega)$ дифференциального уравнения $u'' = F(x, u, u')$ с числовой характеристикой $\mathcal{K}$ при условии $(u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} = 0$ выполнено

$$l_{x_k}(u_1) = l_{x_k}(u_2), \quad k = 1, \dots, N \implies u_1 \equiv u_2 \quad \text{на } \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{K} > 1$, то $|\mathcal{I}(u, \Omega)| \leq 1$. Отсюда при условии $u|_{\partial\Omega} = 0$ следует, что $u \equiv 0$ на Ω (и $N = 0$).

При $\frac{1}{2} < \mathcal{K} \leq 1$ положим $x_1 = \frac{1-d}{2}$, и пусть $l_{x_1}(u) = 0$. Поскольку $|\mathcal{I}(u, \Omega)| \leq 2$ и $u|_{\partial\Omega} = 0$, то не существует отрезка $\mathcal{N} \in \mathcal{I}(u, \Omega)$, содержащегося внутри интервала $(0, 1)$. Значит, $u|_{[x_1, x_1+d]} \equiv 0$. Тогда $\rho(0, x_1)$ и $\rho(x_1 + d, 1)$ меньше $\frac{1}{2} < \mathcal{K}$, $u \equiv 0$ на $[0, x_1]$ и $[x_1 + d, 1]$ (по следствию 2). Таким образом, $u \equiv 0$ на Ω .

При $0 < d \leq \mathcal{K} \leq \frac{1}{2}$ положим $x_k = k\mathcal{K} - d$, $k = 1, \dots, N = [\frac{1}{\mathcal{K}}]$, и пусть $l_{x_k}(u) = 0$. Если $l_{x_1}(u) = 0$, то либо $u|_{[x_1, x_1+d]} \equiv 0$, либо существует отрезок $\mathcal{N} \in \mathcal{I}(u, \Omega)$, содержащийся в интервале $(x_1, x_1 + d) = (\mathcal{K} - d, \mathcal{K})$. Второй случай исключен, так как при этом $\rho(0, \mathcal{N}) < \mathcal{K}$, что противоречит следствию 2. Значит, $u|_{[x_1, x_1+d]} \equiv 0$, откуда при условии $u(0) = 0$ следует $u|_{[0, \mathcal{K}]} \equiv 0$. Аналогично показывается, что $u|_{[k\mathcal{K}, (k+1)\mathcal{K}]} \equiv 0$, $k = 1, \dots, N - 1$, и $u|_{[N\mathcal{K}, 1]} \equiv 0$. Таким образом, $u \equiv 0$ на Ω .

При $\mathcal{K} < d < 2\mathcal{K} \leq 1$ возьмем $x_1 = 0$, $x_k = k\mathcal{K} - d$, $k = 2, \dots, [\frac{1}{\mathcal{K}}]$, и пусть $l_{x_k}(u) = 0$. Предположим, что $u|_{[0, 2\mathcal{K}]} \not\equiv 0$. Используя лемму 7 и следствие 2, можно получить неравенства $2 \leq |\mathcal{I}(u, [0, 2\mathcal{K}])| \leq 3$. Если $|\mathcal{I}(u, [0, 2\mathcal{K}])| = 3$, то $\mathcal{N}_1 = 0$, $\mathcal{N}_2 = \mathcal{K}$, $\mathcal{N}_3 = 2\mathcal{K}$ и функция u имеет разные знаки на интервалах $(0, \mathcal{K})$ и $(\mathcal{K}, 2\mathcal{K})$, в то же время

$$\int_0^{2\mathcal{K}-d} u(t) dt = \int_d^{2\mathcal{K}} u(t) dt.$$

Противоречие. Если $|\mathcal{I}(u, [0, 2\mathcal{K}])| = 2$, то $0 \in \mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2 \subset (\mathcal{K}, 2\mathcal{K})$. Если $u|_{[0, d]} \not\equiv 0$, то $\mathcal{N}_2 \subset (\mathcal{K}, d)$. Проведя такое же рассуждение, как в лемме 7, получим противоречие. Если $u|_{[0, d]} \equiv 0$, то $\rho(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) < 2\mathcal{K} - d < \mathcal{K}$. Противоречие, поэтому исходное предположение $u|_{[0, 2\mathcal{K}]} \not\equiv 0$ является неверным. Таким образом, $u|_{[0, 2\mathcal{K}]} \equiv 0$, дальнейшее рассуждение очевидно. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 9 остается верной для функционалов $l_{x_k}(u) = u(x_k)$. Положим $x_k = k([\frac{1}{\mathcal{K}}] + 1)^{-1}$, $k = 1, \dots, [\frac{1}{\mathcal{K}}]$. Если $u(x_k) = 0$, $k = 1, \dots, [\frac{1}{\mathcal{K}}]$, то в совокупности с условием $u(0) = u(1) = 0$ и следствием 2 получим $u \equiv 0$ на Ω .

ТЕОРЕМА 10. Пусть $(\mathcal{K}, d) \in G' = \{(\mathcal{K}, d) : 0 < d < \min\{1, 2\mathcal{K}, \frac{1+\mathcal{K}}{2}\}\}$. Тогда существуют $N = N(\mathcal{K}, d)$ и $\{x_k\}_{k=1}^N \subset [0, 1 - d]$ такие, что для любых двух решений $u_1, u_2 \in W_2^1(\Omega)$ дифференциального уравнения $u'' = F(x, u, u')$ с числовой характеристикой $\mathcal{K}$ выполнено

$$l_{x_k}(u_1) = l_{x_k}(u_2), \quad k = 1, \dots, N \Rightarrow u_1 \equiv u_2 \quad \text{на } \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\mathcal{K} \geq 1$. Положим $x_1 = 0$ и $x_2 = 1 - d$. Пусть $l_{x_k}(u) = 0$ при $k = 1, 2$. Предположим, что $u \not\equiv 0$ на Ω .

Если $d > \frac{1}{2}$ (отрезки $[0, d]$ и $[1 - d, 1]$ пересекаются), то по лемме 7 существуют $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathcal{I}(u, \Omega)$, лежащие внутри некоторого отрезка длиной меньше $1 \leq \mathcal{K}$, но это невозможно по следствию 2.

Если $d \leq \frac{1}{2}$, то на каждом из отрезков $[0, d]$, $[1 - d, 1]$ функция u либо тождественно равна нулю, либо существуют отрезки $\mathcal{N}_1 \in \mathcal{I}(u, [0, d])$ и $\mathcal{N}_2 \in \mathcal{I}(u, [1 - d, 1])$, лежащие внутри соответствующих интервалов, что тоже противоречит следствию 2.

Таким образом, $u \equiv 0$ на Ω . Теорема верна при $\mathcal{K} \geq 1$, $0 < d < 1$, и в этом случае $N = 2$.

2) Пусть $0 < d < \mathcal{K} < 1$. Положим $N = \left[\frac{1}{\mathcal{K}}\right] + 2$, $x_1 = 0$, $x_k = (k-1)\mathcal{K} - d$, $k = 2, \dots, N-1$, $x_N = 1 - d$ (рис. 10).

Рис. 10

Пусть $l_{x_k}(u) = 0$ при $k = 1, \dots, N$. Используя в случае отрезка $[0, \mathcal{K}]$ те же рассуждения, что и для отрезка Ω в п. 1) доказательства, получим, что $u \equiv 0$ на $[0, \mathcal{K}]$. Поскольку $l_{x_3}(u) = 0$, то на $[x_3, 2\mathcal{K}]$ функция u либо тождественно равна нулю, либо существует отрезок $\mathcal{N} \in \mathcal{I}(u, [x_3, 2\mathcal{K}])$, лежащий внутри этого интервала, что в совокупности с условием $u(\mathcal{K}) = 0$ дает $u \equiv 0$ на $[\mathcal{K}, 2\mathcal{K}]$. Аналогично показывается, что $u \equiv 0$ на $[k\mathcal{K}, (k+1)\mathcal{K}]$, $k = 2, \dots, N-3$, и на $[(N-2)\mathcal{K}, 1]$. Таким образом, в случае $0 < d < \mathcal{K} < 1$ теорема верна.

3) Пусть $\mathcal{K} \geq \frac{1}{2}$, $\mathcal{K} \leq d < \frac{\mathcal{K}+1}{2}$. Положим $x_1 = 0$, $x_2 = \varepsilon$, $x_3 = 1 - d - \varepsilon$, $x_4 = 1 - d$, причем положительное число ε выбрано таким образом, чтобы выполнялись неравенства $\varepsilon < \frac{1-d}{2}$, $2d - 1 + 2\varepsilon < \mathcal{K}$. Пусть $l_{x_k}(u) = 0$ при $k = 1, \dots, 4$. Предположим, что $u \not\equiv 0$ на $[0, 1]$. Тогда $|\mathcal{I}(u, [0, 1])| \leq 3$, так как $\mathcal{K} \geq \frac{1}{2}$, а по лемме 7 выполнено $|\mathcal{I}(u, [0, 1])| \geq 2$. Если $|\mathcal{I}(u, [0, 1])| = 3$, это возможно при $\mathcal{K} = \frac{1}{2}$, $\mathcal{N}_1 = 0$, $\mathcal{N}_2 = \frac{1}{2}$, $\mathcal{N}_3 = 1$. Тогда функция u имеет разные знаки на интервалах $(0, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, 1)$, в то же время

$$\int_0^\varepsilon u(x) dx = \int_d^{d+\varepsilon} u(x) dx.$$

Противоречие.

Значит, $|\mathcal{I}(u, [0, 1])| = 2$, $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathcal{I}(u, [0, 1])$. Поскольку $\rho(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) \geq \mathcal{K} > 2d - 1 + 2\varepsilon$, то отрезки $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ не могут одновременно пересекаться с отрезком $[x_3, x_2 + d]$, имеющим длину $2d - 1 + 2\varepsilon$. Значит, по лемме 7 либо $u|_{[x_1, x_2 + d]} \equiv 0$ (в случае $\mathcal{N}_1 \supset [x_1, x_2 + d]$), либо $u|_{[x_3, x_4 + d]} \equiv 0$ (в случае $\mathcal{N}_2 \supset [x_3, x_4 + d]$). В обоих случаях $\rho(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) < 1 - d \leq \mathcal{K}$. Противоречие. Теорема доказана для $\mathcal{K} \geq \frac{1}{2}$, $\mathcal{K} \leq d < \frac{\mathcal{K}+1}{2}$, при этом $N = 4$.

4) Пусть $d \leq 1 - \mathcal{K}$, $\mathcal{K} \leq d < 2\mathcal{K}$. Положим $l = \left[\frac{2\mathcal{K}}{2\mathcal{K}-d}\right] + 1 \geq 3$, $\varepsilon = \frac{\mathcal{K}}{l}$, $x_k = (k-1)\varepsilon$, $k = 1, \dots, l+1$ (рис. 11).

Рис. 11

Выбор ε дает неравенство $(d - \mathcal{K}) + 2\varepsilon < \mathcal{K}$. Пусть $l_{x_k}(u) = 0$ при $k = 1, \dots, l+1$. Предположим, что $u \not\equiv 0$ на $[0, \mathcal{K} + d]$. По следствию 2 имеем $|\mathcal{I}(u, [0, \mathcal{K} + d])| \leq 3$ (длина отрезка $\mathcal{K} + d < 3\mathcal{K}$). Так как $l_{x_1}(u) = l_{x_{l+1}}(u) = 0$, то по лемме 7 имеем $|\mathcal{I}(u, [0, \mathcal{K} + d])| \geq 2$. Если $|\mathcal{I}(u, [0, \mathcal{K} + d])| = 2$, то такими

же, как в п. 3), рассуждениями, учитывая равенства $l_{x_1}(u) = l_{x_2}(u) = l_{x_l}(u) = l_{x_{l+1}}(u) = 0$ и выбор ε , получаем противоречие. Значит, $|\mathcal{I}(u, [0, \mathcal{K} + d])| = 3$, $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3 \in \mathcal{I}(u, [0, \mathcal{K} + d])$. Поскольку $\rho(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) \geq \mathcal{K}$ и $\rho(\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3) \geq \mathcal{K}$, то $\mathcal{N}_1 \subset [0, \mathcal{K}]$, $\mathcal{N}_2 \subset [\mathcal{K}, d]$, $\mathcal{N}_3 \subset [d, \mathcal{K} + d]$. Так как $\rho(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_3) \geq 2\mathcal{K} > d + 2\varepsilon$, то существует k такое, что отрезки $[x_k, x_k + d]$ и $[x_{k+1}, x_{k+1} + d]$ лежат между $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_3$, т.е. интервал $(x_k, x_{k+1} + d)$ содержит $\mathcal{N}_2$ и $|\mathcal{I}(u, [x_k, x_{k+1} + d])| = 1$. Противоречие с леммой 7. Таким образом, предположение о том, что $u \not\equiv 0$ на $[0, \mathcal{K} + d]$, неверно.

Положим $m = \lceil \frac{1-(\mathcal{K}+d)}{\mathcal{K}} \rceil$, $y_k = (k+1)\mathcal{K}$, $k = 1, \dots, m$, $y_{m+1} = 1 - d$. Если $l_{y_k}(u) = 0$, $k = 1, \dots, m+1$, то вместе с условием $u|_{[0, \mathcal{K}+d]} \equiv 0$ это влечет $u \equiv 0$ на Ω . Теорема доказана для $d \leq 1 - \mathcal{K}$, $\mathcal{K} \leq d < 2\mathcal{K}$, и в этом случае $N = l + 1 + m + 1 = \lceil \frac{2\mathcal{K}}{2\mathcal{K}-d} \rceil + \lceil \frac{1-d}{\mathcal{K}} \rceil + 2$.

5) Пусть $\mathcal{K} < \frac{1}{2}$, $1 - \mathcal{K} \leq d < \frac{\mathcal{K}+1}{2}$, и пусть ε , x_k , $k = 1, \dots, 4$, такие же, как в п. 3) доказательства. Тогда условие $l_{x_k}(u) = 0$, $k = 1, \dots, 4$, и предположение о том, что $u \not\equiv 0$ на Ω , исключают случай $|\mathcal{I}(u, [0, 1])| = 2$.

Положим $l = \lceil \frac{2(1-d)}{2\mathcal{K}-d} \rceil + 1 \geq 3$, $\varepsilon_1 = \frac{1-d}{l}$, $y_k = (k-1)\varepsilon_1$, $k = 2, \dots, l$ (рис. 12). Выбор l дает неравенство $d + 2\varepsilon_1 < 2\mathcal{K}$.

Рис. 12

Если $l_{y_k}(u) = 0$ для $k = 2, \dots, l$ и $l_{x_1}(u) = l_{x_4}(u) = 0$, то, предполагая, что $|\mathcal{I}(u, [0, 1])| = 3$, проведем для $\Omega = [0, 1]$ рассуждение такое же, как в п. 4) доказательства для $[0, \mathcal{K} + d]$. Получим противоречие. Случай $|\mathcal{I}(u, [0, 1])| > 3$ исключен, так как в рассматриваемой области $\mathcal{K} > \frac{1}{3}$. В данном случае $N = 4 + (l - 1) = \lceil \frac{2(1-d)}{2\mathcal{K}-d} \rceil + 4$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Автором доказано, что теорема 9 также верна для области $(0, +\infty) \times (0, 1) \setminus (G \cup G') = \{ \frac{\mathcal{K}+1}{2} \leq d < \min\{1, 2\mathcal{K}\} \}$ при условии $u_1, u_2 \in C^1(\Omega)$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. Г. Царькову за постановку задач и постоянное внимание к работе, а также Е. М. Скорикову за полезные замечания и обсуждения.

Список литературы

1. А. Н. Колмогоров, *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985; англ. пер.: A. N. Kolmogorov, *Selected works of A. N. Kolmogorov. Volume I: Mathematics and mechanics*, Mathematics and its Applications (Sov. Ser.), **25**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
2. В. М. Тихомиров, *Теория приближений*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундам. направления, **14**, ВИНТИ, М., 1987.
3. О. А. Ладыженская, “Об оценках фрактальной размерности и числа определяющих мод для инвариантных множеств динамических систем”, *Зап. науч. семин. ЛОМИ*, **163** (1987), 105–129; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, “Estimates for the

- fractal dimension and number of deterministic modes for invariant sets of dynamical systems”, *J. Soviet Math.*, **49**:5 (1990), 1186–1201.
4. D. A. Jones, E. S. Titi, “Upper bounds on the number of determining modes, nodes and volume elements for Navier–Stokes equations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **42**:3 (1993), 875–887.
 5. D. A. Jones, E. S. Titi, “Determining finite volume elements for the 2D Navier–Stokes equations”, *Phys. D*, **60** (1992), 165–174.
 6. И. Д. Чуешов, “Замечание о множествах определяющих элементов для систем реакции–диффузии”, *Матем. заметки*, **63**:5 (1998), 774–784; англ. пер.: I. D. Chueshov, “A remark on sets of determining elements for reaction-diffusion systems”, *Math. Notes*, **63**:5 (1998), 679–687.
 7. И. Д. Чуешов, “Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем”, *УМН*, **53**:4 (1998), 77–124; англ. пер.: I. D. Chueshov, “Theory of functionals that uniquely determine the asymptotic dynamics of infinite-dimensional dissipative systems”, *Russ. Math. Surv.*, **53**:4 (1998), 731–776.
 8. И. Г. Царьков, “Устойчивость однозначной разрешимости в некорректной задаче Дирихле”, *Матем. заметки*, **79**:2 (2006), 294–308; англ. пер.: I. G. Tsar’kov, “Stability of unique solvability in an Ill-Posed Dirichlet problem”, *Math. Notes*, **79**:2 (2006), 268–282.
 9. Р. С. Исмагилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29**:3 (1974), 161–178; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials”, *Russ. Math. Surv.*, **29**:3 (1974), 169–186.
 10. Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, v. 1, 2, ИЛ, М., 1954; пер. с итал.: G. Sansone, *Ordinary differential equations*, Nicola Zanichelli, Bologna, 1948 (Italian).
 11. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975; англ. пер.: O. V. Besov, V. P. Il’in, S. M. Nikol’skii, *Integral representations of functions and embedding theorems*, v. I, V. H. Winston & Sons, Washington, DC, 1978; v. II, 1979.

Т. Ю. СЕМЕНОВА (Т. YU. SEMENOVA)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
E-mail: station@list.ru

Поступило в редакцию
 06.10.2005