Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Аристов, О структуре бипроективных банаховых алгебр с нетривиальным радикалом, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 6, 53–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/im613>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:27:55

УДК 517.98

О. Ю. Аристов

О структуре бипроективных банаховых алгебр с нетривиальным радикалом

Исследуется строение бипроективных банаховых алгебр. В отличие от предшествующих результатов Ю. В. Селиванова допускается наличие в рассматриваемых алгебрах нильпотентных идеалов – структурная теорема включает в себя почти все известные примеры. Как следствие, получена полная классификация конечномерных бипроективных банаховых алгебр. Предположения о наличии свойства аппроксимации у некоторых банаховых пространств, связанных с изучаемыми алгебрами, играют существенную роль в доказательстве.

Библиография: 19 наименований.

Введение

В топологической гомологии большой интерес представляет вопрос о том, насколько жестко внутренняя структура банаховой алгебры определяется наложенными на нее внешними гомологическими условиями. Прообразом для исследований подобных проблем можно считать известную теорему о строении ассоциативной алгебры, имеющей тривиальные когомологии Хохшильда с коэффициентами в произвольном бимодуле. В случае, когда основное поле есть $\mathbb{C}$, такая алгебра классически полупроста (см., например, [1, теорема VII.5.6]) и, следовательно, в силу теоремы Веддебёрна–Артина изоморфна произведению конечного числа полных матричных алгебр. При изучении банаховых алгебр разумно отказаться от требования унитарности, что естественно приводит к классу бипроективных банаховых алгебр (см. определение в § 2), изучение которого было начато А. Я. Хелемским в [2], где показано, что L^1 -алгебра локально компактной группы бипроективна тогда и только тогда, когда группа компактна. Бипроективные банаховы алгебры могут рассматриваться как наиболее близкие по свойствам к когомологически тривиальным, насколько это возможно при отсутствии единицы. Основным направлением исследования бипроективных алгебр было и остается исследование оказавшегося непростым вопроса об их внутреннем строении (см. [3]–[6]).

Ю. В. Селивановым (сначала в [4], а позднее при более общих предположениях в [5]) установлено, что для широкого класса бипроективных банаховых алгебр их структура может быть описана в терминах, близких к классическому веддебёрнову разложению, возникающие при этом прямые слагаемые являются некоторыми классами операторов в банаховых пространствах (см. формулировку в § 2). Однако окончательного ответа на вопрос о строении бипроективных банаховых алгебр до сих пор нет: камнем преткновения оказываются наличие у банаховых пространств недополняемых замкнутых подпространств и

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 02-01-00928, 05-01-00982).

возможное отсутствие свойства аппроксимации. Другим препятствием к окончательному пониманию структуры бипроективных алгебр является до сих пор не решенная проблема существования нетривиальных радикальных бипроективных банаховых алгебр. Тем не менее, известно, что если полупервичная банахова алгебра бипроективна, обладает односторонней единицей и свойством аппроксимации, то она все же изоморфна произведению конечного числа полных матричных алгебр [5, лемма 4.69]. Основные сведения о бипроективных алгебрах можно найти в [7, гл. IV, § 5]. Из более современных работ следует отметить также¹ [8] и [9].

Одним из существенных предположений в упомянутых выше структурных результатах является полупервичность алгебры. Однако важный класс бипроективных алгебр – тензорные алгебры вырожденных дуальных пар – не являются полупервичными, и поэтому к ним и им подобным эти утверждения не могут быть применены.

Основной целью работы является преодоление этого расхождения между общей теорией и известными примерами. Доказано утверждение о строении бипроективных банаховых алгебр (теорема 1.18) при условиях, включающих в себя наличие свойства аппроксимации и (в меньшей степени) полупервичность некоторого идеала. Кроме того, получена классификация конечномерных бипроективных банаховых алгебр; как ни удивительно, этот вопрос ранее не был полностью исследован.

В своей основе доказательство структурной теоремы воспроизводит рассуждения из [4] и [5]. Однако возможное наличие в рассматриваемых алгебрах нильпотентных идеалов приводит к значительным техническим трудностям, преодолению которых и посвящена большая часть настоящей работы. Коснемся здесь лишь одной из них. В доказательстве структурной теоремы Селиванова одним из ключевых моментов является проективность неприводимых левых банаховых модулей над алгеброй A , т. е. модулей, имеющих вид A/I , где I – максимальный модулярный левый идеал.

Отметим, что имеются две разновидности проективных банаховых модулей: относительные и строгие. Первые естественно связаны с группами когомологий и бипроективными алгебрами, но лишь на основе вторых возможно построить удовлетворительную структурную теорию. В интересующем нас случае (когда A бипроективна, но не обязательно полупроста или полупервична) модуль A/I не обязан быть даже относительно проективным. Однако нетрудно показать, что таковым является модуль $A/\overline{AI}$ (здесь черта сверху обозначает замыкание). Возникающая задача подъема

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow \text{---} & \downarrow \\ A/\overline{AI} & \longrightarrow & A/I \end{array}$$

заведомо имеет решение, если проекция $A \rightarrow A/I$ допустима или если модуль $A/\overline{AI}$ строго проективен. В общем случае нельзя гарантировать ни первого, ни

¹Пока статья находилась в редакции, появилась к тому же работа [19].

второго. На этом этапе рассуждений, алгебраических в своей основе, гомологических методов оказывается недостаточно и приходится использовать сугубо аналитические средства: применяя одну идею Селиванова, можно показать, что при наличии у модуля A/I свойства аппроксимации из относительной проективности следует, что существует достаточно много морфизмов из модуля $A/\overline{AI}$ в саму алгебру; при этом его можно отождествить с левым идеалом в A и использовать такие левые идеалы, как основные компоненты разложения A . Модули вида $A/\overline{AI}$ обладают прозрачной алгебраической структурой, что позволяет получить достаточную информацию о строении алгебры. (Следует отметить, что именно исследование бипроективных алгебр привело к пониманию того, насколько существенна роль свойства аппроксимации в гомологической теории банаховых алгебр.)

Материал в статье расположен следующим образом. В § 1 вводятся необходимые понятия, в том числе специальный радикал банаховой алгебры, формулируется основная структурная теорема, обсуждаются содержащиеся в ней утверждения и связь с ранее известными результатами, а также намечены основные идеи доказательства. В § 2 содержится описание строения основного модельного примера – тензорной алгебры дуальной пары – и классификация таких алгебр. В § 3 изучаются свойства экстремально локальных модулей – важного частного случая модулей, обладающих единственным неприводимым фактормодулем. В § 4 свойство аппроксимации используется, чтобы сделать решающий переход от относительной проективности к структурным условиям. Там же (теорема 4.6) содержится принадлежащее автору доказательство неопубликованной теоремы Селиванова о факторизации по радикалу для бипроективных алгебр со свойством аппроксимации. В § 5 получено достаточное условие наличия у неприводимого модуля свойства аппроксимации. Доказательство основной структурной теоремы завершается в § 6, а в § 7 рассмотрены конечномерные бипроективные алгебры.

Автор благодарен Ю. В. Селиванову, С. Б. Табалдыеву и А. Я. Хелемскому за плодотворные дискуссии.

§ 1. Структурные теоремы.

Необходимые сведения, формулировки и обсуждение результатов

Проективные банаховы модули. Детальное обсуждение следующих ниже понятий можно найти в [7] и [10]. Пусть A – банахова алгебра, и пусть $\nu: Y \rightarrow Z$ – эпиморфизм (левых, правых или двусторонних) банаховых A -модулей (т. е. морфизм с плотным образом). Он называется *допустимым*, если существует ограниченный (непрерывный) линейный оператор $\sigma: Z \rightarrow Y$ такой, что $\nu\sigma = 1$, и *строгим*, если проекция $Y/\text{Ker } \nu \rightarrow Z$ является изоморфизмом. Очевидно, всякий допустимый эпиморфизм является строгим. Из теоремы об открытом отображении следует, что ν – строгий эпиморфизм тогда и только тогда, когда он сюръективен. Я предпочитаю использовать термин “строгий эпиморфизм” вместо “сюръективный морфизм”, чтобы подчеркнуть общекатегорный характер определений.

Банахов A -модуль X (левый, правый или двусторонний) называется *проективным*, если для любого допустимого эпиморфизма $\nu: Y \rightarrow Z$ и любого морфизма $\psi: X \rightarrow Z$ банаховых A -модулей существует морфизм φ , дополняющий

диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & & Y \\
 & \nearrow \varphi & \downarrow \nu \\
 X & \xrightarrow{\psi} & Z
 \end{array} \quad (1.1)$$

до коммутативной.

Банахов A -модуль X называется *строго проективным*, если для любого строгого эпиморфизма $\nu: Y \rightarrow Z$ и любого морфизма $\psi: X \rightarrow Z$ существует морфизм φ , дополняющий диаграмму (1.1) до коммутативной.

Обозначим унитизацию банаховой алгебры A (результат присоединения единицы) через A_+ и рассмотрим морфизм левых банаховых A -модулей

$$\pi_X: A_+ \hat{\otimes} X \rightarrow X, \quad a \otimes x \mapsto a \cdot x$$

(здесь через $\hat{\otimes}$ обозначено проективное тензорное произведение банаховых пространств). Использование проективного тензорного произведения в разрешении вопросов, связанных с проективностью, основано на следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1.1 [7, теорема III.1.27(IV)]. *Левый банахов A -модуль X проективен тогда и только тогда, когда существует морфизм левых банаховых A -модулей $\rho_X: X \rightarrow A_+ \hat{\otimes} X$, правый обратный к π_X .*

Бипроективные банаховы алгебры. Банахова алгебра A называется *би-проективной*, если A является проективным банаховым A -бимодулем [7]. Следующие утверждения являются основными при исследовании бипроективных банаховых алгебр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 [7, предложения IV.5.4, IV.5.6]. *Пусть A – банахова алгебра.*

(А) *Если банахова алгебра A бипроективна, то $\overline{A^2} = A$.*

(В) *Банахова алгебра A является бипроективной тогда и только тогда, когда существует морфизм банаховых A -бимодулей ρ , правый обратный к*

$$\pi: A \hat{\otimes} A \rightarrow A, \quad a \otimes b \mapsto ab.$$

Далее через $X \hat{\otimes}_A Y$ обозначается проективное тензорное произведение правого банахова A -модуля X и левого банахова A -модуля Y , т. е. факторпространство $X \hat{\otimes} Y$ по замыканию линейной оболочки элементов вида $x \cdot a \otimes y - x \otimes a \cdot y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 [10, теорема 7.1.60(2)]. *Если A – бипроективная банахова алгебра, то для любого левого (правого) банахова A -модуля X левый (правый) банахов модуль $A \hat{\otimes}_A X$ (соответственно, $X \hat{\otimes}_A A$) проективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности рассмотрим случай левого модуля. Обозначим через π_+ очевидное продолжение π на $A_+ \hat{\otimes} A$. Поскольку π_+ является допустимым морфизмом A -бимодулей, существует морфизм A -бимодулей ρ_+ такой, что $\pi_+ \rho_+ = 1$. Тогда

$$\rho_+ \otimes_A 1: A \hat{\otimes}_A X \rightarrow A_+ \hat{\otimes} A \hat{\otimes}_A X$$

является морфизмом левых банаховых A -модулей, удовлетворяющим условиям теоремы 1.1.

Учитывая то, что в силу [7, теорема П.3.17] для любого левого (правого) замкнутого идеала I в банаховой алгебре A имеет место изоморфизмы $A/\overline{AI} \cong A \widehat{\otimes}_A (A_+/I)$ (соответственно, $A/\overline{IA} \cong (A_+/I) \widehat{\otimes}_A A$), получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.4 [4, лемма 1.1]. *Для любого замкнутого левого (правого) идеала I в бипроективной банаховой алгебре левый (правый) банахов модуль $A/\overline{AI}$ (соответственно, $A/\overline{IA}$) проективен.*

В дальнейшем нам понадобится следующее усиление упомянутой выше теоремы П.3.17 из [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Пусть A – банахова алгебра, I – замкнутый модулярный левый идеал в A и X – правый банахов A -модуль. Тогда линейный оператор*

$$\varphi: X \widehat{\otimes}_A (A/I) \rightarrow (\overline{X \cdot A})/(\overline{X \cdot I}),$$

ассоциированный с билинейным оператором $\Phi: (x, a + I) \mapsto x \cdot a + \overline{X \cdot I}$, является изоморфизмом банаховых пространств. Если X является банаховым A -бимодулем, то φ – изоморфизм левых банаховых A -модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что отображение Φ является билинейным, сбалансированным и ограниченным, поэтому φ – корректно определенный ограниченный линейный оператор. Пусть u – правая модулярная единица для I , т.е. $a - au \in I$ для всех $a \in A$. Если $v = \sum_{k=1}^n x_k \otimes_A (a_k + I)$ для некоторых $x_k \in X$ и $a_k \in A$, то

$$v = \sum_{k=1}^n x_k \otimes_A (a_k u + I) = \left(\sum_{k=1}^n x_k \cdot a_k \right) \otimes_A (u + I).$$

Обозначим $\sum_{k=1}^n x_k \cdot a_k$ через y . Если $x \in X$ и $a \in I$, то $x \cdot a \otimes_A (u + I) = x \otimes_A (a + I) = 0$. Поэтому для произвольного $z \in \overline{X \cdot I}$ имеем $z \otimes_A (u + I) = 0$, значит, $v = (y + z) \otimes_A (u + I)$. Тогда

$$\|v\| \leq \inf \{ \|y + z\| \|u + I\| : z \in \overline{X \cdot I} \} \leq \|y + \overline{X \cdot I}\| \|u + I\|.$$

Однако $y + \overline{X \cdot I} = \varphi(v)$, тем самым, $\|v\| \leq \|u + I\| \|\varphi(v)\|$. Поскольку элементы вида $\varphi(v)$ плотны в $(\overline{X \cdot A})/(\overline{X \cdot I})$, отсюда следует, что φ обладает ограниченным обратным.

Если X является бимодулем, то, очевидно, φ – морфизм левых модулей.

Тензорная алгебра дуальной пары. Основными примерами бипроективных банаховых алгебр являются пространства последовательностей c_0 и ℓ_1 с покоординатным умножением, а также L^1 -алгебра и C^* -алгебра компактной группы (см. [7]). Однако они полупросты, а нас интересуют в первую очередь бипроективные алгебры с нетривиальным радикалом.

Дуальной парой называется пара банаховых пространств F и E , снабженная нетривиальным ограниченным билинейным функционалом $\langle \cdot, \cdot \rangle: F \times E \rightarrow \mathbb{C}$. Дуальная пара называется *невыврожденной*, если для любых ненулевых $e \in E$ и $f' \in F$ найдутся $f \in F$ и $e' \in E$ такие, что $\langle f, e \rangle \neq 0$ и $\langle f', e' \rangle \neq 0$. (Обычно требование невырожденности включается в определение, однако вырожденные дуальные пары представляют не меньший интерес.)

Банахово пространство $E \widehat{\otimes} F$, снабженное умножением

$$(e \otimes f) \cdot (e' \otimes f') := \langle f, e' \rangle (e \otimes f'),$$

является банаховой алгеброй и называется *тензорной алгеброй дуальной пары* $(F, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Тензорная алгебра дуальной пары банаховых пространств бипроективна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (Рассуждения те же, что и в невырожденном случае; ср. [4].) Пусть $(F, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – дуальная пара банаховых пространств. Возьмем $e_0 \in E$ и $f_0 \in F$ такие, чтобы $\langle f_0, e_0 \rangle = 1$, и положим

$$\rho: E \widehat{\otimes} F \rightarrow (E \widehat{\otimes} F) \widehat{\otimes} (E \widehat{\otimes} F), \quad e \otimes f \mapsto (e \otimes f_0) \otimes (e_0 \otimes f).$$

Легко видеть, что ρ удовлетворяет условиям утверждения (В) предложения 1.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Если $(F, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – дуальная пара банаховых пространств, то отображение $\tau': E \widehat{\otimes} F \rightarrow \mathcal{B}(E)$, $e \otimes f \mapsto e \circ f$ является непрерывным гомоморфизмом банаховых алгебр (здесь $e \circ f$ обозначает одномерный оператор $e' \mapsto \langle f, e' \rangle e$). Образ τ' может быть отождествлен с банаховой алгеброй $(E \widehat{\otimes} F) / \text{Ker } \tau'$ и обозначается через $\mathcal{N}_F(E)$. Соответствующие элементы $\mathcal{B}(E)$ называются *ядерными операторами* дуальной пары (см. [4] или [7, гл. II, § 2.3]). Если дуальная пара невырождена, то тензорную алгебру можно трактовать как один из возможных бесконечномерных аналогов полной матричной алгебры. В случае, когда хотя бы одно из пространств обладает свойством аппроксимации, алгебра полупроста и изоморфна $\mathcal{N}_F(E)$ [4, лемма 2.1]. Рассмотрим симметричную дуальную пару (E, F) , получаем также антигомоморфизм $\tau'': E \widehat{\otimes} F \rightarrow \mathcal{B}(F)$, образ которого совпадает с $\mathcal{N}_E(F)$.

Подробное исследование строения тензорной алгебры дуальной пары содержится в § 2.

Структурная теорема Селиванова. Теперь можно сформулировать обобщающую во введении теорему Селиванова. В формулировке используется свойство аппроксимации (о нем см. § 4) и следующие стандартные алгебраические понятия. Пусть A – комплексная ассоциативная алгебра. Пересечение всех максимальных модулярных левых идеалов алгебры A называется *радикалом (Джекобсона)* и обозначается через $\text{Rad } A$. Алгебра *полупервична*, если она не содержит нетривиальных нильпотентных двусторонних идеалов. *Правым и левым аннуляторами* множества $S \subset A$ называются множества

$$\text{ran } S := \{a \in A : ba = 0 \ \forall b \in S\},$$

$$\text{lan } S := \{a \in A : ab = 0 \ \forall b \in S\},$$

а *аннулятором* S – множество $\text{ann } S := (\text{ran } S) \cap (\text{lan } S)$. *Примитивный спектр* алгебры A есть множество ее примитивных идеалов, снабженное топологией Джекобсона [11, определение 7.1.4]. В банаховой алгебре A *имеет место спектральный синтез*, если всякий замкнутый двусторонний идеал в A совпадает с пересечением содержащих его примитивных идеалов. (Это понятие неоднократно рассматривалось различными авторами; термин “спектральный синтез”

обычно применяется в случае полупростой коммутативной алгебры [12, определение 39.9]). Будем говорить, что двусторонний идеал в банаховой алгебре A *дополняем*, если он дополняем в A как банахов A -бимодуль.

ТЕОРЕМА 1.8 [5, теорема 4.57] (см. [4] для полупростых алгебр). Пусть A – полупервичная бипроективная банахова алгебра A , обладающая свойством аппроксимации. Пусть $R := \text{Rad } A$, а $(I_\nu)_{\nu \in \Lambda}$ – множество всех минимальных замкнутых двусторонних идеалов в A таких, что $I_\nu \cap R = 0$. Тогда выполнены условия:

- 1) для каждого $\nu \in \Lambda$ существует дуальная пара банаховых пространств такая, что ее тензорная алгебра и идеал I_ν изоморфны как банаховы алгебры;
- 2А) сумма $(I_\nu)_{\nu \in \Lambda}$ и R является прямой;
- 2В) $A/\overline{\bigoplus_\nu I_\nu}$ бипроективна и радикальна;
- 2С) A совпадает с замыканием $\bigoplus_{\nu \in \Lambda} I_\nu \oplus R$;
- 3) I_ν – дополняемый идеал в A для каждого $\nu \in \Lambda$;
- 4А) примитивный спектр A дискретен и каждый примитивный идеал в A имеет вид $\text{lan } I_\nu$;
- 4В) в алгебре A/R имеет место спектральный синтез;
- 5) для каждого $\nu \in \Lambda$ соответствующая дуальная пара невырождена.

Комментарии к теореме. (1) Утверждение о том, что каждый примитивный идеал в A имеет вид $\text{lan } I_\nu$, отсутствует в формулировке теоремы 4.57 из [5], но получено в ходе доказательства. С другой стороны, в формулировке теоремы Селиванова утверждается немного больше, чем в 3):

$$3') A = I_\nu \oplus \text{lan } I_\nu \text{ для всех } \nu.$$

Однако нетрудно вывести 3') из 3) и полупервичности A . Действительно, как видно из следующей леммы, в этом случае дополнительный идеал определяется однозначно и совпадает с его аннулятором.

ЛЕММА 1.9. Если A – полупервичная алгебра и $A = I \oplus J$, где I и J – двусторонние идеалы в A , то $J = \text{ann } I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим проекцию $\psi: A \rightarrow I$, являющуюся морфизмом A -бимодулей и такую, что $\text{Ker } \psi = J$. Заметим, что $\psi(\text{lan } I)$ – двусторонний идеал в A . Если $a, b \in \text{lan } I$, то $\psi(a)\psi(b) = \psi(a\psi(b)) = 0$. Тем самым, $(\psi(\text{lan } I))^2 = 0$. Поскольку A полупервична, то $\psi(\text{lan } I) = 0$, т.е. $\text{lan } I \subset \text{Ker } \psi$. С другой стороны, если $a \in \text{Ker } \psi$ и $b \in I$, то $ab = a\psi(b) = \psi(ab) = 0$, т.е. $a \in \text{lan } I$. Таким образом, $\text{Ker } \psi \subset \text{lan } I$. Итак, $J = \text{lan } I$. Аналогично, $J = \text{ran } I$. Лемма доказана.

(2) До сих пор неизвестно, существуют ли полупервичные бипроективные банаховы алгебры с нетривиальным радикалом. Поэтому утверждения 2В) и 2С) либо устанавливают тривиальность радикала A , либо сводят дальнейшее исследование к изучению радикальных бипроективных алгебр. Также неясно, обязан ли радикал быть дополняемым и, вообще, всякий ли замкнутый двусторонний идеал в A дополняем.

(3) Для произвольной банаховой алгебры из 3) еще не следует наличие спектрального синтеза (контрпримером может служить алгебра из [13]).

Радикалы. В формулировке структурной теоремы для бипроективных алгебр, не являющихся непременно полупервичными, помимо радикала Джекобсона будут использованы еще два вида радикалов.

Двусторонний идеал I называется *первичным*, если для любых левых идеалов I_1 и I_2 из соотношения $I_1 I_2 \subset I$ следует, что либо $I_1 \subset I$, либо $I_2 \subset I$. *Первичный радикал* кольца (он же нижний нильрадикал Бэра) есть пересечение всех его первичных идеалов; см. [11, § 4.4] и [14, т. 2, гл. 26]. Будем обозначать первичный радикал алгебры A через $\mathfrak{B}\text{-Rad } A$. Для нас основным является следующее хорошо известное свойство.

ЛЕММА 1.10. *Всякий нильпотентный односторонний идеал содержится в первичном радикале.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (для определенности – левый) идеал I таков, что $I^n = 0$, а P – первичный идеал. Тогда $I^n \subset P$, следовательно, либо $I \subset P$, либо $I^{n-1} \subset P$. Рассуждая по индукции, получаем, что I содержится в P . Лемма доказана.

Первичный радикал банаховой алгебры совпадает с суммой всех ее нильпотентных идеалов и является замкнутым тогда и только тогда, когда он нильпотентен (см., например, [11, теорема 4.4.11]).

Возвращаясь к теореме 1.8, отметим, что алгебра полупервична тогда и только тогда, когда ее первичный радикал тривиален, так что появление первичного радикала в этом контексте совершенно естественно. В § 2 показано, что первичный радикал тензорной алгебры дуальной пары может быть нетривиален. Однако для построения удовлетворительной структурной теории необходимо сопоставить каждой алгебре радикальный идеал так, чтобы он был тривиальным для тензорной алгебры дуальной пары и достаточно велик для выполнения аналога условия 2C) теоремы 1.8.

Для подмножества S в левом A -модуле X положим

$$\text{ann}_A S := \{a \in A : a \cdot x = 0 \ \forall x \in S\}.$$

Хорошо известно, что радикал Джекобсона совпадает с пересечением всех примитивных идеалов, а каждый примитивный идеал имеет вид $\text{ann}_A(A/J)$ для некоторого максимального модулярного левого идеала в A . Поскольку каждый примитивный идеал является первичным (см., например, [11, теорема 4.1.8(b)]), то $\mathfrak{B}\text{-Rad } A \subset \text{Rad } A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Пусть A – банахова алгебра. Обозначим через $\text{Rad}_l A$ пересечение всех идеалов вида $\text{ann}_A(A/\overline{AJ})$, где J – максимальный модулярный левый идеал в A .

Легко видеть, что $\text{Rad}_l A$ – замкнутый двусторонний идеал в A , содержащийся в $\text{Rad } A$ и включающий в себя $A(\text{Rad } A)$. Отметим, что для любого левого идеала J выполнено равенство

$$\text{ann}_A(A/\overline{AJ}) = \{a \in A : aA \subset \overline{AJ}\}. \quad (1.2)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\text{lan } A \subset \text{Rad}_l A$. Напротив, $\text{gan } A$ может не содержаться целиком в $\text{Rad}_l A$ – это вытекает из предложения 2.1.

ЛЕММА 1.12. Пусть банахова алгебра A такова, что $\overline{A^2} = A$. Если J – модулярный левый идеал в A , то всякая его правая модулярная единица является правой модулярной единицей для левого идеала $\overline{AJ}$, который, тем самым, также модулярен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – правая модулярная единица для J . Тогда

$$ab - abu = a(b - bu) \in AJ$$

для любых $a, b \in A$. Поскольку всякий элемент A аппроксимируется элементами вида $\sum_{i=1}^n a_i b_i$, где $a_i, b_i \in A$, элемент u является правой модулярной единицей для $\overline{AJ}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13. Пусть I – замкнутый двусторонний идеал в банаховой алгебре A , причем $\overline{I^2} = I$. Тогда

$$\text{Rad}_l I \subset I \cap \text{Rad}_l A.$$

ЛЕММА 1.14. Пусть J' – максимальный модулярный левый идеал, а I – двусторонний идеал в банаховой алгебре A такой, что $\overline{IA} = I$. Тогда либо $I \subset J'$, либо $I \cap J'$ есть максимальный модулярный левый идеал в I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левый A -модуль A/J' неприводим. Рассмотрим его так же, как левый I -модуль. Согласно [11, теорема 4.1.6(а)] он является либо аннуляторным, либо неприводимым. В первом случае $IA \subset J'$, следовательно, $I \subset J'$. Во втором случае из неприводимости I -модуля A/J' следует, что аннулятор любого его ненулевого элемента есть максимальный модулярный левый идеал в I . В частности, если u – правая модулярная единица для J' , то это верно для идеала $\text{ann}_l\{u + J'\} = \{a \in I : au \in J'\} = I \cap J'$. Итак, $I \cap J'$ – максимальный модулярный левый идеал в I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.13. Пусть $a \in \text{Rad}_l I$, и пусть J' – максимальный модулярный левый идеал в A . Согласно лемме 1.14 либо $I \subset J'$, либо $J := I \cap J'$ – максимальный модулярный левый идеал в I . В первом случае $a \in I = \overline{I^2} \subset \overline{AJ'}$. В втором случае $\overline{IJ}$ является модулярным левым идеалом в I (в силу леммы 1.12). Пусть $u \in I$ – правая модулярная единица для $\overline{IJ}$, и пусть $b \in A$. Тогда $ab, bu \in I$ и, значит, выполнены включения

$$ab - abu \in \overline{IJ}, \quad abu \in aI.$$

В силу (1.2) из $a \in \text{Rad}_l I$ следует $aI \subset \overline{IJ}$. Тем самым,

$$ab = (ab - abu) + abu \in \overline{IJ} \subset \overline{AJ'}.$$

В силу произвольности b имеем $a \in \text{ann}_A(A/\overline{AJ'})$, а в силу произвольности J' получаем $a \in \text{Rad}_l A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.15. Пусть $\sigma : A \rightarrow B$ – сюръективный морфизм банаховых алгебр. Тогда

$$\sigma(\text{Rad}_l A) \subset \text{Rad}_l B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J – максимальный модулярный левый идеал в B . Тогда $\sigma^{-1}(J)$ является максимальным модулярным левым идеалом в A . Если $a \in \text{Rad}_l A$, то $aA \subset \overline{A\sigma^{-1}(J)}$. Из сюръективности σ следует $\sigma(a)B \subset \overline{BJ}$. Тем самым, $\sigma(a) \in \text{Rad}_l B$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.16. Пусть A – банахова алгебра такая, что $\overline{A^2} = A$. Если $A = I \oplus J$, где I и J – замкнутые двусторонние идеалы в A , то

$$\text{Rad}_l A = \text{Rad}_l I \oplus \text{Rad}_l J.$$

ЛЕММА 1.17. Пусть A – банахова алгебра такая, что $\overline{A^2} = A$ и $A = I \oplus J$, где I и J – замкнутые правые (левые) идеалы в A . Тогда $I = \overline{I\overline{A}}$ и $J = \overline{J\overline{A}}$ ($I = \overline{AI}$ и $J = \overline{AJ}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму для правых идеалов (для левых рассуждения аналогичны). Пусть $\psi: A \rightarrow I$ – проекция, являющаяся морфизмом правых банаховых A -модулей и такая, что $J = \text{Ker } \psi$. Каждый элемент A^2 разлагается в сумму элементов IA и JA . Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ и любого $a \in J$ найдутся $b' \in IA$ и $b'' \in JA$ такие, что $\|b' + b'' - a\| < \varepsilon$. Тогда $\|b'\| = \|\psi(b' + b'' - a)\| < \varepsilon\|\psi\|$. Следовательно, $\|a - b''\| < \varepsilon(1 + \|\psi\|)$. Отсюда получаем $J = \overline{JA}$. Аналогично, $I = \overline{IA}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.16. Очевидно, $\text{Rad}_l I \cap \text{Rad}_l J = 0$. Для $a \in \text{Rad}_l A$ рассмотрим разложение $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in I$ и $a_2 \in J$. Из предложения 1.15 следует, что $a_1 \in \text{Rad}_l I$ и $a_2 \in \text{Rad}_l J$. Тем самым, $\text{Rad}_l A \subset \text{Rad}_l I \oplus \text{Rad}_l J$. В силу леммы 1.17 имеем $I = \overline{AI}$, тем самым, $\overline{I^2} = I$. Поэтому можно применить предложение 1.13, что сразу доставляет $\text{Rad}_l I \subset \text{Rad}_l A$. Аналогично, $\text{Rad}_l J \subset \text{Rad}_l A$.

Структурная теорема для бипроективных банаховых алгебр. Под нерадикальным идеалом понимается идеал, не содержащийся целиком в радикале Джекобсона данной алгебры, а под минимальным замкнутым нерадикальным двусторонним идеалом – минимальный идеал в множестве замкнутых двусторонних нерадикальных идеалов.

ТЕОРЕМА 1.18. Пусть A – бипроективная банахова алгебра. Предположим, что существует замкнутый идеал R_0 в A такой, что $\mathfrak{B}\text{-Rad } A \subset R_0 \subset \text{Rad } A$ и A/R_0 обладает свойством аппроксимации. Пусть $(I_\nu)_{\nu \in \Lambda}$ – множество всех минимальных замкнутых нерадикальных двусторонних идеалов в A . Тогда:

- 1) для каждого $\nu \in \Lambda$ существует дуальная пара банаховых пространств такая, что ее тензорная алгебра и идеал I_ν изоморфны как банаховы алгебры;
- 2А) сумма $(I_\nu)_{\nu \in \Lambda}$ и $(\text{Rad}_l A)A$ является прямой;
- 2В) $A/\bigoplus_\nu I_\nu$ бипроективна и радикальна;
- 3) I_ν – дополняемый идеал в A для каждого $\nu \in \Lambda$;
- 4А) примитивный спектр A дискретен и каждый примитивный идеал A имеет вид $(\text{lan } I_\nu)A \oplus \text{Rad}_l I_\nu$.

Если, кроме того, алгебра $(\text{Rad}_l A)A$ полупервична и A обладает свойством аппроксимации, то:

- 2С) A есть замыкание прямой суммы всех I_ν и $(\text{Rad}_l A)A$;
- 4В) в алгебре $A/\text{Rad } A$ имеет место спектральный синтез.

Комментарии к теореме. (1) В случае, когда бипроективная алгебра, удовлетворяющая условиям теоремы 1.18, не является полупервичной, радикал Джекобсона уже не обязан иметь тривиальное пересечение с идеалом I_ν , однако $(\text{Rad}_l A)A \cap I_\nu = 0$. Это следует из свойств радикала тензорной алгебры

дуальной пары (см. предложение 2.1 и лемму 2.2). Именно этим объясняется появление в теореме идеала $(\text{Rad}_l A)A$.

(2) Нетрудно показать, что в случае полупервичной алгебры минимальные замкнутые нерадикальные двусторонние идеалы – это в точности минимальные замкнутые двусторонние идеалы, имеющие тривиальное пересечение с R . Так что в этом отношении условия теорем 1.8 и 1.18 совпадают.

(3) Хотя лемма 1.9 при отсутствии полупервичности не применима, тем не менее, дополнительный идеал к I_ν определяется однозначно. Это следует из леммы 1.17 и следующей леммы о дополняемых идеалах. В обоих предполагается только то, что $\overline{A^2} = A$.

ЛЕММА 1.19. Пусть A – банахова алгебра такая, что $\overline{A^2} = A$, и пусть I , J – замкнутые двусторонние идеалы в A такие, что $A = I \oplus J$. Тогда

$$J = (\text{lan } I)\overline{A} = \overline{A}(\text{ran } I).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим проекцию $\psi: A \rightarrow I$, являющуюся морфизмом A -бимодулей и такую, что $\text{Ker } \psi = J$. Если $a \in \text{lan } I$ и $b \in A$, то $\psi(ab) = a\psi(b) = 0$. Следовательно, $(\text{lan } I)\overline{A} \subset J$. С другой стороны, если $a \in J$, то для любого $b \in I$ имеем $ab = a\psi(b) = \psi(ab) = 0$, т. е. $a \in \text{lan } I$. Таким образом, $J \subset \text{lan } I$. В силу леммы 1.17 имеем $\overline{JA} = J$. Поэтому $J \subset (\text{lan } I)\overline{A}$ и, значит, $J = (\text{lan } I)\overline{A}$. Аналогично получаем $J = \overline{A}(\text{ran } I)$.

(4) Теорема 1.8 не является непосредственным следствием теоремы 1.18. Если A удовлетворяет условиям теоремы 1.8 (в частности, полупервична), то всякий двусторонний идеал в A также является полупервичной алгеброй, в частности это так для $(\text{Rad}_l A)A$. Кроме того, в этом случае $\mathfrak{B}\text{-Rad } A = 0$ и, значит, оба условия о свойстве аппроксимации совпадают, поэтому можно применить теорему 1.18, а из лемм 1.9 и 1.19 получить $(\text{lan } I_\nu)\overline{A} = \text{lan } I_\nu$. Однако требуется доказать более сильное, чем 2А) из теоремы 1.18, равенство $R \cap (\bigoplus_\nu I_\nu) = 0$ (см. [5, теорема 4.57]). Более того, в [5] фактически показано, что $R \cap (\bigoplus_\nu I_\nu) = 0$.

(5) Доказательство теоремы 1.18 довольно длинно и включает много технических деталей. Окончание рассуждений содержится в § 6, при этом используются почти все предыдущие результаты. Ниже приведены основные идеи доказательства утверждений 1) и 3).

Если идемпотент $p \in A$ удовлетворяет условию $pAp = \mathbb{C}p$, то возможно определить билинейный оператор $\langle \cdot, \cdot \rangle: pA \times Ap \rightarrow \mathbb{C}$. Тем самым мы получаем дуальную пару банаховых пространств, тензорная алгебра которой в итоге оказывается изоморфной идеалу $\overline{ApA}$. Такой идемпотент возникает, если найден правый обратный морфизм к проекции $\sigma: A \rightarrow X$, где X – левый модуль, хотя и не обязательно неприводимый, как в полупервичном случае, но близкий к неприводимому по свойствам, а именно $X = A/\overline{AI}$ для некоторого максимального модулярного левого идеала I . Хотя для любого замкнутого левого идеала I в бипроективной банаховой алгебре A левый банахов модуль $A/\overline{AI}$ проективен, этого недостаточно для наших целей, так как в общей ситуации нет оснований полагать, что проекция $A \rightarrow A/\overline{AI}$ допустима. Для преодоления этой трудности используется предположение о наличии у A/R_0 свойства аппроксимации. А именно, если I – максимальный модулярный левый идеал, то, используя проективность $A/\overline{AI}$, можно вывести существование морфизма левых модулей $A/\overline{AI} \rightarrow A$, образ которого не содержится целиком в первичном радикале, что влечет существование идемпотента с требуемыми свойствами. Для

того чтобы показать изоморфность тензорной алгебры дуальной пары и $\overline{ApA}$, необходимо использовать наличие свойства аппроксимации у пространства Ap . Последнее следует из существования нетривиального морфизма левых модулей $A/I \rightarrow A/R_0$; тогда A/I изоморфен прямому слагаемому в A/R_0 и, значит, обладает свойством аппроксимации. Доказательство дополняемости идеала $\overline{ApA}$ в A уже непосредственно использует расщепляющий морфизм $\rho: A \rightarrow A \hat{\otimes} A$. Именно, можно показать (опять же используя свойство аппроксимации), что существует морфизм φ такой, что композиция

$$A \xrightarrow{\rho} A \hat{\otimes} A \xrightarrow{\varphi} Ap \hat{\otimes} pA \rightarrow \overline{ApA}$$

будет искомой проекцией.

§ 2. Основные свойства тензорных алгебр дуальных пар

Для данной дуальной пары банаховых пространств $(F, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ рассмотрим E и F как левый и правый банаховы $(E \hat{\otimes} F)$ -модули относительно операций

$$(e \otimes f) \cdot e' := \langle f, e' \rangle e, \quad f' \cdot (e \otimes f) := \langle f', e \rangle f.$$

Для дуальной пары $(F, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ положим

$$\begin{aligned} E^\perp &:= \{f \in F : \langle f, E \rangle = 0\}, & F^\perp &:= \{e \in E : \langle F, e \rangle = 0\}, \\ \tilde{E} &:= E/F^\perp, & \tilde{F} &:= F/E^\perp. \end{aligned}$$

Заметим, что $(\tilde{F}, \tilde{E})$ является дуальной парой относительно естественно определенной двойственности, которую также обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\begin{aligned} \tau: E \hat{\otimes} F &\rightarrow \mathcal{B}(\tilde{E}), & e \otimes f &\mapsto (e + F^\perp) \circ (f + E^\perp), \\ \tau': E \hat{\otimes} F &\rightarrow \mathcal{B}(E), & e \otimes f &\mapsto e \circ f, \end{aligned} \quad (2.1)$$

а также антигомоморфизм

$$\tau'': E \hat{\otimes} F \rightarrow \mathcal{B}(F), \quad e \otimes f \mapsto f \circ e \quad (2.2)$$

(ср. с замечанием 1.7). Для $f \in F$, $e \in E$ и $a \in E \hat{\otimes} F$ выполнены равенства

$$[\tau'(a)](e) = a \cdot e, \quad [\tau''(a)](f) = f \cdot a, \quad \langle f \cdot a, e \rangle = \langle f, a \cdot e \rangle. \quad (2.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $A = E \hat{\otimes} F$. Тогда всякий нерадикальный замкнутый двусторонний идеал совпадает с A ,

$$\text{Rad } A = \mathfrak{B}\text{-Rad } A = \text{Ker } \tau, \quad \text{Rad}_l A = \text{lan } A = \text{Ker } \tau', \quad \text{Ker } \tau'' = \text{ran } A.$$

ЛЕММА 2.2. $\text{Ker } \tau = \{a : AaA = 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes f_n \in \text{Ker } \tau$, т. е. для каждого $e \in E$ выполнено $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n, e \rangle e_n \in F^\perp$. Следовательно,

$$(e \otimes f)a(e' \otimes f') = \left\langle f, \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n, e' \rangle e_n \right\rangle e \otimes f' = 0$$

для любых $e, e' \in E$, $f, f' \in F$. Поскольку линейная оболочка элементарных тензоров плотна в A , получаем $A(\text{Ker } \tau)A = 0$.

С другой стороны, пусть $a \in A$ таков, что $AaA = 0$. Тогда для произвольных e, e', f, f' имеем $(e \otimes f)a(e' \otimes f') = 0$. Тем самым, $\langle f, a \cdot e' \rangle = 0$, а значит, $\tau(a)(e' + F^\perp) = 0$, т. е. $a \in \text{Ker } \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.1. Из леммы 2.2 следует, что $\text{Ker } \tau$ – нильпотентный идеал, следовательно, в силу леммы 1.10 имеет место включение $\text{Ker } \tau \subset \mathfrak{B}\text{-Rad } A$. С другой стороны, легко видеть, что $\tau: A \rightarrow \mathcal{B}(\bar{E})$ является неприводимым представлением. Тем самым, $\text{Rad } A \subset \text{Ker } \tau$. Итак, $\text{Ker } \tau = \text{Rad } A$.

Пусть J – нерадикальный замкнутый двусторонний идеал в A . Тогда найдется $a \in J \setminus \text{Ker } \tau$. Тем самым, существуют $e \in E$ и $f \in F$ такие, что $\langle f, a \cdot e \rangle = 1$. Представим a в виде абсолютно сходящегося ряда: $a = \sum_n e_n \otimes f_n$. Тогда для любых $e' \in E$ и $f' \in F$ имеем

$$(e' \otimes f)a(e \otimes f') = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \langle f_n, e \rangle e' \otimes f' = \langle f, a \cdot e \rangle e' \otimes f' = e' \otimes f'.$$

Стало быть, $e' \otimes f' \in J$. Отсюда следует $J = A$.

Из (1.2) следует, что $\text{lan } A \subset \text{Rad}_l A$. Чтобы доказать $\text{lan } A \supset \text{Rad}_l A$, достаточно проверить, что $a \cdot e = 0$ для любых $a \in \text{Rad}_l A$ и $e \in E$. Если $e \in F^\perp$, это очевидно. Предположим, что $e \notin F^\perp$. Тогда $J := \{b \in A: b \cdot e \in F^\perp\}$ является максимальным модулярным левым идеалом в A . В силу определения $\text{Rad}_l A$ имеем $aA \subset \bar{A}J$. Однако если $c \in A$ и $b \in J$, то $cb \cdot e \in c \cdot F^\perp = 0$. Следовательно, $aA \cdot e = 0$. Поскольку $e \notin F^\perp$, найдется $f \in F$ такой, что $\langle f, e \rangle = 1$. В силу доказанного выше $a \cdot e = a(e \otimes f) \cdot e = 0$.

Пусть $a = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes f_n \in \text{Ker } \tau'$. Тогда для любых $e \in E$ и $f \in F$ имеем

$$a(e \otimes f) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n, e \rangle e_n \otimes f = 0.$$

Следовательно, $a \in \text{lan } A$. Напротив, если $a \in \text{lan } A$, то при данном $f \neq 0$ и всех $e \in E$ выполнено $a \cdot e \otimes f = a(e \otimes f) = 0$, тем самым, $a \in \text{Ker } \tau'$. Равенство $\text{Ker } \tau'' = \text{lan } A$ доказывается аналогично.

Предложение 2.1 свидетельствует о важном для нас факте: бипроективные банаховы алгебры не исчерпываются полупервичными. Действительно, если дуальная пара $(F, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ вырождена, то либо $E^\perp \neq 0$, либо $F^\perp \neq 0$. Пусть для определенности $F^\perp \neq 0$. Тогда $e \otimes f \in \text{Ker } \tau$ для всяких отличных от нуля элементов $e \in F^\perp$ и $f \in F$. Итак, тензорная алгебра нетривиальной вырожденной дуальной пары бипроективна, но не полупервична. Заметим, далее, что даже тогда, когда дуальная пара невырождена, $E \hat{\otimes} F$ может обладать нетривиальным первичным радикалом. Действительно, в этом случае согласно [8, лемма 2.1.17] имеем

$$\text{Ker } \tau' = \text{lan}(E \hat{\otimes} F) = \text{ran}(E \hat{\otimes} F).$$

Если E или F обладает свойством аппроксимации (см. §4), то выполнено $\text{Ker } \tau' = 0$ [4, лемма 2.1]. Однако в общем случае это не так: для дуальной пары, заданной естественной двойственностью между E и E^* , равенство

$\text{Ker } \tau' = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда E обладает свойством аппроксимации [17, теорема 5.6]. Таким образом, при отсутствии у E свойства аппроксимации имеем $\mathfrak{B}\text{-Rad}(E \widehat{\otimes} E^*) \neq 0$.

Заметим также, что для тензорной алгебры радикал не всегда совпадает с $\text{Rad}_l A$. Действительно, если $F^\perp \neq 0$, то элемент $e \otimes f$, где $e \in F^\perp$, $e \neq 0$ и $f \notin E^\perp$, не содержится в $\text{lan } A$, а значит, и в $\text{Rad}_l A$. С другой стороны, $e \otimes f \in \text{Ker } \tau = \text{Rad } A$.

Пусть $(F_1, E_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ и $(F_2, E_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ – дуальные пары банаховых пространств. Будем называть их *изоморфными*, если существуют изоморфизмы банаховых пространств $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ и $\psi: F_1 \rightarrow F_2$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_1 \times E_1 & \xrightarrow{\psi \times \varphi} & F_2 \times E_2 \\ & \searrow \langle \cdot, \cdot \rangle_1 & \swarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_2 \\ & \mathbb{C} & \end{array} \quad (2.4)$$

коммутативна.

ТЕОРЕМА 2.3. *Дуальные пары банаховых пространств изоморфны тогда и только тогда, когда их тензорные алгебры топологически изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть дуальные пары банаховых пространств $(F_1, E_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ и $(F_2, E_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ таковы, что существует топологический изоморфизм $\alpha: E_1 \widehat{\otimes} F_1 \rightarrow E_2 \widehat{\otimes} F_2$ банаховых алгебр. Для $i = 1, 2$ рассмотрим отображения $\tau'_i: E_i \widehat{\otimes} F_i \rightarrow \mathcal{N}_{F_i}(E_i)$ и $\tau''_i: E_i \widehat{\otimes} F_i \rightarrow \mathcal{N}_{E_i}(F_i)$, заданные формулами (2.1) и (2.2). В силу предложения 2.1 существуют топологические изоморфизмы банаховых алгебр $\beta: \mathcal{N}_{F_1}(E_1) \rightarrow \mathcal{N}_{F_2}(E_2)$ и $\gamma: \mathcal{N}_{E_1}(F_1) \rightarrow \mathcal{N}_{E_2}(F_2)$ такие, что

$$\tau'_2 \alpha = \beta \tau'_1, \quad \tau''_2 \alpha = \gamma \tau''_1. \quad (2.5)$$

Выберем $e_1 \in E_1$ и $f_1 \in F_1$ такие, что $\langle f_1, e_1 \rangle_1 = 1$. Тогда $p := e_1 \circ f_1$ – идемпотент в $\mathcal{N}_{F_1}(E_1)$, следовательно, $\beta(p)$ – идемпотент в $\mathcal{N}_{F_2}(E_2)$. Поскольку $\beta(p)$ – ядерный оператор, он является проектором на конечномерное подпространство. Тогда найдется одномерный проектор q такой, что $q\beta(p) = \beta(p)q = q$. Так как $\mathcal{N}_{F_2}(E_2)$ является левым идеалом в $\mathcal{B}(E_2)$, проектор q содержится в $\mathcal{N}_{F_2}(E_2)$. Легко показать, что найдутся $e_2 \in E_2$ и $f_2 \in F_2$ такие, что $e_2 \circ f_2 = q$. Очевидно, $\langle f_2, e_2 \rangle_2 = 1$. Тогда $\beta^{-1}(q)$ является идемпотентом и $p\beta^{-1}(q)p = \beta^{-1}(q)$. С другой стороны, $p\beta^{-1}(q)p \in \mathbb{C}p$. Следовательно, $\beta(p) = q$. Аналогичные рассуждения показывают, что найдутся $e'_2 \in E_2$ и $f'_2 \in F_2$ такие, что $\langle f'_2, e'_2 \rangle_2 = 1$ и $\gamma(f_1 \circ e_1) = f'_2 \circ e'_2$. Из (2.5) вытекает, что образы $\beta(e_1 \circ f_1)$ и $\gamma(f_1 \circ e_1)$ при отображениях

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{F_2}(E_2) &\rightarrow \mathcal{N}_{\tilde{F}_2}(\tilde{E}_2), & e \circ f &\mapsto (e + F_2^\perp) \circ (f + E_2^\perp), \\ \mathcal{N}_{E_2}(F_2) &\rightarrow \mathcal{N}_{\tilde{E}_2}(\tilde{F}_2), & f' \circ e' &\mapsto (e' + F_2^\perp) \circ (f' + E_2^\perp), \end{aligned}$$

совпадают, т. е. $(e_2 + F_2^\perp) \circ (f_2 + E_2^\perp) = (e'_2 + F_2^\perp) \circ (f'_2 + E_2^\perp)$. Применяя этот оператор к $e_2 + F_2^\perp$, получаем $e_2 + F_2^\perp = \langle f'_2, e_2 \rangle_2 e'_2 + F_2^\perp$. Поскольку $e_2 \notin F_2^\perp$, это означает, что $\langle f'_2, e_2 \rangle_2 \neq 0$. Заменяя, если нужно, e'_2 на $\langle f'_2, e_2 \rangle_2^{-1} e'_2$, а f'_2 на $\langle f'_2, e_2 \rangle_2^{-1} f'_2$, мы можем полагать, что $\langle f'_2, e_2 \rangle_2 = 1$.

Поскольку для каждого $e \in E_1$

$$\beta^{-1}[[\beta(e \circ f_1)](e_2) \circ f_2](e_1) = \beta^{-1}[\beta(e \circ f_1)q](e_1) = [(e \circ f_1)p](e_1) = e,$$

оператор $e' \mapsto [\beta^{-1}(e' \circ f_2)](e_1)$ является левым обратным к

$$\varphi: E_1 \rightarrow E_2, \quad e \mapsto [\beta(e \circ f_1)](e_2).$$

Так же проверяется, что он является правым обратным к φ . Тем самым, φ – изоморфизм банаховых пространств. Такими рассуждениями устанавливается, что

$$\psi: F_1 \rightarrow F_2, \quad f \mapsto [\gamma(f \circ e_1)](f'_2),$$

является изоморфизмом банаховых пространств. В силу (2.5) для $f \in F_1$ и $e \in E_1$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(e) &= [\beta\tau'_1(e \otimes f_1)](e_2) = [\tau'_2\alpha(e \otimes f_1)](e_2), \\ \psi(f) &= [\gamma\tau''_1(e_1 \otimes f)](f'_2) = [\tau''_2\alpha(e_1 \otimes f)](f'_2). \end{aligned}$$

Тогда, учитывая (2.3), получаем

$$\begin{aligned} \langle \psi(f), \varphi(e) \rangle_2 &= \langle \tau''_2\alpha(e_1 \otimes f)(f'_2), [\tau'_2\alpha(e \otimes f_1)](e_2) \rangle_2 \\ &= \langle f'_2, [\tau'_2\alpha(e_1 \otimes f)\tau'_2\alpha(e \otimes f_1)](e_2) \rangle_2 = \langle f, e \rangle_1 \langle f'_2, [e_2 \circ f_2](e_2) \rangle_2 \\ &= \langle f, e \rangle_1 \langle f'_2, e_2 \rangle_2 = \langle f, e \rangle_1, \end{aligned}$$

что и означает коммутативность (2.4).

§ 3. Экстремально локальные модули и идемпотенты

Модуль над кольцом называется *локальным*, если он содержит наибольший собственный подмодуль, фактормодуль по которому неприводим. Ниже будет показано, что для всякой дуальной пары банаховых пространств $(F, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ левый банахов $(E \hat{\otimes} F)$ -модуль E не только является локальным, но и удовлетворяет более сильному условию, играющему ключевую роль в дальнейшем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Левый модуль X над алгеброй A назовем *экстремально локальным*, если X содержит наибольший собственный подмодуль Y такой, что $A \cdot Y = 0$ и X/Y неприводим. Будем называть идемпотент $p \in A$ *экстремально локальным*, если Ap является экстремально локальным левым A -модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Предположим, что $(F, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – дуальная пара банаховых пространств.

(А) Левый $(E \hat{\otimes} F)$ -модуль E экстремально локален, причем $F^\perp$ является его наибольшим собственным подмодулем.

(В) Если $e_0 \in E$ и $f_0 \in F$ таковы, что $\langle f_0, e_0 \rangle = 1$, то $e_0 \otimes f_0$ – идемпотент в $E \hat{\otimes} F$ такой, что левый банахов $(E \hat{\otimes} F)$ -модуль $(E \hat{\otimes} F)(e_0 \otimes f_0)$ топологически изоморфен E и, тем самым, $e_0 \otimes f_0$ экстремально локален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (А) Легко видеть, что модуль $E/F^\perp$ неприводим. Пусть Y – подмодуль E , не содержащийся целиком в $F^\perp$, т. е. существует $e_0 \in Y \setminus F^\perp$. Тогда найдется $f_0 \in F$ такой, что $\langle f_0, e_0 \rangle = 1$. Поэтому для любого $e \in E$

имеем $(e \otimes f_0) \cdot e_0 = e$. Тем самым, $Y = E$, и, следовательно, $F^\perp$ – наибольший собственный подмодуль E . Очевидно, что умножение на $F^\perp$ тривиально и, значит, E экстремально локален.

(В) Ясно, что $e_0 \otimes f_0$ – идемпотент. Рассмотрим отображение $\varkappa: E \rightarrow E \widehat{\otimes} F$, $e \mapsto e \otimes f_0$. Легко видеть, что $\varkappa$ – инъективный морфизм левых банаховых $(E \widehat{\otimes} F)$ -модулей. Так как любой элемент $(E \widehat{\otimes} F)(e_0 \otimes f_0)$ представляется в виде абсолютно сходящегося ряда $\sum_i (e_i \otimes f_i)(e_0 \otimes f_0)$, образ $\varkappa$ совпадает с $(E \widehat{\otimes} F)(e_0 \otimes f_0)$. Поскольку последнее подпространство замкнуто, в силу теоремы Банаха об обратном операторе коограничение $\varkappa$ на $(E \widehat{\otimes} F)(e_0 \otimes f_0)$ есть топологический изоморфизм банаховых модулей. Предложение доказано.

Как было отмечено во введении, при исследовании строения бипроективных алгебр основную роль играют проекции $A/\overline{AI} \rightarrow A/I$, где I – максимальный модулярный левый идеал в A .

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть I – максимальный модулярный левый идеал в такой банаховой алгебре A , что $\overline{A^2} = A$. Тогда модуль $A/\overline{AI}$ экстремально локален, причем $I/\overline{AI}$ является его наибольшим собственным подмодулем.*

ЛЕММА 3.4. *Пусть J и J' – левые идеалы в произвольной банаховой алгебре A , причем J замкнут и модулярен. Если существует правая модулярная единица для J , расстояние от которой до $J + J'$ меньше 1, то существует правая модулярная единица для J , принадлежащая J' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – правая модулярная единица для J , удовлетворяющая указанному условию. Рассмотрим $a \in J + J'$ такой, что $\|u - a\| < 1$, и положим $b := u - a$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ абсолютно сходится в A_+ . Обозначим его сумму через c . При этом

$$ca = c(u - b) = u + \sum_{n=0}^{\infty} (b^{n+1}u - b^{n+1}).$$

Поскольку $b^{n+1}u - b^{n+1} \in J$, получаем отсюда $ca - u \in J$. Далее, $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in J$ и $a_2 \in J'$. Поэтому $ca_2 - u \in J$.

Если $d \in A$, то $d(ca_2 - u) \in J$ и $du - d \in J$. Поэтому

$$dca_2 - d = (dca_2 - du) + (du - d) \in J.$$

Это означает, что ca_2 – правая модулярная единица для J . С другой стороны, по построению имеем $ca_2 \in J'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. Пусть $X = A/\overline{AI}$ и $Y = I/\overline{AI}$. Очевидно, что $AY = 0$. Заметим, что X/Y неприводим, так как

$$X/Y = (A/\overline{AI})/(I/\overline{AI}) \cong A/I.$$

Осталось показать, что Y – наибольший собственный подмодуль в X . Предположим, что Z – подмодуль в X и $Z \not\subseteq Y$. Поскольку Y максимален, то $Y + Z = X$. Обозначим через I' прообраз Z при проекции $A \rightarrow X$. Тогда I' – левый идеал в A и $I + I' = A$. В силу леммы 3.4 существует правая модулярная единица u для I , содержащаяся в I' . Согласно лемме 1.12 имеем, что u является правой модулярной единицей для $\overline{AI}$, т.е. $au - a \in \overline{AI}$ для каждого

$a \in A$. Поскольку $u \in I'$ и $\overline{AI} \subset I'$, получаем $a = au - (au - a) \in I'$. Тем самым, $I' = A$, и, следовательно, $Z = X$. Это означает, что Y – наибольший собственный подмодуль в X .

Следующая теорема и следствие из нее являются усилениями классической леммы Брауэра [16, § 3.4, предложение 1].

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть A – алгебра (не обязательно банахова), X – экстремально локальный левый A -модуль, и пусть $\chi: X \rightarrow A$ – морфизм левых A -модулей такой, что $\chi(X) \not\subset \mathfrak{B}\text{-Rad } A$. Тогда левый идеал $\chi(X)$ имеет вид Ap для некоторого экстремально локального идемпотента $p \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y – наибольший подмодуль в X . Положим $K = \chi(X)$ и $L = \chi(Y)$. Тогда L – наибольший собственный подмодуль в K , а K/L неприводим. Из $AY = 0$ следует $AL = 0$, в частности $L^2 = 0$. Поскольку LK – левый идеал в A , то либо $LK = K$, либо $LK \subset L$. Первое невозможно, так как в этом случае $K = LK = L^2K = 0$. Второе означает, что L является двусторонним идеалом в K .

Заметим, что существует $k \in K$ такой, что $Kk \not\subset L$. Действительно, в противном случае $K^2 \subset L$. Так как $L^2 = 0$, левый идеал K является нильпотентным. Следовательно, согласно лемме 1.10 идеал K содержится в $\mathfrak{B}\text{-Rad } A$, что противоречит сделанному предположению.

Из $Kk \not\subset L$ следует, что $Kk = K$. Стало быть, существует $d \in K$ такой, что $dk = k$. Если $d \in L$, то $k \in L$, следовательно, $K \subset L$, что неверно. Поэтому $d \in K \setminus L$. Далее, $(d^2 - d)k = 0$, т.е. $(d^2 - d)$ принадлежит левому идеалу $\text{lan}\{k\} \cap K$. Поскольку L – наибольший в K , то либо $\text{lan}\{k\} \cap K = K$, либо $\text{lan}\{k\} \cap K \subset L$. Однако первое противоречит $Kk = K$. Второе означает, что $d^2 - d \in L$, т.е. d является идемпотентом по модулю L . Согласно [14, т. 2, предложение 18.21] идемпотент может быть поднят по модулю любого левого нильидеала в унитарном кольце, однако приведенное в этой работе доказательство пригодно и для кольца без единицы. Поэтому d может быть поднят в K по модулю L до идемпотента p , т.е. существует $p \in K$ такой, что $p^2 = p$ и $p - d \in L$. Поскольку $d \notin L$, идеал L не содержит p . В силу того, что L – наибольший в K , имеем $K = Ap$. Осталось заметить, что по построению K экстремально локализован.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Всякий экстремально локальный левый идеал в алгебре A (не обязательно банаховой), не содержащийся в $\mathfrak{B}\text{-Rad } A$, имеет вид Ap для некоторого идемпотента p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем теорему 3.5 к вложению экстремально локального левого идеала в A .

Свойства экстремально локальных идемпотентов. Унитарное кольцо (в частности, алгебра) называется *локальным*, если его факторкольцо по радикалу является телом (см., например, [15, § 7.1] и [16, § 3.7, предложение 1]).

Далее A – некоторая банахова алгебра. Обозначим множество морфизмов между левыми банаховыми A -модулями X и Y через ${}_A\text{h}(X, Y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пусть P – локальный строго проективный левый A -модуль. Тогда алгебра ${}_A\text{h}(P, P)$ локальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [15, теорема 7.1.1] для локальности кольца с единицей необходимо и достаточно, чтобы множество его необратимых элементов было замкнуто относительно сложения. Проверим это свойство.

Очевидно, что всякий обратимый элемент $\psi \in {}_A\mathbf{h}(P, P)$ алгебры сюръективен. Заметим, что верно и обратное. Действительно, если ψ сюръективен, то в силу того, что P строго проективен, ψ обладает правым обратным. В частности, $\text{Ker } \psi$ обладает модульным дополнением Q в P . Поскольку P содержит наибольший собственный подмодуль, то либо $Q = 0$, либо $\text{Ker } \psi = 0$. Так как первое невозможно, то ψ биективен и тем самым обратим.

Пусть Y – наибольший собственный подмодуль в P . Если $\psi_1, \psi_2 \in {}_A\mathbf{h}(P, P)$ необратимы, то $\text{Im } \psi_1$ и $\text{Im } \psi_2$ содержатся в Y . Тогда

$$\text{Im}(\psi_1 + \psi_2) \subset \text{Im } \psi_1 + \text{Im } \psi_2 \subset Y,$$

следовательно, $\psi_1 + \psi_2$ необратим. Это означает, что ${}_A\mathbf{h}(P, P)$ локальна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть p – идемпотент в A . Тогда банаховы алгебры ${}_A\mathbf{h}(Ap, Ap)$ и pAp топологически антиизоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [16, §3.4, лемма 1] отображение $\alpha: a \mapsto m_a$, где $m_a(b) = ba$ для всех $b \in A_+p$, является антиизоморфизмом между кольцом pA_+p и кольцом эндоморфизмов модуля A_+p . Отсюда видно, что все эндоморфизмы A_+p непрерывны и α является топологическим антиизоморфизмом банаховых алгебр pA_+p и ${}_A\mathbf{h}(A_+p, A_+p)$. Так как $pA_+p = pAp$ и $Ap = A_+p$, банаховы алгебры pAp и ${}_A\mathbf{h}(Ap, Ap)$ топологически антиизоморфны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Пусть A – банахова алгебра, и пусть $p \in A$ – экстремально локальный идемпотент. Тогда $pAp = \mathbb{C}p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Гельфанда–Мазура [10, теорема 2.1.17] всякое банахово тело изоморфно $\mathbb{C}$. Так как Ap дополняем как левый идеал в строго проективном модуле A_+ , он сам строго проективен. Поскольку $\mathbb{C}p \subset pAp$, в силу предложений 3.7 и 3.8 достаточно показать, что радикал ${}_A\mathbf{h}(Ap, Ap)$ тривиален. Так как унитарная алгебра ${}_A\mathbf{h}(Ap, Ap)$ локальна, ее радикал совпадает со множеством необратимых элементов. Как было указано в доказательстве предложения 3.7, необратимые элементы ${}_A\mathbf{h}(Ap, Ap)$ суть в точности несюръективные морфизмы. Если Y – наибольший собственный подмодуль в Ap , а $\psi \in {}_A\mathbf{h}(Ap, Ap)$ не является сюръективным, то $\psi(Ap) \subset Y$. Если $a \in Ap$, то в силу определения экстремально локального модуля получаем $\psi(a) = \psi(ap) = a\psi(p) = 0$. Итак, $\psi = 0$ для любого ψ из радикала.

Напомним, что идемпотенты p_1 и p_2 называются эквивалентными, если найдутся $u, v \in A$ такие, что $p_1 = uv$ и $p_2 = vu$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Если экстремально локальные идемпотенты p_1 и p_2 таковы, что $p_1Ap_2 \neq 0$, то они эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K_i = Ap_i$, и пусть L_i – наибольший собственный подмодуль в K_i , $i = 1, 2$. Согласно [16, §3.4, лемма 1] отображение $\alpha: a \mapsto m_a$, где $m_a(b) = ba$ для всех $b \in K_1$, является изоморфизмом аддитивных групп между p_1Ap_2 и множеством морфизмов из K_1 в K_2 . Тогда все морфизмы непрерывны и α является изоморфизмом банаховых пространств p_1Ap_2 и ${}_A\mathbf{h}(K_1, K_2)$.

Если $\psi \in {}_A\text{h}(K_1, K_2)$ не является сюръективным, то $\psi(K_1) \subset L_2$, следовательно, для любого $k \in K_1$ имеем $\psi(k) = \psi(kp_1) = k\psi(p_1) = 0$, т. е. $\psi = 0$.

Поскольку $p_1Ap_2 \neq 0$, существует сюръективный $\psi \in {}_A\text{h}(K_1, K_2)$. Так как $p_2 \notin L_2$, то $\psi(L_1) \neq K_2$ и, значит, $\psi(L_1) \subset L_2$. В силу того, что K_2 строго проективен, ψ обладает правым обратным, образ которого не может целиком содержаться в L_1 . Тем самым, ψ является биективным. Согласно [16, § 3.4, предложение 3] это возможно только тогда, когда p_1 и p_2 эквивалентны. Противоречие.

ЛЕММА 3.11. *Если идемпотенты p_1 и p_2 эквивалентны, то $Ap_1A = Ap_2A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u, v \in A$ таковы, что $p_1 = uv$ и $p_2 = vu$. Тогда $p_2 = vuvv = vp_1u \in Ap_1A$. Аналогично, $p_1 \in Ap_2A$. Поэтому $Ap_1A = Ap_2A$.

Теперь можно сделать первый шаг к доказательству утверждения 1) из теоремы 1.18. Пусть A – банахова алгебра, и пусть $p \in A$ – экстремально локальный идемпотент. Положим

$$E := Ap, \quad F := pA. \quad (3.1)$$

В силу предложения 3.9 для $f \in F$ и $e \in E$ существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $fe = \lambda p$. Обозначим λ через $\langle f, e \rangle$. Легко видеть, что $\langle \cdot, \cdot \rangle: F \times E \rightarrow \mathbb{C}$ является ограниченным билинейным функционалом, причем нетривиальным, так как $\langle p, p \rangle = 1$. Итак, $(F, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ является дуальной парой банаховых пространств. Положим также

$$E^\perp := \{f \in F: \langle f, E \rangle = 0\}, \quad F^\perp := \{e \in E: \langle F, e \rangle = 0\}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{E} := E/F^\perp, \quad \tilde{F} := F/E^\perp, \quad (3.3)$$

$$\tau(a)(e + F^\perp) := ae + F^\perp, \quad a \in A, \quad e \in E. \quad (3.4)$$

Обозначения (3.2)–(3.4) согласованы с обозначениями из § 2.

Будем называть рассмотренную выше дуальную пару $(F, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ и неприводимое представление $\tau: A \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{E})$, заданное формулой (3.4), ассоциированными с экстремально локальным идемпотентом p . Воспользовавшись тем, что E и F являются левым и правым банаховыми A -модулями соответственно, рассмотрим $E \hat{\otimes} F$ как банахов A -бимодуль.

ЛЕММА 3.12 (ср. [4, лемма 4.2]). *Любой эндоморфизм банахова A -бимодуля $E \hat{\otimes} F$ имеет вид $x \mapsto \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ψ – непрерывный эндоморфизм банахова A -бимодуля $E \hat{\otimes} F$. В силу предложения 3.9 имеем

$$\psi(p \otimes p) = p \cdot \psi(p \otimes p) \cdot p \in pAp \otimes pAp,$$

и существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $\psi(p \otimes p) = \lambda p \otimes p$. Тогда для любых $a, b \in A$ имеем $\psi(ap \otimes pb) = \lambda ap \otimes pb$. В силу непрерывности ψ получаем, что $\psi(x) = \lambda x$ для всех $x \in E \hat{\otimes} F$.

ЛЕММА 3.13. *Если экстремально локальные идемпотенты p_1 и p_2 эквивалентны, то ассоциированные с ними дуальные пары изоморфны, а ассоциированные с ними неприводимые представления эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим, как в (3.1), $E_i := Ap_i$ и $F_i := p_i A$, $i = 1, 2$, и обозначим соответствующий билинейный функционал через $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$. Пусть $u, v \in A$ таковы, что $p_1 = uv$ и $p_2 = vu$. Легко видеть, что

$$\varphi: E_1 \rightarrow E_2, \quad e \mapsto eu, \quad \psi: F_1 \rightarrow F_2, \quad f \mapsto vf,$$

являются изоморфизмами банаховых пространств. Если $e \in E_1$ и $f \in F_1$, то

$$\langle vf, eu \rangle_2 p_1 = u \langle vf, eu \rangle_2 p_2 v = uv f e u v = f e = \langle f, e \rangle_1 p_1.$$

Тем самым, $\langle vf, eu \rangle_2 = \langle f, e \rangle_1$, что означает коммутативность диаграммы (2.4). Итак, дуальные пары изоморфны.

Поскольку φ является изоморфизмом левых банаховых A -модулей таким, что $\varphi(F_1^\perp) = F_2^\perp$, банаховы модули $E_1/F_1^\perp$ и $E_2/F_2^\perp$ изоморфны. Это равносильно эквивалентности представлений, ассоциированных с p_1 и p_2 .

ТЕОРЕМА 3.14. Пусть A – банахова алгебра такая, что $\overline{A^2} = A$, и пусть I – максимальный модулярный левый идеал в A . Предположим, что существует $\chi \in {}_A\text{h}(A/\overline{AI}, A)$ такой, что $\chi(A/\overline{AI}) \not\subset \mathfrak{B}\text{-Rad } A$. Тогда:

(А) существует экстремально локальный идемпотент $p \in A$ такой, что левые банаховы A -модули $A/\overline{AI}$ и Ap топологически изоморфны;

(В) неприводимое представление $A \rightarrow \mathcal{B}(A/I)$ эквивалентно неприводимому представлению, ассоциированному с p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (А) Поскольку $\overline{A^2} = A$, можно применить теорему 3.3, согласно которой модуль $A/\overline{AI}$ экстремально локален. Согласно теореме 3.5 существует экстремально локальный идемпотент $p \in A$ такой, что $\chi(A/\overline{AI}) = Ap$. Поскольку коограничение χ на Ap является строгим эпиморфизмом, а Ap строго проективен, существует левый банахов A -модуль Q такой, что $A/\overline{AI}$ и $Ap \oplus Q$ топологически изоморфны. Тем самым, $Ap \oplus Q$ содержит наибольший собственный подмодуль. Следовательно, либо $Ap = 0$, либо $Q = 0$. Так как первое невозможно, то $Q = 0$.

(В) Согласно доказанному выше $\chi: A/\overline{AI} \rightarrow Ap$ является топологическим изоморфизмом. Стало быть, χ порождает топологический изоморфизм между фактормодулями $A/\overline{AI}$ и Ap по их наибольшему собственному подмодулю. Это означает, что соответствующие неприводимые представления эквивалентны.

Обозначим через S_e сумму всех экстремально локальных левых идеалов A , не содержащихся в $\mathfrak{B}\text{-Rad } A$. Двусторонний идеал $S_e A$ играет ту же роль в доказательстве утверждений 2С) и 4В) из теоремы 1.18, что и цокль полупервичной бипроективной банаховой алгебры в [5].

ТЕОРЕМА 3.15. Пусть A – банахова алгебра такая, что $\overline{A^2} = A$. Предположим, что для каждого максимального модулярного левого идеала I в A существует $\chi \in {}_A\text{h}(A/\overline{AI}, A)$ такой, что $\chi(A/\overline{AI}) \not\subset \mathfrak{B}\text{-Rad } A$. Тогда $\text{lan } S_e \subset \text{Rad}_l A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – максимальный модулярный левый идеал, и пусть $a \in \text{lan } S_e$. В силу утверждения (А) теоремы 3.14 найдется экстремально локальный идемпотент $p \in A$ такой, что $A/\overline{AI} \cong Ap$. В силу определения S_e имеем $Ap \subset S_e$, поэтому $a(A/\overline{AI}) = 0$, т. е. $aA \subset \overline{AI}$. Согласно определению 1.11 и формуле (1.2) это означает, что $\text{lan } S_e \subset \text{Rad}_l A$.

§ 4. Проективность и свойство аппроксимации

Напомним, что банахово пространство E обладает *свойством аппроксимации* (сокращенно СА), если для любого компакта K в E и любого $\varepsilon > 0$ найдется ограниченный конечномерный оператор $\varphi: E \rightarrow E$ такой, что $\|\varphi(x) - x\| < \varepsilon$ для всех $x \in K$ (подробное обсуждение свойства аппроксимации см., например, в [17]).

Достаточные условия существования нетривиальных морфизмов. Следующее утверждение можно получить из принадлежащего Селиванову предложения 4.4.4 из [7], однако здесь приведено доказательство для полноты изложения.

ЛЕММА 4.1. Пусть I_0 – замкнутый двусторонний идеал в A такой, что A/I_0 обладает СА, $\sigma: A \rightarrow A/I_0$ – соответствующая проекция, X – банахово пространство, Y и Z – левые банаховы A -модули. Предположим, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & A \hat{\otimes} X & \\ \nearrow \varphi & \downarrow \sigma \otimes 1 & \\ Y & (A/I_0) \hat{\otimes} X & \\ \searrow \psi & \downarrow & \\ & Z & \end{array}$$

где все стрелки суть морфизмы левых банаховых A -модулей, коммутативна. Тогда для всякого $y \in Y$, для которого $\psi(y) \neq 0$, найдется $\chi \in {}_A\text{h}(Y, A)$ такой, что $\chi(y) \notin I_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\psi(y) \neq 0$, то $(\sigma \otimes 1)\varphi(y) \neq 0$. В силу известной теоремы Гротендика [17, теорема 5.6] из наличия СА у A/I_0 следует, что найдутся такие ограниченные линейные функционалы f и g на A/I_0 и X соответственно, что $(f \otimes g)(\sigma \otimes 1)\varphi(y) \neq 0$. Положим $\chi := (1 \otimes g)\varphi$. Тогда $f\sigma\chi(y) \neq 0$. Поскольку $\text{Ker } \sigma = I_0$, отсюда следует $\chi(y) \notin I_0$.

Разумеется, аналогичное утверждение выполнено для правых модулей. Полагая в нем $I_0 = 0$ и $X = Y = Z = P$, где P – проективный правый банахов A -модуль, получаем следующую лемму, которая есть не что иное, как версия леммы 1.4 из [4] для правых модулей. Обозначим через $h_A(X, Y)$ множество морфизмов между правыми банаховыми A -модулями X и Y .

ЛЕММА 4.2. Пусть A – банахова алгебра, обладающая СА, и пусть P – проективный правый банахов A -модуль такой, что $\overline{P \cdot A} = P$. Тогда для любого отличного от нуля $y \in P$ существует $\chi \in h_A(P, A)$ такой, что $\chi(y) \neq 0$.

Напомним, что *радикалом* модуля X называется пересечение всех его максимальных подмодулей. Далее радикал модуля X обозначается через $\text{rad } X$. В случае $X = A_+$ он совпадает с $\text{Rad } A_+ = \text{Rad } A$. Левый A -модуль X называется *циклическим*, если он совпадает с множеством $\{a \cdot x : a \in A\}$ для некоторого фиксированного $x \in X$ (см., например, [10]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть P – проективный циклический левый банахов A -модуль, и пусть R_0 – замкнутый двусторонний идеал алгебры A , содержащийся в $\text{Rad } A$. Если A/R_0 обладает СА, то для $y \notin \text{rad } P$ найдется морфизм $\chi \in {}_A\text{h}(P, A)$ такой, что $\chi(y) \notin R_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $y \notin \text{rad } P$, существует максимальный подмодуль Y в P такой, что $y \notin Y$. Тогда модуль P/Y является простым, а значит, либо умножение на нем тривиально, либо он неприводим. Первое противоречит циклическости P , так как тогда $A \cdot P \subset Y \neq P$. Итак, P/Y неприводим. отождествим P с A/J для некоторого замкнутого модулярного левого идеала J , а Y – с I/J для некоторого левого идеала I . Так как I содержит J , он тоже модулярен. Из максимальнойности Y следует максимальность I . Следовательно, I замкнут в A , а значит, Y замкнут в P . Поэтому модуль $X := P/Y$ банахов.

Обозначим A/R_0 через B , а проекцию $P \rightarrow X$ – через ψ . В силу проективности P существует морфизм банаховых A -модулей φ , дополняющий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & A_+ \hat{\otimes} X & \\ \varphi \nearrow & \downarrow \pi_X & \\ P & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

до коммутативной. Поскольку $A \cdot P = P$, образ φ содержится в $A \hat{\otimes} X$. Так как X неприводим, а R_0 содержится в радикале, можно рассматривать X как банахов B -модуль. Тем самым корректно определен морфизм B -модулей $\pi_{B,X}: B \hat{\otimes} X \rightarrow X$, $b \otimes x \mapsto b \cdot x$, который также является и морфизмом A -модулей. Очевидно, что ограничение π_X на $A \hat{\otimes} X$ разлагается в композицию $A \hat{\otimes} X \xrightarrow{\sigma \otimes 1} B \hat{\otimes} X \xrightarrow{\pi_{B,X}} X$, где $\sigma: A \rightarrow B$ – каноническая проекция. Поскольку $\psi(y) \neq 0$, можно применить лемму 4.1, положив в ней $I_0 = R_0$, $Y = P$ и $Z = X$.

Некоторые свойства идеалов в бипроективной алгебре. Приведем некоторые утверждения технического характера.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть A – бипроективная банахова алгебра, и пусть I_0 – замкнутый двусторонний идеал в A , содержащий $\mathfrak{B}\text{-Rad } A$ и такой, что A/I_0 обладает СА. Тогда для любого замкнутого левого идеала I в A , содержащего I_0 , выполнено $I = \overline{AI} + \overline{I_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\overline{AI} + \overline{I_0} \subset I$. Предположим, что $c \in I$, но $c \notin \overline{AI} + \overline{I_0}$. Если $\chi \in {}_A\text{h}(A/\overline{AI}, A)$, то $a \cdot \chi(c + \overline{AI}) = \chi(a \cdot (c + \overline{AI})) = 0$ для всех $a \in A$. Это означает, что $\chi(c + \overline{AI}) \in \text{ran } A \subset \mathfrak{B}\text{-Rad } A \subset I_0$. Поэтому, чтобы получить противоречие, достаточно предъявить χ такой, что $\chi(c + \overline{AI}) \notin I_0$.

Обозначим модуль $A/\overline{AI}$ через X , модуль $A/\overline{AI} + \overline{I_0}$ – через Z , а проекцию $A/\overline{AI} \rightarrow Z$ – через ψ . При этом $\psi(c + \overline{AI}) \neq 0$. Согласно следствию 1.4 модуль X проективен, поэтому в силу теоремы 1.1 существует морфизм левых банаховых A -модулей $\rho_X: X \rightarrow A_+ \hat{\otimes} X$ такой, что $\pi_X \rho_X = 1$. Так как $A \cdot (A/\overline{AI}) = A/\overline{AI}$, образ ρ_X содержится в $A \hat{\otimes} X$. Морфизм левых банаховых A -модулей

$$\zeta: (A/I_0) \hat{\otimes} X \rightarrow Z, \quad (a + I_0) \otimes (b + \overline{AI}) \mapsto ab + \overline{AI} + \overline{I_0},$$

корректно определен ввиду того, что I_0 – двусторонний идеал. Легко видеть, что $\psi = \zeta(\sigma \otimes 1)\rho_X$, где $\sigma: A \rightarrow A/I_0$ – каноническая проекция. Поэтому

можно применить лемму 4.1, положив в ней $Y = X$, $\varphi = \rho_X$ и $y = c + \overline{AI}$. Следовательно, существует $\chi \in \text{Ah}(A/\overline{AI}, A)$ такой, что $\chi(c + \overline{AI}) \notin I_0$.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть A и I_0 удовлетворяют условиям теоремы 4.4. Тогда всякий $a \in A$ принадлежит $Aa + I_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I := \overline{A_+a + I_0}$. Очевидно, I – замкнутый левый идеал в A , содержащий I_0 , поэтому можно применить теорему 4.4. Следовательно, $a \in I = \overline{AI + I_0} = Aa + I_0$.

Факторизация по радикалу для бипроективных алгебр со свойством аппроксимации. Ю. В. Селиванов сообщил мне, что следующее утверждение известно ему еще с 1970-х годов, но доказательство не публиковалось. Приведенное ниже рассуждение принадлежит автору.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть A – бипроективная банахова алгебра и $R := \text{Rad } A$. Если A/R или A обладает СА, то банахова алгебра A/R бипроективна.

ЛЕММА 4.7. Пусть A – банахова алгебра, E – банахово пространство, $\varphi: A \rightarrow A \hat{\otimes} E$ – морфизм левых банаховых A -модулей, а $\sigma: A \rightarrow A/R$ – каноническая проекция. Если A/R или E обладает СА, то $(\sigma \otimes 1)\varphi(R) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Гротендика из наличия СА у A/R или E следует, что для любого отличного от нуля элемента $u \in (A/R) \hat{\otimes} E$ найдутся такие ограниченные линейные функционалы f и g на A/R и E соответственно, что $(f \otimes g)(u) \neq 0$. Поэтому достаточно показать, что для любого $a \in R$ и любого g выполнено $(\sigma \otimes g)\varphi(a) = 0$. Очевидно, что $(1 \otimes g)\varphi \in \text{Ah}(A, A)$. Напомним, что R совпадает с наибольшим левым идеалом, состоящим из топологически нильпотентных элементов, т. е. r из A принадлежит R тогда и только тогда, когда $\|(ar)^n\|^{1/n} \rightarrow 0$ для всех $a \in A$. Отсюда следует, что $\psi(R) \subset R$ для любого $\psi \in \text{Ah}(A, A)$, в частности, $(1 \otimes g)\varphi(a) \in R$. Итак, $(\sigma \otimes g)\varphi(a) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.6. Пусть $\rho: A \rightarrow A \hat{\otimes} A$ – морфизм из предложения 1.2. Применяя к нему лемму 4.7, получаем, что корректно определен морфизм A -бимодулей

$$\rho_1: A/R \rightarrow (A/R) \hat{\otimes} A, \quad a + R \mapsto (\sigma \otimes 1)\rho(a).$$

Рассмотрим морфизм A -бимодулей

$$\rho_2: A/R \rightarrow (A/R) \hat{\otimes} (A/R), \quad a + R \mapsto (1 \otimes \sigma)\rho_1(a).$$

Очевидно, ρ_2 является также морфизмом A/R -бимодулей. Обозначим через π' морфизм умножения $(A/R) \hat{\otimes} (A/R) \rightarrow A/R$. Поскольку $\pi'(\sigma \otimes \sigma) = \sigma\pi$ и $\rho_2(a + R) = (\sigma \otimes \sigma)\rho(a)$ для всех $a \in A$, получаем $\pi'\rho_2 = 1$. В силу предложения 1.2 алгебра A/R бипроективна.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Теорема 4.6 представляет собой тот редкий случай, когда мы действительно можем быть уверены в том, что наличие СА является существенным. Рассмотрим невырожденную дуальную пару банаховых пространств $(F, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. В силу предложения 1.6 алгебра $E \hat{\otimes} F$ бипроективна, а в силу предложения 2.1 имеем $\text{Rad}(E \hat{\otimes} F) = \text{Ker } \tau$, где τ – канонический гомоморфизм $E \hat{\otimes} F \rightarrow \mathcal{N}_F(E)$. Согласно [5, лемма 4.11] банахова алгебра $\mathcal{N}_F(E) = (E \hat{\otimes} F)/\text{Ker } \tau$ бипроективна тогда и только тогда, когда $\text{Ker } \tau = 0$.

Предположим, что $\text{Ker } \tau \neq 0$; тогда $E \hat{\otimes} F$ бипроективна, а $(E \hat{\otimes} F)/\text{Rad}(E \hat{\otimes} F)$ таковой не является. Отсюда видно, что требование свойства аппроксимации в теореме 4.6 нельзя отбросить.

§ 5. Достаточное условие наличия свойства аппроксимации для неприводимого модуля

В пределах этого параграфа A – банахова алгебра такая, что $\overline{A^2} = A$, R_0 – замкнутый идеал в A такой, что $\mathfrak{B}\text{-Rad } A \subset R_0 \subset \text{Rad } A$ и A/R_0 обладает СА, а X – неприводимый левый банахов A -модуль такой, что $A \hat{\otimes}_A X$ проективен (ввиду предложения 1.3 последнее верно для любого неприводимого банахова модуля над бипроективной банаховой алгеброй). Отметим, что идеал $\mathfrak{B}\text{-Rad } A$ не обязательно замкнут, а точнее, $\mathfrak{B}\text{-Rad } A$ замкнут тогда и только тогда, когда он нильпотентен (см. [11, теорема 4.4.11(d)]). Пусть I – максимальный модулярный левый идеал в A такой, что $X \cong A/I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Существует экстремально локальный идемпотент $p \in A$ такой, что левые банаховы A -модули $A/\overline{AI}$ и Ap топологически изоморфны.*

ЛЕММА 5.2. *Для любого $a_0 \in A \setminus I$ существует $\chi \in {}_A\text{h}(A/\overline{AI}, A)$ такой, что $\chi(a_0 + \overline{AI}) \notin R_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $\overline{A^2} = A$ следует, что $A \cdot (A/\overline{AI}) = A/\overline{AI}$. В силу предложения 1.5 имеем $A \hat{\otimes}_A X \cong A/\overline{AI}$, поэтому модуль $A/\overline{AI}$ проективен. Из теоремы 3.3 следует, что $\text{rad}(A/\overline{AI}) = I/\overline{AI}$. Согласно лемме 1.12 левый идеал $\overline{AI}$ модулярен, следовательно, $A/\overline{AI}$ является циклическим модулем. Так что можно применить предложение 4.3, положив $P = A/\overline{AI}$ и $y = a_0 + \overline{AI}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.1. Из леммы 5.2 следует, что найдется $\chi \in {}_A\text{h}(A/\overline{AI}, A)$ такой, что $\chi(A/\overline{AI}) \not\subset \mathfrak{B}\text{-Rad } A$. Поэтому можно применить утверждение (А) теоремы 3.14.

Свяжем с идемпотентом p объекты, заданные формулами (3.1)–(3.4). Отметим, что в силу теоремы 3.3 и предложения 5.1 при этом имеют место изоморфизмы банаховых A -модулей:

$$X \cong A/I \cong \tilde{E}, \quad A/\overline{AI} \cong E. \quad (5.1)$$

Теперь рассмотрим линейный оператор $\text{Gr}: \tilde{F} \hat{\otimes} \tilde{E} \rightarrow (E \hat{\otimes} F)^*$, отображающий $(f + E^\perp) \otimes (e + F^\perp)$ в ограниченный линейный функционал на $E \hat{\otimes} F$, переводящий $e' \otimes f'$ в $\langle f, e' \rangle \langle f', e \rangle$. Легко видеть, что он корректно определен и ограничен.

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть A – банахова алгебра такая, что $\overline{A^2} = A$, а R_0 – замкнутый идеал в алгебре A такой, что $\mathfrak{B}\text{-Rad } A \subset R_0 \subset \text{Rad } A$ и A/R_0 обладает СА, и пусть X – неприводимый левый банахов A -модуль такой, что $A \hat{\otimes}_A X$ проективен. Тогда:*

- (А) банахово пространство X обладает СА;
- (В) оператор Gr инъективен.

Обозначим $A/\mathfrak{B}\text{-Rad } A$ через B , а A/R_0 – через B_0 . Напомним, $\mathfrak{B}\text{-Rad } A$ не обязательно замкнут, поэтому алгебра B не обязательно банахова. Так

как $R_0 \cdot X = 0$, то X можно рассматривать и как B -модуль, и как банахов B_0 -модуль. Утверждение (А) теоремы следует из двух фактов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Существует морфизм левых B -модулей $\psi: X \rightarrow B$ такой, что композиция $\varphi = \theta\psi$, где $\theta: B \rightarrow B_0$ – каноническая проекция, является отличным от нуля морфизмом левых банаховых B_0 -модулей.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *Для любого φ из предложения 5.4 существует идемпотент $q \in B_0$ такой, что существует коограничение φ на B_0q , которое является топологическим изоморфизмом банаховых B_0 -модулей X и B_0q .*

Действительно, из предложений 5.4 и 5.5 вытекает, что банахово пространство X топологически изоморфно дополняемому подпространству в банаховом пространстве, обладающем СА, а значит, само обладает СА.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.4. Пусть $a_0 \in A \setminus I$. Согласно лемме 5.2 найдется $\chi \in {}_A\text{h}(A/\overline{AI}, A)$ такой, что $\chi(a_0 + \overline{AI}) \notin R_0$. Для любых $b \in A$ и $c \in I$ выполнено равенство $b \cdot \chi(c + \overline{AI}) = \chi(bc + \overline{AI}) = 0$, т.е.

$$\chi(c + \overline{AI}) \in \text{ran } A \subset \mathfrak{B}\text{-Rad } A. \quad (5.2)$$

Следовательно, корректно определен морфизм A -модулей

$$\psi: X \rightarrow B, \quad a + I \mapsto \chi(a + \overline{AI}) + \mathfrak{B}\text{-Rad } A.$$

Для любых $r \in \mathfrak{B}\text{-Rad } A$ и $a \in A$ имеем $ra \in \mathfrak{B}\text{-Rad } A \subset I$, стало быть, в силу (5.2)

$$r \cdot \chi(a + \overline{AI}) = \chi(ra + \overline{AI}) \in \mathfrak{B}\text{-Rad } A.$$

Поэтому ψ является морфизмом B -модулей. Обозначим через φ композицию морфизма ψ и проекции $\theta: B \rightarrow B_0$. Легко видеть, что φ является морфизмом банаховых B_0 -модулей. При этом $\varphi(a_0 + I) \neq 0$, следовательно, $\varphi \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.5. Поскольку X неприводим как B -модуль и, значит, экстремально локален, а $\mathfrak{B}\text{-Rad } B = 0$ [11, теорема 4.4.8], то можно применить к морфизму B -модулей $\psi: X \rightarrow B$ теорему 3.5, согласно которой $\psi(X) = Bq$ для некоторого нетривиального идемпотента $q \in B$. Так как $\varphi \neq 0$, отсюда следует, что $\varphi(X) = B_0q_0$ для некоторого нетривиального идемпотента $q_0 \in B_0$. Из неприводимости X как B_0 -модуля получаем $\text{Ker } \varphi = 0$, поэтому коограничение φ на B_0q_0 есть алгебраический изоморфизм банаховых B_0 -модулей, который в силу теоремы Банаха об обратном операторе является топологическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.3. Как уже было сказано, утверждение (А) теоремы следует из предложений 5.4 и 5.5.

(В) Заметим, что двойственность между F и E порождает двойственность между $\tilde{F}$ и E , а также между F и $\tilde{E}$. В [7, теорема II.2.36] показано, что в случае, когда обе эти двойственности невырождены, из наличия СА у $\tilde{E}$ или $\tilde{F}$ следует, что оператор Gg инъективен. Однако доказательство можно использовать и для вырожденных дуальных пар при условии, что для любого ненулевого $\tilde{e} \in \tilde{E}$ найдется $f \in F$ такой, что $\langle f, \tilde{e} \rangle \neq 0$, которое, очевидно, выполнено в нашем случае. Осталось заметить, что в силу (5.1) и утверждения (А) банахово пространство $\tilde{E}$ обладает СА.

§ 6. Доказательство структурной теоремы

Этот параграф содержит доказательство теоремы 1.18. Сразу отметим, что если бипроективная банахова алгебра A радикальна, то $\text{Rad}_l A = A$ и все утверждения теоремы тривиальны.

Первое условие для свойства аппроксимации. Предположим пока, что A – бипроективная банахова алгебра, в которой существует замкнутый идеал R_0 такой, что

$$\mathfrak{B}\text{-Rad } A \subset R_0 \subset \text{Rad } A$$

и A/R_0 обладает СА. Как замечено выше, можно предполагать, что A не радикальна. Зафиксируем некоторый неприводимый левый банахов A -модуль X ; он изоморфен A/J для некоторого максимального модулярного идеала J . Из предложения 1.3 следует, что к A и X применимы результаты, полученные в § 5. В частности, в силу предложения 5.1 существует экстремально локальный идемпотент $p \in A$ такой, что левые банаховы A -модули $A/\overline{A}J$ и Ap топологически изоморфны. Как и ранее, свяжем с идемпотентом p объекты, заданные формулами (3.1)–(3.4). Рассмотрим морфизм банаховых A -бимодулей

$$\omega: E \widehat{\otimes} F \rightarrow A, \quad e \otimes f \mapsto ef,$$

и обозначим его образ через I .

ЛЕММА 6.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- (А) *двусторонний идеал I замкнут и дополняем в A ;*
- (В) *коограничение ω на I является топологическим изоморфизмом банаховых A -бимодулей $E \widehat{\otimes} F$ и I ;*
- (С) *имеем $I = \overline{ApA}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho: A \rightarrow A \widehat{\otimes} A$ – морфизм из предложения 1.2. Рассмотрим также морфизм

$$\varphi: a \otimes b \mapsto ae_0 \otimes f_0 b \tag{6.1}$$

для некоторых отличных от нуля $e_0 \in E$ и $f_0 \in F$. В силу леммы 3.12 имеем $\varphi\rho\omega = \lambda 1$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Покажем, что можно выбрать e_0 и f_0 так, чтобы $\lambda \neq 0$. Так как $\omega(p \otimes p) = p$, для этого достаточно, чтобы $\varphi\rho(p) \neq 0$. Поскольку E и F – дополняемые подпространства в A , а $\rho(p) = p \cdot \rho(p) \cdot p$, можно считать, что $F \widehat{\otimes} E \subset A \widehat{\otimes} A$ и $\rho(p) \in F \widehat{\otimes} E$.

Обозначим через $\pi: A \widehat{\otimes} A \rightarrow A$ морфизм умножения. Пусть некоторый $u \in F \widehat{\otimes} E$ представлен в виде абсолютно сходящего ряда: $u = \sum_i f_i \otimes e_i$. Тогда

$$\pi\varphi(u) = \pi\left(\sum_i f_i e_0 \otimes f_0 e_i\right) = \pi\left(\sum_i \langle f_i, e_0 \rangle p \otimes \langle f_0, e_i \rangle p\right) = \sum_i \langle f_i, e_0 \rangle \langle f_0, e_i \rangle p,$$

т. е. $\pi\varphi(u) = [\text{Gr } \theta(u)](e_0 \otimes f_0)p$, где Gr определен перед теоремой 5.3, а

$$\theta: F \widehat{\otimes} E \rightarrow \widetilde{F} \widehat{\otimes} \widetilde{E}, \quad f \otimes e \mapsto (f + E^\perp) \otimes (e + F^\perp).$$

Теперь положим $u = \rho(p)$ и запишем, как и выше, u в виде $\sum_i f_i \otimes e_i$. Тогда

$$p = \pi(u) = \sum_i f_i e_i = \sum_i \langle f_i, e_i \rangle p = \delta\theta(u)p,$$

где $\delta: \tilde{F} \hat{\otimes} \tilde{E} \rightarrow \mathbb{C}$ – линейный функционал, ассоциированный с двойственностью. Тем самым, $\theta(u) \neq 0$. В силу утверждения (В) теоремы 5.3 линейный оператор Gr инъективен, поэтому существуют $e_0 \in E$ и $f_0 \in F$ такие, что $[\text{Gr}\theta(u)](e_0 \otimes f_0) \neq 0$. Следовательно, $\varphi\rho(p) \neq 0$. Итак, $\lambda \neq 0$. Отсюда следует, что коограничение ω на I является изоморфизмом банаховых A -бимодулей $E \hat{\otimes} F$ и I , а I является дополняемым двусторонним идеалом в A .

Поскольку всякий элемент $E \hat{\otimes} F$ представляется в виде абсолютно сходящегося ряда $\sum_i e'_i \otimes f'_i$, имеем $I \subset \overline{ApA}$. Так как $p \in I$, получаем $I = \overline{ApA}$.

Из лемм 3.11 и 3.13 видно, что определенные выше идеал I , а также дуальная пара и неприводимое представление, ассоциированные с экстремально локальным идемпотентом p , зависят только от его класса эквивалентности. Изменим обозначения следующим образом. Пусть Λ – множество классов эквивалентности экстремально локальных идемпотентов в A . Для каждого $\nu \in \Lambda$ выберем идемпотент $p \in \nu$ и обозначим ассоциированную дуальную пару через $(F_\nu, E_\nu, \langle \cdot, \cdot \rangle_\nu)$, ассоциированное неприводимое представление A – через τ_ν , а также положим $I_\nu := \overline{ApA}$.

ЛЕММА 6.2. *Сумма $\sum_{\nu \in \Lambda} I_\nu$ является прямой, причем для каждого ν существует бимодульная проекция $\sigma_\nu: A \rightarrow A$ с областью значений I_ν такая, что $\sigma_\nu(I_\mu) = 0$ для всех $\mu \neq \nu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\nu \in \Lambda$ и какой-нибудь $p \in \nu$. В доказательстве леммы 6.1 показано, что композиция морфизмов A -бимодулей

$$A \xrightarrow{\rho} A \hat{\otimes} A \xrightarrow{\varphi} E_\nu \hat{\otimes} F_\nu \xrightarrow{\omega} A,$$

где φ выбран соответствующим образом, является проекцией на I_ν . Обозначим ее через σ_ν . Пусть $\mu \neq \nu$ и $q \in \mu$. Если $a \in I_\mu$, то в силу утверждения (С) леммы 6.1 имеем $\rho(a) \in \overline{Aq \cdot \rho(q) \cdot qA}$. Тогда из определения φ (формула (6.1)) получаем, что $\varphi\rho(a) \in \overline{AqAp \otimes pAqA}$. Однако p и q не являются эквивалентными, поэтому согласно предложению 3.10 получаем $qAp = 0$. Итак, $\sigma_\nu(I_\mu) = 0$ для всех $\mu \neq \nu$. Тем самым, $I_\nu \cap \sum_{\mu \neq \nu} I_\mu = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ ТЕОРЕМЫ 1.18. Пусть, как и выше, Λ – множество классов эквивалентности экстремально локальных идемпотентов в A . Из леммы 6.1 следует, что для каждого ν идеал I_ν замкнут и дополняем, а банаховы алгебры I_ν и $E_\nu \hat{\otimes} F_\nu$ изоморфны.

Покажем, что $(I_\nu)_{\nu \in \Lambda}$ – в точности множество всех минимальных замкнутых нерадикальных двусторонних идеалов в A . Пусть $\nu \in \Lambda$ и J – замкнутый нерадикальный двусторонний идеал в A , содержащийся в I_ν . Обозначим, как обычно, $\text{Rad } A$ через R . Поскольку $R \cap I_\nu = \text{Rad } I_\nu$ (см., например, [11, теорема 4.3.2(a)]), из предложения 2.1 следует, что $J = I_\nu$. Итак, I_ν – минимальный замкнутый нерадикальный двусторонний идеал. С другой стороны, если J – минимальный замкнутый нерадикальный двусторонний идеал в A , то найдутся $a \in J \setminus R$ и неприводимое представление τ такие, что $\tau(a) \neq 0$. Так как существует $b \in A$ такой, что $\tau(ab) \neq 0$, идеал JA не содержится в R . В силу минимальности J имеем $\overline{JA} = J$. Из леммы 5.2 и утверждения (В) теоремы 3.14 следует, что τ эквивалентно представлению τ_ν для некоторого $\nu \in \Lambda$. Пусть σ_ν – проекция из леммы 6.2. Поскольку $\sigma_\nu(JA) \subset J$ и $\overline{JA} = J$, получаем $\sigma_\nu(J) \subset J$.

Заметим, что $\tau_\nu \sigma_\nu = \tau_\nu$. Действительно, из конструкции представления τ_ν (формула (3.4)) и того, что σ_ν – морфизм бимодулей, следует, что для любых $a \in A$ и $e \in E_\nu$

$$\tau_\nu \sigma_\nu(a)(e + F^\perp) = \sigma_\nu(a)e + F^\perp = a\sigma_\nu(e) + F^\perp = ae + F^\perp = \tau_\nu(a)(e + F^\perp).$$

Если $\tau_\nu(a) \neq 0$, то $\sigma_\nu(a) \notin \text{Ker } \tau_\nu$. Тогда в силу предложения 2.1 имеем $\sigma_\nu(a) \notin \text{Rad } I_\nu$. Таким образом, $\sigma_\nu(a) \in (J \cap I_\nu) \setminus R$, и, значит, $I_\nu \cap J$ – замкнутый нерадикальный двусторонний идеал. В силу минимальности J и I_ν имеем $J = I_\nu$. Тем самым утверждения 1) и 3) доказаны.

В силу леммы 6.2 сумма $\sum_{\nu \in \Lambda} I_\nu$ является прямой. Согласно предложению 1.16 из дополняемости I_ν следует $\sigma_\nu(\text{Rad}_l A) = \text{Rad}_l I_\nu$ (для Rad_l см. определение 1.11). Учитывая то, что σ_ν – гомоморфизм алгебр, получаем

$$\sigma_\nu((\text{Rad}_l A)A) \subset (\text{Rad}_l I_\nu)I_\nu.$$

Поскольку $I_\nu \cong E_\nu \hat{\otimes} F_\nu$, из предложения 2.1 следует, что $(\text{Rad}_l I_\nu)I_\nu = 0$. Следовательно, $\sigma_\nu((\text{Rad}_l A)A) = 0$ для всех ν . Это означает, что выполнено утверждение 2А).

Обозначим $\bigoplus_\nu I_\nu$ через K . Если A/K не радикальна, то существует неприводимое представление такое, что его ядро содержит K . Как уже было показано, всякое неприводимое представление A эквивалентно τ_μ для некоторого $\mu \in \Lambda$. Однако $\tau_\mu(I_\mu) \neq 0$ для каждого μ . Полученное противоречие показывает, что A/K радикальна. Так как $\overline{AK} = K$, в силу [4, лемма 1.3] из бипроективности A следует бипроективность A/K . Итак, 2В) доказано.

Обозначим примитивный идеал $\text{Ker } \tau_\nu$ через P_ν . В силу утверждения (В) теоремы 3.14 всякий примитивный идеал A совпадает с P_ν для некоторого $\nu \in \Lambda$. Примитивный спектр A естественно отождествляется с Λ . Покажем, что для любого $\mu \in \Lambda$ множество $\Lambda \setminus \mu$ замкнуто в топологии Джекобсона. Если $\nu \neq \mu$ и $q \in \mu$, то из предложения 3.10 получаем $\tau_\nu(q) = 0$, т.е. $I_\mu \subset P_\nu$. Так как $I_\mu \not\subset P_\mu$, это означает, что множество $\Lambda \setminus \mu$ есть оболочка I_μ и, значит, замкнуто. Стало быть, примитивный спектр A дискретен.

Далее, если $\mu \in \Lambda$, $a \in \text{lan } I_\nu$, $b \in A$ и $e \in E_\nu$, то $be \in I_\nu$, поэтому согласно (3.4) имеем $\tau_\nu(ab)(e + F_\nu^\perp) = abe + F_\nu^\perp = 0$. Тем самым, $(\text{lan } I_\nu)A \subset P_\nu$. Из 3) и леммы 1.19 следует, что $A = \overline{(\text{lan } I_\nu)A} \oplus I_\nu$. Следовательно, в силу предложения 2.1

$$P_\nu = \overline{(\text{lan } I_\nu)A} \oplus (I_\nu \cap P_\nu) = \overline{(\text{lan } I_\nu)A} \oplus \text{Rad } I_\nu,$$

что и доказывает 4А).

Итак, установлены все утверждения теоремы 1.18, кроме 2С) и 4В), которые требуют дополнительных предположений.

Второе условие для свойства аппроксимации и полупервичность.
Докажем оставшиеся утверждения из теоремы 1.18.

ЛЕММА 6.3 (ср. [5, лемма 4.42]). Пусть A – бипроективная банахова алгебра, обладающая СА, а I – замкнутый собственный двусторонний идеал в A такой, что $\overline{IA} = I$. Тогда $(\text{lan } I)A \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\overline{A^2} = A$, найдутся $a, b \in A$ такие, что $ab \notin I$. Поскольку A обладает СА, можно применить лемму 4.2 к правому банахову модулю $A/\overline{IA}$ (проективному в силу следствия 1.4) и элементу $ab + \overline{IA}$. Так как $A/\overline{IA} = A/I$, получаем отсюда, что существует $\varphi \in \mathfrak{h}_A(A/I, A)$ такой, что $\varphi(ab + I) \neq 0$. Если $c \in I$, то $\varphi(a + I)c = \varphi(ac + I) = 0$. Это означает, что $\varphi(a + I) \in \text{lan } I$. Стало быть, $\varphi(ab + I) = \varphi(a + I)b \in (\text{lan } I)A$. Следовательно, $(\text{lan } I)A \neq 0$.

Теперь можно завершить доказательство теоремы 1.18. Помимо основных предположений допустим теперь также, что алгебра $(\text{Rad}_l A)A$ полупервична и A обладает СА.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ ТЕОРЕМЫ 1.18. Обозначим идеал $\text{Rad}_l A$ через R_l , а замыкание $(\bigoplus_\nu I_\nu) \oplus R_l A$ – через J . Очевидно, $J = \overline{JA}$. Для того чтобы установить равенство A и J , достаточно проверить в силу леммы 6.3, что $(\text{lan } J)A = 0$. Напомним, что через S_e обозначена сумма всех экстремально локальных левых идеалов A , не содержащихся в $\mathfrak{B}\text{-Rad } A$. Заметим, что в силу следствия 3.6 выполнено $\bigoplus_\nu \overline{I_\nu} = \overline{S_e A}$, и поскольку левый идеал S_e порожден идемпотентами, то $\text{lan}(S_e A) = \text{lan } S_e$. Согласно теореме 3.15 имеем $\text{lan } S_e \subset R_l$. Тем самым,

$$(\text{lan } J)A \subset (\text{lan } S_e)A \cap \text{lan}(R_l A)A \subset R_l A \cap \text{lan}(R_l A)A.$$

Отсюда получаем $((\text{lan } J)A)^2 \subset \text{lan}(R_l A)AR_l A$. Поэтому $((\text{lan } J)A)^2 = 0$. В силу теоремы 3.15 имеем $(\text{lan } J)A \subset (\text{lan } S_e)A \subset R_l A$. Тем самым, $(\text{lan } J)A$ – двусторонний идеал в полупервичной алгебре $R_l A$, следовательно, $(\text{lan } J)A = 0$. Итак, 2С) доказано.

Пусть L – замкнутый двусторонний идеал в A , содержащий R . Чтобы доказать наличие спектрального синтеза в A/R , достаточно проверить, что $L = \bigcap \{P_\nu : L \subset P_\nu\}$. Предположим, что $a \in \bigcap \{P_\nu : L \subset P_\nu\}$. Положив $I_0 = R_0$ в следствии 4.5, имеем $a \in \overline{Aa + R_0} \subset \overline{Aa + R}$. Поскольку $R \subset L$, достаточно установить, что $Aa \subset L$. Из предложения 2.1 следует, что $\text{Rad } I_\nu$ – максимальный замкнутый собственный двусторонний идеал в I_ν . Тем самым, либо $I_\nu \subset L$, либо $I_\nu \cap L \subset \text{Rad } I_\nu$. В первом случае $I_\nu a \subset I_\nu \subset L$. Рассмотрим второй случай. Из $LI_\nu \subset I_\nu \cap L \subset \text{Rad } I_\nu$ следует, что $\tau_\nu(L)\tau_\nu(I_\nu) = 0$. Так как ограничение τ_ν на I_ν неприводимо, то $\tau_\nu(L) = 0$, т. е. $L \subset P_\nu$. Поэтому согласно сделанному выше предположению $a \in P_\nu$. Тогда $I_\nu a \subset I_\nu P_\nu \subset I_\nu \cap P_\nu$. В силу того, что $\text{Rad } I_\nu$ максимален в I_ν , из $I_\nu \not\subset P_\nu$ вытекает $I_\nu \cap P_\nu \subset \text{Rad } I_\nu$. Итак, $I_\nu a \subset \text{Rad } I_\nu \subset R \subset L$. Стало быть, в обоих случаях $I_\nu a \subset L$. Далее, из 2С) вытекает, что сумма всех I_ν и R плотна в A . Поскольку $R \subset L$, отсюда следует, что $Aa \subset L$. Тем самым доказано утверждение 4В).

§ 7. Классификация конечномерных бипроективных алгебр

Обозначим через $B_{n,m,r}$ тензорную алгебру дуальной пары $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, где ранг билинейного функционала равен r . Очевидно, $0 < r \leq \min\{n, m\}$. Согласно предложению 1.6 алгебра $B_{n,m,r}$ бипроективна, а в силу теоремы 2.3 указанные данные определяют $B_{n,m,r}$ однозначно с точностью до изоморфизма.

Для того чтобы описать алгебраическую структуру $B_{n,m,r}$, выберем в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ базисы $f_1, \dots, f_n$ и $e_1, \dots, e_m$ так, чтобы $\langle f_i, e_{i+m-r} \rangle = 1$ для $i = 1, \dots, r$

и $\langle f_i, e_j \rangle = 0$ для всех остальных пар i и j . Обозначим $e_i \otimes f_j$ через $a_{i,j+m-r}$. Алгебра $B_{n,m,r}$ однозначно определяется множеством образующих $\{a_{ik} : i = 1, \dots, m, k = 1+m-r, \dots, n+m-r\}$ и соотношениями $a_{ij}a_{kl} = a_{il}$ для $1+m-r \leq j = k \leq m$ и $a_{ij}a_{kl} = 0$ в остальных случаях. Это означает, что $B_{n,m,r}$ изоморфна подалгебре в алгебре матриц порядка $n+m-r$, имеющих вид $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где x – произвольная $(m \times n)$ -матрица. Представим x в виде блок-матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где c – квадратная матрица порядка r , а остальные – матрицы дополнительных размеров. Воспользовавшись предложением 2.1 и леммой 2.2, нетрудно убедиться в том, что элементы $\text{Rad } B_{n,m,r}$, $\text{Rad}_l B_{n,m,r} = \text{lan } B_{n,m,r}$, $\text{gan } B_{n,m,r}$, $\text{ann } B_{n,m,r}$ представляются соответственно матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть A – конечномерная бипроективная банахова алгебра. Тогда существует конечное множество упорядоченных троек натуральных чисел (n_ν, m_ν, r_ν) , где $r_\nu \leq \min\{n_\nu, m_\nu\}$ такое, что

$$A \cong \bigoplus_{\nu} B_{n_\nu, m_\nu, r_\nu}.$$

Множество троек (n_ν, m_ν, r_ν) определяется алгеброй A однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сохраним обозначения из доказательства теоремы 1.18. В силу конечномерности A все условия этой теоремы выполнены, при этом в качестве R_0 можно взять $\text{Rad } A$. Очевидно, что множество Λ конечно. В силу утверждения 2В) имеем, что $A_0 = A / \bigoplus_{\nu \in \Lambda} I_\nu$ является бипроективной радикальной алгеброй. Поскольку радикальная конечномерная алгебра нильпотентна, из $A_0^2 = A_0$ получаем $A_0 = 0$. Итак, $A = \bigoplus_{\nu \in \Lambda} I_\nu$. В силу утверждения 1) идеал I_ν в A изоморфен тензорной алгебре некоторой дуальной пары $(F_\nu, E_\nu, \langle \cdot, \cdot \rangle_\nu)$, причем, очевидно, F_ν и E_ν конечномерны. Тогда $F_\nu \cong \mathbb{C}^{n_\nu}$ и $E_\nu \cong \mathbb{C}^{m_\nu}$, где $n_\nu = \dim F_\nu$, $m_\nu = \dim E_\nu$, а ранг двойственности r_ν не превосходит $\min\{n_\nu, m_\nu\}$. Следовательно, $I_\nu \cong B_{n_\nu, m_\nu, r_\nu}$. Поскольку $(I_\nu)_{\nu \in \Lambda}$ – множество минимальных нерадикальных двусторонних идеалов в A , оно определяется алгеброй A однозначно, следовательно, и множество троек (n_ν, m_ν, r_ν) определяется алгеброй A однозначно.

Поскольку конечная сумма бипроективных алгебр бипроективна, указанные наборы дают полную классификацию конечномерных бипроективных банаховых алгебр.

Из изложенного выше описания алгебраической структуры слагаемых в разложении A видно, что в коммутативном случае каждое из них есть $\mathbb{C}$. Таким образом, получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Пусть A – коммутативная конечномерная бипроективная банахова алгебра. Тогда $A \cong \mathbb{C}^s$, где s – натуральное число.

Обозначим через $\text{db } A$ гомологическую биразмерность банаховой алгебры A (см. определение в [10]).

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть A – конечномерная бипроективная банахова алгебра. Тогда A допускает единственное с точностью до изоморфизма разложение

$A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4$, где A_1 обладает единицей, A_2 обладает только правой единицей, A_3 обладает только левой единицей, а A_4 не обладает ни правой, ни левой единицами. При этом A_1, A_2, A_3, A_4 бипроективны и

$$\text{db } A_1 = 0, \quad \text{db } A_2 = \text{db } A_3 = 1, \quad \text{db } A_4 = 2$$

в том случае, когда соответствующее слагаемое нетривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 7.1 имеем $A \cong \bigoplus_{\nu=1}^k B_{n_\nu, m_\nu, r_\nu}$. Если $r_\nu = m_\nu = n_\nu$, то B_{n_ν, m_ν, r_ν} обладает единицей; если $r_\nu = m_\nu < n_\nu$, то B_{n_ν, m_ν, r_ν} обладает только левой единицей; если $r_\nu = n_\nu < m_\nu$, то B_{n_ν, m_ν, r_ν} обладает только правой единицей; если $r_\nu < \min\{n_\nu, m_\nu\}$, то B_{n_ν, m_ν, r_ν} не обладает ни правой, ни левой единицей. Группируя соответствующие слагаемые, получаем искомое разложение $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4$. Поскольку A_4 конечномерна, она также не обладает ограниченной аппроксимативной единицей. Поэтому из [18, теорема 7] следует $\text{db } A_1 = 0$, $\text{db } A_2 = \text{db } A_3 = 1$ и $\text{db } A_4 = 2$ (если соответствующая алгебра нетривиальна).

Список литературы

1. С. Маклейн, *Гомология*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: S. Mac Lane, *Homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **114**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg; Academic Press, New York, 1963.
2. А. Я. Хелемский, *Гомологические характеристики банаховых алгебр*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1973.
3. А. Я. Хелемский, “Об одном методе вычисления и оценки глобальной гомологической размерности банаховых алгебр”, *Матем. сб.*, **87(129)**:1 (1972), 122–135; англ. пер.: A. Ja. Helemskii, “On a method for calculating and estimating the global homological dimension of Banach algebras”, *Math. USSR-Sb.*, **16**:1 (1972), 125–138.
4. Ю. В. Селиванов, “Бипроективные банаховы алгебры”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:5 (1979), 1159–1174; англ. пер.: Ju. V. Selivanov, “Biprojective Banach algebras”, *Math. USSR-Izv.*, **15**:2 (1980), 387–399.
5. Yu. V. Selivanov, “Coretraction problems and homological properties of Banach algebras”, *Topological homology*, Nova Sci. Publ., Huntington, NY, 2000, 145–199.
6. Yu. V. Selivanov, “Fréchet algebras of global dimension zero”, *Algebra*, Proc. of the III international conference on algebra (Krasnoyarsk, 1993), de Gruyter, Berlin, 1996, 225–236.
7. А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1986.
8. Ю. В. Селиванов, *Когомологии банаховых и близких к ним алгебр*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2002.
9. Yu. V. Selivanov, “Cohomological characterizations of biprojective and biflat Banach algebras”, *Monatsh. Math.*, **128**:1 (1999), 35–60.
10. А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры. Общая теория, представления, гомологии*, Наука, М., 1989.
11. Th. W. Palmer, *Banach algebras and the general theory of *-algebras*. Vol. I: *Algebras and Banach algebras*, Encyclopedia Math. Appl., **49**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
12. Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*. Т. 2: *Структура и анализ компактных групп*. Анализ на локально компактных абелевых группах, Мир, М., 1975; пер. с англ.: E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis*.

- Vol. II: *Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **152**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.
13. B. E. Johnson, “A commutative semisimple annihilator Banach algebra which is not dual”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 407–409.
 14. К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории*, т. 1, 2, Мир, М., 1977; пер. с англ.: C. Faith, *Algebra: rings, modules and categories*. I, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **190**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973; C. Faith, *Algebra*. II. *Ring theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **191**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
 15. Ф. Каш, *Модули и кольца*, Мир, М., 1981; пер. с нем.: F. Kasch, *Moduln und Ringe*, Mathematische Leitfäden, Teubner, Stuttgart, 1977.
 16. И. Ламбек, *Кольца и модули*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: J. Lambek, *Lectures on rings and modules*, Blaisdell, Waltham, MA–Toronto, ON–London, 1966.
 17. A. Defant, K. Floret, *Tensor norms and operator ideals*, North-Holland Math. Stud., **176**, North-Holland, Amsterdam, 1993.
 18. Yu. V. Selivanov, “Weak homological bidimension and its values in the class of biflat Banach algebras”, *Extracta Math.*, **11**:2 (1996), 348–365.
 19. A. Yu. Pirkovskii, Yu. V. Selivanov, “Homologically trivial Fréchet algebras”, *Topological algebras and applications*, Contemp. Math., **427**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 367–387.

О. Ю. АРИСТОВ (O. YU. ARISTOV)
Обнинский государственный технический университет
атомной энергетики
E-mail: aristovoyu@inbox.ru

Поступило в редакцию
11.10.2005 и 30.07.2007