Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Условия второго порядка в экстремальных задачах с конечномерным образом. 2-нормальные отображения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 1, 37–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/im61>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:30:09

УДК 519.3

А.В. Арутюнов

Условия второго порядка в экстремальных задачах с конечномерным образом. 2-нормальные отображения

Рассмотрена задача минимизации с ограничениями, включающая в себя задачу с ограничениями типа равенств и неравенств. Для нее получены необходимые условия первого и второго порядков в лагранжевой форме. Главным отличием этих условий от большинства ранее известных является то, что они остаются содержательными и для аномальных задач как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае. Введено понятие 2-анормального отображения. Доказано, что если отображение, задающее ограничение, 2-нормально, то полученные необходимые условия превращаются в достаточные условия второго порядка после как угодно малого возмущения задачи членами второго порядка малости. Доказано, что в пространстве гладких отображений множество 2-анормальных отображений всюду плотно относительно топологии Уитни.

Библиография: 21 наименование.

§ 1. Введение

1. В работе исследуется следующая задача минимизации с ограничениями:

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \min, & x \in X, \\ F(x) \in C. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь X – векторное пространство, C – замкнутый выпуклый конечногранный¹ конус, лежащий в k -мерном арифметическом пространстве $Y = \mathbb{R}^k$, а

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad F: X \rightarrow Y$$

– гладкие (в определяемом ниже смысле) отображения. Отметим, что задача (1.1) включает в себя задачи математического программирования как с ограничениями типа равенств, так и типа неравенств, а основным обременительным априорным предположением, наложенным на рассматриваемую задачу, является конечномерность пространства Y – образа отображения F , задающего ограничения.

2. Пусть x_0 является решением задачи (1.1). Как известно (см., например, [1, с. 223]), основные затруднения при выводе необходимых условий экстремума как для конечномерных, так и для бесконечномерных задач возникают в случае, когда точка x_0 является аномальной (abnormal point)². Последнее означает, что

$$\exists y_0 \in N_C(F(x_0)) \cap (-N_C(F(x_0))) : y_0 \neq 0, \quad F'(x_0)^* y_0 = 0, \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 94-01-00476).

¹Напомним, что конечногранный конус определяется конечным числом линейных равенств и неравенств.

²Если $C = 0$, то еще говорят, что в точке x_0 нарушено условие Люстерника.

где $N_C(y)$ – нормальный конус ко множеству C в точке y , а $N_C(y) \cap (-N_C(y))$ – максимальное подпространство, содержащееся в конусе $N_C(y)$.

Дело в том, что аномальные точки являются особыми для многообразия $\{x \in X : F(x) \in C\}$, а правило множителей Лагранжа в аномальной точке выполняется тривиально, т.е. с множителями Лагранжа $\lambda = (\lambda^0, y)$ при $\lambda^0 = 0$, $y = y_0$, где вектор y_0 взят из условия (1.2). Таким образом, правило множителей Лагранжа в аномальной точке выполняется для произвольного минимизируемого функционала f и, являясь всего лишь тривиальным следствием условия аномальности, неинформативно. Кроме того, в аномальной точке классические необходимые условия второго порядка, заключающиеся в неотрицательности второго производной функции Лагранжа на конусе

$$\{h \in X : \langle f'(x_0), h \rangle \leq 0, \quad F'(x_0)h \in T_C(F(x_0))\}$$

(где $T_C(y) = N_C^0(y)$ – конус, касательный ко множеству C в точке y), вообще говоря, не выполняются. Подтверждением последнему из сказанного является следующий пример:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x_1^2 + x_2^2) \rightarrow \min; & x &= (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \\ F(x) &= (F_1(x), F_2(x)) = 0, & F_1(x) &= x_1 x_2, \\ F_2(x) &= x_1^2 - x_2^2; & x_0 &= 0. \end{aligned}$$

Приведем цитату одного из специалистов по условиям второго порядка об условиях нормальности: “Естественно поставить вопрос, какими средствами мы располагаем, если гипотеза нормальности не выполняется? Соответствующее обобщение теории кажется трудным или даже невозможным” [2, с. 115, 116].

3. В настоящей работе (§3) получены необходимые условия второго порядка, остающиеся информативными и для аномальных точек. Если же исследуемая на экстремум точка нормальна (т.е. не существует вектора y_0 , удовлетворяющего (1.2)), то полученные условия превращаются в хорошо известные [3]. Вывод необходимых условий основан на полученной в §2 априорной оценке снизу для верхнего топологического предела последовательности подпространств.

Далее, в §4 вводится понятие 2-нормального отображения в точке (относительно конуса C). Доказывается, что если отображение F 2-нормально в точке, то необходимые условия второго порядка превращаются в достаточные за счет сколь угодно малого квадратичного возмущения отображений f и F . Таким образом, в точках, в которых ограничение 2-нормально, “зазор” между необходимыми и достаточными условиями второго порядка является минимально возможным. А величина этого “зазора” – важнейшая характеристика условий экстремума. Наконец, §5 посвящен исследованию понятия 2-нормальности. Получены эффективно проверяемые достаточные условия 2-нормальности в точке. Доказано, что если $X = \mathbb{R}^n$ и $n \gg k$, то множество отображений F , являющихся 2-нормальными в каждой точке относительно любого конуса, является всюду плотным в пространстве $C_s^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, наделенном топологией Уитни.

§ 2. Обозначения и предположения. Вспомогательный аппарат

1. Угловые скобки $\langle, \rangle$ обозначают скалярное произведение и действие линейного функционала; если φ – множество, то $|\varphi|$ – количество его элементов; наряду с

этим $|x|$ – модуль вектора x ; Lin – линейная оболочка, а conv – выпуклая оболочка множества; $M^\perp$ – ортогональное дополнение или аннулятор подпространства M ;

$$N_C(y) = \{\xi \in Y : \langle \xi, z - y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C\}$$

– нормальный конус к выпуклому множеству C в точке $y \in C$, а $T_C(y) = N_C^0(y)$ – касательный конус к C в точке y , где 0 – полярка конуса; $*$ означает сопряженный оператор и алгебраически сопряженное пространство; если $\{\Pi_n\}$ – последовательность подмножеств топологического пространства, то $\text{Ls}\{\Pi_n\}$ обозначает ее верхний топологический предел, а он, как известно, состоит из всевозможных предельных точек последовательностей $\{x_n\}$: $x_n \in \Pi_n \quad \forall n$; если A – квадратичная форма или квадратичное отображение, то полагаем $A[x]^2 = \langle Ax, x \rangle$. Пусть q – квадратичная форма, а Z – подпространство в X . Тогда $\text{ind}_Z q$ – индекс формы q на Z (т.е. максимум из размерностей всех подпространств $N \subseteq Z$, на которых форма q отрицательно определена).

В векторном пространстве X введем так называемую конечную топологию. В ней открытыми считаются те и только те множества, пересечение которых с любым конечномерным подпространством M открыто в (единственно отделимой) линейной топологии M . Конечную топологию будем обозначать через τ . Если пространство X бесконечномерно, то оно, будучи наделенным конечной топологией τ , вообще говоря, не является векторным топологическим пространством, так как в нем сложение, как правило, разрывно [21]. С другой стороны, конечная топология сильнее всех топологий, превращающих X в векторное топологическое пространство. При этом, очевидно, локальный относительно конечной топологии минимум является слабейшим среди всех рассматриваемых видов минимума.

Зафиксируем точку $x_0 \in X$. Будем предполагать, что функции f и $F = (F_1, \dots, F_k)$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x_0 относительно конечной топологии τ . Последнее означает, что для произвольного конечномерного линейного подпространства M сужения f и F на M дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой (зависящей от M) окрестности x_0 . Таким образом, существуют такие линейный функционал $a \in X^*$, линейный оператор $A: X \rightarrow Y$, квадратичная форма $q: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ и квадратичное отображение $Q: X \rightarrow Y$, а также отображения $\alpha_0: X \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}^k$, что

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \langle a, x - x_0 \rangle + (1/2)q(x - x_0) + \alpha_0(x - x_0), \\ F(x) &= F(x_0) + A(x - x_0) + (1/2)Q(x - x_0) + \alpha(x - x_0) \quad \forall x \in X, \end{aligned}$$

и для произвольного конечномерного подпространства M имеет место

$$\frac{\|\alpha(x - x_0)\|_M}{\|x - x_0\|_M^2} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0, \quad x \in M,$$

где $\|\cdot\|_M$ – конечномерная норма в M , и аналогичное условие для α_0 . Отображения a и q обозначаются через $f'(x_0)$ (или $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$) и $f''(x_0)$ (или $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)$) и называются *первой и второй производными f* . Аналогичные обозначения используются для отображения F и других функций.

2. Получим оценку снизу для верхнего топологического предела последовательности подпространств. Пусть l_∞^k – банахово пространство ограниченных последовательностей k -мерных векторов $\{x^n\}_{n=1}^\infty$, $x^n \in \mathbb{R}^k \ \forall n$ с обычной $\sup$ -нормой. Начнем с построения на l_∞^k некоторого непрерывного линейного оператора, действующего из l_∞^k в $\mathbb{R}^k$ и обладающего нужными нам для дальнейшего свойствами. Существование указанного оператора для $k = 1$ впервые установил А. Я. Дубовицкий, сообщив это автору в личной беседе.

Пусть N – множество натуральных чисел, а φ_0 – произвольное его бесконечное подмножество. Тогда в $\mathbb{N}$ существует нетривиальный ультрафильтр³ Φ , содержащий φ_0 [4] (нетривиальность Φ означает, что пересечение всех его элементов пусто).

Покажем, что $|\varphi| = \infty \ \forall \varphi \in \Phi$. Действительно, предположив противное, среди всех $\varphi \in \Phi$, имеющих конечное число элементов, выберем $\tilde{\varphi}$, имеющее наименьшее число элементов. Возьмем произвольное $\varphi \in \Phi$. Тогда $\tilde{\varphi} \subseteq \varphi$, так как если бы $\tilde{\varphi}$ не содержалось в φ , то $\tilde{\varphi} \cap \varphi \in \Phi$, $|\tilde{\varphi} \cap \varphi| < |\tilde{\varphi}|$, что противоречит выбору $\tilde{\varphi}$. Таким образом, $\tilde{\varphi} \subseteq \varphi \ \forall \varphi \in \Phi$ и, следовательно, пересечение всех элементов $\varphi \in \Phi$ непусто (так как содержит непустое множество $\tilde{\varphi}$). Полученное противоречие с нетривиальностью Φ доказывает, что $|\varphi| = \infty \ \forall \varphi \in \Phi$.

Ультрафильтр Φ порождает на 2^N предмеру (т.е. конечно-аддитивную функцию) d , определяемую формулой

$$d(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \in \Phi, \\ 0, & \text{если } A \notin \Phi, A \in 2^N. \end{cases} \quad (2.1)$$

Покажем, что d конечно-аддитивна. Действительно, пусть $A, B \in 2^N$. Докажем, что тогда

$$d(A \cup B) + d(A \cap B) = d(A) + d(B). \quad (2.2)$$

Если $A \in \Phi$, $B \in \Phi$, то $A \cup B \in \Phi$, $A \cap B \in \Phi$ и (2.2) очевидно. Если $A \notin \Phi$, $B \notin \Phi$, то в силу свойств ультрафильтра $A \cup B \notin \Phi \Rightarrow A \cap B \notin \Phi$ и (2.2) очевидно. Если $A \in \Phi$, $B \notin \Phi$, то $A \cup B \in \Phi$, $A \cap B \notin \Phi$ и (2.2) также, очевидно, выполняется и, следовательно, d – предмера. Отметим также, что по построению $d(\varphi_0) = 1$.

ЛЕММА 2.1 (А.Я.Дубовицкий). Пусть φ – произвольное бесконечное подмножество из $\mathbb{N}$. Тогда существует такой непрерывный линейный оператор $\mathcal{D}_\varphi^k: l_\infty^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, что если $\mathcal{D}_\varphi^k x = 0$, то нуль является предельной точкой последовательности $\{x^n\}$, $n \in \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем нетривиальный ультрафильтр Φ , содержащий φ , и определим по формуле (2.1) предмеру d . С ее помощью определим линейный непрерывный оператор $\mathcal{D}_\varphi^k: l_\infty^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, применяя следующую схему, используемую при построении интеграла по конечно-аддитивной мере в L_∞ . А именно, пусть $x \in l_\infty^k$ – простая последовательность, т.е. существует разбиение $\mathbb{N}$ на попарно

³Напомним понятие ультрафильтра [4]. Пусть E – множество, σ – семейство его подмножеств. Семейство σ называется *фильтром* в E , если: $\emptyset \notin \sigma$; $A, B \in \sigma \Rightarrow A \cap B \in \sigma$; $A \in \sigma$, $A \subseteq B \Rightarrow B \in \sigma$. Говорят, что фильтр σ_1 *мажорируется* фильтром σ_2 , если $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$. Фильтр в E называется *ультрафильтром* в E , если он не мажорируется никаким отличным от него фильтром в E . Из леммы Цорна вытекает, что каждый фильтр в E мажорируется некоторым ультрафильтром.

непересекающиеся подмножества $A_1, \dots, A_r$ так, что $x^n = a_i \quad \forall n \in A_i, \quad i = \overline{1, r}$, где a_i – заданные векторы из $\mathbb{R}^k$. Тогда положим

$$\mathcal{D}_\varphi^k x = \sum_{n=1}^k d(A_i) a_i.$$

Стандартным образом проверяется, что значение $\mathcal{D}_\varphi^k$ на простых последовательностях не зависит от способа разбиения $\mathbb{N}$ на A_i . На всем l_∞^k оператор $\mathcal{D}_\varphi^k$ доопределяется по непрерывности, так как подпространство простых последовательностей всюду плотно в l_∞^k .

Покажем, что построенный оператор $\mathcal{D}_\varphi^k$ является искомым. Действительно, пусть $\mathcal{D}_\varphi^k x = 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся такие (зависящие от него) $x_\varepsilon \in l_\infty^k$, $r \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}^k$ и попарно непересекающиеся подмножества $A_i \subseteq \mathbb{N}$, $i = \overline{1, r}$, что $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^r A_i$; $\|x - x_\varepsilon\|_{l_\infty^k} \leq \varepsilon$; $x_\varepsilon^n = a_i \quad \forall n \in A_i$. Тогда

$$\mathcal{D}_\varphi^k x_\varepsilon = \sum_{i=1}^r a_i d(A_i).$$

Из свойств ультрафильтра следует [4], что из множеств A_i лишь одно, например, $A_{i'}$, принадлежит Φ , откуда в силу (2.1)

$$\mathcal{D}_\varphi^k x_\varepsilon = a_{i'} \Rightarrow |a_{i'}| = |\mathcal{D}_\varphi^k x_\varepsilon| = |\mathcal{D}_\varphi^k x_\varepsilon - \mathcal{D}_\varphi^k x| \leq \|\mathcal{D}_\varphi^k\| \varepsilon = \varepsilon \Rightarrow |x^n| \leq 2\varepsilon \quad \forall n \in A_{i'}.$$

Но по построению $\varphi \in \Phi \Rightarrow \varphi \cap A_{i'} \in \Phi$ и, как показано выше, $\varphi \cap A_{i'}$ содержит бесконечное число номеров n , причем для всех них $|x^n| \leq 2\varepsilon$. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает справедливость доказываемого утверждения.

ЗАМЕЧАНИЕ. В лемме 2.1 доказано существование не одного, а целого семейства различных операторов Дубовицкого $\mathcal{D}_\varphi^k$, так как каждое бесконечное подмножество $\varphi \subseteq \mathbb{N}$ порождает (правда, не единственный) нетривиальный ультрафильтр, определяющий с помощью (2.1) предмеру, по которой уже строится сам оператор. Однако, если последовательность $x = x^n$ сходится, то значение любого оператора Дубовицкого на x равно $\lim_{i \rightarrow \infty} x^i$. Оператор $\mathcal{D}_N^k$ будем обозначать через $\mathcal{D}^k$.

3. Пусть X – банахово пространство и $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность линейных непрерывных операторов, действующих из X в $Y = \mathbb{R}^k$. Будем предполагать, что последовательность $\{A_n\}$ сходится по норме к линейному оператору $A: X \rightarrow Y$. Положим $M = \text{Ls}\{\text{Ker } A_n\}$. Очевидно, что M замкнуто, непусто ($0 \in M$) и $M \subseteq \text{Ker } A$. Если оператор A сюръективен, то в силу доказываемой ниже теоремы $M = \text{Ker } A$. Если же A сюръективным не является, то, вообще говоря, $M \neq \text{Ker } A$ и множество M может даже не быть выпуклым.

ТЕОРЕМА 2.1. *В пространстве X существует такое замкнутое подпространство Π , что $\text{codim } \Pi \leq k$; $\Pi \subseteq \text{Ls}\{\text{Ker } A_n\}$, $\Pi \subseteq \text{Ker } A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $P_1: Y \rightarrow \text{Im } A$, $P_2: Y \rightarrow (\text{Im } A)^\perp$ соответствующие операторы ортогонального проектирования. Положим

$$r = \text{codim}(\text{Im } A); \quad L_n = P_1 \circ A_n; \quad L = P_1 \circ A;$$

$$x_{i,n}^* = y_i^* \circ P_2 \circ A_n, \quad i = \overline{1, r},$$

где $\{y_i^*\}$ – некоторый базис пространства, сопряженного к $(\text{Im } A)^\perp$. В силу непрерывности операторов проектирования линейные операторы L_n и функционалы $x_{i,n}^*$ непрерывны, причем $L_n \rightarrow L$, $n \rightarrow \infty$, а L сюръективен. Превратим топологически сопряженные пространства X' и Y' обычным образом в банаховы, обозначая норму в них тем же символом $\|\cdot\|$, что и в исходных пространствах, и отождествляя Y с Y' ($Y = \mathbb{R}^k$).

Используя определение числа r , будем, не теряя общности, считать, что для каждого номера n сужения линейных функционалов $x_{i,n}^*$, $i = \overline{1, r}$, на подпространстве $\text{Ker } L_n$ линейно независимы (так как в противном случае можно было бы перейти к подпоследовательности). Поэтому, учитывая конечномерность Y , легко получаем, что для каждого из номеров $i = \overline{1, r}$, $n = 1, 2, \dots$ инфимум в задаче

$$\left\| x_{i,n}^* + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j x_{j,n}^* + L_n^* y \right\| \rightarrow \inf, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}^1, \quad y \in Y,$$

положителен и достигается. Поэтому существуют такие $y_{i,n} \in Y$ и числа $\alpha_{j,i,n}$, что

$$\bar{x}_{i,n}^* = x_{i,n}^* + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{j,i,n} x_{j,n}^* + L_n^* y_{i,n}; \quad (2.3)$$

$$\bar{x}_{i,n}^* \neq 0; \quad \left\| \bar{x}_{i,n}^* + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j x_{j,n}^* + L_n^* y \right\| \geq \frac{1}{2} \|\bar{x}_{i,n}^*\| \quad \forall (\alpha_j, y).$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\left\| \tilde{x}_{i,n}^* + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \tilde{x}_{j,n}^* + L_n^* y \right\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall (\alpha_j, y), \quad (2.4)$$

где $\tilde{x}_{i,n}^* = \bar{x}_{i,n}^* \|\bar{x}_{i,n}^*\|^{-1}$, так как по построению

$$\tilde{x}_{i,n}^* \in \text{Lin}(x_{1,n}^*, \dots, x_{i,n}^*, \text{Im } L_n^*).$$

Отсюда вытекает также, что

$$\bigcap_{i=1}^r \text{Ker } x_{i,n}^* \cap \text{Ker } L_n = \bigcap_{i=1}^r \text{Ker } \tilde{x}_{i,n}^* \cap \text{Ker } L_n.$$

Определим линейный оператор $\Phi: X \rightarrow l_\infty^r$, положив

$$\Phi x = \left\{ \begin{pmatrix} \langle \tilde{x}_{1,n}^*, x \rangle \\ \vdots \\ \langle \tilde{x}_{r,n}^*, x \rangle \end{pmatrix} \right\}_{n=1}^\infty.$$

Пусть $\mathcal{D}^r$ – оператор Дубовицкого, существование которого доказано в лемме 2.1. Положим

$$\tilde{\Pi} = \{x \in X : \mathcal{D}^r \circ \Phi x = 0\}, \quad \Pi = \tilde{\Pi} \cap \text{Ker } A$$

и покажем, что подпространство Π является искомым.

Действительно, $\Pi \subseteq \text{Ker } A$ и

$$\text{codim } \Pi \leq \text{codim } \tilde{\Pi} + \text{codim}(\text{Ker } A) \leq r + \dim(\text{Im } A) = k.$$

Поэтому достаточно доказать, что если $x_0 \in \Pi$, то точка x_0 является предельной для некоторой последовательности точек $\{x_n\}$, лежащей в $\text{Ker } A_n$. Сделаем это.

Действительно, пусть $\mathcal{D}^r \circ \Phi x_0 = 0$. Тогда в силу леммы 2.1, переходя к подпоследовательности, получаем

$$\langle \tilde{x}_{i,n}^*, x_0 \rangle \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad i = \overline{1, r}. \quad (2.5)$$

Для каждого n рассмотрим задачу

$$J_n(x) = \|x - x_0\|^2 \rightarrow \inf; \quad L_n x = 0, \quad \langle \tilde{x}_{i,n}^*, x \rangle = 0, \quad i = \overline{1, r},$$

и пусть J_n – значение инфимума в ней. Выберем $\tilde{x}_n \in X$, удовлетворяющее всем ограничениям этой задачи, для которого $J_n(\tilde{x}_n) \leq J_n + 1/n^2$. Тогда из теоремы об ε -субдифференциале получаем, что при больших n существуют такие $x_n \in X$, $h_n^* \in X^*$, множители Лагранжа $\lambda_{i,n} \in \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, r}$, и $y_n \in (\text{Im } A)^*$, что

$$\sum_{i=1}^r \lambda_{i,n} \tilde{x}_{i,n}^* + L_n^* y_n + h_n^* \in \partial \kappa(x_n - x_0) \quad (2.6)$$

и $\|x_n - \tilde{x}_n\| \leq 1/n$, $\|h_n^*\| \leq 1/n$, $L_n x_n = 0$, $\langle \tilde{x}_{i,n}^*, x_n \rangle = 0$, $i = \overline{1, r}$. Здесь $\partial \kappa$ – субдифференциал выпуклой функции $\kappa(x) = \|x\|^2$. В силу [3]

$$\|x^*\| = 2\|x\|; \quad |\langle x^*, x \rangle| = 2\|x\|^2 \quad \forall x^* \in \partial \kappa(x). \quad (2.7)$$

Из (2.6) и первой формулы (2.7) получаем

$$2\|x_n - x_0\| \geq \left\| \sum_{i=1}^r \lambda_{i,n} \tilde{x}_{i,n}^* + L_n^* y_n \right\| - 1/n,$$

откуда в силу (2.4) $|\lambda_{i,n}| \leq \text{const}(\|x_n - x_0\| + 1/n)$, $i = \overline{1, r}$. По теореме Банаха об открытом отображении в силу сюръективности L имеем

$$\|L^* y\| \geq \text{const} \|y\| \quad \forall y \in \text{Im } A \Rightarrow \|L_n^* y_n\| \geq \text{const} \|y_n\| \quad \forall y_n \in \text{Im } A$$

для достаточно больших n и, следовательно, из (2.6) и первой формулы (2.7) имеем

$$\|y_n\| \leq \text{const}(\|x_n - x_0\| + 1/n).$$

Применяя левую часть (2.6) к вектору $(x_n - x_0)$ и используя (2.7), получаем

$$2\|x_n - x_0\|^2 \leq \text{const} \left(\|x_n - x_0\| \sum_{i=1}^r |\langle \tilde{x}_{i,n}^*, x_0 \rangle| + 1/n \right),$$

так как $\langle \tilde{x}_{i,n}^*, x \rangle = 0$, $i = \overline{1, r}$. Из полученного неравенства в силу (2.5) вытекает, что $x_n \rightarrow x_0$, $n \rightarrow \infty$. Из того, что $\langle \tilde{x}_{i,n}^*, x_n \rangle = 0$, $i = \overline{1, r}$; $L_n x_n = 0$ в силу (2.4) имеем

$$\langle x_{i,n}^*, x_n \rangle = 0, \quad i = \overline{1, r} \Rightarrow x_n \in \text{Ker } A_n.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\{P_n\}$ – последовательность замкнутых подпространств из X и $\text{codim } P_n \leq k \quad \forall n$. Тогда в X существует такое замкнутое подпространство $\Pi \subseteq X$, что $\text{codim } \Pi \leq k$; $\Pi \subseteq \text{Ls}\{P_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем такие линейные непрерывные операторы $\tilde{A}_n : X \rightarrow Y$, что $\text{Ker } \tilde{A}_n = P_n \quad \forall n$. Положим $A_n = \tilde{A}_n(n\|A_n\|)^{-1}$. Очевидно, $A_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Применяя к $\{A_n\}$ теорему 2.1, получаем искомое утверждение. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [5] получены оценки снизу для $\text{Ls}\{x : A_n x \in \mathcal{K}\}$, где $\mathcal{K}$ – конечногранный конус в банаховом пространстве.

§ 3. Необходимые условия второго порядка

1. Вернемся к исследованию задачи (1.1). Всюду в этом параграфе будем предполагать, что точка x_0 является локальным минимумом относительно конечной топологии τ , а f и F дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности x_0 относительно конечной топологии.

Введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \lambda^0 f(x) + \langle y, F(x) \rangle; \quad \lambda = (\lambda^0, y), \quad \lambda^0 \in \mathbb{R}^1, \quad y \in Y.$$

По правилу множителей Лагранжа (оно дает необходимые условия первого порядка) для точки локального минимума x_0 найдутся такие множители Лагранжа λ , что

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda) = 0, \quad \lambda^0 \geq 0, \quad y \in N_C(F(x_0)), \quad \lambda \neq 0. \quad (3.1)$$

Множество всех множителей Лагранжа, отвечающих точке x_0 , является непустым (незамкнутым) конусом. Этот конус будем обозначать через $\Lambda = \Lambda(x_0)$. Конус $\Lambda \cup \{0\}$, очевидно, выпуклый.

Введем в рассмотрение множество, состоящее из тех множителей Лагранжа $\lambda \in \Lambda$, для которых существует такое (зависящее от λ) подпространство $\Pi \subseteq X$, что

$$\text{codim } \Pi \leq k; \quad \Pi \subseteq \text{Ker } F'(x_0); \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x]^2 \geq 0 \quad \forall x \in \Pi. \quad (3.2)$$

Это множество множителей Лагранжа будем обозначать через $\Lambda_a = \Lambda_a(x_0)$. Очевидно, что $\Lambda_a \subseteq \Lambda$ и Λ_a является конусом (однако, вообще говоря, конус $\Lambda_a \cup \{0\}$ выпуклым не является).

Отметим, что существование подпространства Π , удовлетворяющего (3.2), эквивалентно тому, что

$$\text{ind}_Z \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda) \leq \text{codim}(\text{Im } F'(x_0)), \quad Z = \text{Ker } F'(x_0).$$

Введем в рассмотрение конус

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(x_0) = \{h \in X : \langle f'(x_0), h \rangle \leq 0, \quad F'(x_0)h \in T_C(F(x_0))\}.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Множество $\Lambda_a(x_0)$ непусто и, более того,

$$\max_{\lambda \in \Lambda_a, |\lambda|=1} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h]^2 \geq 0 \quad \forall h \in \mathcal{K}(x_0). \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем его в три этапа. Вначале в предположении конечномерности X рассмотрим вспомогательную задачу и получим для нее необходимые условия минимума. На втором этапе, используя полученные выше результаты, докажем теорему для случая, когда X конечномерно. Наконец, на третьем этапе докажем теорему в полной общности, т.е. избавимся от предположения $\dim X < \infty$.

I ЭТАП. Предположим, что X конечномерно. Пусть φ – заданная гладкая скалярная функция на X , для которой $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \neq 0 \quad \forall x : \varphi(x) = 0$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad F(x) \in C, \quad \varphi(x) \leq 0. \quad (3.4)$$

Предположим, что x_0 является ее решением. Докажем, что тогда найдутся такие множители Лагранжа $\tilde{\lambda} = (\lambda^0, y, \beta) \neq 0$ и подпространство $\Pi \subset X$, для которых⁴

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x}(x_0, \tilde{\lambda}) = 0, \quad \beta \varphi(x_0) = 0, \quad \lambda^0 \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad y \in N_C(F(x_0)); \quad (3.5)$$

$$\text{codim } \Pi = k + 1; \quad \Pi \subseteq \text{Ker } F'(x_0) \cap \text{Ker}(\varphi'(x_0)(1 + \text{sgn } \varphi(x_0)));$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x^2}(x_0, \tilde{\lambda})[x]^2 \geq 0 \quad \forall x \in \Pi. \quad (3.6)$$

Здесь $\tilde{\mathcal{L}}(x, \tilde{\lambda}) = \lambda^0 f(x) + \langle F(x), y \rangle + \beta \varphi(x)$.

Снимем в задаче (3.4) ограничения $F(x) \in C$ методом штрафов. Обозначим через $\rho(y)$ расстояние от точки y до множества C . Функция ρ выпукла. Сглаживая ее, построим последовательность гладких функций $\{\rho_i\}$:

$$\rho_i(y) = 0 \quad \forall y \in C; \quad \rho_i \rightrightarrows \rho, \quad i \rightarrow \infty; \quad \rho'_i(y) \rightarrow \partial \rho(y), \quad i \rightarrow \infty \quad \forall y.$$

Здесь $\partial \rho$ – субдифференциал, а сходимости множеств понимается в том смысле, что для любой окрестности O множества $\partial \rho(y)$ все точки $\rho'_i(y)$, начиная с некоторого номера $i \geq i_0$, попадают в O .

Для каждого натурального i положим $f_i(x) = f(x) + i \rho_i(F(x)) + |x - x_0|^4$. Рассмотрим семейство задач минимизации

$$f_i(x) \rightarrow \min, \quad \varphi(x) \leq 0, \quad |x - x_0| \leq \delta,$$

называемых *i-задачами*. Здесь $\delta > 0$ выбрано так, чтобы x_0 доставляло минимум в задаче (1.1) в δ -окрестности точки x_0 . Решение *i-задачи* обозначим через x_i .

Докажем, что $x_i \rightarrow x_0$, $i \rightarrow \infty$. Действительно, учитывая конечномерность X и переходя к подпоследовательности, добьемся того, чтобы последовательность $\{x_i\}$ сходилась к некоторому $\bar{x}$. Покажем, что $\bar{x} = x_0$.

⁴Как обычно, $\text{sgn } \xi = -1 \quad \forall \xi < 0$; $\text{sgn } 0 = 0$.

Действительно,

$$\begin{aligned} f_i(x_i) \leq f_i(x_0) = f(x_0) \quad \forall i \Rightarrow \rho_i(F(x_i)) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty \Rightarrow \\ \Rightarrow F(\bar{x}) \in C \Rightarrow f(\bar{x}) \geq f(x_0). \end{aligned}$$

Кроме того, из первого неравенства имеем

$$f(x_i) + |x_i - x_0|^4 \leq f(x_0) \quad \forall i \Rightarrow f(\bar{x}) + |\bar{x} - x_0|^4 \leq f(x_0) \leq f(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} = x_0.$$

Таким образом, доказано, что $x_i \rightarrow x_0$, $i \rightarrow \infty$. При больших i , которые только и будем рассматривать, $|x_i - x_0| < \delta$. Поэтому известные необходимые условия первого и второго порядка в i -задаче заключаются в следующем [6]: существуют такие множители Лагранжа $\tilde{\beta}_i \geq 0$, что

$$\begin{cases} f'_i(x_i) + \tilde{\beta}_i \varphi'(x_i) = 0, & \tilde{\beta}_i \varphi(x_i) = 0, \\ (f''_i(x_i) + \tilde{\beta}_i \varphi''(x_i))[h]^2 \geq 0 \quad \forall h \in X : \sigma_i \langle h, \varphi'(x_i) \rangle = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $\sigma_i = 1 + \operatorname{sgn} \varphi(x_i)$.

Расшифруем эти условия. Положим

$$\lambda_i^0 = (1 + |\tilde{\beta}_i|^2 + |i\rho'_i(F(x_i))|^2)^{-1/2}, \quad \beta_i = \tilde{\beta}_i \lambda_i^0; \quad y_i = i\rho'_i(F(x_i)) \lambda_i^0.$$

В силу (3.7) получаем

$$\lambda_i^0 f'(x_i) + \beta_i \varphi'(x_i) + F'(x_i)^* y_i + \lambda_i^0 \times o(|x_i - x_0|) = 0, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_i^0 f''(x_i) + \beta_i \varphi''(x_i) + F''(x_i) y_i)[h]^2 \\ + i\lambda_i^0 \rho''_i(F(x_i))[F'(x_i)h]^2 + \lambda_i^0 \times 1(i)[h]^2 \geq 0 \\ \forall h \in X : \sigma_i \langle h, \varphi'(x_i) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь $1(i)$ – последовательность, сходящаяся к нулю при $i \rightarrow \infty$. Положим $\tilde{\lambda}_i = (\lambda_i^0, \beta_i, y_i)$. Очевидно, $|\tilde{\lambda}_i| = 1$. Поэтому, переходя к подпоследовательности, получаем $\tilde{\lambda}_i \rightarrow \tilde{\lambda} = (\lambda^0, \beta, y)$, $i \rightarrow \infty$, где $\tilde{\lambda} \neq 0$, $\lambda^0 \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\beta \varphi(x_0) = 0$ и $y \in N_C(F(x_0))$, так как по построению $y_i = i\rho'_i(F(x_i))\lambda_i^0 \rightarrow \partial\rho(F(x_0))$, $i \rightarrow \infty$, а, как известно, для $y \in C$ конус, натянутый на $\partial\rho(y)$, совпадает с $N_C(y)$ [7, с. 90]. Учитывая это и переходя в (3.8) к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем (3.5).

Докажем существование подпространства Π , удовлетворяющего (3.6). Для этого рассмотрим последовательность линейных операторов $A_i: X \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ по формуле $A_i x = (F'(x_i)x, \sigma_i \langle \varphi'(x_i), x \rangle) \quad \forall x \in X$. По теореме 2.1 в X существует такое подпространство Π , для которого $\Pi \subseteq \operatorname{Ker} F'(x_0) \cap \operatorname{Ker}(\sigma_0 \varphi'(x_0))$; $\Pi \subseteq \operatorname{Ls}\{\operatorname{Ker} A_i\}$; $\operatorname{codim} \Pi = k + 1$. Возьмем произвольный $h \in \Pi$. Тогда в силу определения верхнего топологического предела существуют такие $h_i \in \operatorname{Ker} F'(x_i) \cap \operatorname{Ker}(\sigma_i \varphi'(x_i))$, что после перехода к подпоследовательности $h_i \rightarrow h$, $i \rightarrow \infty$. Подставляя в (3.9) вместо h полученные векторы h_i и переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем (3.6).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\varphi(x_0) < 0$, то подпространство Π , удовлетворяющее (3.6), можно выбрать так, что $\operatorname{codim} \Pi = k$. Действительно, если $\varphi(x_0) < 0$, то $\sigma_i = \sigma_0 = 0$ и, взяв $A_i = F'(x_i)$, получаем с помощью теоремы 2.1 искомое подпространство Π .

II этап. По-прежнему будем предполагать, что X конечномерно. Из рассуждений, проведенных на I этапе, вытекает, что $\Lambda_a \neq 0$ (так как x_0 является решением задачи (3.4), в которой функция φ выбрана так, что $\varphi(x_0) < 0 \Rightarrow \beta = 0$).

Докажем (3.3). Для этого воспользуемся приемом, предложенным А. А. Аграчёвым в [8, с. 93]. Для удобства будем считать, что $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, $F(x_0) = 0$. Зафиксируем произвольное $h \in \mathcal{K}$, $|h| = 1$.

Для каждого $\varepsilon = i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots$, рассмотрим задачу минимизации на $X \times \mathbb{R}^1$:

$$\begin{cases} f_\varepsilon(x, \chi) \rightarrow \min, & 0 \leq \chi \leq 1, \\ F(x) - \chi F(\varepsilon h) \in C, & |x|^2 \leq \delta^2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Здесь $\delta > 0$ определено на I этапе и

$$f_\varepsilon(x, \chi) = \tilde{f}(x) + |x - \varepsilon h|^4 - \chi \tilde{f}(\varepsilon h); \quad \tilde{f}(x) = f(x) + |x|^4.$$

Решение задачи (3.10) существует, так как точка $x = \varepsilon h$, $\chi = 1$ удовлетворяет всем ее ограничениям, а шар $\{x : |x| \leq \delta\}$ компактен. Обозначим решение (3.10) через (x_i, χ_i) .

Покажем, что $\chi_i > 0 \quad \forall i$. Действительно, $f_\varepsilon(\varepsilon h, 1) = 0 \Rightarrow f_\varepsilon(x_i, \chi_i) \leq 0$. С другой стороны, при $\chi = 0$ для произвольного x : $|x| \leq \delta$, $F(x) \in C$, имеем

$$f_\varepsilon(x, 0) = f(x) + |x|^4 + |x - \varepsilon h|^4 \geq |x|^4 + |x - \varepsilon h|^4 > 0$$

и, следовательно, точка $(x, 0)$ не является решением (3.10). Таким образом, $\chi_i > 0 \quad \forall i$. Кроме того,

$$f_\varepsilon(x_i, \chi_i) \leq 0 \Rightarrow \tilde{f}(x_i) + |x_i - \varepsilon h|^4 \leq |\tilde{f}(\varepsilon h)|, \quad \varepsilon = i^{-1} \quad \forall i,$$

и, значит, для любой предельной точки $\hat{x}$ последовательности $\{x_i\}$ выполняется $\tilde{f}(\hat{x}) \leq 0$, $F(\hat{x}) \in C$. Следовательно, $\hat{x} = 0 \Rightarrow x_i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$.

Применим при больших i к решению (x_i, χ_i) задачи (3.10) необходимые условия минимума, полученные на I этапе для вспомогательной задачи (3.4). Выпишем их, взяв $\varphi(x, \chi) \equiv \chi - 1$. Вначале рассмотрим случай, когда при всех больших i выполняется $\chi_i = 1 \Rightarrow \varphi(x_i, \chi_i) = 0$.

Определим функцию Лагранжа:

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(\lambda^0, \beta, y, x, \chi) = \lambda^0 f_\varepsilon(x, \chi) + \beta(\chi - 1) + \langle y, F(x) - \chi F(\varepsilon h) \rangle.$$

В силу доказанного на I этапе найдутся такие не равные одновременно нулю

$$\lambda_i^0 \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad y_i \in N_C(F(x_i))$$

и подпространство $\tilde{\Pi}_i \subseteq X \times \mathbb{R}^1$, что

$$\lambda_i^0 \tilde{f}(\varepsilon h) + \langle y_i, F(\varepsilon h) \rangle = \beta_i \geq 0; \quad (3.11)$$

$$\lambda_i^0 (f'(x_i) + 1(i)) + F'(x_i)^* y_i = 0; \quad (3.12)$$

$$F'(x_i)x - F(\varepsilon h)\chi = 0, \quad \chi = 0 \quad \forall \xi = (x, \chi) \in \tilde{\Pi}_i; \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon}{\partial(x, \chi)^2}[\xi]^2 \geq 0 \quad \forall \xi \in \tilde{\Pi}_i; \quad \text{codim } \tilde{\Pi}_i \leq k + 1. \quad (3.14)$$

Отметим, что равенство (3.11) эквивалентно условию $\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon}{\partial \chi} = 0$, (3.12) условию $\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon}{\partial x} = 0$, а (3.13) является следствием того, что

$$\widetilde{P}_i \subseteq \text{Ker} \frac{\partial}{\partial(x, \chi)} (F(x) - \chi F(\varepsilon h)) \Big|_{x=x_i, \chi=\chi_i} \cap \text{Ker} \varphi'$$

(напомним, что $\varphi \equiv \chi - 1$).

Проанализируем полученные соотношения. Положим $P_i = \{x \in X : (x, 0) \in \widetilde{P}_i\}$. Тогда в силу (3.13)

$$P_i \subseteq \text{Ker} F'(x_i) \quad \forall i, \quad (3.15)$$

а также $\text{codim } P_i \leq k$. Кроме того, по построению функция $\widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ линейна по переменной χ . Поэтому квадратичная форма $\frac{\partial^2 \widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon}{\partial x^2}$ неотрицательна на P_i . Далее, по теореме 2.2 существует такое подпространство $\Pi \subseteq X$, что $\text{codim } \Pi = k$, $\Pi \subseteq \text{Ls}\{P_i\}$.

Осуществим в полученных соотношениях предельный переход при $i \rightarrow \infty$. Положим $\lambda_i = (\lambda_i^0, y_i)$. Из (3.11) вытекает, что $\lambda_i \neq 0$. Поэтому, осуществляя нормировку, будем считать, что $|\lambda_i| = 1 \quad \forall i$. Переходя к подпоследовательности, получаем $\lambda_i \rightarrow \lambda = (\lambda^0, y)$, $i \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda^0 \geq 0$, $\lambda \neq 0$. Кроме того, $y \in N_C(F(x_0))$, так как нормальный конус $N_C(y)$ полунепрерывен сверху по $y \in C$. Поэтому, переходя в (3.12) к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем (3.1).

Докажем, что $\lambda \in \Lambda_a$. Действительно, возьмем произвольное $z \in \Pi$. Тогда существует последовательность $\{z_i\}$, для которой после перехода к подпоследовательности $z_i \in P_i \quad \forall i$; $z_i \rightarrow z$, $i \rightarrow \infty$. Поэтому в силу (3.15) $z_i \in \text{Ker} F'(x_i) \quad \forall i \Rightarrow z \in \text{Ker} F'(x_0)$, откуда $\Pi \subseteq \text{Ker} F'(x_0)$. Аналогично, из (3.14) получаем

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[z]^2 \geq 0 \quad \forall z \in \Pi \Rightarrow \lambda \in \Lambda_a.$$

Обратимся снова к неравенствам (3.11). По предположению C – выпуклый конечногранный конус. Поэтому $N_C(y) \subseteq N_C(F(x_0))$ для всех $y \in C$, близких к $F(x_0)$. Следовательно, $y_i \in N_C(F(x_0))$ при больших i . Кроме того, $h \in \mathcal{H} \Rightarrow \langle y_i, F'(x_0)h \rangle \leq 0$, $\lambda_i^0 \langle f'(x_0), h \rangle \leq 0$. Используя полученные неравенства, раскладывая в (3.11) левую часть по ε до членов второго порядка и переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h]^2 \geq 0$. Откуда в силу произвольности h вытекает (3.3).

Обратимся ко второму случаю, когда $\chi_i < 1$ для бесконечного числа номеров i . Он рассматривается аналогично. При этом надо лишь дополнительно воспользоваться замечанием, приведенным в конце этапа I.

III ЭТАП. Докажем теорему в полной общности (т.е. при $\dim X = \infty$). Для этого используем подход, предложенный в [9]. Пусть снова $x_0 = 0$. Возьмем произвольный вектор $h \in \mathcal{H}$. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех конечномерных подпространств $M \subset X$, содержащих h и для которых $F'(x_0)(M) = \text{Im } F'(x_0)$. Возьмем произвольное $M \in \mathcal{M}$ и рассмотрим задачу, полученную из (1.1) заменой X на M . Для этой конечномерной задачи в силу доказанного на II этапе существуют такие множители Лагранжа $\lambda_M = (\lambda_M^0, y_M)$, что

$$\begin{aligned} \lambda_M^0 &\geq 0, \quad y_M \in N_C(F(x_0)), \quad |\lambda_M| = 1; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda_M) &\in M^\perp; \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda_M)[h]^2 \geq 0; \end{aligned}$$

а индекс квадратичной формы $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda_M)$ на подпространстве $M \cap \text{Ker } F'(x_0)$ не превышает числа $\text{codim}(\text{Im } F'(x_0))$. Множество таких векторов λ_M обозначим через $\Lambda_a(M, h)$. Легко видеть, что множество $\Lambda_a(M, h)$ замкнуто и непусто для любого $M \in \mathcal{M}$. Кроме того, для произвольных $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}$, очевидно, имеет место

$$\bigcap_{i=1}^n \Lambda_a(M_i, h) \supseteq \Lambda_a(M_1 + \dots + M_n, h) \neq \emptyset.$$

Следовательно, система множеств $\Lambda_a(M, h)$, $M \in \mathcal{M}$, является центрированной. Поэтому в силу компактности единичной сферы в $\mathbb{R}^{k+1}$ пересечение $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} \Lambda_a(M, h)$ непусто.

Возьмем произвольный вектор $\lambda \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \Lambda_a(M, h)$. Для него, очевидно, имеет место

$$\lambda \in \Lambda; \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h]^2 \geq 0.$$

Докажем, что $\lambda \in \Lambda_a$. Для этого достаточно установить существование подпространства Π , удовлетворяющего (3.2). Действительно, максимальная из размерностей, лежащих в $\text{Ker } F'(x_0)$ подпространств, на которых квадратичная форма $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)$ отрицательно определена, не превышает числа $(k - \dim(\text{Im } F'(x_0)))$. Это утверждение вытекает из того, что $\lambda \in \Lambda_a(M, h)$ для любого конечномерного подпространства $M \in \mathcal{M}$. Существование подпространства Π , удовлетворяющего (3.2), вытекает теперь из [20, лемма 1.1] (лемма 1.1 из [20] дает эквивалентное определение индекса квадратичной формы). Справедливость (3.3) вытекает из произвольности вектора $h \in \mathcal{H}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы остается в силе, даже если условие конечности конуса C заменить на следующее предположение:

$$\exists \varepsilon > 0 : N_C(F(x)) \subseteq N_C(F(x_0)) \quad \forall x : F(x) \in C, \quad |x - x_0| < \varepsilon. \quad (3.16)$$

Справедливость этого вытекает из анализа доказательства теоремы, так как мы в нем по существу использовали не конечность конуса C , а лишь ее следствие (3.16).

2. Рассмотрим теперь задачу (1.1) в предположении, что точка x_0 не просто аномальна, а, более того, в ней происходит “полное вырождение”, т.е.

$$f'(x_0) = 0; \quad F'(x_0) = 0. \quad (3.17)$$

Несмотря на кажущуюся неестественность “полного вырождения”, к случаю (3.17) сводится, например, проблема исследования знакоопределенности заданной квадратичной формы на пересечении конечного числа квадрик [10]. Оказывается, что в случае “полного вырождения” необходимые условия из теоремы 3.1 можно дополнить.

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что $\dim X < \infty$, $C = 0$ и выполнено предположение (3.17). Тогда существуют такие множители Лагранжа $\lambda = (\lambda^0, y) \in \Lambda_a$ и вектор $l \in X$, что*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)l = 0; \quad y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)[l]^2, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)[l]^2 \leq 0;$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x]^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)[l, x] \right|^2 \geq 0 \quad \forall x \in X; \quad \lambda^0 + |l| \neq 0. \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся рассуждениями, проведенными на I этапе доказательства теоремы 3.1. Для удобства будем считать, что $x_0 = 0$, $f(0) = 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу (3.4) при $C = \{0\}$, $\varphi \equiv -1$. Построим семейство i -задач, взяв $\rho_i(y) \equiv \rho(y) \equiv |y|^2$.

Если для бесконечного числа номеров i решения i -задачи x_i обращаются в нуль, то из (3.9) вытекает утверждение доказываемой теоремы при $\lambda^0 = 1$, $y = 0$, $l = 0$. Поэтому ограничимся рассмотрением случая $x_i \neq 0 \quad \forall i$.

Положим $\gamma_i = (1 + i^2|x_i|^4)^{\frac{1}{2}}$, $l_i = \gamma_i^{-\frac{1}{2}}i^{\frac{1}{2}}x_i$. Очевидно, $f_i(x_i) \leq 0 \Rightarrow f(x_i) \leq 0 \quad \forall i$, откуда в силу (3.17) $f''(x_0)[l_i]^2 \leq 1(i)$.

Из (3.17) получаем

$$f'(x_i) = f''(0)x_i + o(|x_i|), \quad F(x) = \frac{1}{2}F''(0)[x]^2 + o(|x|^2), \\ F'(x_i) = F''(0)x_i + o(|x_i|).$$

Подставим эти представления в равенство (3.8) и неравенство (3.9), после чего разделим первое из них на $\lambda_i^0 \gamma_i^{\frac{1}{2}} i^{-\frac{1}{2}}$, а второе – на $\lambda_i^0 \gamma_i$. Учитывая то, что $\rho'(y) = 2y$, $\rho''(y) = 2I$ (I – единичная матрица), и переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем искомые λ и l . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как показывает следующий пример, предположение о конечномерности X в теореме 3.2 существенно: его нельзя опустить, не заменив другим (например, предположением о лежандровости формы, как это сделано в [5], [11]).

ПРИМЕР. Пусть X – гильбертово пространство, $A: X \rightarrow X$ – положительный симметричный компактный оператор, а $I: X \rightarrow X$ – тождественный оператор. Тогда нуль является решением задачи

$$f(x) = -|x|^2 \rightarrow \min, \quad F(x) = \langle Ax, x \rangle = 0,$$

так как $A[x]^2 \neq 0 \quad \forall x \neq 0$. Предположим, что $\lambda^0 \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^1$, $l \in X$ удовлетворяют утверждению теоремы 3.2. Тогда индекс формы $(-\lambda^0 I + yA)$ не превышает единицы, откуда $\lambda^0 = 0$ в силу компактности A ; значит, $y \neq 0 \Rightarrow l = 0$, так как $yAl = 0$, но $\text{Ker } A = 0$. Противоречие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [12]. Отображение F называется *2-регулярным в точке x_0* , если

$$\text{Im}(F'(x_0) + PF''(x_0)x) = Y \quad \forall x : F'(x_0)x = 0, \quad F''(x_0)[x, x] \in \text{Im}(F'(x_0)),$$

где P – оператор ортогонального проектирования Y на $(\text{Im } F'(x_0))^\perp$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Предположим, что $\dim X < \infty$ и выполняется хотя бы одно из двух предположений: либо $F'(x_0) = 0$ и отображение F 2-регулярно в точке x_0 , либо $x_0 = 0$, а F является квадратичным отображением. Пусть $f'(x_0) = 0$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется*

$$f(x) \geq f(x_0) + \varepsilon|x - x_0|^2 \quad \forall x : F(x) = 0, \quad |x - x_0| < \varepsilon.$$

Тогда существуют такие, удовлетворяющие (3.18) и (3.19) $\lambda \in \Lambda_a$, $l \in X$, что $\lambda^0 > 0$.

Справедливость этого утверждения несложно вытекает из теоремы 3.2 и теоремы 2 из [12, с. 1095].

3. Впервые необходимые условия второго порядка, заключающиеся в том, что множество $\Lambda_a(x_0)$ непусто, были получены для задачи оптимального быстрогодействия в [13]. В дальнейшем эти условия были обобщены на широкий класс экстремальных задач [5], [9], [11].

В [14] для конечномерных задач в предположении, что совместное отображение $\varphi = (f, F)$ удовлетворяет условию, аналогичному условию 2-регулярности в точке x_0 , а также $\varphi'(x_0) = 0$, необходимые условия второго порядка были получены А. А. Аграчёвым. Эти условия получаются из (3.3) заменой множества Λ_a множеством $\tilde{\Lambda}$, получающимся из Λ_a за заменой в (3.2) числа k на $k + 1$ (и, значит, $\Lambda_a \subset \tilde{\Lambda}$). Там же доказывается, что в сделанных предположениях это условие является и достаточным.

Необходимые условия второго порядка, в которых при взятии супремума по множителям Лагранжа конус Λ был сужен (в случае, когда пространство X бесконечномерно), получены А.А.Милютиным в [15], [16]. А именно, им доказано, что

$$\Lambda_+ \neq \emptyset; \quad \sup_{\lambda \in \Lambda_+, |\lambda|=1} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x]^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{K}(x_0). \quad (3.20)$$

Здесь Λ_+ – множество тех $\lambda \in \Lambda$, для которых индекс квадратичной формы $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)$ конечен. Условия (3.20), очевидно, слабее полученных в теореме 3.1.

Примеры задачи, в которой выполняется (3.20), но $\Lambda_a(x_0) = \emptyset$, и, значит, не выполняется утверждение теоремы 3.1, а потому x_0 не является локальным минимумом, привести чрезвычайно легко. Вот один из них:

$$f(x) = \langle a, x \rangle \rightarrow \min; \quad F(x) = \langle Qx, x \rangle = 0; \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $x_0 = 0$, a – заданный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$, а Q – симметричная $(n \times n)$ -матрица, имеющая не менее двух отрицательных и не менее двух положительных собственных чисел. Более содержательные примеры из вариационного исчисления имеются в [5, с. 190]).

Кроме того, если X конечномерно, то $\Lambda_+ = \Lambda$ и, как легко видеть, в любой аномальной точке (см. (1.2)) условия (3.20) выполняются автоматически, т.е. не зависят от минимизируемой функции f .

§ 4. Понятие 2-нормальности и достаточные условия второго порядка

Как отмечалось, важнейшей характеристикой условий экстремума второго порядка является величина зазора между необходимыми и достаточными условиями. Представляется естественным считать этот зазор минимально возможным по отношению к необходимым условиям второго порядка, если необходимые условия превращаются в достаточные после сколь угодно малых в метрике C^2 возмущений минимизируемой функции и отображения, задающего ограничения, но не изменяющих их значений и значений их первых производных в исследуемой точке. Наша цель – выяснить, когда указанный зазор является минимально возможным применительно к полученным ранее (§3) необходимым условиям второго порядка. Для этого вначале приведем достаточные условия.

Будем предполагать, что $x_0 \in X$ и в τ -окрестности этой точки f и F дважды непрерывно дифференцируемы относительно конечной топологии.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть для точки x_0 , во-первых, $\Lambda_a = \Lambda_a(x_0) \neq \emptyset$, а во-вторых,

$$\max_{\lambda \in \Lambda_a, |\lambda|=1} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x]^2 > 0 \quad \forall x \in \mathcal{K}(x_0) : x \neq 0.$$

Тогда x_0 является строгим локальным (относительно конечной топологии τ) минимумом в задаче (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем τ -окрестность V точки x_0 , в которой f и F дважды непрерывно дифференцируемы. Обозначим через $\tilde{O}$ множество тех точек $x \in V$, в которых либо $F(x) \notin C$, либо $F(x) \in C$, $f(x) > f(x_0)$. Положим $O = \tilde{O} \cup \{x_0\}$. Нам, очевидно, достаточно доказать, что O является τ -окрестностью точки x_0 . Действительно, пусть $M \subset X$ – произвольное конечномерное подпространство, содержащее x_0 . Покажем, что $M \cap O$ открыто в M .

Покажем вначале, что $M \cap \tilde{O}$ открыто в M . Пусть $\bar{x} \in M \cap \tilde{O}$. Тогда либо $F(\bar{x}) \notin C$, либо $f(\bar{x}) > f(x_0)$. Поэтому в силу непрерывности сужений F и f на $V \cap M$ и замкнутости C точка $\bar{x}$ обладает в M такой окрестностью W , что либо $F(W) \cap C = \emptyset$, либо $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in W$. Это доказывает открытость $M \cap \tilde{O}$ в M .

Далее, рассмотрим конечномерную задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in M, \quad F(x) \in C.$$

Из предположений теоремы и конечномерности M вытекает, что для этой задачи в точке x_0 выполняются достаточные условия строгого локального минимума из [15]. Поэтому в M найдется такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности, для которых $F(x) \in C$, имеет место $f(x) > f(x_0)$. Отсюда в силу открытости $M \cap \tilde{O}$ в M вытекает и открытость $M \cap O$ в M . В силу произвольности подпространства M множество O является τ -окрестностью точки x_0 . А по построению

$$x \in O, \quad F(x) \in C, \quad x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0),$$

и, значит, x_0 – строгий локальный минимум в задаче (1.1). Теорема доказана.

Более сильный, чем в конечной топологии минимум, естественно, требует и более сильных предположений.

Пусть X – банахово пространство. Предположим, что f и F дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности x_0 и существует строго дифференцируемый в точке x_0 функционал γ : $\gamma(0) = 0$, $\gamma(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$, называемый *строгим высшим порядком* [15], для которого

$$\left\| f(x) - \left(f(x_0) + \langle f'(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} f''(x_0)[x - x_0]^2 \right) \right\| = o(\gamma(x - x_0)), \quad (4.1)$$

$$\left\| F(x) - \left(F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)[x - x_0]^2 \right) \right\| = o(\gamma(x - x_0)). \quad (4.2)$$

ТЕОРЕМА 4.2 [15]. Пусть $\Lambda_a \neq \emptyset$ и

$$\max_{\lambda \in \Lambda_a, |\lambda|=1} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x]^2 \geq \gamma(x) \quad \forall x \in \mathcal{K}(x_0).$$

Тогда x_0 доставляет строгий локальный минимум в задаче (1.1).

Сформулированная теорема является тривиальным следствием результатов из [15, §8], так как $\Lambda_a \subseteq \Lambda(x_0)$. Отметим, что в [15] построена общая теория достаточных условий.

Теперь мы можем выяснить, когда зазор между необходимыми условиями второго порядка (§3) и достаточными является минимально возможным. Оказывается, все зависит от остроты или неостроты конуса⁵ $\text{con} \Lambda_a(x_0)$. Дело в том, что в (3.3) максимум по множеству $\{\lambda \in \Lambda_a : |\lambda| = 1\}$ совпадает с максимумом по его выпуклой оболочке. Поэтому если конус $\text{con} \Lambda_a$ острым не является (и, значит, содержит такое $\lambda = (\lambda^0, y)$, что $(-\lambda) \in \text{con} \Lambda_a$), то условие (3.3), очевидно, выполняется автоматически. В этом случае условие (3.3) выполняется при любой минимизируемой функции f и, значит, для задачи минимизации (1.1) содержательной информации не несет. Поэтому в случае неостроты конуса $\text{con} \Lambda_a$, вообще говоря, не следует ожидать, что при малых в C^2 возмущениях F и f , не изменяющих значений $f(x_0)$, $F(x_0)$, $f'(x_0)$, $F'(x_0)$, точка x_0 доставляет локальный минимум в возмущенной задаче. Сказанное подтверждает следующий пример:

$$\begin{aligned} X = \mathbb{R}^n, \quad Y = \mathbb{R}^1, \quad C = 0, \quad f(x) = -|x|^2 \rightarrow \min; \\ F(x) = x_1 x_2 = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

В точке $x_0 = 0$ конус $\Lambda_a = \Lambda_a(0)$ непуст, а $\text{con} \Lambda_a$ острым не является. Поэтому в нуле выполняются условия (3.3). Тем не менее из теоремы 3.2 вытекает, что точка $x_0 = 0$ не является локальным минимумом в возмущенной задаче ни при каких малых в C^2 гладких возмущениях f и F , при которых $F(0) = F'(0) = 0$.

Совершенно по-иному обстоит дело, когда конус $\text{con} \Lambda_a$ острый.

Для $x \in X$ обозначим через $\mathcal{F}_2(x)$ конус, состоящий из таких $y \in Y$, $y \neq 0$, что $y \in N_C(F(x))$; $(F'(x))^* y = 0$ и в X существует подпространство $\Pi \subseteq \text{Ker } F'(x)$, для которого $\text{codim } \Pi \leq k$; $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle F(x), y \rangle [h]^2 \geq 0 \quad \forall h \in \Pi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение F называется *2-нормальным* относительно конуса C в точке x , если конус $\text{con} \mathcal{F}_2(x)$ является острым (случай $\mathcal{F}_2(x) = \emptyset$ не исключается, так как пустой конус острый по определению).

Данное определение является геометрическим и малоприспособно для проверки 2-нормальности. Поэтому ниже (§5) приводится критерий 2-нормальности и исследованы свойства 2-нормальных отображений. Здесь мы лишь отметим, что 2-нормальность отображения F относительно C в точке x равносильна остроте конуса $\Lambda_a(x)$ для произвольной гладкой функции f .

Предположим, что X – банахово пространство и существует такая дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция Γ , что $\Gamma(x_0) = 0$, $\Gamma'(x_0) = 0$, а функционал $\gamma(x) = \Gamma''(0)[x]^2$ является высшим порядком (т.е. γ строго дифференцируем и $\gamma(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$). Пусть, кроме того, отображения f и F дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности x_0 и удовлетворяют оценкам (4.1), (4.2).

⁵ Выпуклый конус называется *острым*, если он не содержит ненулевых подпространств. Пустое множество также условимся считать острым конусом.

ТЕОРЕМА 4.3. *Предположим, что отображение F 2-нормально относительно конуса C в точке x_0 и в ней выполняются необходимые условия второго порядка:*

$$\Lambda_a = \Lambda_a(x_0) \neq \emptyset; \quad \max_{\lambda \in \Lambda_a, |\lambda|=1} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x]^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{K}(x_0). \quad (4.3)$$

Тогда существует такой вектор $\bar{y} \in Y$, что для любого $\varepsilon > 0$ в возмущенной задаче

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &= f(x) + \varepsilon \Gamma(x) \rightarrow \min, \\ F_\varepsilon(x) &= F(x) + \varepsilon \Gamma(x) \bar{y} \in C \end{aligned} \quad (4.4)$$

точка x_0 доставляет строгий локальный минимум.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу 2-нормальности отображения F конус Λ_a является острым. Поэтому сопряженный к нему конус имеет непустую внутренность (ведь $\dim Y < \infty$). Выберем произвольный, принадлежащий ему вектор $z = (\alpha, \bar{y}) \in \text{int}(\text{conv } \Lambda_a)^*$: $|\alpha| < 1$. Тогда $0 < \varepsilon \langle (1, \bar{y}), \lambda \rangle \quad \forall \lambda \in \Lambda_a$. Поэтому в силу (4.3) для возмущенной задачи выполнены все предположения теоремы (4.2). Следовательно, x_0 – строгий локальный минимум возмущенной задачи. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если порядок γ из формулировки теоремы 4.2 является квадратичной формой, то его можно брать в качестве функции Γ .

Как отмечалось в предыдущем параграфе, из условия (3.20) условие (3.3), вообще говоря, не вытекает. Тем не менее не лишен интереса следующий вопрос. Можно ли наложить на вид конуса C такие предположения, чтобы из (3.20), хотя бы и нетривиальным способом, всегда вытекало (3.3)? Для простоты ограничимся рассмотрением случая $X = \mathbb{R}^n$.

Оказывается, что если конус C имеет непустую внутренность (это соответствует задаче, содержащей лишь неравенственные ограничения), то из (3.20) вытекает (3.3).

Докажем это. Действительно, пусть выполняется (3.20). Возьмем $\bar{y} \in \text{int}(-C)$ и положим $\Gamma(x) = |x - x_0|^2$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 4.3, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ в возмущенной задаче (4.4) x_0 доставляет локальный минимум. Применяя к возмущенной задаче теорему 3.1 и переходя в соответствующих условиях к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем (3.3).

Объясняется доказанный факт очень просто. Если внутренность C непуста, то в рассматриваемой задаче (1.1) аномальные точки (в смысле (1.2)), очевидно, отсутствуют. Тем не менее еще раз отметим, что если в задаче имеется хотя бы одно равенственное ограничение (т.е. внутренность C пуста), то ответ на поставленный вопрос является отрицательным (т.е. всегда можно подобрать такие f, F, x_0 , для которых выполняется (3.20), но не (3.3)).

§ 5. Свойства 2-нормальных отображений

1. Возьмем точку $x_0 \in X$ и положим

$$d = \dim \left\{ (\text{Im } F'(x_0))^\perp \cap N_C(F(x_0)) \cap (-N_C(F(x_0))) \right\}. \quad (5.1)$$

ЛЕММА 5.1. *Отображение F 2-нормально относительно C в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любого целого $s : 1 \leq s \leq d$, не существует таких линейно независимых векторов $y_i \in Y$, $i = \overline{1, s}$, что*

$$y_i \in \text{Ker}(F'(x_0)^*) \cap N_C(F(x_0)) \cap (-N_C(F(x_0))), \quad i = \overline{1, s}; \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \text{ind}_Z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle y_i, F(x_0) \rangle &\leq d, \quad i = \overline{1, s}; \\ \text{ind}_Z \left(- \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle y_i, F(x_0) \rangle \right) &\leq d, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $Z = \text{Ker } F'(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $0 \notin \mathcal{F}_2(x_0)$. Поэтому неострота конуса $\text{con } \mathcal{F}_2(x_0)$ равносильна тому, что он содержит нуль. Итак, пусть $0 \in \text{con } \mathcal{F}_2(x_0)$. Тогда по теореме Каратеодори существуют такие неравные одновременно нулю $y_i \in \text{con } \mathcal{F}_2(x_0)$, $i = \overline{1, k+1}$, что $\sum_{i=1}^{k+1} y_i = 0$. Следовательно, y_i , $i = \overline{1, k+1}$, удовлетворяют (5.2). Поэтому, применяя к системе векторов $\{y_i\}$ следствие к теореме Каратеодори (см. [18, с. 172, следствие 17.1.1]), уменьшив в ней (после перенумерации) количество векторов до числа $s+1$ для некоторого натурального $s \leq d$ так, что вектора $y_1, \dots, y_{s+1}$ аффинно независимы и $\sum_{i=1}^{s+1} y_i = 0$. Перенумеровывая эту систему, добьемся того, чтобы первые s векторов в ней были линейно независимы. Используя то, что $y_{s+1} = -\sum_{i=1}^s y_i$, $y_i \in \text{con } \mathcal{F}_2(x_0) \quad \forall i$, получаем (5.3).

Проводя рассуждения в обратной последовательности, из условий (5.2), (5.3) имеем $0 \in \text{con } \mathcal{F}_2(x_0)$. Лемма доказана.

В силу леммы 5.1 если точка x нормальна, то отображение F в ней 2-нормально, но, естественно, не наоборот. В [8, с. 92] доказано, что если $X = \mathbb{R}^n$ и $n \gg k$, то типичное квадратичное отображение 2-нормально в нуле.

2. Приведем достаточные условия 2-нормальности отображения относительно конуса C . Первое из них состоит в том, что сам конус C имеет непустую внутренность (т.е. в задаче (1.1) имеются лишь ограничения типа неравенств). Тогда, очевидно, F 2-нормально в каждой точке. Следующие достаточные условия 2-нормальности уже далеко не очевидны. Сформулируем их.

На подпространстве $\text{Ker } F'(x_0)$ определено симметричное билинейное отображение $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)$. Оно для каждого $y \in Y$ порождает симметричную билинейную форму $Q = y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)$ по формуле

$$Q(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\langle y, F(x_0) \rangle) [x_1, x_2] \quad \forall x_1, x_2 \in \text{Ker } F'(x_0).$$

Эта билинейная форма порождает линейный оператор $\bar{Q} : \text{Ker } F'(x_0) \rightarrow X^*$ по формуле $\langle \bar{Q}x, \xi \rangle = Q(x, \xi) \quad \forall x \in \text{Ker } F'(x_0), \xi \in X$. Билинейную форму $y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)$ и порожденный ею оператор будем обозначать одинаково. При этом по определению

$$\text{Ker} \left(y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0) \right) = \left\{ z \in \text{Ker } F'(x_0) : \left\langle y, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0) [z, \xi] \right\rangle = 0 \quad \forall \xi \in \text{Ker } F'(x_0) \right\}.$$

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть для любого натурального числа $s \leq d$ и любых линейно независимых векторов y_i , $i = \overline{1, s}$, удовлетворяющих (5.2), выполняется

$$\text{codim} \left(\bigcap_{i=1}^s \text{Ker} \left(y_i \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0) \right) \right) > d(s+1), \quad (5.4)$$

где codim – коразмерность в подпространстве $\text{Ker } F'(x_0)$.

Тогда отображение F 2-нормально относительно конуса C в точке x_0 .

3. Доказательству теоремы 5.1 предположим один алгебраический результат, связанный с исследованием семейства симметричных $(n \times n)$ -матриц Q_i , $i = \overline{1, s}$, специального вида (s, n – натуральные числа).

Пусть n_1, n_2 – натуральные числа и $n_1 + n_2 = n$. Матрицы Q_i имеют вид

$$Q_i = \begin{pmatrix} B_i & A_i^* \\ A_i & O \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, s}, \quad (5.5)$$

где B_i – симметричные $(n_1 \times n_1)$ -матрицы, A_i – прямоугольные $(n_2 \times n_1)$ -матрицы, а O – нулевая $(n_2 \times n_2)$ -матрица.

ЛЕММА 5.2. Пусть Π_i , $i = \overline{0, s}$, – заданные подпространства из $\mathbb{R}^n$ и $\Pi = \bigcap_{i=0}^s \Pi_i$. Предположим, что

$$\Pi_i \subseteq \text{Ker } A_i, \quad i = \overline{1, s}; \quad \Pi_0 \subseteq \text{Ker} \left(\sum_{i=1}^s A_i \right), \quad (5.6)$$

$$\langle B_i \bar{\xi}, \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in \Pi, \quad \bar{\xi} \in \Pi_i, \quad i = \overline{1, s}; \quad (5.7)$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^s B_i \bar{\xi}, \xi \right\rangle = 0 \quad \forall \xi \in \Pi, \quad \bar{\xi} \in \Pi_0. \quad (5.8)$$

Тогда

$$\text{codim} \left(\bigcap_{i=1}^s \text{Ker } Q_i \right) \leq \sum_{i=0}^s \text{codim } \Pi_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления (5.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^s \text{Ker } Q_i &= \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : A_i x_1 = 0; \quad B_i x_1 + A_i^* x_2 = 0, \quad i = \overline{1, s}; \right. \\ &\quad \left. x_2 \in \left(\bigcap_{i=1}^s \text{Ker } A_i^* \right)^\perp \right\} \oplus \{0\} \times \bigcap_{i=1}^s \text{Ker } A_i^*, \end{aligned}$$

где $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ – первые n_1 координат вектора x , а $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ – оставшиеся n_2 его координат. Отсюда в силу (5.6) получаем

$$\begin{aligned} \dim \left(\bigcap_{i=1}^s \text{Ker } Q_i \right) &\geq \dim \left(\bigcap_{i=1}^s \text{Ker } A_i^* \right) \\ &\quad + \dim \left\{ x_1 \in \Pi : \exists x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad B_i x_1 + A_i^* x_2 = 0, \quad i = \overline{1, s} \right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$-A_i^* x_2 = B_i x_1, \quad i = \overline{1, s}, \quad (5.10)$$

относительно неизвестного x_2 . Из теоремы Фредгольма вытекает, что она имеет решение для любого вектора $x_1 \in \Pi$, для которого

$$\sum_{i=1}^s \langle B_i \xi_i, x_1 \rangle = 0 \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_s) : \quad \xi_i \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \sum_{i=1}^s A_i \xi_i = 0.$$

Но в силу (5.6) и (5.7) эти условия достаточно проверять лишь для тех $\tilde{\xi}$, для которых $\xi_i \in \Pi_i^\perp$. Поэтому приведенные соотношения можно заменить на следующие:

$$\sum_{i=1}^s \langle B_i \xi_i, x_1 \rangle = 0 \quad \forall \tilde{\xi} : \quad \xi_i \in \Pi_i^\perp, \quad i = \overline{1, s}; \quad \sum_{i=1}^s A_i \xi_i = 0. \quad (5.11)$$

Мы будем рассматривать (5.11) как систему линейных уравнений относительно неизвестного $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, которая выделяет подпространство R тех векторов x_1 , для которых (5.10) имеет решение.

Подсчитаем количество уравнений в (5.11). Несложно видеть, что количество этих уравнений равно $\chi(s)$, где

$$\chi(i) = \dim \left\{ \tilde{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_s) : \quad \xi_l \in \Pi_l^\perp, \quad l = \overline{1, i}; \quad \sum_{l=1}^i A_l \xi_l = 0 \right\}, \quad i = \overline{1, s}.$$

Вычислим $\chi(s)$. Покажем, что

$$\chi(s) = \sum_{i=1}^s \text{codim}(\text{Ker } A_i) - \text{codim} \left(\bigcap_{i=1}^s \text{Ker } A_i^* \right). \quad (5.12)$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \chi(s) &= \dim \left\{ \text{Im } A_s \cap \sum_{i=1}^{s-1} \text{Im } A_i \right\} + \chi(s-1) \\ &\stackrel{(1)}{=} \dim(\text{Im } A_s) - \dim \left(\sum_{i=1}^s \text{Im } A_i \right) + \dim \left(\sum_{i=1}^{s-1} \text{Im } A_i \right) + \chi(s-1) \\ &\stackrel{(2)}{=} \dim(\text{Im } A_s) - \dim \left(\sum_{i=1}^s \text{Im } A_i \right) + \dim \left(\sum_{i=1}^{s-1} \text{Im } A_i \right) \\ &\quad + \dim(\text{Im } A_{s-1}) + \dim \left(\sum_{i=1}^{s-2} \text{Im } A_i \right) - \dim \left(\sum_{i=1}^{s-1} \text{Im } A_i \right) + \chi(s-2) = \dots \\ &= \sum_{i=1}^s \dim(\text{Im } A_i) - \dim \left(\sum_{i=1}^s \text{Im } A_i \right) + \chi(1) \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{i=1}^s \dim(\text{Im } A_i) - \text{codim} \left(\bigcap_{i=1}^s \text{Ker } A_i^* \right), \end{aligned}$$

что доказывает (5.12). Здесь равенства $\stackrel{(1)}{=}$ и $\stackrel{(2)}{=}$ вытекают из того, что для двух произвольных подпространств R_1 и R_2 известна формула

$$\dim(R_1 \cap R_2) = \dim R_1 + \dim R_2 - \dim(R_1 + R_2),$$

а равенство $\stackrel{(3)}{=}$ является следствием равенства $\chi(1) = 0$ и известных формул

$$R_1 + R_2 = (R_1^\perp \cap R_2^\perp)^\perp; \quad (\text{Im } A_i) = \text{Ker } A_i^*; \quad \dim(\text{Im } A_i) = \text{codim}(\text{Ker } A_i).$$

Не все уравнения в (5.11) являются независимыми. В силу (5.6) и (5.8) часть из них выполняется для произвольных $x_1 \in \Pi$. Число таких уравнений не меньше, чем $\dim \Pi_0 - \dim \Pi$.

Следовательно, в силу (5.12) количество независимых уравнений, определяющих подпространство R , не превышает числа

$$\chi = \sum_{i=1}^s \text{codim}(\text{Ker } A_i) + \dim \Pi - \text{codim}\left(\bigcap_{i=1}^s \text{Ker } A_i^*\right) - \dim \Pi_0.$$

Отсюда в силу (5.9) получаем

$$\begin{aligned} \dim\left(\bigcap_{i=1}^s \text{Ker } Q_i\right) &\geq \dim\left(\bigcap_{i=1}^s \text{Ker } A_i^*\right) + \dim \Pi - \chi \\ &= n_2 - \sum_{i=1}^s \text{codim}(\text{Ker } A_i) + \dim \Pi_0 \geq n - \sum_{i=0}^s \text{codim } \Pi_i, \end{aligned}$$

что доказывает искомое неравенство.

Здесь последнее неравенство вытекает из того, что в силу (5.6) $\text{codim } \Pi_i \geq \text{codim}(\text{Ker } A_i)$, $i = \overline{1, s}$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 5.1 проведем от противного. Предположим, что F не является 2-нормальным в точке x_0 .

Тогда в силу леммы 5.1 существуют номер $s \leq d$ и линейно независимые вектора y_i , $i = \overline{1, s}$, для которых выполняется (5.2), (5.3). При этом, не теряя общности, будем считать, что $y_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на i -м месте.

Обозначим через Q_i сужение билинейной формы $y_i \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0) = \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2}(x_0)$ на $\text{Ker } F'(x_0)$, а через q_i соответствующую ей квадратичную форму, $i = \overline{1, s}$. В силу (5.3) существуют такие подпространства $\tilde{\Pi}_i \subseteq \text{Ker } F'(x_0)$, что коразмерность $\tilde{\Pi}_i$ в X не превышает d и $q_i(x) \geq 0 \ \forall x \in \tilde{\Pi}_i$, $i = \overline{1, s}$; $\sum_{i=1}^s q_i(x) \leq 0 \ \forall x \in \tilde{\Pi}_0$.

Положим $\tilde{\Pi} = \bigcap_{i=0}^s \tilde{\Pi}_i$. Тогда очевидно, что каждая из форм q_i на $\tilde{\Pi}$ обращается в нуль и коразмерность $\text{Ker } F'(x_0)$ не превышает $d(s+1)$. Отсюда вытекает, что соответствующие билинейные формы Q_i , $i = \overline{1, s}$, обращаются в нуль на $\tilde{\Pi}$, и, значит, $\tilde{Q}[\tilde{x}, \tilde{x}] = 0 \ \forall \tilde{x}, \tilde{x} \in \tilde{\Pi}$. Здесь $\tilde{Q}: \text{Ker } F'(x_0) \times \text{Ker } F'(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^s$ – билинейное отображение, имеющее координаты $Q_1, \dots, Q_s$. Отсюда вытекает, что $\dim(N(\tilde{\Pi})) \leq d$ и, следовательно, коразмерность $\text{Ker } N$ конечна. Здесь N – линейный оператор, порождающий билинейное отображение $\tilde{Q}$. Поэтому при доказательстве теоремы можно, не теряя общности, считать, что само пространство X конечномерно и для некоторого натурального n пространство $\text{Ker } F'(x_0)$ совпадает с n -мерным арифметическим пространством $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через n_1 коразмерность $\tilde{P}$ в $\mathbb{R}^n$ и положим $n_2 = n - n_1$. Каждая из форм q_i обращается в нуль на $\tilde{P}$. Поэтому, осуществляя в $\mathbb{R}^n$ линейное невырожденное преобразование, добьемся того, чтобы каждая из матриц Q_i , определяющая билинейную форму Q_i (они обозначаются одним символом), имела блочный вид (5.5). При этом для квадратичной формы q_i справедливо представление

$$q_i(x) = B_i[x_1]^2 + 2\langle A_i x_1, x_2 \rangle \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n. \quad (5.13)$$

Здесь x_1 – первые n_1 координат вектора x , а x_2 – оставшаяся часть координат и $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$.

Зафиксируем номер i и рассмотрим на пространстве $\text{Ker } A_i$ квадратичную форму $q(x_1) = B_i[x_1]^2$. Докажем, что ее индекс не превышает числа $\rho = d - \text{codim}(\text{Ker } A_i)$. Действительно, предположим противное. Тогда в $\text{Ker } A_i$ найдется подпространство Z , на котором q отрицательно определена и $\dim Z = \rho + 1$. Положим

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \max\{q(x_1) : x_1 \in Z, |x_1| = 1\}; \\ \kappa_2 &= \min\{|A_i x_1|^2 : x_1 \in (\text{Ker } A_i)^\perp, |x_1| = 1\}. \end{aligned}$$

Очевидно, $\kappa_1 < 0$, $\kappa_2 > 0$. Возьмем произвольное $\delta > 0$ и рассмотрим квадратичную форму q_i на подпространстве

$$P_\delta = Z \times \{0\} \oplus \{(x_1, x_2) : x_1 \in (\text{Ker } A_i)^\perp, x_2 = -\delta A_i x_1\}.$$

Покажем, что если δ достаточно велико, то q_i отрицательно определена на P_δ . Действительно, если $x = (x_1, x_2) \in P_\delta$, то $x_1 = \bar{x}_1 + \hat{x}_1$, где $\bar{x}_1 \in Z$, $\hat{x}_1 \in (\text{Ker } A_i)^\perp$, $x_2 = -\delta A_i \hat{x}_1$. Используя (5.13), получаем

$$q_i(x) = B_i[x_1]^2 - 2\delta |A_i \hat{x}_1|^2 \leq \kappa_1 |\bar{x}_1|^2 + (\kappa_1 - 2\delta \kappa_2) |\hat{x}_1|^2 + \text{const } |\bar{x}_1| |\hat{x}_1|$$

(const – положительная константа). Но квадратный многочлен от переменных $|\bar{x}_1|$ и $|\hat{x}_1|$, стоящий в правой части полученного неравенства, оказывается отрицательно определен при больших $\delta > 0$, так как $\kappa_1 < 0$, $\kappa_2 > 0$. Таким образом, выбирая большое $\delta > 0$, получаем, что форма q_i отрицательна на подпространстве P_δ , размерность которого по построению равна $d+1$. Значит, $\text{ind } q_i \geq d+1$, чего не может быть в силу (5.3). Полученное противоречие доказывает, что индекс формы q на $\text{Ker } A_i$ не превышает ρ . Отсюда вытекает существование такого подпространства $\Pi_i \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, что для $i \in \{1, \dots, s\}$ выполняется

$$\Pi_i \subseteq \text{Ker } A_i; \quad \text{codim } \Pi_i \leq d; \quad q_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Pi_i \times \mathbb{R}^{n_2}. \quad (5.14)$$

(Здесь уже codim – коразмерность в $\mathbb{R}^{n_1}$.) Аналогично доказывается существование такого подпространства $\Pi_0 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, что

$$\Pi_0 \subseteq \text{Ker} \left(\sum_{i=1}^s A_i \right); \quad \text{codim } \Pi_0 \leq d; \quad \sum_{i=1}^s q_i(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Pi_0 \times \mathbb{R}^{n_2}. \quad (5.15)$$

Положим $\Pi = \bigcap_{i=0}^s \Pi_i$. Тогда формы $B_i[x_1]^2$, $i = \overline{1, s}$, неотрицательны на Π_i и обращаются в нуль на Π . Отсюда и из (5.13)–(5.15) легко вытекает, что для каждого номера i выполняются условия (5.7) и (5.8). Таким образом, матрицы Q_i , $i = \overline{1, s}$, удовлетворяют всем предположениям леммы 5.2. Поэтому

$$\text{codim} \left(\bigcap_{i=1}^s \text{Ker } Q_i \right) \leq d(s+1),$$

так как в силу вышедоказанного $\text{codim } \Pi_i \leq d \quad \forall i$. Но полученное неравенство противоречит предположению (5.4) теоремы. Значит, отображение F 2-нормально в точке x_0 . Теорема доказана.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение F называется *2-нормальным*, если оно 2-нормально относительно произвольного конуса C в каждой точке $x \in X$.

Пусть $X = \mathbb{R}^n$. Покажем, что если размерность n существенно больше количества ограничений k (см. ниже (5.16)), то находящееся в общем положении отображение F 2-нормально.

Рассмотрим линейное топологическое пространство $C_s^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ трижды непрерывно дифференцируемых отображений $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, наделенное топологией Уитни [19, гл. 2, §1]. Напомним, что база топологии Уитни состоит из множеств вида

$$g \in C_s^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) : |D^j F(x) - D^j g(x)| < \varepsilon_i \quad \forall x \in K_i, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

где K_i – компакты, лежащие в U_i , $\{U_i\}$ – локально конечное открытое покрытие $\mathbb{R}^n$, а $\{\varepsilon_i\}$ – семейство положительных чисел.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть

$$n > 2(k-2); \quad (n-1)(n-2) > 2(k-1). \quad (5.16)$$

Тогда множество 2-нормальных отображений массивно (т.е. содержит пересечение счетного числа всюду плотных открытых множеств) и, следовательно, всюду плотно в $C_s^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать технику и терминологию, принятую в дифференциальной топологии (см. [19, гл. 2, 3]). Сразу же отметим, что $C_s^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ является пространством Бэра [19, с. 85, теорема 4.4]. Поэтому нам достаточно доказать, что множество 2-нормальных отображений массивно.

Обозначим через $J^2(n, k)$ пространство 2-струй из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$. Элементы $J^2(n, k)$ отождествим с наборами $\gamma = (x, y, A, B)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$, A – $(n \times k)$ -матрица, $B = (B_1, \dots, B_k)$, а B_i – симметричные $(n \times n)$ -матрицы.

Возьмем произвольное целое неотрицательное число $r \leq k-2$ и обозначим через T_r подмножество тех $\gamma \in J^2(n, k)$, для которых $\text{rang } A = r$. Далее для целых чисел l , принимающих значения 0, 1, 2, через $T_{k-1, l}$ обозначим подмножество тех $\gamma \in J^2(n, k)$, что

$$\begin{aligned} \text{rang } A &= k-1, \quad \exists z \in \mathbb{R}^k : Az = 0, \quad z \neq 0, \\ \text{codim}(\text{Ker } Bz) &= \text{rang } Bz = l, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где $Bz = \sum_{i=1}^k B_i z^i$.

Как известно [19, с. 107], каждое из множеств T_r , $r = \overline{0, k-2}$, является гладким подмногообразием $J^2(n, k)$, коразмерность которого равна $(n-r)(k-r)$, и, значит,

$$\text{codim } T_r \geq 2(n-k+2), \quad r = \overline{0, k-2}. \quad (5.18)$$

Покажем, что $T_{k-1, l}$, $l = 0, 1, 2$, также являются гладкими подмногообразиями в $J^2(n, k)$, и вычислим их коразмерность. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех $(n \times k)$ -матриц ранга $k-1$. Оно является гладким подмногообразием в пространстве всех $(n \times k)$ -матриц, причем $\text{codim } \mathcal{A} = n-k+1$.

Далее, не теряя общности, можно считать, что в (5.17) вектор z является элементом проективного пространства RP^{k-1} . Поэтому в силу того, что в (5.17)

$\text{rang } A = k - 1$, вектор $z \in RP^{k-1}$: $Az = 0$, определяется единственным образом и гладко зависит от A как от точки гладкого подмногообразия $\mathcal{A}$. Этот вектор z будем обозначать через $z(A)$.

Таким образом,

$$\gamma \in T_{k-1,l} \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}, \quad Bz(A) \in \mathcal{B}_l,$$

где $\mathcal{B}_l$ — множество симметричных $(n \times n)$ -матриц ранга l . Но в пространстве симметричных $(n \times n)$ -матриц $\mathcal{B}_l$ является гладким подмногообразием и $\text{codim } \mathcal{B}_l = \frac{1}{2}(n-l)(n-l+1)$. Применяя к уравнению $Bz(A) \in \mathcal{B}_l$ относительно неизвестного B теорему о неявной функции и используя гладкость функции $z(\cdot)$, получаем, что множество $T_{k-1,l}$ является гладким подмногообразием в $J^2(n, k)$ и

$$\begin{aligned} \text{codim } T_{k-1,l} &= \text{codim } \mathcal{A} + \text{codim } \mathcal{B}_l \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{codim } T_{k-1,l} \geq (n-k+1) + \frac{1}{2}(n-2)(n-1) \quad \forall l. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Обозначим через $\tilde{T}$ множество подмногообразий T_r , $r = \overline{0, k-2}$; $T_{k-1,l}$, $l = 0, 1, 2$. Таким образом, мы доказали, что каждое из множеств $T \in \tilde{T}$ является гладким подмногообразием в $J^2(n, k)$. При этом в силу (5.16), (5.18), (5.19) коразмерность каждого из этих подмногообразий больше n . Отсюда немедленно вытекает, что если для отображения $F \in C_s^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ его струйное расширение j^2F трансверсально к какому-нибудь из рассмотренных многообразий $T \in \tilde{T}$, то его 2-струя $j^2F(x)$ в произвольной точке $x \in \mathbb{R}^n$ не принадлежит этому многообразию. Но $\tilde{T}$ состоит из конечного числа подмногообразий. Поэтому в силу струйной теоремы трансверсальности [19, с. 109] множество отображений $F \in C_s^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, у которых струйные расширения трансверсальны каждому из многообразий $T \in \tilde{T}$, массивно. Следовательно, множество отображений F , у которых 2-струя $j^2F(x)$ ни в одной точке не принадлежит ни одному из множеств $T \in \tilde{T}$, массивно и плотно в $F \in C_s^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$. А из определения многообразий T_r и $T_{k-1,l}$ и теоремы 5.1 вытекает, что если 2-струя $j^2F(x)$ отображения F в точке x не принадлежит ни одному из множеств $T \in \tilde{T}$, то отображение F 2-нормально в точке x относительно любого конуса C . Теорема доказана.

Теорема 5.2 показывает главное отличие условия 2-нормальности от условия нормальности (условия Люстерника) и условия 2-регулярности. В отличие от указанных и аналогичных им условий невырожденности условие 2-нормальности является условием общего положения в пространстве функций.

Я благодарен моим товарищам А.А. Аграчёву и Н.М. Новиковой, которые прочитали рукопись и сделали ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. Блисс Г.А. Вариационное исчисление. М.: ИЛ, 1950.
2. Анрион Р. Теория второй вариации и ее приложения в оптимальном управлении. М.: Наука, 1979.
3. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1958.
5. Арутюнов А.В. Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности // Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ, 1989. Т. 27. С. 147–235.

6. Алексеев В.М., Тихомиров В.Н., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
7. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
8. Аграчёв А.А. Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Геометрия. Топология, 1988. Т. 26. С. 85–124.
9. Арутюнов А.В. Необходимые условия экстремума в аномальной задаче с равенственными ограничениями // УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 181–182.
10. Dines L.L. On the mapping of n quadratic forms // Bull. Amer. Math. Soc. 1942. V. 48. P. 467–471.
11. Арутюнов А.В. К необходимым условиям оптимальности в задаче с фазовыми ограничениями // ДАН СССР. 1985. Т. 280. № 5. С. 1033–1037.
12. Аваков Е.Р., Аграчёв А.А., Арутюнов А.В. Множество уровня гладкого отображения в окрестности особой точки и нули квадратичного отображения // Матем. сборник. 1991. Т. 182. № 3. С. 1091–1104.
13. Арутюнов А.В., Тынянский Н.Т. К необходимым условиям локального минимума в теории оптимального управления // ДАН СССР. 1984. Т. 275. № 2. С. 268–272.
14. Аграчёв А.А. Еще одно условие условного экстремума // УМН. 1989. Т. 44. № 5. С. 153–154.
15. Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // УМН. 1978. Т. 33. № 6. С. 85–148.
16. Милютин А.А. О квадратичных условиях экстремума в гладких задачах с конечномерным образом // Методы теории экстремальных задач в экономике. М.: Наука, 1981. С. 137–177.
17. Аваков Е.Р. Условия экстремума для гладких ограничений типа равенств // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25. № 5. С. 680–693.
18. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Наука, 1973.
19. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
20. Арутюнов А.В. К теории вырожденных квадратичных форм классического вариационного исчисления // Изв. РАН. Серия матем. 1994. Т. 58. № 6. С. 3–50.
21. Kakutani S., Klee V.L. The finite topology of a linear space // Arcg. Math. 1963. V. 14. Fasc. 1. P. 55–58.

Поступило в редакцию
9.IX.1994