Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Шабанов, Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 6, 183–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:25:05

УДК 519.179.1

Д. А. Шабанов

Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов

Исследуется классическая задача экстремальной теории гиперграфов, впервые поставленная П. Эрдешем. Согласно определению Эрдеша гиперграф обладает свойством B , если существует такая двухцветная раскраска множества его вершин, в которой все ребра гиперграфа многоцветны. Задача состоит в нахождении величины $m(n)$, равной минимуму из всех таких m , для которых существует n -равномерный (каждое ребро содержит ровно n вершин) гиперграф, имеющий в точности m ребер и не обладающий свойством B . Рассмотрены более общие постановки проблемы, в том числе в случае многоцветных раскрасок, и введен ряд параметрических свойств для гиперграфов. Получены оценки экстремальных величин, определенных на различных классах гиперграфов и являющихся аналогами величины $m(n)$.

Библиография: 14 наименований.

§ 1. Введение и история проблемы

В настоящей работе исследуется классическая задача экстремальной теории гиперграфов, впервые поставленная П. Эрдешем. Напомним, что гиперграф – это пара $G = (V, E)$, где $V = \{1, \dots, v\}$ – некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин гиперграфа*, а E – некоторая совокупность подмножеств множества V , которые называются *ребрами гиперграфа*. Гиперграф n -равномерен, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. Мы будем вслед за Эрдешем говорить, что гиперграф $G = (V, E)$ обладает *свойством B* , если существует двухцветная раскраска множества его вершин V , в которой ни одно ребро из E не является одноцветным. Задача, поставленная Эрдешем в 60-е годы прошлого века, состоит в нахождении величины $m(n)$, равной минимуму из таких m , что существует n -равномерный гиперграф, имеющий в точности m ребер и не обладающий свойством B . Эрдеш (см. [1], [2]) с помощью несложного вероятностного метода показал, что

$$2^{n-1} \leq m(n) \leq (1 + o(1)) \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n.$$

Позднее нижняя оценка была улучшена Дж. Беком (см. [3]). В 1978 г. он установил асимптотическое неравенство $m(n) \gg 2^n n^{\frac{1}{3} - \delta}$, где δ может быть выбрано сколь угодно малым (знак $\gg$ означает, что существует такая константа

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00383) и ИНТАС (грант № 03-51-5070).

$C = C(\delta) > 0$, при которой $m(n) \geq C 2^n n^{\frac{1}{3}-\delta}$). Наконец, Дж. Радхакришнан и А. Сринивазан в 2000 г. обосновали следующий результат (см. [4], [5]):

$$m(n) \gg 2^n \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\frac{1}{2}},$$

и этот результат остается наилучшим из известных в настоящее время.

§ 2. Формулировки результатов

В этом параграфе мы представим различные результаты, которые нам удалось получить в связи с проблемой Эрдеша.

2.1. Свойство B_k . Данный пункт посвящен обобщению свойства B , а именно некоторому свойству B_k , введенному в работе [6]. Напомним, что гиперграф обладает *свойством B_k* , если существует такая раскраска множества его вершин в два цвета, при которой в любом его ребре окажется не менее k вершин каждого из этих цветов. Отметим, что из приведенного определения вытекает эквивалентность свойств B и B_1 . Отметим также, что параметр k , вообще говоря, зависит от n и, соответственно, может расти с ростом n . При этом, конечно, $k(n) \leq \frac{n}{2}$. По аналогии с величиной $m(n)$ через $m_k(n)$ мы обозначим минимум из всех таких m , для которых существует n -равномерный гиперграф, имеющий m ребер и не обладающий свойством B_k . Ясно, что $m(n) = m_1(n) \geq m_2(n) \geq m_3(n) \geq \dots$.

Введем несколько дополнительных определений. Назовем ребро *плохим* в некоторой раскраске σ , если в этой раскраске в ребре e число вершин одного из цветов меньше, чем k . При этом другой цвет назовем *доминирующим* в ребре e относительно σ . Ребра, не являющиеся плохими в этой раскраске, назовем *хорошими* относительно σ . Используя новые определения, можно сказать, что некоторый гиперграф обладает свойством B_k , если существует двухцветная раскраска вершин гиперграфа, в которой нет плохих ребер.

Основным результатом данного пункта является асимптотическое неравенство

$$m_k(n) \gg \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{2^n}{C_n^{k-1}}$$

для некоторых значений $k = k(n)$. Более точное утверждение, из которого следует упомянутое неравенство, дано в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть число $\delta \in (0, 1)$ и функция $k = k(n)$ таковы, что для каждого n начиная с некоторого n_0 выполняется неравенство

$$(4k - 2)(k - 1) \leq \frac{\delta \ln \frac{n}{\ln n}}{3n} (n - 5k + 3).$$

Пусть также выбрано число $c > 0$, удовлетворяющее условию $c + \frac{c^2}{3} < 1$. Тогда существует такое натуральное число N , зависящее только от вида функции $k(n)$, что для каждого $n \geq \max(N, n_0)$ выполняется неравенство

$$m_k(n) \geq c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{2^{n-1}}{C_n^{k-1}}. \quad (1)$$

Заметим, что метод, с помощью которого была получена оценка (1), основан на использовании идеи Бека из работы [3]. При этом, однако, возникает ряд как содержательных, так и технических трудностей, преодоление которых требует значительных усилий. Суть нашего метода заключена в доказательстве следующей теоремы. Эта теорема является центральной, и именно в ней дается алгоритм раскраски вершин гиперграфа.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $k = k(n)$ удовлетворяет условию $k = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$, а $x = x(n)$ и $p = p(n)$ – некоторые функции, причем множество значений функции $p(n)$ принадлежит интервалу $(0, 1)$ и выполнено условие $p(n) = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Предположим, что для некоторого числа $\delta \in (0, 1)$ и для каждого n начиная с некоторого n_1 выполняются неравенства

$$(k-1)(n-k+1)p^2(1-p)^{-1} \leq \delta, \quad (2)$$

$$(4k-2)(k-1) \leq \delta(n-5k+3)p, \quad (3)$$

$$xC_n^{k-1}(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3) + \mathfrak{M}_4 < 1, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= (1-p)^{n-k+1}(1+p)^{k-1} \frac{(n-k+1)(1+p)}{2n-2k+2-n(1-p)}, \\ \mathfrak{M}_2 &= C_{n-k+1}^{k-1} p^{n-2k+2} (2-p)^{2k-2} \frac{(n-2k+2)(2-p)}{2n-4k+4-np}, \\ \mathfrak{M}_3 &= (n-k+1)(k-1)p^2(1-p)^{n-2} \left(\frac{1-p}{1-(k-1)p} \right)^2 \\ &\quad \times \left(1 - \frac{(n-k)p^2(k-2)}{2(1-p)^2} \right)^{-1}, \\ \mathfrak{M}_4 &= x^2(1+p)^{n-1} p \left(\frac{n-k}{n-2k+1} C_{n-1}^{k-1} \right)^2 \left(1 - \frac{k-1}{(n-k)p} \right)^{-2}. \end{aligned}$$

Тогда существует такое натуральное число N , зависящее только от вида функций $k(n)$ и $p(n)$, что для каждого $n \geq \max(N, n_1)$ произвольный n -равномерный гиперграф $G = (V, E)$ с условием $|E| \leq 2^{n-1}x(n)$ обладает свойством B_k и, следовательно, $m_k(n) > 2^{n-1}x(n)$.

Доказательство теоремы 2 носит достаточно универсальный характер. Его можно применить, например, в следующей ситуации. Пусть задано некоторое свойство $\mathcal{A}$ гиперграфов. Тогда через $m_{k,\mathcal{A}}(n)$ обозначим минимум из всех таких m , для которых существует n -равномерный гиперграф, обладающий свойством $\mathcal{A}$, имеющий m ребер и не обладающий свойством B_k . Нас будет интересовать следующее свойство: доля пар ребер, имеющих мощность пересечения от 1 до $h-1$, не превосходит заданного ε , где $h = h(n)$ – некоторая заданная целочисленная функция (т. е. если общее количество ребер есть m , то количество пар ребер, имеющих мощность пересечения от 1 до $h-1$, не превышает εC_m^2). Обозначим такое свойство через $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{h,\varepsilon}$. Модифицируя доказательство теоремы 2, можно обосновать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть числа δ, γ взяты из интервала $(0, 1)$, $c > 0$ и функции $k = k(n)$, $h = h(n)$, $\varepsilon = \varepsilon(n)$ таковы, что для всех n начиная с некоторого n_2

выполняются неравенства

$$(5k-2)(k-1) \leq \frac{\delta h \ln(2^{-\frac{h-1}{h}} \frac{3n}{h \ln n})}{3n} (n-6k+3), \quad (5)$$

$$c + c^2(1-\delta)^{-2} + \varepsilon c^2 \left(\frac{3n}{2h \ln n} \right)^{h-1} \leq \gamma. \quad (6)$$

Тогда если $h < 2k$, то существует такое натуральное N , зависящее только от вида функций $k(n)$, $h(n)$, $\varepsilon(n)$, что для всех $n \geq \max(N, n_2)$ выполнено неравенство

$$m_{k,A}(n) \geq c \left(\frac{3n}{h \ln n} \right)^{\frac{h}{3}} \frac{2^{n-1-\frac{h-1}{3}}}{C_n^{k-1}}.$$

Из теоремы 3 получается результат теоремы 1 с точностью до постоянного множителя. Для этого достаточно положить $h = 1$, а $\varepsilon = 0$, в результате чего свойство $\mathcal{A}$ станет тривиальным и условие теоремы 3 окажется условием теоремы 1. Отметим, что свойство $\mathcal{A}$ мотивировано задачами экстремальной комбинаторики, связанными с теоремой Эрдеша–Ко–Радо (см., например, работы [7]–[10]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Проясним смысл условия $h < 2k$. Оказывается, что если любые два ребра n -равномерного гиперграфа $G = (V, E)$ пересекаются не менее чем по $2k$ вершинам, то даже без применения методов теории вероятностей можно показать, что G обладает свойством B_k . В самом деле, зафиксируем произвольное ребро и раскрасим любые его k вершин в красный цвет, а оставшиеся $n - k$ вершин – в синий. Все вершины из V , не принадлежащие данному ребру, покрасим в красный цвет. Нетрудно понять, что такая раскраска является искомой. Этим дается некая мотивировка условия $h < 2k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $h = 1$ свойство $\mathcal{A}_{h,\varepsilon}$ тривиально. Однако уже при $h = 2$ теорема 3 дает оценку величины $m_{k,A}(n)$, большую, чем оценка величины $m_k(n)$ из формулы (1). Например, если $k \asymp \sqrt{\ln n}$ (в теореме 1 фактически предполагается, что $k \ll \sqrt{\ln n}$) и $h \asymp k$, то $m_{k,A}(n)$ оценивается снизу величиной вида $\text{const} \cdot n^{\frac{h}{3}-\delta} \frac{2^n}{C_n^{k-1}}$, где δ – произвольное положительное число.

До сих пор мы рассматривали только нижние оценки. Следующая теорема дает верхнюю оценку величины $m_k(n)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $k = k(n)$ удовлетворяет условию $k = o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда существует такая функция $\psi(n)$, зависящая только от вида функции $k(n)$ и стремящаяся к единице при $n \rightarrow \infty$, что

$$m_k(n) \leq \psi(n) \frac{e \ln 2}{4} n^2 \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}. \quad (7)$$

Если в теореме 4 положить $k = 1$, то мы получим оценку Эрдеша.

До сих пор мы стремились отыскать такую раскраску, при которой все ребра гиперграфа обладают надлежащим количеством вершин того или иного цвета. Однако часто удобно отказаться от столь жесткого требования. На этом пути возникает следующий важный вопрос: если гиперграф не обладает свойством B_k , то можно ли удалением малого числа его ребер получить гиперграф,

уже обладающий нужным свойством? Эквивалентная постановка задачи такова: существует ли в данном гиперграфе “достаточно большой” вложенный гиперграф, обладающий свойством B_k ? Различным подходам к изучению этой задачи посвящены следующие два пункта настоящего параграфа. Ответ будет зависеть от того, как мы понимаем выражение “достаточно большой”.

2.2. Первый подход: “ ε -свойство”. Если считать, что выражение “достаточно большой” означает, что доля ребер вложенного гиперграфа близка к 1, то мы приходим к первому обобщению свойства B_k – двухпараметрическому свойству $B_{k,\varepsilon}$, введенному в работе [11]. А именно, пусть $G = (V, E)$ – n -равномерный гиперграф. Тогда будем говорить, что G обладает *свойством* $B_{k,\varepsilon}$, если существует такой гиперграф $G' = (V, E')$, обладающий свойством B_k , что $E' \subset E$ и $|E'| \geq (1 - \varepsilon)|E|$. Введем аналогично прежним ситуациям величину $m_{k,\varepsilon}(n)$ как минимум из всех таких m , для которых существует n -равномерный гиперграф, имеющий m ребер и не обладающий свойством $B_{k,\varepsilon}$. Из определения видно, что параметр ε лежит в пределах от 0 до 1. При $\varepsilon = 0$ свойство $B_{k,\varepsilon}$ эквивалентно свойству B_k , а при больших ε , как показывает следующая теорема, свойство $B_{k,\varepsilon}$ становится тривиальным.

ТЕОРЕМА 5. Пусть

$$\varepsilon \geq 2^{1-n} \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j.$$

Тогда произвольный n -равномерный гиперграф обладает свойством $B_{k,\varepsilon}$, т. е. $m_{k,\varepsilon}(n) = \infty$.

Доказательство теоремы 5 основано на оценке среднего значения случайной величины $X(\sigma)$, равной количеству хороших ребер гиперграфа G в случайной раскраске σ , и мы проведем его в § 7. Из теоремы 5 следует, что интерес представляет только случай $\varepsilon < 2^{1-n} \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j$. Однако при совсем малых значениях ε (не только при $\varepsilon = 0$) задача о нахождении величины $m_{k,\varepsilon}(n)$ совпадает с аналогичной задачей для $m_k(n)$. Оказывается, что если $\varepsilon < (m_k(n))^{-1}$, то эти величины равны друг другу. Действительно, существует минимальный (по числу ребер) гиперграф $G = (V, E)$, не обладающий свойством B_k . Количество его ребер $|E|$ равно $m_k(n)$. Тогда $(1 - \varepsilon)|E| > |E| - 1$, т. е. искомый вложенный гиперграф G' должен совпадать с G , откуда следует, что G не обладает свойством $B_{k,\varepsilon}$. Значит, $m_{k,\varepsilon}(n) \leq m_k(n)$, и, стало быть, $m_{k,\varepsilon}(n) = m_k(n)$. В силу оценки (7) можно, тем самым, заключить, что если $\varepsilon \ll 2^{1-n} n^{-2} \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j$, то $m_{k,\varepsilon}(n) = m_k(n)$. Остается рассмотреть нетривиальный случай, когда ε лежит внутри интервала

$$\left(\text{const} \cdot 2^{1-n} n^{-2} \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j, 2^{1-n} \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \right). \quad (8)$$

Этот случай разобран в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $k = k(n)$ удовлетворяет условию $k = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$, а $x = x(n)$ и $p = p(n)$ – некоторые функции, причем множество значений функции $p(n)$ принадлежит интервалу $(0, 1)$ и выполнено условие $p(n) = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Предположим, что для некоторого числа $\delta \in (0, 1)$ и

для каждого n начиная с некоторого n_3 выполняются неравенства (2) и (3), а также неравенство

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1 + \widetilde{\mathfrak{M}}_2 + \widetilde{\mathfrak{M}}_3 + \widetilde{\mathfrak{M}}_4 \leq \varepsilon \frac{2^{n-1}}{\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j}, \quad (9)$$

где $\widetilde{\mathfrak{M}}_1 = \mathfrak{M}_1$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_2 = \mathfrak{M}_2$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_3 = \mathfrak{M}_3$ и $\widetilde{\mathfrak{M}}_4 = \frac{\mathfrak{M}_4}{x C_{n-1}^{k-1}}$ (см. теорему 2). Тогда существует такое натуральное число N , зависящее от вида функций $k(n)$ и $p(n)$, что для каждого $n \geq \max(N, n_3)$ произвольный n -равномерный гиперграф $G = (V, E)$ с условием $|E| \leq 2^{n-1} x(n)$ обладает свойством $B_{k,\varepsilon}$ и, следовательно, $m_{k,\varepsilon}(n) > 2^{n-1} x(n)$.

Доказательство теоремы 6 (см. § 8) использует теорему 2. Явную зависимость величины $m_{k,\varepsilon}(n)$ от параметров k и ε дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. Обозначим через $\lambda = \lambda(n)$ следующее выражение:

$$\lambda = \varepsilon \frac{2^{n-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}.$$

Предположим, что λ удовлетворяет условию $\ln \lambda = o(n^{\frac{2}{5}})$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть числа $\delta, c \in (0, 1)$ и функция $k = k(n)$ таковы, что для каждого n начиная с некоторого n_4 выполняется неравенство

$$(4k - 2)(k - 1) \leq -\frac{\delta \ln(c\lambda)}{n} (n - 5k + 3).$$

Тогда существует такое натуральное число N , зависящее только от вида функций $k(n)$ и $\varepsilon(n)$, что для каждого $n \geq \max(N, n_4)$ выполняется неравенство

$$m_{k,\varepsilon}(n) \geq \left(\frac{c - c^2}{8} \right) \frac{\lambda^2 n}{-\ln(c\lambda)} \frac{2^{n-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}. \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно считать, что ε принадлежит интервалу (8), иначе мы возвращаемся к простым случаям, разобранным ранее. Таким образом, $n^{-2} \ll \lambda < 1$. Следует также отметить, что если $\lambda = n^{-\alpha}$ при $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$, то оценка (10) величины $m_{k,\varepsilon}(n)$ лучше оценки (см. (1)) величины $m_k(n)$ (напомним, что (1) дает оценку $m_k(n) \gg (\frac{n}{\ln n})^{\frac{1}{3}} \frac{2^n}{C_n^{k-1}}$, а, скажем, при $\lambda = n^{-\frac{1}{4}}$ мы имеем неравенство $m_{k,\varepsilon}(n) \gg \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\ln n} \frac{2^n}{C_n^{k-1}}$). В сущности, это отвечает изначальной интуиции. Полезно также заметить, что условие $\ln \lambda = o(n^{\frac{2}{5}})$ в теореме 7 имеет абсолютно технический характер. В нетривиальных ситуациях (когда ε принадлежит интервалу (8)) оно заведомо выполнено.

Получение верхних оценок величины $m_{k,\varepsilon}(n)$ вероятностными методами, которыми мы обычно пользуемся, по-видимому, является достаточно трудной задачей. Проблема заключается в том, что при построении гиперграфа, не обладающего свойством $B_{k,\varepsilon}$, изначально не известны общее количество его ребер и, следовательно, необходимое количество плохих ребер в произвольной раскраске. Поэтому разумной представляется следующая постановка задачи: построить гиперграф, у которого в каждой раскраске имеется не менее l плохих ребер, где $l = l(n)$ — наперед заданное число.

2.3. Второй подход: “ l -свойство”. Итак, другой подход к понятию “достаточно большого” вложенного гиперграфа состоит в следующем: количество ребер вложенного гиперграфа должно отличаться от общего числа ребер не более чем на фиксированную величину. Такой подход приводит ко второму обобщению свойства B_k – свойству $F_{k,l}$. Скажем, что n -равномерный гиперграф $G = (V, E)$ обладает *свойством* $F_{k,l}$, если существует такой n -равномерный гиперграф $G' = (V, E')$, обладающий свойством B_k , что $E' \subset E$ и $|E'| > |E| - l$. Обозначим через $f_{k,l}(n)$ минимум из всех таких m , для которых существует n -равномерный гиперграф с m ребрами, не обладающий свойством $F_{k,l}$. При $l = 1$ свойство $F_{k,l}$ оказывается свойством B_k . Легко получить следующие соотношения для величин $m_k(n)$ и $f_{k,l}(n)$ при любых k и l :

$$m_k(n) + l - 1 \leq f_{k,l}(n) \leq lm_k(n). \quad (11)$$

Нижняя оценка величины $f_{k,l}(n)$ тривиальна. Чтобы получить верхнюю оценку, можно построить гиперграф, не обладающий свойством $F_{k,l}$, например, следующим образом. Возьмем гиперграф G , не обладающий свойством B_k , и скопируем его l раз. Получим гиперграф, который в любой раскраске имеет не менее l плохих ребер. Такой гиперграф не обладает свойством $F_{k,l}$, откуда мы и получаем правую часть соотношения (11). Из этого рассуждения логически вытекает задача о минимальном числе вершин для подобного гиперграфа. Её, например, можно сформулировать следующим образом: при каких условиях, налагаемых на l и k , существует n -равномерный гиперграф, не обладающий свойством $F_{k,l}$ и имеющий примерно $\frac{n^2}{2}$ вершин. Из доказательства теоремы 4 (см. § 6) следует, что на этом множестве вершин существует гиперграф, не обладающий свойством B_k .

2.4. О раскрасках в три цвета. В предыдущих пунктах обсуждались задачи, связанные с раскраской множества вершин гиперграфа в два цвета. Можно поставить подобные задачи и в случае раскраски в несколько цветов. Скажем, что гиперграф $G = (V, E)$ обладает *свойством* B_k^3 , если существует такая раскраска множества вершин V в три цвета, что любое ребро из E содержит не менее k вершин каждого из этих цветов. Через $m_k^3(n)$ обозначим минимум из всех таких m , для которых существует n -равномерный гиперграф, имеющий m ребер и не обладающий свойством B_k^3 . Заметим, что параметр k , как и раньше, можно рассматривать как функцию от n , растущую при $n \rightarrow \infty$. Следующие две теоремы дают оценки величины $m_1^3(n)$.

ТЕОРЕМА 8. *Существует такая функция $\psi(n)$, стремящаяся к единице при $n \rightarrow \infty$, что выполнено неравенство*

$$m_1^3(n) \leq \frac{n^2 e \ln 3}{12} \left(\frac{3}{2}\right)^n \psi(n). \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 9. *Существуют такая константа $c > 0$ и такое натуральное число n_5 , что для любого $n \geq n_5$ имеет место неравенство*

$$m_1^3(n) > c \frac{3^{n-1}}{2^n} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (13)$$

Последняя теорема вытекает из следующей более общей теоремы, в доказательстве которой приводится алгоритм раскраски вершин гиперграфа.

ТЕОРЕМА 10. Пусть для некоторой функции $x = x(n)$, для функции $p = p(n)$ со множеством значений из полуинтервала $[0, \frac{1}{3})$ и для любого n начиная с некоторого n_6 выполняется неравенство

$$x(1-p)^n + 2^{1-n}x(1+p)^n + x^2 \frac{81}{32} p(1+p)^{n-1} < 1. \quad (14)$$

Тогда для всех $n \geq n_6$ произвольный n -равномерный гиперграф $G = (V, E)$ с количеством ребер $|E| \leq x \frac{3^{n-1}}{2^n}$ обладает свойством B_1^3 и, следовательно, $m_1^3(n) > x(n) \frac{3^{n-1}}{2^n}$.

В случае трех цветов также можно поставить задачу об ε -свойстве. Скажем, что n -равномерный гиперграф $G = (V, E)$ обладает свойством $B_{k,\varepsilon}^3$, если существует такой вложенный гиперграф $G' = (V, E')$, что $|E'| \geq (1-\varepsilon)|E|$ и G' обладает свойством B_k^3 . Через $m_{k,\varepsilon}^3$ обозначим минимум из всех таких m , для которых существует n -равномерный гиперграф, имеющий m ребер и не обладающий свойством $B_{k,\varepsilon}^3$.

В случае $k = 1$ мы докажем следующую общую теорему о поведении величины $m_{k,\varepsilon}^3$.

ТЕОРЕМА 11. Пусть для некоторой функции $x = x(n)$, для функции $p = p(n)$ со множеством значений из полуинтервала $[0, \frac{1}{3})$ и для любого n начиная с некоторого n_7 выполняется неравенство

$$(1-p)^n + 2^{1-n}(1+p)^n + x \frac{81}{32} p(1+p)^{n-1} < \varepsilon. \quad (15)$$

Тогда для всех $n \geq n_7$ произвольный n -равномерный гиперграф $G = (V, E)$ с количеством ребер $|E| \leq x \frac{3^{n-1}}{2^n}$ обладает свойством $B_{1,\varepsilon}^3$ и, следовательно, $m_{1,\varepsilon}^3(n) > x(n) \frac{3^{n-1}}{2^n}$.

Из теоремы 11 вытекает следующее утверждение, дающее явную зависимость $m_{1,\varepsilon}^3$ от параметра ε .

ТЕОРЕМА 12. Обозначим через $\lambda = \lambda(n)$ следующее выражение:

$$\lambda = \varepsilon \frac{3^{n-1}}{2^n}.$$

Пусть для некоторого числа $c \in (0, 1)$ и для всех n начиная с некоторого n_8 выполняется неравенство $0 < -\ln(c\lambda) < \frac{n}{3}$. Тогда для всех $n \geq n_8$ имеет место оценка

$$m_{1,\varepsilon}^3(n) \geq \frac{32nc\lambda}{-81 \ln(c\lambda)} \left((1-c)\lambda - \frac{2^{1-n}}{c\lambda} \right) \frac{3^{n-1}}{2^n}. \quad (16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как и в случае раскрасок в два цвета, в случае трех цветов есть тривиальные ситуации, когда $m_{1,\varepsilon}^3 = \infty$. Действительно, при $\varepsilon \geq \frac{2^n-1}{3^{n-1}}$ свойством $B_{1,\varepsilon}^3$ обладает любой n -равномерный гиперграф. Поэтому имеет смысл рассматривать только случай $\lambda < 1$. Если $\varepsilon < (m_1^3)^{-1}$, то, как и в случае двухцветных раскрасок, величина $m_{1,\varepsilon}^3(n)$ совпадает с $m_1^3(n)$. Следовательно, случай $\lambda \ll n^{-2}$ (см. теорему 8) также не интересен. Пусть, например,

$\lambda = \text{const} < 1$. Тогда $m_{1,\varepsilon}^3 \gg n^{\frac{3^{n-1}}{2^n}}$, что, безусловно, лучше оценки (13) величины $m_1^3(n)$. Теорема 12 дает лучшую оценку и в предположении, что $\lambda = n^{-\alpha}$, где $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$. Отметим также, что при достаточно большом n множитель $(1-c)\lambda - \frac{2^{1-n}}{c\lambda}$ в оценке (16) положителен в интересующем нас интервале для λ ($n^{-2} \ll \lambda < 1$).

§ 3. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 основано на использовании вероятностного метода из комбинаторики и будет разбито на несколько частей. В первой части (п. 3.1) будет описан (рандомизированный) алгоритм построения искомой раскраски и определены основные термины, в частности события C_e и A_e ; во второй части (п. 3.2) будет приведена и обоснована оценка сверху вероятности события A_e ; в третьей части (п. 3.3) будет дано определение события B_{ef} и приведена оценка вероятности события C_e ; в четвертой (п. 3.4) будет доказана оценка для вероятности события B_{ef} ; окончательные выводы и некоторые замечания составят заключительную пятую часть. Мы сразу сформулируем две леммы, которые имеют технический характер и понадобятся при оценке различных вероятностей.

ЛЕММА 1. Пусть $\xi \sim \text{Bin}(n, q)$, т. е. ξ – биномиальная случайная величина с параметрами n и q .

- 1) Если $r > nq$, то $P(\xi \geq r) \leq C_n^r q^r (1-q)^{n-r} \frac{r(1-q)}{r-nq}$.
- 2) Если $r < nq$, то $P(\xi \leq r) \leq C_n^r q^r (1-q)^{n-r} \frac{(n-r)q}{nq-r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [12, гл. VI, § 3].

ЛЕММА 2. Пусть t, m, n – натуральные числа, причем $m < n$, а $p \in [0, 1]$. Положим $\psi = \frac{t(1-p)m}{p(n-m)}$. Если $\psi < 1$, то

$$\sum_{i=\max(t-m, 1)}^t C_t^i C_n^{m-t+i} p^i (1-p)^{t-i} \leq C_n^m p^t (1-\psi)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Желая найти максимальное слагаемое в сумме, рассмотрим отношение соседних слагаемых. Обозначим через a_i отношение i -го и $(i+1)$ -го слагаемых. Тогда

$$a_i = \frac{(i+1)(1-p)(m-t+i+1)}{(t-i)p(n-m+t-i)}.$$

Нетрудно заметить, что a_i – возрастающая функция от i . Тогда для каждого i величина a_i не превосходит a_{t-1} , т. е.

$$a_i \leq \frac{t(1-p)m}{p(n-m)} = \psi < 1.$$

Таким образом, максимальным слагаемым в сумме является слагаемое с номером $i = t$, при этом каждое предыдущее слагаемое не превосходит последующего, умноженного на ψ . Суммируя члены геометрической прогрессии, мы получаем искомое неравенство для суммы.

3.1. Алгоритм раскраски вершин гиперграфа. Пусть фиксированы параметры δ, p, x из теоремы 2. Пусть, кроме того, $G = (V, E)$ – произвольный n -равномерный гиперграф с $|E| \leq 2^{n-1}x$. Алгоритм раскраски множества V состоит из двух этапов.

1. Раскрашиваем вершины гиперграфа согласно схеме Бернулли: с вероятностью $\frac{1}{2}$ независимо присваиваем каждой вершине синий или красный цвет. Назовем получившуюся случайную раскраску *первой раскраской*.

Вершину $v \in V$ назовем *опасной*, если существует ребро f , содержащее v и являющееся плохим в первой раскраске. Множество опасных вершин обозначим через D .

2. Случайным образом “подправим” первую раскраску путем перекрашивания опасных вершин. А именно, если v – опасная вершина, то с вероятностью p меняем ее цвет, а с вероятностью $1 - p$ – не меняем. Результат перекрашивания назовем *второй раскраской*.

Скажем, что алгоритм не привел к успеху, если во второй раскраске есть плохие ребра. Обозначим такое событие через $\mathcal{F}$. Покажем, что существует такое N , что для каждого $n \geq \max(N, n_1)$ вероятность $\mathcal{F}$ меньше единицы, следовательно, существует раскраска, в которой гиперграф G не имеет плохих ребер, т.е. G обладает свойством B_k . Из этого будет следовать утверждение теоремы.

Ребро e может быть плохим в двух случаях: либо e было плохим уже в первой раскраске и осталось плохим в процессе перекраски, либо e не было плохим в первой раскраске, но стало таковым во второй. Через A_e обозначим следующее событие: ребро e имело доминирующий красный цвет в первой раскраске и осталось плохим во второй раскраске, а через C_e обозначим другое событие: ребро e имеет доминирующий красный цвет во второй раскраске, но в первой оно было хорошим. Тогда в силу симметричности первой раскраски (с точки зрения вероятности ничего не изменится, если в определении A_e и C_e красный цвет заменить на синий) выполнено

$$P(\mathcal{F}) = 2P\left(\bigcup_{e \in E} A_e \cup \bigcup_{e \in E} C_e\right) \leq 2 \sum_{e \in E} P(A_e) + 2 \sum_{e \in E} P(C_e).$$

3.2. Оценка вероятности события A_e . Пусть ребро e есть набор вершин $\{v_1, \dots, v_n\}$. Введем следующие независимые случайные величины: ε_i – индикатор события $\{v_i \text{ – красная вершина в первой раскраске}\}$. Ясно, что $P(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{2}$. При выполнении события A_e ребро e должно иметь доминирующий красный цвет в первой раскраске, поэтому все вершины ребра e опасны и должны случайным образом перекраситься. Удобно ввести индикаторы перекраски для отдельных вершин: η_i – индикатор события $\{v_i \text{ вершина } v_i \text{ перекрасилась}\}$. Понятно, что величины η_i независимы и что $P(\eta_i = 1) = p$. Несложно показать, что

$$A_e = A_e^1 \cap (A_e^2 \cup A_e^3) = (A_e^1 \cap A_e^2) \cup (A_e^1 \cap A_e^3),$$

где

$$A_e^1 = \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \geq n - k + 1 \right\}, \quad A_e^2 = \left\{ \sum_{i=1}^n I\{\varepsilon_i + \eta_i = 1\} \geq n - k + 1 \right\},$$

$$A_e^3 = \left\{ \sum_{i=1}^n (I\{\varepsilon_i = 0, \eta_i = 0\} + I\{\varepsilon_i = 1, \eta_i = 1\}) \geq n - k + 1 \right\}.$$

Здесь $I\{\cdot\}$ также индикатор. Ясно, что событие A_e^1 состоит в том, что e имеет доминирующий красный цвет в первой раскраске. Если $\varepsilon_i + \eta_i = 1$, то i -я вершина в ребре будет иметь красный цвет во второй раскраске. Если же сумма индикаторов $I\{\varepsilon_i = 0, \eta_i = 0\} + I\{\varepsilon_i = 1, \eta_i = 1\}$ не равна единице, то вершина будет иметь синий цвет во второй раскраске. События A_e^2 и A_e^3 отвечают двум различным случаям доминирующего цвета в ребре e во второй раскраске. Далее,

$$A_e \subset (A_e^1 \cap A_e^2 \cap A_e^4) \cup A_e^5,$$

где

$$A_e^4 = \left\{ \sum_{i=1}^n I\{\varepsilon_i = 1, \eta_i = 0\} \geq \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - k + 1 \right\},$$

$$A_e^5 = \left\{ \sum_{i=1}^n I\{\varepsilon_i = 1, \eta_i = 1\} \geq n - 2k + 2 \right\}.$$

Событие A_e^5 есть прямое следствие события $A_e^1 \cap A_e^3$, а A_e^4 – события $A_e^1 \cap A_e^2$. Разобьем событие A_e^4 на два случая: либо $\sum_{i=1}^n I\{\varepsilon_i = 1, \eta_i = 0\} \geq n - k + 1$, либо $n - k \geq \sum_{i=1}^n I\{\varepsilon_i = 1, \eta_i = 0\} \geq \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - k + 1$. Первое событие обозначим через A_e^6 :

$$A_e^6 = \left\{ \sum_{i=1}^n I\{\varepsilon_i = 1, \eta_i = 0\} \geq n - k + 1 \right\}.$$

Несложно понять, что $A_e^6 \subset A_e^1 \cap A_e^2$. Пересечение второго случая с событием $A_e^1 \cap A_e^2$ обозначим через A_e^7 , т. е.

$$A_e^7 = A_e^1 \cap A_e^2 \cap \left\{ n - k \geq \sum_{i=1}^n I\{\varepsilon_i = 1, \eta_i = 0\} \geq \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - k + 1 \right\}.$$

В итоге имеем $A_e \subset A_e^5 \cup A_e^6 \cup A_e^7$. Осталось оценить вероятности событий A_e^5 , A_e^6 , A_e^7 .

Прежде чем находить нужные оценки, покажем, что из условия теоремы вытекает еще одно неравенство, которое нам понадобится в дальнейшем. Докажем, что если выполнены условия (2) и (3), то при $n \geq n_1$

$$(k - 1)p \leq \delta. \quad (17)$$

Заметим, что из условия (3) легко следует оценка $k - 1 \leq \delta p(n - k + 1)$. Подставим получающуюся отсюда оценку для $n - k + 1$ в неравенство (2):

$$\delta \geq p^2(k - 1)(n - k + 1)(1 - p)^{-1} \geq \delta^{-1}p(k - 1)^2.$$

Значит, $p(k - 1)^2 \leq \delta^2 \leq \delta$, откуда следует оценка (17) для $k > 1$; в случае $k = 1$ оценка (17) очевидна.

Вероятность события A_e^5 мы оценим с помощью первой части леммы 1, взяв в качестве тройки параметров (n, q, r) тройку $(n, \frac{p}{2}, n - 2k + 2)$. Требуемое

для применения леммы неравенство $n - 2k + 2 > \frac{np}{2}$ выполняется при всех достаточно больших n , так как $p = o(1)$, а $k = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$. В итоге имеем

$$P(A_e^5) \leq C_n^{2k-2} \left(\frac{p}{2}\right)^{n-2k+2} \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{2k-2} \frac{(n-2k+2)(2-p)}{2n-4k+4-np}. \quad (18)$$

Аналогично оценивается вероятность события A_e^6 . В самом деле, $\sum_{i=1}^n I\{\varepsilon_i = 1, \eta_i = 0\} \sim \text{Bin}(n, \frac{1-p}{2})$, значит, применима первая часть леммы 1 с параметром $r = n - k + 1$. Условие $n - k + 1 > \frac{n(1-p)}{2}$ выполняется при всех достаточно больших n . Таким образом,

$$P(A_e^6) \leq C_n^{k-1} 2^{-n} (1-p)^{n-k+1} (1+p)^{k-1} \frac{(n-k+1)(1+p)}{2n-2k+2-n(1-p)}. \quad (19)$$

Для вероятности события A_e^7 имеет место следующее равенство:

$$P(A_e^7) = \sum_{i=n-k+1}^{n-1} 2^{-n} C_n^i \left[\sum_{j=i-k+1}^{n-k} C_i^j (1-p)^j p^{i-j} \sum_{l=n-k+1-j}^{n-i} C_{n-i}^l p^l (1-p)^{n-i-l} \right].$$

Здесь фактически $i = \sum_{s=1}^n \varepsilon_s$, $j = \sum_{s=1}^n I\{\varepsilon_s = 1, \eta_s = 0\}$, $l = \sum_{s=1}^n I\{\varepsilon_s = 0, \eta_s = 1\}$. Положим

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{l=n-k+1-j}^{n-i} C_{n-i}^l p^l (1-p)^{n-i-l}, & S_2 &= \sum_{j=i-k+1}^{n-k} C_i^j (1-p)^j p^{i-j} S_1, \\ S_3 &= \sum_{i=n-k+1}^{n-1} 2^{-n} C_n^i S_2. \end{aligned}$$

Сначала оценим S_1 с помощью леммы 1. Проверим выполнение условия первой части леммы. Требуется показать, что $n-k+1-j > (n-i)p$. Но $n-k+1-j \geq 1$, а $n-i \leq k-1$. Тогда из неравенства (17) следует, что необходимое соотношение верно при всех $n \geq n_0$. Применяя лемму 1, получаем

$$S_1 \leq C_{n-i}^{n-k+1-j} p^{n-k+1-j} (1-p)^{k-1-i+j} \frac{(n-k+1-j)(1-p)}{n-k+1-j-(n-i)p}.$$

Последний множитель можно оценить сверху отношением $\frac{1-p}{1-(k-1)p} = w_1$. Таким образом,

$$S_2 \leq \sum_{j=i-k+1}^{n-k} C_i^j C_{n-i}^{n-k+1-j} p^{n-k+1-i-2j} (1-p)^{k-1-i+2j} w_1.$$

В последней сумме рассмотрим отношение соседних слагаемых с индексами j и $j+1$:

$$\begin{aligned} \frac{(j+1)p^2(k-1-i+j+1)}{(i-j)(1-p)^2(n-k+1-j)} &\leq \frac{(n-k)p^2(n-i-1)}{2(1-p)^2(i-n+k)} \\ &\leq \frac{(n-k)p^2(k-2)}{2(1-p^2)} = 1 - \frac{1}{w_2} \leq \delta. \end{aligned}$$

Первые два неравенства выполняются при всех $n \geq n_0$ в силу условия (2), а также возрастания первой дроби по $j \leq n - k$ и убывания второй дроби по $i \geq n - k + 1$. Следовательно, максимальному слагаемому отвечает $j = n - k$, и сумма S_2 оценивается следующим образом:

$$S_2 \leq C_i^{n-k} (1-p)^{2n-1-k-i} p^{i-n+k+1} (n-i) w_1 w_2.$$

Поскольку имеет место тождество $C_n^i C_i^{n-k} (n-i) = C_n^{k-1} (n-k+1) C_{k-1}^{i-n+k}$, то, заменив в сумме S_3 переменную суммирования i на $t = i - n + k$, мы получаем неравенство

$$S_3 \leq \sum_{t=1}^{k-1} 2^{-n} C_n^{k-1} (n-k+1) C_{k-1}^t p^{t+1} (1-p)^{k-1-t+n-k} w_1 w_2.$$

Применяя первую часть леммы 1 с тройкой параметров $(k-1, p, 1)$, получаем следующую оценку для S_3 :

$$S_3 \leq 2^{-n} C_n^{k-1} (n-k+1) (k-1) p^2 (1-p)^{n-2} w_1^2 w_2.$$

Отсюда вытекает неравенство $P(A_e^7) \leq 2^{-n} C_n^{k-1} \mathfrak{M}_3$. Из (18) и (19) следуют оценки $P(A_e^5) \leq 2^{-n} C_n^{k-1} \mathfrak{M}_2$, $P(A_e^6) \leq 2^{-n} C_n^{k-1} \mathfrak{M}_1$. В итоге вероятность события A_e для произвольного ребра e можно оценить при достаточно больших n следующим образом:

$$P(A_e) \leq 2^{-n} C_n^{k-1} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3).$$

3.3. Оценка вероятности события C_e . Теперь необходимо оценить $P(C_e)$. Для $e, f \in E$ введем событие B_{ef} , состоящее в следующем:

- 1) ребра e и f пересекаются по h вершинам;
- 2) ребро f имеет синий доминирующий цвет в первой раскраске, а ребро e – красный доминирующий цвет во второй раскраске;
- 3) во множестве вершин $\{v_1, \dots, v_h\} = e \cap f$ по крайней мере одна вершина в процессе перекраски поменяла синий цвет на красный.

Предположим, что произошло событие C_e . Тогда e имеет доминирующий красный цвет во второй раскраске. Если ребро e было хорошим в первой раскраске, то некоторые синие вершины должны были поменять цвет. Значит, они принадлежали также и другим ребрам, в которых синий цвет был доминирующим, т. е. имеет место событие B_{ef} для некоторых ребер f . Поэтому получаем неравенство

$$P(C_e) \leq P\left(\bigcup_{f \neq e} B_{ef}\right) \leq \sum_{f \neq e} P(B_{ef}).$$

Пусть ребра e и f пересекаются по h вершинам. Для каждого $i = 1, \dots, n-h$ обозначим через ε_i индикатор события, состоящего в том, что вершина $a_i \in f \setminus e$ покрашена в красный цвет в первой раскраске. Через ε'_i , $i = 1, \dots, n-h$, и τ_i , $i = 1, \dots, h$, обозначим такие же индикаторы для вершин в $e \setminus f$ и $e \cap f$ соответственно. Если реализуется событие B_{ef} , то для вершин ребра f будет осуществляться случайная перекраска, поэтому, как и в п. 3.2, введем индикаторы перекраски $\eta_1, \dots, \eta_{n-h}$ для вершин множества $f \setminus e$, $\eta'_1, \dots, \eta'_{n-h}$ для

вершин множества $e \setminus f$ и $\xi_1, \dots, \xi_h$ для вершин из $e \cap f$. Из описания алгоритма раскраски вытекает, что все введенные случайные величины независимы в совокупности.

Несложно показать, что B_{ef} содержится в событии

$$B'_{ef} = \left\{ \sum_{i=1}^{n-h} \varepsilon_i + \sum_{j=1}^h \tau_j \leq k-1 \right\} \cap \left\{ \sum_{i=1}^h I\{\tau_i = 0, \xi_i = 1\} > 0 \right\} \cap \left\{ \sum_{i=1}^h I\{\tau_i + \xi_i = 1\} + \sum_{i=1}^{n-h} I\{\{\varepsilon'_i = 1\} \cup \{\varepsilon'_i = 0, \eta'_i = 1\}\} \geq n-k+1 \right\}.$$

Первое неравенство $\sum_{i=1}^{n-h} \varepsilon_i + \sum_{j=1}^h \tau_j \leq k-1$ обеспечивает условие доминирования синего цвета в ребре f после первой раскраски. Второе неравенство $\sum_{i=1}^h I\{\tau_i = 0, \xi_i = 1\} > 0$ есть в точности требование смены цвета хотя бы одной синей вершины из $e \cap f$. Третье неравенство обусловлено тем, что e должно иметь доминирующий красный цвет в финальной раскраске.

Вероятность события B'_{ef} может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} P(B'_{ef}) = & \sum_{l_1=\max(n-h-k+1,0)}^{n-h} 2^{h-n} C_{n-h}^{l_1} \sum_{l_2=\max(n-k+1-l_1,1)}^h 2^{-h} C_h^{l_2} \\ & \times \sum_{j=\max(l_2-k+1,1)}^{l_2} C_{l_2}^j p^j (1-p)^{l_2-j} \sum_{i=0}^{\min(k-1-l_2+j, h-l_2)} C_{h-l_2}^i p^i (1-p)^{h-l_2-i} \\ & \times \sum_{r=0}^{\min(n-h, k-1-l_2+j-i)} C_{n-h}^r \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h-r} \left(\frac{1-p}{2} \right)^r. \end{aligned} \quad (20)$$

Поясним смысл параметров. Величина l_1 – это число синих вершин во множестве $f \setminus e$ после первой раскраски, аналогично, l_2 – это число синих вершин в $e \cap f$ после первой раскраски. Параметр j выражает количество перекрасившихся среди этих l_2 вершин, а параметр i – количество перекрасившихся красных вершин среди оставшихся $h-l_2$ вершин. Наконец, $n-h-r$ – это число красных вершин среди $n-h$ вершин множества $e \setminus f$, которых не хватало для того, чтобы ребро e было красным во второй раскраске.

Рассмотрим несколько случаев, отвечающих различным вариантам пересечения e и f : в первом случае $h \geq n-2k+1$; во втором случае $4k-2 \leq h \leq n-2k+1$; в третьем случае $\frac{h(k-1)}{p(n-h-k+1)} \leq \delta$. Если ввести обозначение $x = \frac{\delta p(n-k+1)}{k-1+\delta p}$, то в третьем случае неравенство запишется в виде $h \leq x$. Согласно условию (3) при достаточно больших n выполнено $x \geq 4k-2$. Следовательно, множества значений h во втором и в третьем случаях пересекаются, значит, приведенное разделение на случаи корректно.

Для удобства последовательного оценивания сумм в (20) введем следующие обозначения:

$$\Sigma_1 = \max_{i \leq \min(k-1-l_2+j, h-l_2)}^{\min(n-h, k-1-l_2+j-i)} \sum_{r=0} C_{n-h}^r \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h-r} \left(\frac{1-p}{2} \right)^r,$$

$$\Sigma_2 = \sum_{j=\max(l_2-k+1,1)}^{l_2} C_{l_2}^j p^j (1-p)^{l_2-j} \Sigma_1,$$

$$\Sigma_3 = \sum_{l_2=\max(n-k+1-l_1,1)}^h 2^{-h} C_h^{l_2} \Sigma_2, \quad \Sigma_4 = \sum_{l_1=\max(n-h-k+1,0)}^{n-h} 2^{h-n} C_{n-h}^{l_1} \Sigma_3.$$

В каждом из трех случаев внутренняя сумма по i в выражении (20) будет оцениваться сверху единицей, поэтому после получения оценки суммы по r мы будем брать максимум этой оценки по i и далее оценивать сумму по j . В результате окажется, что $P(B'_{ef}) \leq \Sigma_4$.

Случай 1: $n-h \leq 2k-1$. В этом случае при достаточно больших n выполнены равенства $\max(n-k+1-l_1,1) = n-k+1-l_1$ и $\max(l_2-k+1,1) = l_2-k+1$. Сумму Σ_1 оценим сверху величиной $k C_{2k-1}^{k-1} \left(\frac{1+p}{2}\right)^{n-h}$. Оценка получается из условия $n-h \leq 2k-1$ и того факта, что биномиальный коэффициент C_{2k-1}^r максимален при $r = k-1$. Таким образом,

$$\Sigma_2 \leq k C_{2k-1}^{k-1} \left(\frac{1+p}{2}\right)^{n-h} \sum_{j=l_2-k+1}^{l_2} C_{l_2}^j p^j (1-p)^{l_2-j}.$$

К сумме по j применим лемму 1 с тройкой параметров (l_2, p, l_2-k+1) . Условие $l_2-k+1 > l_2 p$, очевидно, выполнено при достаточно больших n . Следовательно,

$$\Sigma_2 \leq k C_{2k-1}^{k-1} \left(\frac{1+p}{2}\right)^{n-h} C_{l_2}^{k-1} p^{l_2-k+1} (1-p)^{k-1} \frac{(l_2-k+1)(1-p)}{l_2-k+1-l_2 p}.$$

Последний множитель убывает с ростом параметра $l_2 \geq n-3k+2$, поэтому он оценивается сверху величиной $\frac{(n-4k+3)(1-p)}{(n-3k+2)(1-p)-k+1}$. Положим

$$\gamma_1 = k C_{2k-1}^{k-1} \left(\frac{1+p}{2}\right)^{n-h} \frac{(n-4k+3)(1-p)}{(n-3k+2)(1-p)-k+1}.$$

Тогда для Σ_3 имеем неравенство

$$\Sigma_3 \leq \gamma_1 \sum_{l_2=n-k+1-l_1}^h 2^{-h} C_h^{l_2} C_{l_2}^{k-1} p^{l_2-k+1} (1-p)^{k-1}.$$

Поскольку $h-l_2 \leq h-n+k-1+l_1 \leq k-1$, то $(1-p)^{k-1} \leq (1-p)^{h-l_2}$ и

$$\Sigma_3 \leq 2^{-h} \gamma_1 C_h^{k-1} p^{1-k} \sum_{l_2=n-k+1-l_1}^h C_h^{l_2} p^{l_2} (1-p)^{h-l_2}.$$

Нетрудно видеть, что начиная с некоторого момента выполнено неравенство $n-k+1-l_1 > hp$. Следовательно, применима лемма 1 и

$$\Sigma_3 \leq 2^{-h} \gamma_1 C_h^{k-1} C_h^{n-k+1-l_1} p^{n-2k+2-l_1} (1-p)^{h-n+k-1+l_1} \frac{(n-k+1-l_1)(1-p)}{n-k+1-l_1-hp}.$$

Последний множитель возрастает с ростом параметра $l_1 \leq n-h$, поэтому он не превосходит величины $\frac{(h-k+1)(1-p)}{h-k+1-hp}$, которая, в свою очередь, убывает с ростом

$h \geq n - 2k + 1$ и, значит, не может быть больше выражения $\frac{(n-3k+2)(1-p)}{(n-2k+1)(1-p)-k+1}$. Ясно, что $C_h^{n-k+1-l_1} \leq C_h^{k-1}$. В результате получаем оценку

$$\begin{aligned} \Sigma_4 \leq & \gamma_1 \frac{(n-3k+2)(1-p)}{(n-2k+1)(1-p)-k+1} (C_h^{k-1})^2 (1-p)^{h-n+k-1} p^{h-2k+2} \\ & \times 2^{-n} \sum_{l_1=\max(n-h-k+1,0)}^{n-h} C_{n-h}^{l_1} p^{n-h-l_1} (1-p)^{l_1}. \end{aligned}$$

Последнюю сумму оценим сверху единицей. Итак,

$$\begin{aligned} P(B_{ef}) \leq P(B'_{ef}) \leq & 2^{-n} \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h} (C_h^{k-1})^2 p^{h-2k+2} (1-p)^{h-n+k+1} \\ & \times k C_{2k-1}^{k-1} \left(\frac{n-4k+3}{(n-3k+2)(1-p)-k+1} \right)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что второе неравенство в (21) выполнено для всех достаточно больших n .

Случай 2: $4k-2 \leq h \leq n-2k+1$. В этом случае выполнены равенства $\max(n-k+1-l_1, 1) = n-k+1-l_1$, $\max(l_2-k+1, 1) = l_2-k+1$ и $\min(n-h, k-1-l_2+j-i) = k-1-l_2+j-i$.

В сумме по r , как и в случае 1, оценим сначала множитель $(1-p)^r$ величиной $(1+p)^r$. Тогда множитель $(1+p)^{n-h}$ можно вынести из-под знака суммы. Для оценки оставшихся слагаемых применим вторую часть леммы 1 с тройкой параметров $(n-h, \frac{1}{2}, k-1-l_2+j-i)$. Условие леммы $k-1-l_2+j-i < \frac{n-h}{2}$, очевидно, выполнено. Тогда

$$\Sigma_1 \leq \max_{0 \leq i \leq k-1} \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h} C_{n-h}^{k-1-l_2+j-i} \frac{n-h-k+1+l_2-j+i}{n-h-2(k-1-l_2+j-i)}.$$

Последние два множителя убывают с ростом составного параметра l_2-j+i , поэтому максимум достигается, когда $l_2-j+i=0$. Значит,

$$\Sigma_2 \leq \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h} \frac{n-h-k+1}{n-h-2k+2} C_{n-h}^{k-1} \sum_{j=l_2-k+1}^{l_2} C_{l_2}^j p^j (1-p)^{l_2-j}.$$

Сумму оценим с помощью первой части леммы 1. Здесь неравенство $l_2-k+1 > l_2 p$ выполнено при всех достаточно больших n . Следовательно,

$$\Sigma_2 \leq \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h} C_{n-h}^{k-1} C_{l_2}^{k-1} p^{l_2-k+1} (1-p)^{k-1} \frac{n-h-k+1}{n-h-2k+2} \frac{(l_2-k+1)(1-p)}{l_2-k+1-l_2 p}.$$

Последний множитель убывает с ростом параметра $l_2 \geq h-k+1$, поэтому он не превосходит $\frac{(h-2k+2)(1-p)}{(h-k+1)(1-p)-k+1}$. Ясно, далее, что $C_{l_2}^{k-1} \leq C_h^{k-1}$. Положим

$$\gamma_2 = \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h} C_{n-h}^{k-1} C_h^{k-1} \frac{n-h-k+1}{n-h-2k+2} \frac{(h-2k+2)(1-p)}{(h-k+1)(1-p)-k+1}. \quad (22)$$

Тогда для Σ_3 выполнено неравенство

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &\leq 2^{-h}\gamma_2 \sum_{l_2=n-k+1-l_1}^h C_h^{l_2} p^{l_2-k+1} (1-p)^{k-1} \\ &\leq 2^{-h}\gamma_2 p^{1-k} \sum_{l_2=n-k+1-l_1}^h C_h^{l_2} p^{l_2} (1-p)^{h-l_2}.\end{aligned}$$

Применима лемма 1 с тройкой параметров $(h, p, n-k+1-l_1)$. Условие $n-k+1-l_1 > hp$ выполняется начиная с некоторого момента, так как $n-k+1-l_1 \geq h-k+1$, а неравенство $h(1-p) > k-1$, очевидно, имеет место при достаточно больших n . Получаем

$$\Sigma_3 \leq 2^{-h}\gamma_2 C_h^{n-k+1-l_1} p^{n-2k+2-l_1} (1-p)^{h-n+k-1+l_1} \frac{(n-k+1-l_1)(1-p)}{n-k+1-l_1-hp}.$$

Последний множитель возрастает по l_1 , поэтому его можно оценить сверху величиной $\frac{(h-k+1)(1-p)}{h(1-p)-k+1}$. Для Σ_4 получаем неравенство

$$\begin{aligned}\Sigma_4 &\leq 2^{-n}\gamma_2 \frac{(h-k+1)(1-p)}{h(1-p)-k+1} \\ &\quad \times \sum_{l_1=n-h-k+1}^{n-h} C_{n-h}^{l_1} C_h^{n-k+1-l_1} p^{n-2k+2-l_1} (1-p)^{h-n+k-1+l_1}.\end{aligned}$$

Оценим $C_{n-h}^{l_1}$ сверху величиной C_{n-h}^{k-1} и положим $t = n-l_1-k+1$. Тогда сумма примет вид

$$\sum_{t=h-k+1}^h C_h^t p^{t-k+1} (1-p)^{h-t},$$

и по лемме 1 имеем

$$\Sigma_4 \leq 2^{-n}\gamma_2 C_{n-h}^{k-1} C_h^{k-1} p^{h-2k+2} (1-p)^{k-1} \left(\frac{(h-k+1)(1-p)}{h(1-p)-k+1} \right)^2.$$

Учитывая выражение (22) для величины γ_2 , получаем оценку

$$\begin{aligned}P(B_{ef}) &\leq 2^{-n} (C_h^{k-1} C_{n-h}^{k-1})^2 p^{h-2k+2} (1-p)^{k-1} \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h} \\ &\quad \times \left(\frac{(h-2k+2)(1-p)}{(h-k+1)(1-p)-k+1} \right)^3 \frac{n-h-k+1}{n-h-2k+2}.\end{aligned}\quad (23)$$

Это соотношение выполняется при всех достаточно больших n .

Случай 3: $\frac{h(k-1)}{p(n-h-k+1)} \leq \delta$. В этом случае $\min(n-h, k-1-l_2+j-i) = k-1-l_2+j-i$, поскольку, как нетрудно заметить, $n-h-k+1 > 0$. Сумма Σ_1 оценивается так же, как в случае 2. Надо лишь проверить условие $k-1-l_2+j-i < \frac{n-h}{2}$, чтобы можно было применить вторую часть леммы 1 с тройкой параметров $(n-h, \frac{1}{2}, k-1-l_2+j-i)$. При $k=1$ это условие тривиально. При $k > 1$

в нашем случае $h = o(n)$, так как $p = o(1)$. Следовательно, нужное условие выполняется при всех достаточно больших n . Таким образом, как и раньше,

$$\Sigma_1 \leq \max_{0 \leq i \leq k-1} \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h} C_{n-h}^{k-1-l_2+j-i} \frac{n-h-k+1}{n-h-2k+2}.$$

Максимум достигается при $i = 0$, поскольку биномиальный коэффициент $C_{n-h}^{k-1-l_2+j-i}$ убывает по i . Тогда для Σ_2 выполнено соотношение

$$\Sigma_2 \leq \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h} \frac{n-h-k+1}{n-h-2k+2} \sum_{j=\max(l_2-k+1,1)}^{l_2} C_{n-h}^{k-1-l_2+j} C_{l_2}^j p^j (1-p)^{l_2-j}.$$

Оценим последнюю сумму с помощью леммы 2. В качестве (h, m, n, p) – четверки параметров леммы – возьмем $(l_2, k-1, n-h, p)$. Требование леммы $\frac{l_2(1-p)(k-1)}{p(n-h-k+1)} < 1$ выполнено в силу ограничения, налагаемого на h . Положим

$$\alpha = \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h} \frac{n-h-k+1}{n-h-2k+2} C_{n-h}^{k-1} \left(1 - \frac{h(k-1)}{p(n-h-k+1)} \right)^{-1}.$$

Тогда согласно лемме 2 имеет место неравенство $\Sigma_2 \leq p^{l_2} \alpha$. Для Σ_4 имеем

$$\Sigma_4 \leq 2^{-n} \alpha \sum_{l_1=n-h-k+1}^{n-h} C_{n-h}^{l_1} \sum_{l_2=\max(n-k+1-l_1,1)}^h C_h^{l_2} p^{l_2}.$$

Сделаем замену переменных суммирования, а именно вместо количества l_1 синих вершин во множестве $f \setminus e$ рассмотрим число m красных вершин в ребре f в первой раскраске. Тогда, как несложно проверить, имеет место равенство

$$\sum_{l_1=n-h-k+1}^{n-h} C_{n-h}^{l_1} \sum_{l_2=\max(n-k+1-l_1,1)}^h C_h^{l_2} p^{l_2} = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{l_2=\max(h-m,1)}^h C_{n-h}^{m-h+l_2} C_h^{l_2} p^{l_2}.$$

Оценивая последнюю сумму с помощью леммы 2, получаем неравенство

$$\Sigma_4 \leq 2^{-n} \alpha p^h \left(1 - \frac{h(k-1)}{p(n-h-k+1)} \right)^{-1} \sum_{m=0}^{k-1} C_{n-h}^m,$$

правая часть которого без труда оценивается в силу леммы 1. В итоге получаем

$$P(B_{ef}) \leq \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h} 2^{-n} p^h \left(\frac{n-h-k+1}{n-h-2k+2} C_{n-h}^{k-1} \right)^2 \left(1 - \frac{h(k-1)}{p(n-h-k+1)} \right)^{-2}. \quad (24)$$

Эта оценка выполнена при достаточно больших n .

3.4. Оценка вероятности события B_{ef} . Найдем максимум по h оценок вероятности события B_{ef} , полученных в п. 3.3, в каждом из трех случаев. В случае 1 мы доказали оценку (21). Рассмотрим отношение значений правой части неравенства (21) при h и $h+1$:

$$\frac{(1+p)(h-k+1)^2(1-p)}{2(h+1)^2p} \geq \frac{(1-p^2)(n-3k+2)^2}{2(n-2k+2)^2p} > 1.$$

Здесь первое неравенство выполнено, так как его левая часть возрастает по $h \geq n - 2k + 1$, а второе неравенство следует из соотношений $p = o(1)$, $k = o(n)$. Таким образом, второе неравенство будет выполняться при всех достаточно больших n . Отсюда следует, что максимум оценки (21) достигается при минимальном h , т. е. при $h = n - 2k + 1$. Значит, начиная с некоторого момента, выполнено неравенство

$$P(B_{ef}) \leq 2^{-n} \left(\frac{1+p}{2} \right)^{2k-1} (C_{n-2k+1}^{k-1})^2 p^{n-4k+3} (1-p)^k k C_{2k-1}^{k-1} \times \left(\frac{n-4k+3}{(n-3k+2)(1-p)-k+1} \right)^2. \quad (25)$$

В случае 2 мы доказали оценку (23). Множитель $\frac{(h-2k+2)(1-p)}{(h-k+1)(1-p)-k+1}$ в оценке (23) при $p \leq \frac{1}{2}$ ограничен снизу единицей, а сверху двойкой. Последний множитель в (23) возрастает по h и может быть оценен сверху величиной k . Рассмотрим отношение значений правой части неравенства (23) при h и $h+1$ без учета последних двух множителей:

$$\frac{(n-h)^2(h+1-k+1)^2(1+p)}{(n-h-k+1)^2(h+1)^2 2p} \geq \frac{(3k)^2(1+p)}{(4k-1)^2 2p} \geq \frac{9}{32p} > 1.$$

Первое неравенство в цепочке вытекает из того, что величина $\frac{n-h}{n-h-k+1}$ больше 1, а отношение $\frac{h+1-k+1}{h+1}$ возрастает по h . Последнее неравенство выполнено начиная с некоторого n . В результате мы видим, что максимум будет достигаться при $h = 4k - 2$. Итак, при достаточно больших n

$$P(B_{ef}) \leq 2^{-n} (C_{4k-2}^{k-1} C_{n-4k+2}^{k-1})^2 p^{2k} (1-p)^{k-1} \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-4k+2} 8k. \quad (26)$$

Наконец, в случае 3 была получена оценка (24). Последний множитель в правой части этой оценки ограничен снизу единицей и сверху величиной $(1-\delta)^{-2}$. Если $k > 1$, то в данном случае $h = o(n)$. Рассматривая, как и в предыдущих случаях, отношение значений правой части неравенства (24) при h и $h+1$, легко увидеть, что значение, полученное при $h+1$, является бесконечно малым по сравнению со значением, полученным при h . Это следует из условий $p = o(1)$ и $k = o(n)$. Поэтому максимум оценки (24) достигается при $h = 1$. Следовательно, при всех достаточно больших n выполняется соотношение

$$P(B_{ef}) \leq \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-1} 2^{-n} p \left(\frac{n-k}{n-2k+1} C_{n-1}^{k-1} \right)^2 \left(1 - \frac{(k-1)}{p(n-k)} \right)^{-2}. \quad (27)$$

Осталось выяснить, какая из оценок (25), (26) и (27) максимальна. Легко установить, что правые части оценок (25) и (26) бесконечно малы по сравнению с правой частью неравенства (27) при $n \rightarrow \infty$.

В итоге при достаточно большом n ($n \geq N$) выполнено неравенство

$$P(B_{ef}) \leq \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-1} 2^{-n} p \left(\frac{n-k}{n-2k+1} C_{n-1}^{k-1} \right)^2 \left(1 - \frac{k-1}{(n-k)p} \right)^{-2} = 2^{1-2n} x^{-2} \mathfrak{M}_4.$$

3.5. Оценка вероятности события $\mathcal{F}$. Теперь можно собрать воедино накопленную в предыдущих пунктах информацию. Действительно, ввиду доказанных неравенств мы получаем следующую оценку для $P(\mathcal{F})$ при любом $n \geq \max(N, n_0)$:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}) &\leq 2 \sum_{e \in E} P(A_e) + 2 \sum_{e \in E} P(C_e) \leq 2|E| \max_e P(A_e) + 2|E| \max_e P(C_e) \\ &\leq 2|E| 2^{-n} C_n^{k-1} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3) + 2|E|^2 \max_{f \neq e} P(B_{ef}) \\ &\leq x C_n^{k-1} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3) + 2|E|^2 2^{1-2n} x^{-2} \mathfrak{M}_4 \\ &\leq x C_n^{k-1} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3) + \mathfrak{M}_4 < 1. \end{aligned}$$

Последнее неравенство есть в точности условие (4). Теорема 2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Воспользуемся теоремой 2 следующим образом: определим функции $p(n)$, $x(n)$ и покажем, что при выбранных значениях p и x неравенства (2)–(4) из условия теоремы 2 выполняются для всех n начиная с некоторого n_1 . В этом случае теорема 2 утверждает, что существует такое N , при котором для каждого $n \geq N$ выполняется неравенство $m_k(n) \geq 2^{n-1} x(n)$. Итак, положим

$$p(n) = \frac{\ln \frac{n}{\ln n}}{3n}, \quad x(n) = \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{c}{C_n^{k-1}},$$

где c – константа из теоремы 1. Заметим, что в силу такого выбора выполняется условие, наложенное в теореме 2 на p : $p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Проверим выполнение неравенств (2)–(4). В силу выбора функции p неравенство (3) есть в точности неравенство из условия теоремы 1. Из него видно, что $k \ll \sqrt{\ln n}$, и, значит, выполнено условие $k = o(n)$. Неравенство (2) выполняется в этом случае автоматически начиная с некоторого момента, поскольку

$$p^2 k n \ll \frac{\ln^{\frac{5}{2}} n}{n} = o(1).$$

Остается проверить выполнение неравенства (4).

Поясним, что представляют собой величины $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{M}_4$ при выбранном p и при условии $k \ll \sqrt{\ln n}$. Очевидно, что $(1+p)^{k-1} \rightarrow 1$ и $(1-p)^{k-1} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= (1-p)^{n-k+1} (1+p)^{k-1} \frac{(n-k+1)(1+p)}{2n-2k+2-n(1-p)} \\ &= (1-p)^n \beta_1(n) \leq \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{3}} \beta_1(n), \end{aligned}$$

где $\beta_1(n) \rightarrow 1$. Очевидно, что $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_3$ бесконечно малы по сравнению с $\mathfrak{M}_1$. Значит,

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 = (1-p)^n \beta_2(n) \leq \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{3}} \beta_2(n),$$

где $\beta_2(n) \rightarrow 1$. В силу выбора функции x для первого слагаемого в левой части неравенства (4) имеет место следующая оценка:

$$xC_n^{k-1}(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3) \leq \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{c}{C_n^{k-1}} C_n^{k-1} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \beta_2(n) = c\beta_2(n).$$

Рассмотрим выражение

$$\mathfrak{M}_4 = x^2(1+p)^{n-1}p \left(\frac{n-k}{n-2k+1} C_n^{k-1}\right)^2 \left(1 - \frac{k-1}{(n-k)p}\right)^{-2}.$$

Из выбора p вытекает, что $p \leq \frac{\ln n}{3n}$, а $(1+p)^n \leq \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}}$. Подставляя выбранное значение x , получаем оценку для второго слагаемого в левой части неравенства (4):

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_4 &\leq x^2 \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}} (C_n^{k-1})^2 \frac{\ln n}{3n} \beta_3(n) \\ &\leq \left(\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{c}{C_n^{k-1}}\right)^2 \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}} (C_n^{k-1})^2 \frac{\ln n}{3n} \beta_3(n) \leq \frac{c^2}{3} \beta_3(n), \end{aligned}$$

где $\beta_3(n) \rightarrow 1$.

Таким образом, мы показали, что

$$xC_n^{k-1}(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3) + \mathfrak{M}_4 \leq c\beta_2(n) + \frac{c^2}{3}\beta_3(n),$$

а для выполнения условия (4) необходимо, чтобы выполнялось неравенство $xC_n^{k-1}(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3) + \mathfrak{M}_4 < 1$. По условию теоремы 1 число c удовлетворяет неравенству $c + \frac{c^2}{3} < 1$. Значит, начиная с некоторого момента величина $c\beta_2(n) + \frac{c^2}{3}\beta_3(n)$ также будет меньше единицы. Следовательно, при нашем выборе функций p и x и при достаточно большом n выполнены все условия теоремы 2. В результате имеем

$$m_k(n) \geq c \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{2^{n-1}}{C_n^{k-1}}.$$

Теорема 1 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Воспользуемся теоремой 2 следующим образом: определим функции $p(n)$ и $x(n)$ и покажем, что при таких p и x для достаточно больших n выполняются условия (2) и (3). Разумеется, определять упомянутые функции мы будем, исходя из условия теоремы 3. Обозначим

$$\varphi = \varphi(n) = \left(\frac{3n}{h \ln n}\right)^{\frac{h}{3}} 2^{-\frac{h-1}{3}}.$$

Положим

$$p(n) = \frac{\ln \varphi}{n}, \quad x(n) = \frac{c\varphi}{C_n^{k-1}}.$$

Из условия $h < 2k$ и неравенства (5) вытекает, что $k \ll \ln n$. Это соотношение обеспечивает выполнение двух условий теоремы 2: $k = o(n)$ и $p = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, поскольку $p \ll \frac{\ln^2 n}{n}$.

Проверим выполнение неравенств (2), (3) теоремы 2. Неравенство (2) имеет место начиная с некоторого n_1 , поскольку $p^2 kn \rightarrow 0$. Если подставить выражение для p в неравенство (3), то полученное соотношение следует из условия (5). Таким образом, условия (2) и (3) теоремы 2 выполнены при всех $n \geq n_0$.

Для того чтобы доказать теорему 3, необходимо проверить, что при достаточно большом n произвольный n -равномерный гиперграф $G = (V, E)$, обладающий свойством $\mathcal{A}$ и имеющий не более $x2^{n-1}$ ребер, обладает и свойством B_k .

При доказательстве теоремы 2 был описан алгоритм случайной раскраски вершин гиперграфа и введены события $\mathcal{F}$, A_e , C_e и B_{ef} . Далее мы пользовались тем, что если $P(\mathcal{F}) < 1$, то гиперграф обладает свойством B_k . В частности, была обоснована оценка

$$P(\mathcal{F}) \leq 2 \sum_{e \in E} P(A_e) + 2 \sum_{e \in E} P(C_e) \leq 2|E| \max_e P(A_e) + 2 \sum_{e,f} P(B_{ef}).$$

Кроме того, было показано, что при достаточно больших n

$$\max_e P(A_e) \leq 2^{-n} C_n^{k-1} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3)$$

(величины $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ определены в формулировке теоремы 2). Этой оценкой мы воспользуемся и сейчас. Заметим, что все оценки, доказанные в теореме 2, имеют место и здесь, поскольку при их обосновании использовались исключительно неравенства (2) и (3), а также условия, налагаемые на k и p . Теперь приведем другую оценку суммы $\sum_{e,f} P(B_{ef})$.

Напомним, что ранее при любой мощности пересечения ребер e и f мы получали (27). Теперь мы покажем, что если e и f пересекаются не менее чем по h вершинам (а таких пар ребер по условию очень много), то выполнено неравенство (24).

В доказательстве теоремы 2 вероятность события B_{ef} оценивалась по-разному в зависимости от мощности пересечения ребер, равной l (параметр мощности пересечения в доказательстве теоремы 2 обозначался через h). Было рассмотрено три случая: $l \geq n - 2k + 1$, $4k - 2 \leq l \leq n - 2k + 1$, $\frac{l(k-1)}{p(n-l-k+1)} \leq \delta$.

Теперь мы также рассмотрим три случая, причем первый и третий останутся прежними, а второй будет слегка изменен: $5k - 2 \leq l \leq n - 2k + 1$. Из условия (5) вытекает, что множества значений l во втором и в третьем случаях пересекаются. Значит, новое разбиение опять-таки покрывает все множество возможных значений l . Добавим ограничение $l \geq h$ в третьем случае (в остальных случаях это условие выполняется автоматически, так как $h \leq 2k$). Покажем, что тогда максимальной будет оценка при $l = h$.

Как было установлено при доказательстве теоремы 2, если $|e \cap f| = l$ и мы находимся в рамках третьего случая, то

$$P(B_{ef}) \leq \left(\frac{1+p}{2}\right)^{n-l} 2^{-n} p^l \left(\frac{n-k-l+1}{n-2k-l+2} C_n^{k-1}\right)^2 \left(1 - \frac{l(k-1)}{(n-l-k+1)p}\right)^{-2}.$$

Тогда же было показано, что максимальной является оценка при минимальном l , равном h . Значит, теперь в рамках третьего случая выполняется неравенство (24).

Покажем, что оценки, полученные в теореме 2 в остальных случаях, применимы и меньше выражения (24) при достаточных больших n .

В случае 1 все совсем просто. Он не изменился, и работать с ним следует так же, как и с его аналогом в теореме 2 (см. п. 3.4). При этом нужно учитывать нынешние ограничения на p , h и k .

Рассмотрим случай 2. При доказательстве теоремы 2 в этом случае было получено неравенство (23). Эта оценка может быть применена и в настоящем доказательстве, поскольку условие случая 2 теоремы 2 очевидно выполнено. Если $p \leq \frac{1}{2}$, то множитель $\frac{(l-2k+2)(1-p)}{(l-k+1)(1-p)-k+1}$ в (23) ограничен снизу единицей, а сверху двойкой. Последний множитель возрастает по l и может быть оценен сверху величиной k . Оставшееся выражение, как было установлено при доказательстве теоремы 2, убывает с ростом l , поэтому максимум будет достигаться при минимальном l , т. е. при $l = 5k - 2$. Таким образом, в случае 2

$$P(B_{ef}) \leq 2^{-n} (C_{5k-2}^{k-1} C_{n-5k+2}^{k-1})^2 p^{3k} (1-p)^{k-1} \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-5k+2} 8k.$$

Легко проверить, что последнее выражение бесконечно мало при $n \rightarrow \infty$ по сравнению с (24). Таким образом, мы доказали, что для произвольных ребер e и f , пересекающихся не менее чем по h вершинам, и для всех достаточно больших n выполняется неравенство (24).

По условию теоремы 3 доля пар ребер, имеющих менее h общих вершин, составляет не более ε от общего количества этих пар. Тогда

$$\begin{aligned} 2 \sum_{e,f} P(B_{ef}) &= 2 \sum_{e,f: |e \cap f| \geq h} P(B_{ef}) + 2 \sum_{e,f: |e \cap f| < h} P(B_{ef}) \\ &\leq 2|E|^2 \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-h} 2^{-n} \left(\frac{n-k-h+1}{n-2k-h+2} C_{n-h}^{k-1} \right)^2 p^h \\ &\quad \times \left(1 - \frac{h(k-1)}{(n-h-k+1)p} \right)^{-2} + 2\varepsilon |E|^2 \left(\frac{1+p}{2} \right)^{n-1} \\ &\quad \times 2^{-n} p \left(\frac{n-k}{n-2k+1} C_{n-1}^{k-1} \right)^2 \left(1 - \frac{k-1}{(n-k)p} \right)^{-2} \\ &\leq x^2 (1+p)^{n-h} 2^{h-1} (C_{n-h}^{k-1})^2 p^h (1-\delta)^{-2} \beta_1(n) \\ &\quad + \varepsilon x^2 (1+p)^{n-1} (C_{n-1}^{k-1})^2 p \beta_2(n), \end{aligned} \quad (28)$$

где функции $\beta_1(n)$ и $\beta_2(n)$ стремятся к единице при $n \rightarrow \infty$. Последнее неравенство выполняется в силу выбора параметра p , ограничения для h и условия (5). Далее, воспользуемся оценкой $1+p \leq e^p$ и подставим в (28) значения $x(n)$ и $p(n)$. Тогда получим окончательную оценку:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{e,f} P(B_{ef}) &\leq c^2 \varphi^3 2^{h-1} \left(\frac{\ln \varphi}{n} \right)^h \beta_1(n) (1-\delta)^{-2} + \varepsilon c^2 \varphi^3 \frac{\ln \varphi}{n} \beta_2(n) \\ &\leq c^2 (1-\delta)^{-2} \beta_1(n) + \varepsilon c^2 \left(\frac{3n}{2h \ln n} \right)^{h-1} \beta_2(n). \end{aligned} \quad (29)$$

Последнее неравенство получается подстановкой выражения для φ , причем следует учесть что $\ln \varphi \leq \frac{h}{3} \ln n$.

Итак, мы знаем, что для любого достаточно большого n выполняется неравенство

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}) &\leq 2|E| \max_e P(A_e) + 2 \sum_{e,f} P(B_{ef}) \\ &\leq 2|E| 2^{-n} C_n^{k-1} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3) + 2 \sum_{e,f} P(B_{ef}). \end{aligned} \quad (30)$$

Рассматривая выражения для величин $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_3$, легко установить, что $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_3$ являются бесконечно малыми по сравнению с $\mathfrak{M}_1$ при больших n , а $\mathfrak{M}_1 \leq \varphi^{-1} \beta_3(n)$, где $\beta_3(n) \rightarrow 1$. Тогда $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 \leq \varphi^{-1} \beta_4(n)$, причем $\beta_4(n)$ также стремится к единице при $n \rightarrow \infty$. В итоге, подставляя эту оценку и оценку (29) в неравенство (30), получаем

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}) &\leq 2|E| 2^{-n} C_n^{k-1} \varphi^{-1} \beta_4(n) + c^2 (1 - \delta)^{-2} \beta_1(n) + \varepsilon c^2 \left(\frac{3n}{2h \ln n} \right)^{h-1} \beta_2(n) \\ &\leq x C_n^{k-1} \varphi^{-1} \beta_4(n) + c^2 (1 - \delta)^{-2} \beta_1(n) + \varepsilon c^2 \left(\frac{3n}{2h \ln n} \right)^{h-1} \beta_2(n) \\ &= c \beta_4(n) + c^2 (1 - \delta)^{-2} \beta_1(n) + \varepsilon c^2 \left(\frac{3n}{2h \ln n} \right)^{h-1} \beta_2(n). \end{aligned}$$

Из этой оценки и условия (6) вытекает, что $P(\mathcal{F}) \leq \gamma \beta_5(n)$, где $\beta_5(n) \rightarrow 1$. Значит, начиная с некоторого N вероятность события $\mathcal{F}$ будет меньше 1. Следовательно, для любого $n \geq N$ произвольный n -равномерный гиперграф $G = (V, E)$, обладающий свойством $\mathcal{A}$ и имеющий не более $2^{n-1}x$ ребер, обладает и свойством B_k . Откуда и получаем, что

$$m_{k,\mathcal{A}}(n) \geq c \left(\frac{3n}{h \ln n} \right)^{\frac{h}{3}} \frac{2^{n-1-\frac{h-1}{3}}}{C_n^{k-1}}.$$

Теорема 3 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 4

Рассмотрим множество $V = \{1, \dots, v\}$, где в качестве v возьмем величину $\lceil \frac{n^2}{2} \rceil$ (наименьшее целое число, не меньшее $\frac{n^2}{2}$). Обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех возможных n -подмножеств множества V . Эти подмножества мы будем называть *ребрами*. Ясно, что

$$|\mathcal{R}| = C_v^n.$$

На множестве V существует 2^v различных раскрасок в два цвета. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_{2^v}$ – все эти раскраски. Выберем произвольную раскраску σ_i . Обозначим через a количество вершин красного, а через $b = v - a$ – синего цвета в раскраске σ_i . Обозначим через E_i множество всех ребер из $\mathcal{R}$, являющихся плохими в σ_i . Несложно понять, что

$$|E_i| = \sum_{j=\max(0, n-a)}^{\min(k-1, b)} C_a^{n-j} C_b^j + \sum_{j=\max(0, n-b)}^{\min(k-1, a)} C_b^{n-j} C_a^j = D_{ab}.$$

Обозначим через E какую-нибудь систему общих представителей¹ для совокупности $\{E_i\}_{i=1}^{2^v}$. Поскольку E – множество элементов из $\mathcal{R}$, т.е. ребер, то можно рассмотреть n -равномерный гиперграф $G = (V, E)$. Покажем, что G не обладает свойством B_k .

Действительно, пусть σ – произвольная раскраска V . Тогда σ совпадает с некоторой раскраской σ_i . Рассмотрим множество E_i . Во множестве E есть ребро из E_i . По определению множества E_i все ребра, входящие в него, являются плохими в раскраске σ_i . Значит, в E есть ребро, являющееся плохим в σ_i , или, что то же самое, в σ , что и доказывает отсутствие свойства B_k у гиперграфа $G = (V, E)$.

Осталось оценить сверху величину $|E|$. Для этого воспользуемся известной теоремой о системе общих представителей (см. [13], [14]). Согласно этой теореме можно выбрать такую систему E , что

$$|E| \leq \frac{|\mathcal{R}|}{\min_i |E_i|} \left(\ln \frac{2^v \min_i |E_i|}{|\mathcal{R}|} + 1 \right) + 1,$$

если выражение, стоящее под знаком логарифма, больше числа e . Данное условие, очевидно, выполнено, так как для $n \geq 2$ имеет место неравенство $C_v^n \leq \frac{1}{3} 2^v$. Положим $M = \min_i |E_i|$. Необходимо оценить отношение $\frac{M}{C_v^n}$ снизу. Применим следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть функция $k = k(n)$ удовлетворяет условию $k = o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда существует такая функция $\psi_1 = \psi_1(n)$, что при $n \rightarrow \infty$ $\psi_1(n) \rightarrow 1$ и для любых a, b , удовлетворяющих равенству $a + b = v = \lceil \frac{n^2}{2} \rceil$, выполнена оценка

$$D_{ab} \geq \psi_1(n) \sum_{j=0}^{k-1} \left(C_{\lceil \frac{v}{2} \rceil}^{n-j} C_{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor}^j + C_{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor}^{n-j} C_{\lceil \frac{v}{2} \rceil}^j \right) = \psi_1(n) D. \quad (31)$$

Лемму 3 мы докажем ниже, а пока предположим, что она верна, и завершим доказательство теоремы.

Итак, согласно лемме 3 для каждого $i = 1, \dots, 2^v$ имеет место неравенство $|E_i| \geq \psi_1(n) D$. Эта оценка не зависит от индекса i . Значит, подобное неравенство выполняется и для величины M . Оценим отношение D к C_v^n . Рассмотрим отдельное слагаемое в сумме из (31):

$$\begin{aligned} \frac{C_{\lceil \frac{v}{2} \rceil}^{n-j} C_{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor}^j}{C_v^n} &= C_n^{n-j} \frac{\lceil \frac{v}{2} \rceil^{n-j} \lfloor \frac{v}{2} \rfloor^j}{v^n} \left(\prod_{i=0}^{n-j-1} \frac{1 - \frac{i}{\lceil \frac{v}{2} \rceil}}{1 - \frac{i}{v}} \right) \left(\prod_{i=0}^{j-1} \frac{1 - \frac{i}{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor}}{1 - \frac{i+n-j}{v}} \right) \\ &\geq 2^{-n} C_n^j \exp \left\{ -\frac{2k}{v-2} \right\} \exp \left\{ -\sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{2i}{v-2n} + \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{i}{v} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\sum_{i=0}^{j-1} \frac{2i}{v-2n-2} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{i+n-j}{v} \right\} \end{aligned}$$

¹Система общих представителей для совокупности множеств – это множество, имеющее непустое пересечение с любым элементом совокупности (см., например, [13], [14]).

$$\begin{aligned}
&= 2^{-n} C_n^j \exp\left\{-\frac{2k}{v-2}\right\} \exp\left\{-\sum_{i=0}^{n-j-1} i \frac{v+2n}{v(v-2n)}\right\} \\
&\quad \times \exp\left\{-\sum_{i=0}^{j-1} i \frac{v+2n+2}{v(v-2n-2)} + \frac{j(n-j)}{v}\right\} \\
&\geq 2^{-n} C_n^j \exp\left\{-\frac{2k}{v-2}\right\} \exp\left\{-\frac{(n^2+k^2)(v+4n)}{2v(v-4n)}\right\} \\
&= 2^{-n} C_n^j e^{-1} \gamma_1(n).
\end{aligned} \tag{32}$$

Заметим, что $\gamma_1(n)$ не зависит от параметра j и стремится к единице с ростом n , поскольку $v = \lceil \frac{n^2}{2} \rceil$ и $k = o(n)$.

Аналогично можно показать, что

$$\frac{C_{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor}^{n-j} C_{\lceil \frac{v}{2} \rceil}^j}{C_v^n} \geq 2^{-n} C_n^j e^{-1} \gamma_2(n),$$

где функция $\gamma_2(n)$ стремится к единице и не зависит от параметра j .

Положим $\gamma_3(n) = \min(\gamma_1(n), \gamma_2(n))$, тогда из оценки (32) и последнего неравенства получаем

$$\frac{M}{C_v^n} \geq \psi_1(n) \frac{D}{C_v^n} \geq \psi_1(n) 2^{1-n} \left(\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \right) e^{-1} \gamma_3(n).$$

Применим полученное соотношение для оценки мощности системы общих представителей E :

$$\begin{aligned}
|E| &\leq \frac{|\mathcal{R}|}{\min_i |E_i|} \left(\ln \frac{2^v \min_i |E_i|}{|\mathcal{R}|} + 1 \right) + 1 \leq \frac{C_v^n (v \ln 2 + 1)}{D} \psi_1^{-1}(n) + 1 \\
&\leq \left(\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil \ln 2 + 1 \right) e \frac{2^{n-1}}{\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j} \psi_1^{-1}(n) \gamma_3^{-1}(n) + 1 = \frac{n^2 e \ln 2}{4} \frac{2^n}{\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j} \psi(n),
\end{aligned}$$

где $\psi(n) \rightarrow 1$. Теорема 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Введем следующее обозначение:

$$S = 2 \sum_{j=0}^{k-1} C_{\frac{v}{2}}^{n-j} C_{\frac{v}{2}}^j.$$

Здесь используется формальное представление $C_x^n = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$. Сначала мы покажем, что существует такая функция $\gamma_4(n)$, что $\gamma_4(n) \rightarrow 1$ и $D \leq \gamma_4(n) S$. Несложно показать, что для любого $j = 0, 1, \dots, k-1$ выполняются неравенства

$$C_{\lceil \frac{v}{2} \rceil}^{n-j} C_{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor}^j \leq C_{\frac{v}{2}}^{n-j} C_{\frac{v}{2}}^j \exp\left\{\frac{2n}{v-2n}\right\}, \quad C_{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor}^{n-j} C_{\lceil \frac{v}{2} \rceil}^j \leq C_{\frac{v}{2}}^{n-j} C_{\frac{v}{2}}^j \exp\left\{\frac{2k}{v-2k}\right\}.$$

Поэтому в качестве $\gamma_4(n)$ можно взять функцию $\exp\left\{\frac{2n}{v-2n}\right\}$.

Далее, мы покажем, что существует такая функция $\psi_2(n)$, что для любых целых a, b таких, что $a+b = v$, выполнено неравенство $D_{ab} \geq \psi_2(n) S$. Проведем доказательство в трех случаях, считая, что $a \geq b$.

Случай 1: $a \geq v - n$. В этом случае

$$D_{ab} \geq C_a^n \geq \frac{(a-n)^n}{n!} \geq \frac{(v-2n)^n}{n!}.$$

Слагаемые в сумме S оценим следующим образом:

$$C_{\frac{v}{2}}^{m-j} C_{\frac{v}{2}}^j \leq \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^n}{(n-j)! j!} \leq \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^n}{(n-j)!}.$$

Тогда

$$S \leq 2 \left(\frac{v}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(n-j)!} \leq 2 \left(\frac{v}{2}\right)^n \frac{1}{(n-k+1)!} e.$$

Следовательно, отношение D_{ab} к S оценивается снизу следующим образом:

$$\frac{D_{ab}}{S} \geq 2^n \frac{(n-k+1)!}{n!} \left(1 - \frac{2n}{v}\right)^n \frac{1}{2e} \geq \frac{2^n}{n^k} \exp\left\{-\frac{2n^2}{v-2n}\right\} \frac{1}{2e} = \gamma_5(n).$$

Заметим, что $\gamma_5(n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Случай 2: $v - n \geq a \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{k \ln n}{n}})v$. Обозначим $\sqrt{\frac{k \ln n}{n}} = \varphi = \varphi(n)$ и положим $\frac{1}{2}(1 + \varphi) = \alpha = \alpha(n)$. Оценим D_{ab} снизу:

$$D_{ab} \geq \sum_{j=0}^{k-1} C_a^{n-j} C_b^j \geq \sum_{j=0}^{k-1} C_a^{n-j}.$$

Слагаемые C_a^{n-j} оценим так же, как и в случае 1:

$$\begin{aligned} C_a^{n-j} &\geq \frac{(a-n+j)^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{a^{n-j}}{(n-j)!} \left(1 - \frac{n-j}{a}\right)^{n-j} \\ &\geq \frac{a^{n-j}}{(n-j)!} \exp\left\{-\frac{(n-j)^2}{a-n+j}\right\} \geq \frac{a^{n-j}}{(n-j)!} \exp\left\{-\frac{2v}{a-n+j}\right\} \\ &\geq \frac{a^{n-j}}{(n-j)!} \exp\left\{-\frac{4v}{v-2n+2j}\right\} \geq \frac{a^{n-j}}{(n-j)!} \exp\left\{-\frac{4v}{v-2n}\right\}. \end{aligned}$$

Последние три неравенства в этой цепочке легко получаются из условия $a \geq \frac{v}{2}$ и тождества $v = \frac{n^2}{2}$. Значит, для D_{ab} справедлива следующая оценка снизу:

$$D_{ab} \geq \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{a^{n-j}}{(n-j)!}\right) \exp\left\{-\frac{4v}{v-2n}\right\} \geq (\alpha v)^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(n-j)!}\right) \exp\left\{-\frac{4v}{v-2n}\right\}.$$

В случае 1 мы показали, что $S \leq 2 \left(\frac{v}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(n-j)!}$. Тогда отношение D_{ab} к S оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{D_{ab}}{S} &\geq \frac{1}{2} (2\alpha)^{n-k} \left(\frac{v}{2}\right)^{-k} 2^{n-1} \exp\left\{-\frac{4v}{v-2n}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{4v}{v-2n}\right\} (1 + \varphi)^{n-k} \exp\left\{-k \ln \frac{v}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{2} \exp \left\{ -\frac{4v}{v-2n} + \frac{\varphi(n-k)}{1+\varphi} - k \ln \frac{v}{2} \right\} = \gamma_6(n),$$

где $\gamma_6(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, поскольку главное слагаемое под знаком экспоненты – это $\varphi(n-k)(1+\varphi)^{-1} \sim \sqrt{nk} \ln n$, а остальные слагаемые малы по сравнению с данным слагаемым в силу условия $k = o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$.

Случай 3: $\frac{v}{2} \leq a \leq \alpha(n)v$. В этом случае $a \sim b \sim \frac{v}{2}$ при $n \rightarrow \infty$. Чтобы оценить сумму S , найдем в ней максимальное слагаемое. Для этого рассмотрим отношение двух соседних слагаемых:

$$\frac{C_{\frac{v}{2}}^{n-j} C_{\frac{v}{2}}^j}{C_{\frac{v}{2}}^{n-j-1} C_{\frac{v}{2}}^{j+1}} = \frac{\left(\frac{v}{2} - n + j + 1\right)(j+1)}{\left(\frac{v}{2} - j\right)(n-j)} \leq \frac{k(v-2n+2k)}{(n-k)(v-2k)}.$$

Обозначим через δ величину $\sup_n \frac{n(v-2n+2k)}{(n-k)(v-2k)}$. Тогда из предыдущего неравенства получим, что

$$\frac{C_{\frac{v}{2}}^{n-j} C_{\frac{v}{2}}^j}{C_{\frac{v}{2}}^{n-j-1} C_{\frac{v}{2}}^{j+1}} \leq \frac{\delta k}{n}.$$

Следовательно, для суммы S имеет место неравенство

$$S \leq 2C_{\frac{v}{2}}^{n-k+1} C_{\frac{v}{2}}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{\delta k}{n}\right)^{k-1-j} \leq 2C_{\frac{v}{2}}^{n-k+1} C_{\frac{v}{2}}^{k-1} \left(1 - \frac{\delta k}{n}\right)^{-1}.$$

Последнее неравенство выполнено при каждом n начиная с некоторого N_1 , когда $\delta k < n$.

Оценим снизу величину D_{ab} :

$$D_{ab} \geq C_a^{n-k+1} C_b^{k-1} + C_b^{n-k+1} C_a^{k-1}.$$

Теперь подробно рассмотрим отношение D_{ab} к S . Согласно полученным неравенствам

$$\frac{D_{ab}}{S} \geq \left(1 - \frac{\delta k}{n}\right) \frac{1}{2} \frac{C_a^{n-k+1} C_b^{k-1} + C_b^{n-k+1} C_a^{k-1}}{C_{\frac{v}{2}}^{n-k+1} C_{\frac{v}{2}}^{k-1}}. \quad (33)$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \frac{C_a^{n-k+1} C_b^{k-1}}{C_{\frac{v}{2}}^{n-k+1} C_{\frac{v}{2}}^{k-1}}, \quad B = \frac{C_b^{n-k+1} C_a^{k-1}}{C_{\frac{v}{2}}^{n-k+1} C_{\frac{v}{2}}^{k-1}}.$$

Далее мы оценим отдельно величины A и B . Имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2a}{v}\right)^{n-k+1} \left(\frac{2b}{v}\right)^{k-1} \left(\prod_{j=1}^{n-k+1} \frac{1 - \frac{j}{a}}{1 - \frac{2j}{v}}\right) \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \frac{j}{b}}{1 - \frac{2j}{v}}\right) \\ &\geq \left(\frac{2a}{v}\right)^{n-k+1} \left(\frac{2b}{v}\right)^{k-1} \exp \left\{ -\sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{j}{a-j} + \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{2j}{v} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{b-j} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2j}{v} \right\} \end{aligned}$$

$$\geq \left(\frac{2a}{v}\right)^{n-k+1} \left(\frac{2b}{v}\right)^{k-1} \exp\left\{-\frac{2n^3}{v(v-2n)}\right\} \exp\left\{-\frac{k^2(\varphi v + 2k)}{2v((1-\alpha)v-k)}\right\}. \quad (34)$$

Последнее неравенство выполняется в силу того, что $a \geq \frac{v}{2}$ и вместе с тем $b \geq (1-\alpha)v$. Аналогично можно получить неравенство для $\bar{B}$:

$$B \geq \left(\frac{2b}{v}\right)^{n-k+1} \left(\frac{2a}{v}\right)^{k-1} \exp\left\{-\frac{2k^3}{v(v-2k)}\right\} \exp\left\{-\frac{n^2(\varphi v + 2n)}{2v((1-\alpha)v-n)}\right\}. \quad (35)$$

Вернемся к оценке отношения величин D_{ab} и S . Положим

$$\gamma_7(n) = \left(1 - \frac{\delta k}{n}\right) \min\left(\exp\left\{-\frac{2n^3}{v(v-2n)} - \frac{k^2(\varphi v + 2k)}{2v((1-\alpha)v-k)}\right\}, \right. \\ \left. \exp\left\{-\frac{2k^3}{v(v-2k)} - \frac{n^2(\varphi v + 2n)}{2v((1-\alpha)v-n)}\right\}\right).$$

Заметим, что $\gamma_7(n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда с учетом оценок (34) и (35) из неравенства (33) имеем

$$\frac{D_{ab}}{S} \geq \frac{1}{2} \gamma_7(n) \left(\left(\frac{2a}{v}\right)^{n-k+1} \left(\frac{2b}{v}\right)^{k-1} + \left(\frac{2b}{v}\right)^{n-k+1} \left(\frac{2a}{v}\right)^{k-1} \right). \quad (36)$$

Пусть $\frac{2a}{v} = 1+x$. Соответственно, $\frac{2b}{v} = 1-x$, где x принадлежит отрезку $[0, \varphi]$. В неравенстве (36) необходимо оценить последний множитель:

$$\left(\frac{2a}{v}\right)^{n-k+1} \left(\frac{2b}{v}\right)^{k-1} + \left(\frac{2b}{v}\right)^{n-k+1} \left(\frac{2a}{v}\right)^{k-1} \\ = (1+x)^{n-k+1} (1-x)^{k-1} + (1-x)^{n-k+1} (1+x)^{k-1} \\ \geq \exp\left\{\frac{(n-k+1)x}{1+x} - \frac{(k-1)x}{1-x}\right\} + \exp\left\{\frac{(k-1)x}{1+x} - \frac{(n-k+1)x}{1-x}\right\} \\ = \exp\left\{\left((n-2k+2)x - nx^2\right) \frac{1}{1-x^2}\right\} \\ + \exp\left\{\left((2k-n-2)x - nx^2\right) \frac{1}{1-x^2}\right\} = C(x). \quad (37)$$

Пусть выбрана такая функция $\beta = \beta(n) > 0$, что $n\beta^2(n) \rightarrow 0$ и $n\beta(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для всех $x \leq \beta(n)$ величина $C(x)$ оценивается по неравенству Коши:

$$C(x) \geq 2 \exp\left\{-\frac{nx^2}{1-x^2}\right\} \geq 2 \exp\left\{-\frac{n\beta^2}{1-\beta^2}\right\} = 2\gamma_8(n). \quad (38)$$

Отметим, что $\gamma_8(n)$ также стремится к единице с ростом n . Теперь рассмотрим случай, когда $x \in [\beta, \varphi]$. Тогда $C(x)$ оценивается снизу первым слагаемым в (37). Таким образом, имеют место неравенства

$$C(x) \geq \exp\left\{\left((n-2k+2)x - nx^2\right) \frac{1}{1-x^2}\right\} \\ \geq \exp\left\{\left((n-2k+2)\beta - n\beta^2\right) \frac{1}{1-\beta^2}\right\} = \gamma_9(n). \quad (39)$$

Последнее неравенство выполняется при $n \geq N_2$, когда функция $(n - 2k + 2)x - nx^2$ становится возрастающей на отрезке $[\beta, \varphi]$. В силу выбора β величина $\gamma_9(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Для всех x из отрезка $[\beta, \varphi]$ выполняется соотношение $C(x) \geq \min(\gamma_9(n), 2\gamma_8(n)) = \gamma_{10}(n)$, причем $\gamma_{10} \rightarrow 2$ при $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, собирая вместе оценки (36), (37), (38) и (39), получим, что для любого $n \geq \max(N_1, N_2)$ выполняется неравенство

$$\frac{D_{ab}}{S} \geq \frac{1}{2} \gamma_7(n) \gamma_{10}(n) = \gamma_{11}(n) \rightarrow 1.$$

Неравенство выполняется асимптотически, однако можно так “подправить” функцию $\gamma_{11}(n)$ при $n \leq \max(N_1, N_2)$, чтобы оно выполнялось для всех n .

Чтобы завершить доказательство леммы, возьмем $\min(\gamma_5(n), \gamma_6(n), \gamma_{11}(n))$ в качестве $\psi_2(n)$ и положим $\psi_1(n) = \psi_2(n) \gamma_4^{-1}(n)$. Ясно, что это искомая функция для неравенства (31). Лемма доказана.

§ 7. Доказательство теоремы 5

Доказательство основано на оценке среднего значения случайной величины $X(\sigma)$, равной количеству хороших ребер гиперграфа G в случайной раскраске σ .

Раскрасим вершины гиперграфа согласно схеме Бернулли: с вероятностью $\frac{1}{2}$ независимо присваиваем каждой вершине синий или красный цвет. Пусть $e \in E$ – ребро гиперграфа. Введем случайную величину $X_e(\sigma)$, равную единице, если ребро e является хорошим в раскраске σ , и нулю в противном случае. Тогда $\mathbb{E}X_e$ (математическое ожидание величины X_e), очевидно, равно вероятности того, что ребро e является хорошим. Имеет место равенство

$$\mathbb{E}X_e = 1 - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j}{2^{n-1}}.$$

Рассмотрим случайную величину $X = X(\sigma)$, равную сумме всех величин X_e . Тогда значение величины $X(\sigma)$ – это количество хороших ребер в раскраске σ . Оценим среднее значение X :

$$\mathbb{E}X = \sum_{e \in E} \mathbb{E}X_e = |E| \left(1 - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j}{2^{n-1}} \right).$$

В силу неравенства из условия теоремы получаем, что

$$\mathbb{E}X \geq |E|(1 - \varepsilon).$$

Значит, существует такая раскраска вершин гиперграфа, что в ней G имеет не менее чем $|E|(1 - \varepsilon)$ хороших ребер. Обозначим через E' это множество ребер. Тогда гиперграф $G' = (V, E')$ обладает свойством B_k , а значит, гиперграф G обладает свойством $B_{k, \varepsilon}$. Теорема 5 доказана.

§ 8. Доказательство теоремы 6

Как и в предыдущем параграфе, доказательство основано на оценке математического ожидания случайной величины $X(\sigma)$, равной количеству хороших ребер в раскраске σ .

Рассмотрим случайную раскраску вершин гиперграфа, получающуюся с помощью рандомизированного алгоритма, приведенного в доказательстве теоремы 2 (см. п. 3.1).

Пусть $e \in E$ – ребро гиперграфа. Введем случайную величину $X_e(\sigma)$, равную единице, если ребро e является хорошим в раскраске σ , и нулю в противном случае. Тогда EX_e , очевидно, равно вероятности того, что ребро e является хорошим во второй раскраске (см. § 7). Оценим вероятность p_e противоположного события, состоящего в том, что ребро e является плохим во второй раскраске.

Как и в п. 3.1, введем события A_e и C_e . Тогда (ср. с п. 3.1)

$$p_e = 2P(A_e) + 2P(C_e).$$

При доказательстве теоремы 2 были приведены оценки вероятностей событий A_e и C_e . Эти оценки верны и в рассматриваемом случае, поскольку выполнены неравенства (2) и (3). В доказательстве теоремы 2 было обосновано существование такого натурального N , что для любого $n \geq N$ и произвольного ребра $e \in E$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} P(A_e) &\leq 2^{-n} C_n^{k-1} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3) = 2^{-n} C_n^{k-1} (\widetilde{\mathfrak{M}}_1 + \widetilde{\mathfrak{M}}_2 + \widetilde{\mathfrak{M}}_3), \\ P(C_e) &\leq 2^{-n} C_n^{k-1} \widetilde{\mathfrak{M}}_4. \end{aligned}$$

Отметим, что данные оценки не зависят от ребра e в том смысле, что становятся верными для всех ребер одновременно начиная с некоторого n . Тогда получаем оценку снизу для EX_e :

$$\begin{aligned} EX_e = 1 - p_e &= 1 - 2P(A_e) - 2P(C_e) \geq 1 - 2^{1-n} C_n^{k-1} (\widetilde{\mathfrak{M}}_1 + \widetilde{\mathfrak{M}}_2 + \widetilde{\mathfrak{M}}_3 + \widetilde{\mathfrak{M}}_4) \\ &\geq 1 - 2^{1-n} C_n^{k-1} \frac{\varepsilon 2^{n-1}}{\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j} \geq 1 - \varepsilon. \end{aligned} \quad (40)$$

Предпоследнее неравенство следует из условия (9).

Рассмотрим случайную величину $X = X(\sigma)$, равную сумме всех величин X_e . Тогда значение величины $X(\sigma)$ – это количество хороших ребер в раскраске σ . Оценим среднее значение X :

$$EX = \sum_{e \in E} EX_e = \sum_{e \in E} (1 - p_e).$$

В силу оценки (40) имеет место неравенство

$$EX \geq |E|(1 - \varepsilon).$$

Значит, существует такая раскраска вершин гиперграфа, что в ней G имеет не менее $|E|(1 - \varepsilon)$ хороших ребер. Обозначим через E' это множество ребер. Тогда гиперграф $G' = (V, E')$ обладает свойством B_k , а значит, гиперграф G обладает свойством $B_{k, \varepsilon}$. Теорема 6 доказана.

§ 9. Доказательство теоремы 7

При доказательстве воспользуемся теоремой 6 следующим образом: определим функции $p = p(n)$, $x = x(n)$ и покажем, что при таких значениях p и x выполняются условия теоремы 6. Естественно, мы будем апеллировать к условиям теоремы 7. Итак, положим

$$p(n) = \frac{-\ln(c\lambda)}{n}, \quad x(n) = \frac{c - c^2}{8} \frac{\lambda^2 n}{-\ln(c\lambda)} \frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}. \quad (41)$$

Заметим, что в силу такого выбора выполняется условие $p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Проверим выполнение трех неравенств теоремы 6, а именно неравенств (2), (3) и (9). Параметр p задан так, что неравенство из условия теоремы 7 есть в точности неравенство (3). Из этого неравенства видно, что $k \ll \sqrt{\ln \lambda}$ и, значит, выполнено условие $k = o(n)$. Неравенство (2) выполняется в этом случае автоматически начиная с некоторого n , поскольку

$$p^2 k n \ll \frac{\ln^{\frac{5}{2}} \lambda}{n} \rightarrow 0.$$

Остается проверить выполнение неравенства (9).

Поясним, что представляют собой величины $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_3$ и $\widetilde{\mathfrak{M}}_4$ при нашем выборе функции p и оценке функции k . Несложно проверить (например так, как это было сделано в аналогичной ситуации в доказательстве теоремы 1), что величины $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$ и $\widetilde{\mathfrak{M}}_3$ являются бесконечно малыми по сравнению с $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$. Следует воспользоваться оценками параметров p , λ , k . Из этих оценок вытекает, что $\widetilde{\mathfrak{M}}_1 = (1 - p)^n \gamma_1(n)$, где $\gamma_1(n) \rightarrow 1$. В итоге получаем

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1 + \widetilde{\mathfrak{M}}_2 + \widetilde{\mathfrak{M}}_3 = (1 - p)^n \gamma_1(n) \leq c\lambda \gamma_1(n). \quad (42)$$

Рассмотрим выражение для $\widetilde{\mathfrak{M}}_4$:

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_4 = x(1 + p)^{n-1} p C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{n - k}{n - 2k + 1} \right)^2 \left(1 - \frac{k - 1}{(n - k)p} \right)^{-2}. \quad (43)$$

Из выбора p следует, что $(1 + p)^n \leq (c\lambda)^{-1}$. Обозначим

$$\left(\frac{n - k}{n - 2k + 1} \right)^2 \left(1 - \frac{k - 1}{(n - k)p} \right)^{-2} = \gamma_2(n).$$

Несложно понять, что $\gamma_2(n) \leq 4\gamma_3(n)$, где $\gamma_3(n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Подставляя в (43) значение x из (41), выводим оценку для $\widetilde{\mathfrak{M}}_4$:

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_4 \leq x(c\lambda)^{-1} C_{n-1}^{k-1} \frac{-\ln \lambda}{n} \cdot 4\gamma_3(n) \leq \frac{1 - c}{2} \lambda \gamma_3(n). \quad (44)$$

Объединим оценки (42) и (44). Для выполнения условия (9) необходимо, чтобы для всех n начиная с некоторого момента выполнялось условие $\widetilde{\mathfrak{M}}_1 + \widetilde{\mathfrak{M}}_2 + \widetilde{\mathfrak{M}}_3 + \widetilde{\mathfrak{M}}_4 \leq \lambda$. Мы показали, что

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1 + \widetilde{\mathfrak{M}}_2 + \widetilde{\mathfrak{M}}_3 + \widetilde{\mathfrak{M}}_4 \leq \frac{1 + c}{2} \lambda \max(\gamma_1(n), \gamma_3(n)).$$

Значит, при всех достаточно больших n будет выполнено нужное соотношение. Таким образом, при нашем выборе параметров p и x выполнены все условия теоремы 6. Следовательно, существует такое натуральное число N , что для каждого $n \geq N$ выполняется неравенство

$$m_{k,\varepsilon}(n) \geq \frac{c - c^2}{8} \frac{\lambda^2 n}{-\ln(c\lambda)} \frac{2^{n-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}.$$

Теорема 7 доказана.

§ 10. Доказательство теоремы 8

Рассмотрим множество $V = \{1, \dots, v\}$, где в качестве v возьмем величину $\lceil \frac{n^2}{4} \rceil$. Как и в доказательстве теоремы 4, обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех n -подмножеств множества V , которые мы будем называть *ребрами*. Ясно, что

$$|\mathcal{R}| = C_v^n.$$

На множестве V существует 3^v различных раскрасок в три цвета. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_{3^v}$ – все эти раскраски. Выберем произвольную раскраску σ_i . Обозначим через a количество вершин красного, через b – синего, а через $c = v - a - b$ – зеленого цвета в раскраске σ_i . Пусть E_i – множество всех ребер, являющихся плохими² в σ_i . Тогда несложно заметить, что

$$|E_i| = C_{a+c}^n + C_{b+c}^n + C_{a+b}^n - C_a^n - C_b^n - C_c^n = q_{a,b,c}. \quad (45)$$

Обозначим через E какую-нибудь систему общих представителей для совокупности $\{E_i\}_{i=1}^{3^v}$. Поскольку E – множество элементов из $\mathcal{R}$, т.е. ребер, то можно рассмотреть n -равномерный гиперграф $G = (V, E)$. Покажем, что G не обладает свойством B_1^3 .

Действительно, пусть σ – произвольная раскраска V . Тогда σ совпадает с некоторой σ_i . Рассмотрим множество E_i . В системе E есть ребро из E_i . По определению множества E_i все ребра, входящие в него, являются плохими в раскраске σ_i . Значит, в E есть ребро, являющееся плохим в σ_i , или в σ , что и доказывает отсутствие свойства B_1^3 у гиперграфа $G = (V, E)$.

Оставшаяся задача состоит в оценке сверху величины $|E|$. Для этого воспользуемся теоремой о системе общих представителей. Согласно этой теореме можно выбрать такую систему E , что

$$|E| \leq \frac{|\mathcal{R}|}{\min_i |E_i|} \left(\ln \frac{3^v \min_i |E_i|}{|\mathcal{R}|} + 1 \right), \quad (46)$$

если выражение под знаком логарифма больше числа e . Это условие, очевидно, выполняется. Положим $M = \min_i |E_i|$.

Пусть дана раскраска σ_i . Оценим снизу величину $|E_i|$. Оказывается, что минимум выражения (45) достигается при “почти равных” a , b и c , т.е. $q_{a,b,c} \geq q_{a_0,b_0,c_0}$, где тройка (a_0, b_0, c_0) равна $(\frac{v}{3}, \frac{v}{3}, \frac{v}{3})$, если $v \equiv 0 \pmod{3}$, равна $(\lfloor \frac{v}{3} \rfloor, \lfloor \frac{v}{3} \rfloor, \lceil \frac{v}{3} \rceil)$, если $v \equiv 1 \pmod{3}$, и, наконец, равна $(\lfloor \frac{v}{3} \rfloor, \lceil \frac{v}{3} \rceil, \lceil \frac{v}{3} \rceil)$, если $v \equiv 2 \pmod{3}$.

²В случае трех цветов ребро называется *плохим*, если в нем нет вершин хотя бы одного цвета.

(mod 3). Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что при $a \geq b > 0$ выполняется неравенство $q_{a,b,c} \leq q_{a+1,b-1,c}$, т. е. что

$$\begin{aligned} C_{a+c}^n + C_{b+c}^n + C_{a+b}^n - C_a^n - C_b^n - C_c^n \\ \leq C_{a+c+1}^n + C_{b+c-1}^n + C_{a+b}^n - C_{a+1}^n - C_{b-1}^n - C_c^n. \end{aligned} \quad (47)$$

В самом деле, если изменяются два числа из тройки (a, b, c) при неизменности общей суммы $a + b + c$, то при увеличении большего числа и уменьшении меньшего должна увеличиваться и сумма (45). В силу равенства $C_{x+1}^n - C_x^n = C_x^{n-1}$ соотношение (47) эквивалентно следующему:

$$C_{a+c}^{n-1} - C_a^{n-1} \geq C_{b+c-1}^{n-1} - C_{b-1}^{n-1}.$$

Для доказательства этого неравенства воспользуемся методом математической индукции. При $c = 0$ оно верно. Пусть оно выполнено для $c - 1$. Представим левую часть в виде

$$C_{a+c}^{n-1} - C_a^{n-1} = C_{a+c}^{n-1} - C_{a+c-1}^{n-1} + C_{a+c-1}^{n-1} - C_a^{n-1} = C_{a+c-1}^{n-2} + C_{a+c-1}^{n-1} - C_a^{n-1}.$$

По предположению индукции $C_{a+c-1}^{n-1} - C_a^{n-1} \geq C_{b+c-2}^{n-1} - C_{b-1}^{n-1}$. По условию имеем $a \geq b$, так что $C_{a+c-1}^{n-2} > C_{b+c-2}^{n-2}$. Из этих двух соотношений вытекает, что

$$\begin{aligned} C_{a+c}^{n-1} - C_a^{n-1} &= C_{a+c-1}^{n-2} + C_{a+c-1}^{n-1} - C_a^{n-1} > C_{b+c-2}^{n-2} + C_{b+c-2}^{n-1} - C_{b-1}^{n-1} \\ &= C_{b+c-1}^{n-1} - C_{b-1}^{n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали неравенство (47) для произвольного c .

Из приведенных выше рассуждений получаем, что

$$M = \min_i |E_i| = q_{a_0, b_0, c_0}.$$

Снизу величина q_{a_0, b_0, c_0} оценивается величиной $3C_{\frac{2v}{3}}^n - 3C_{\frac{v}{3}+1}^n$, где используется формальное обозначение $C_x^n = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$. Вычитаемое есть оценка сверху для суммы $C_{a_0}^n + C_{b_0}^n + C_{c_0}^n$, а уменьшаемое есть оценка снизу для $C_{a_0+b_0}^n + C_{b_0+c_0}^n + C_{c_0+a_0}^n$. Первая оценка тривиальна, вторую получаем, рассматривая отдельно случаи $v \equiv 1 \pmod{3}$ и $v \equiv 2 \pmod{3}$ и используя метод математической индукции. Таким образом,

$$M \geq 3C_{\frac{2v}{3}}^n - 3C_{\frac{v}{3}+1}^n.$$

Для оценки сверху величины $|E|$ необходимо оценить снизу отношение величин M и $|\mathcal{R}| = C_v^n$. Сначала рассмотрим отношение величины $C_{\frac{2v}{3}}^n$ к C_v^n :

$$\frac{C_{\frac{2v}{3}}^n}{C_v^n} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\frac{2v}{3} - j}{v - j} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \prod_{j=0}^{n-1} \frac{v - \frac{3j}{2}}{v - j}.$$

Далее воспользуемся следующими неравенствами:

$$v - \frac{3j}{2} = v \left(1 - \frac{3j}{2v}\right) \geq v \exp\left\{-\frac{3j}{2v - 3j}\right\}, \quad v - j \leq v e^{-j/v}.$$

Из этих неравенств получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{C_{\frac{2v}{3}}^n}{C_v^n} &\geq \left(\frac{2}{3}\right)^n \prod_{j=0}^{n-1} \exp\left\{-\frac{3j}{2v-3j} + \frac{j}{v}\right\} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^n \prod_{j=0}^{n-1} \exp\left\{-\frac{3j}{2v-3n} + \frac{j}{v}\right\} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \prod_{j=0}^{n-1} \exp\left\{-\frac{j(v+3n)}{(2v-3n)v}\right\} \\ &\geq \left(\frac{2}{3}\right)^n \exp\left\{-\frac{n^2(v+3n)}{2(2v-3n)v}\right\} = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{-1} \gamma_1(n), \end{aligned} \quad (48)$$

где $\gamma_1(n) \rightarrow 1$ с ростом n . Легко установить следующую оценку:

$$\frac{C_{\frac{v}{3}}^n}{C_v^n} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Правая часть этой оценки является бесконечно малой по сравнению с выражением, находящимся в правой части (48). Поэтому

$$\frac{M}{C_v^n} \geq 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{-1} \gamma_2(n), \quad (49)$$

где величина $\gamma_2(n)$ стремится к единице.

Подставим в неравенство (46) вместо $\frac{C_v^n}{M}$ оценку (49). Учитывая, что $v = \lceil \frac{n^2}{4} \rceil$, получим

$$|E| \leq \frac{C_v^n}{M} \left(\ln \frac{3^v M}{C_v^n} + 1 \right) + 1 \leq \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^n e \gamma_2^{-1}(n) (v \ln 3 + 1) + 1 \leq \frac{n^2 e \ln 3}{12} \left(\frac{3}{2}\right)^n \psi(n).$$

Несложно проверить, что $\psi(n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Теорема 8 доказана.

§ 11. Доказательство теоремы 10

Доказательство теоремы 10, как и во многих аналогичных случаях прежде, основано на идее рандомизированного алгоритма раскраски вершин гиперграфа. Данный алгоритм состоит из двух шагов.

Первый шаг представляет собой равномерную раскраску: каждую вершину независимо от остальных с вероятностью $\frac{1}{3}$ красим в один из трех цветов.

Второй шаг состоит в перекраске опасных вершин. Назовем ребро *плохим*, если после первого шага в этом ребре нет вершин одного из цветов. Вершину назовем *опасной*, если она принадлежит хотя бы одному плохому ребру. Перекрашивать опасные вершины будем по следующему правилу: с вероятностью s красим в синий цвет, с вероятностью q – в красный, с вероятностью r – в зеленый, а с вероятностью $1 - (s + q + r)$ оставляем прежний цвет, т.е. не перекрашиваем вершину.

Обозначим через $\mathcal{F}$ следующее событие: после второго шага раскраски у G есть плохие ребра. Покажем, что $P(\mathcal{F}) < 1$. Тогда существует такая раскраска вершин гиперграфа G в три цвета, что в ней нет плохих ребер. Значит, G обладает свойством B_1^3 , откуда следует оценка

$$m_1^3(n) > x(n) \frac{3^{n-1}}{2^n} = |E|.$$

Пусть e – некоторое ребро из E . Обозначим через A_e^{gr} следующее событие: в первой раскраске в ребре e нет зеленых вершин и ребро e является плохим также и во второй раскраске. Через A_e^{rd} и A_e^{bl} обозначим аналогичные события, заменив зеленый цвет соответственно на красный и синий. Через C_e обозначим следующее событие: ребро e – хорошее в первой раскраске и плохое во второй. Ясно, что

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e \in E} (A_e^{\text{gr}} \cup A_e^{\text{rd}} \cup A_e^{\text{bl}} \cup C_e). \quad (50)$$

Оценим вероятности этих событий.

Из алгоритма раскраски вершин вытекает, что

$$\begin{aligned} P(A_e^{\text{gr}}) &= 3^{-n}((1-r)^n 2^n + (1-s+q+r)^n + (1-q+s+r)^n \\ &\quad - (2r)^n - (1-q-r+s)^n - (1-s-r+q)^n). \end{aligned} \quad (51)$$

Действительно, первое слагаемое есть вероятность того, что ребро останется красно-синим во второй раскраске. Вероятность не переокраситься в зеленый цвет и для синей, и для красной вершин равна $1-r$. Если же ребро стало красно-зеленым, то вероятность не стать синей для синей вершины равна $q+r$, а для красной равна $1-s$. Аналогично, в случае появления сине-зеленого ребра в последней раскраске вероятность не переокраситься в красный цвет для синей вершины равна $1-q$, для красной равна $s+r$. Остается вычесть вероятности случаев, когда ребро одноцветно во второй раскраске, поскольку эти случаи были учтены по два раза. Это три последних слагаемых в сумме (51).

Аналогично находим, что

$$\begin{aligned} P(A_e^{\text{rd}}) &= 3^{-n}((1-q)^n 2^n + (1-s+q+r)^n + (1-r+s+q)^n \\ &\quad - (2q)^n - (1-q-r+s)^n - (1-s-q+r)^n), \\ P(A_e^{\text{bl}}) &= 3^{-n}((1-s)^n 2^n + (1-r+q+s)^n + (1-q+s+r)^n \\ &\quad - (2s)^n - (1-q-s+r)^n - (1-s-r+q)^n). \end{aligned}$$

Пусть теперь e и f – два пересекающихся ребра. Через B_{ef}^{gr} обозначим следующее событие: f – красно-синее в первой раскраске, e – либо красно-зеленое, либо сине-зеленое во второй раскраске и в процессе переокраски хотя бы одна вершина в пересечении e и f поменяла цвет. Тогда ясно, что

$$C_e \subset \bigcup_{f \neq e} (B_{ef}^{\text{gr}} \cup B_{ef}^{\text{bl}} \cup B_{ef}^{\text{rd}}),$$

где через B_{ef}^{bl} и B_{ef}^{rd} обозначены аналоги события B_{ef}^{gr} с заменой зеленого цвета на синий и красный соответственно. Оценим вероятности этих событий. Пусть $|e \cap f| = h$, где $h \geq 1$. Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} P(B_{ef}^{\text{gr}}) &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-h} \left(\left(\frac{1}{3}(s+r) + \frac{1}{3}(1-q) \right)^h - \left(\frac{1}{3}(1-q-r) \right)^h \right) \\ &\quad \times \left(\frac{2+s+r}{3} \right)^{n-h} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-h} \left(\left(\frac{1}{3}(q+r) + \frac{1}{3}(1-s) \right)^h \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{3}(1-s-r) \right)^h \right) \left(\frac{2+q+r}{3} \right)^{n-h}. \end{aligned} \quad (52)$$

Поясним это длинное выражение. Первое слагаемое, состоящее из трех множителей, отвечает вероятности появления сине-зеленого ребра e . Первый множитель $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-h}$ – вероятность того, что вершины f , не принадлежащие e , покрашены в красный или синий цвет после первой раскраски. Второй множитель представляет собой вероятность события, заключающегося в том, что вершины в пересечении ребер имеют красный или синий цвет в первой раскраске, а во второй они покрашены либо в синий, либо в зеленый, причем обязательно хотя бы одна вершина поменяла цвет в процессе перекраски. Из вероятности события {вершины пересечения красные или синие в первой раскраске и синие или зеленые во второй} надо вычесть вероятность пересечения этого события с событием {ни одна вершина не перекрасилась}. Если ни одна из вершин в пересечении не поменяла цвет, то все эти вершины имели синий цвет в первой раскраске, иначе ребро e не станет сине-зеленым во второй раскраске. Вероятность этого события равна $3^{-h}(1-q-r)^h$. Последний множитель $\left(\frac{2+s+r}{3}\right)^{n-h}$ – это оценка сверху вероятности того, что вершины e , не принадлежащие f , покрашены в синий или зеленый цвет. Второе слагаемое в оценке (52) соответствует варианту красно-зеленого ребра e после второй раскраски. Получается оно аналогично первому случаю.

Далее мы будем считать, что все параметры s, q, r равны параметру $p = p(n)$. Тогда

$$P(B_{ef}^{\text{gr}}) \leq 2 \frac{4^{n-h}}{3^{2n-h}} ((1+p)^h - (1-2p)^h)(1+p)^{n-h} \leq \frac{2^{2n-2h+1}}{3^{2n-h-1}} ph(1+p)^{n-1},$$

поскольку $(1+p)^h - (1-2p)^h \leq 3hp(1+p)^{h-1}$.

В силу симметрии цветов (мы выбрали параметры s, q и r равными) вероятности событий B_{ef}^{bl} и B_{ef}^{rd} оцениваются точно таким же выражением. Найдем его максимум по h . Отношение значений этого выражения при h и $h+1$ равно $\frac{4h}{3(h+1)}$. Это выражение не превосходит единицы при $h = 1, 2, 3$ и больше единицы при $h > 3$, значит, максимум достигается при $h = 3$. Следовательно,

$$\max_{e \neq f} P(B_{ef}^{\text{gr}}) \leq \frac{2^{2n-5}}{3^{2n-5}} p(1+p)^{n-1}.$$

Тогда имеем следующую оценку вероятности события C_e :

$$P(C_e) \leq |E| 3 \max_{e \neq f} P(B_{ef}^{\text{gr}}) \leq |E| \frac{2^{2n-5}}{3^{2n-6}} p(1+p)^{n-1}.$$

Учитывая соотношения (50) и (51), получим

$$P(\mathcal{F}) \leq |E| \left(3^{1-n} (2^n (1-p)^n + 2(1+p)^n) + |E| \left(\frac{2^n}{3^{n-1}} \right)^2 \frac{81}{32} p(1+p)^{n-1} \right).$$

Подставим в это неравенство вместо величины $|E|$ ее оценку $x \frac{3^{n-1}}{2^n}$. Тогда

$$P(\mathcal{F}) \leq x(1-p)^n + 2^{1-n} x(1+p)^n + x^2 \frac{81}{32} p(1+p)^{n-1} < 1.$$

Последнее неравенство, справедливое в силу неравенства (14), и доказывает утверждение теоремы 10.

§ 12. Доказательство теоремы 9

Воспользуемся теоремой 10. Подберем параметры $p = p(n)$ и $x = x(n)$ так, чтобы выполнялись неравенства $p < \frac{1}{3}$ и

$$xe^{-pn} + 2^{1-n}xe^{pn} + x^2\frac{81}{32}pe^{pn} < 1. \quad (53)$$

Неравенство (53) является более сильным, чем неравенство (14), и поэтому позволяет применить теорему 10. Выберем p следующим образом:

$$p(n) = \frac{\frac{1}{3} \ln\left(\frac{n}{\ln n}\right)}{n},$$

а в качестве x возьмем выражение

$$x(n) = c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\frac{1}{3}},$$

где c – некоторая константа, значение которой мы уточним позднее. Тогда условие $p < \frac{1}{3}$ выполняется начиная с некоторого момента. Проверим выполнение неравенства (53). Подставляя в него выражения для p и x , получим

$$c + 2^{1-n}c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\frac{2}{3}} + c^2 \frac{81}{32} \frac{\frac{1}{3} \ln\left(\frac{n}{\ln n}\right)}{\ln n} = c + \gamma_1(n) + c^2 \frac{27}{32} \gamma_2(n),$$

причем $\gamma_1(n) \rightarrow 0$, а $\gamma_2(n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Положим, например, $c = \frac{1}{2}$. Тогда полученная величина меньше единицы при всех достаточно больших n . Значит, при таком выборе параметров p и x применима теорема 10, из которой следует, что

$$m_1^3(n) > x(n) \frac{3^{n-1}}{2^n} = c \frac{3^{n-1}}{2^n} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\frac{1}{3}}$$

начиная с некоторого момента. Теорема 9 доказана.

§ 13. Доказательство теоремы 11

Доказательство теоремы 11 основано на оценке среднего значения случайной величины X , равной количеству плохих ребер гиперграфа G в случайной раскраске.

Рассмотрим следующий алгоритм случайной раскраски вершин гиперграфа. Он состоит из двух шагов.

На первом шаге каждую вершину независимо с вероятностью $\frac{1}{3}$ красим в один из трех цветов.

На втором шаге перекрашиванию подвергаются только опасные вершины: с вероятностью p красим их в красный цвет, с вероятностью p – в синий цвет, с вероятностью p – в зеленый цвет, а с вероятностью $1 - 3p$ не перекрашиваем их.

Пусть $e \in E$ – ребро гиперграфа G . Обозначим через A_e событие {ребро e хорошее в случайной раскраске σ }. Введем случайную величину $X_e = I\{A_e\}$,

где I – индикатор. Тогда $\mathbb{E}X_e = \mathbb{P}(A_e)$. При доказательстве теоремы 10 была обоснована следующая оценка вероятности события $\bar{A}_e$:

$$\mathbb{P}(\bar{A}_e) \leq \frac{2^n}{3^{n-1}} \left((1-p)^n + 2^{1-n}(1+p)^n + x \frac{81}{32} p(1+p)^{n-1} \right).$$

Эта оценка верна для любого ребра e . Из неравенства (15) получаем, что для всех $n \geq n_7$ выполняется неравенство

$$\mathbb{P}(\bar{A}_e) \leq \frac{2^n}{3^{n-1}} \varepsilon \frac{3^{n-1}}{2^n} = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}X_e = \mathbb{P}(A_e) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}_e) \geq 1 - \varepsilon.$$

Обозначим через X случайную величину $\sum_{e \in E} X_e$. Тогда

$$\mathbb{E}X \geq (1 - \varepsilon)|E|.$$

Значит, существует такая раскраска σ_0 , что $X(\sigma_0) \geq (1 - \varepsilon)|E|$. Но $X(\sigma_0)$ есть количество хороших ребер в раскраске σ_0 . Множество этих ребер обозначим через E' . Тогда $G' = (V, E')$ обладает свойством B_1^3 и $|E'| \geq (1 - \varepsilon)|E|$. По определению гиперграф G обладает свойством $B_{1,\varepsilon}^3$ и $m_{1,\varepsilon}^3 > x(n) \frac{3^{n-1}}{2^n}$. Теорема 11 доказана.

§ 14. Доказательство теоремы 12

При доказательстве воспользуемся теоремой 11 следующим образом: определим функции $p(n)$, $x(n)$ и покажем, что при таких значениях p и x выполняются условия теоремы 11 начиная с некоторого N . В этом случае теорема 11 утверждает, что для всех $n \geq N$ выполнено неравенство $m_{1,\varepsilon}^3(n) > x(n) \frac{3^{n-1}}{2^n}$. Итак, положим

$$p(n) = \frac{-\ln(c\lambda)}{n}, \quad x(n) = \frac{32nc\lambda}{-81 \ln(c\lambda)} \left((1-c)\lambda - \frac{2^{1-n}}{c\lambda} \right).$$

Заметим, что при таком выборе выполняется условие $p < \frac{1}{3}$.

Остается проверить выполнение условия (15). Достаточно проверить, что выполняется неравенство

$$(1-p)^n + 2^{1-n}(1+p)^n + x \frac{81}{32} p(1+p)^{n-1} \leq \lambda.$$

Ввиду выбора параметра p верны следующие оценки:

$$(1-p)^n \leq c\lambda, \quad (1+p)^n \leq (c\lambda)^{-1}.$$

Далее мы покажем, что выполнено более сильное, чем (15), неравенство

$$c\lambda + 2^{1-n}(c\lambda)^{-1} + x \frac{-81 \ln(c\lambda)}{32n} (c\lambda)^{-1} \leq \lambda.$$

Если подставить вместо x выбранное выражение, то мы получим точное равенство. Следовательно, при нашем выборе параметров p и x все условия теоремы 11 выполнены для всех n начиная с n_7 . Итак,

$$m_{1,\varepsilon}^3(n) > \frac{32nc\lambda}{-81 \ln(c\lambda)} \left((1-c)\lambda - \frac{2^{1-n}}{c\lambda} \right) \frac{3^{n-1}}{2^n}.$$

Теорема 12 доказана.

Список литературы

1. P. Erdős, “On a combinatorial problem. I”, *Nordisk Mat. Tidskr.*, **11** (1963), 5–10.
2. P. Erdős, “On a combinatorial problem. II”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15**:3–4 (1964), 445–447.
3. J. Beck, “On 3-chromatic hypergraphs”, *Discrete Math.*, **24**:2 (1978), 127–137.
4. J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, “Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring”, *Random Structures Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.
5. N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 2000.
6. Д. А. Шабанов, “Об одной комбинаторной задаче Эрдеша”, *Докл. РАН*, **396**:2 (2004), 166–169; англ. пер.: D. A. Shabanov, “On one combinatorial problem of Erdős”, *Dokl. Math.*, **69**:3 (2004), 359–362.
7. P. Erdős, Ch. Ko, R. Rado, “Intersection theorems for systems of finite sets”, *Quart. J. Math. Oxford, Ser. (2)*, **12** (1961), 313–320.
8. R. Ahlswede, L. H. Khachatrian, “The complete nontrivial-intersection theorem for systems of finite sets”, *J. Combin. Theory, Ser. A*, **76**:1 (1996), 121–138.
9. R. Ahlswede, L. H. Khachatrian, “The complete intersection theorem for systems of finite sets”, *European J. Combin.*, **18**:2 (1997), 125–136.
10. M. Deza, P. Frankl, “Erdős–Ko–Rado theorem – 22 years later”, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, **4**:4 (1983), 419–431.
11. Д. А. Шабанов, “О раскрасках гиперграфов”, *Докл. РАН*, **402**:5 (2005), 605–608.
12. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1, Мир, М., 1984; пер. с англ.: W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. I, Wiley, New York–London–Sydney, 1968.
13. А. М. Райгородский, “Системы общих представителей”, *Фундам. и прикл. матем.*, **5**:3 (1999), 851–860.
14. Н. Н. Кузюрин, “Асимптотическое исследование задачи о покрытии”, *Проблемы кибернетики*, **37** (1980), 19–56.

Д. А. ШАБАНОВ (D. A. SHABANOV)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
E-mail: gold-amber@yandex.ru

Поступило в редакцию
 11.10.2005