Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Кузьмин, Слабая гипотеза о 2-адическом регуляторе для некоторых 2-расширений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 2, 141–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/im6133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:57:41

УДК 511.236.3

Л. В. Кузьмин

Слабая гипотеза о 2-адическом регуляторе для некоторых 2-расширений

Для поля алгебраических чисел K , являющегося конечным 2-расширением поля СМ-типа k с нулевым инвариантом Ивасава $\mu_2(k)$, доказано, что для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K справедлива слабая гипотеза о 2-адическом регуляторе [1]. В частности, эта гипотеза справедлива для K_∞/K , если K является 2-расширением абелева над $\mathbb{Q}$ поля k . Получены некоторые другие результаты в этом же направлении.

Библиография: 6 наименований.

Ключевые слова: круговые $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения, 2-адический регулятор, 2-расширения, инварианты Ивасава.

§ 1. Введение

Пусть k – поле алгебраических чисел и ℓ – фиксированное простое число. Пусть $U(k)$ – группа единиц поля k и $U(k)[\ell]$ – ее про- ℓ -пополнение. Для точки $v|\ell$ поля k через k_v мы обозначаем пополнение поля k относительно v , а через $U(k_v)$ – группу единиц локального поля k_v . Пусть $\log_v: U(k_v) \rightarrow k_v$ – отображение ℓ -адического логарифма. Тогда на группе $\mathcal{A}(k) := \prod_{v|\ell} U(k_v)$ мы определяем билинейную форму S_k вида $\mathcal{A}(k) \times \mathcal{A}(k) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$ следующим образом. Если даны два элемента $x, y \in \mathcal{A}(k)$ и $x = \prod_{v|\ell} x_v$, $y = \prod_{v|\ell} y_v$, где $x_v, y_v \in U(k_v)$, то мы полагаем

$$\log x = \oplus_{v|\ell} \log_v x_v \in \oplus_{v|\ell} k_v = k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell.$$

Аналогичным образом определяется $\log y$. Тогда

$$S_k(x, y) = \mathrm{Sp}_{k/\mathbb{Q}}(\log x \log y), \quad (1)$$

где $\mathrm{Sp}_{k/\mathbb{Q}}$ обозначает след из $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ в $\mathbb{Q}_\ell$, индуцированный отображением следа из k в $\mathbb{Q}$. Если $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ – некоторая система основных единиц поля k и $\varepsilon_0 = 1 + \ell$ ($\varepsilon_0 = 5$ при $\ell = 2$), то, как и в [1], мы определяем ℓ -адический регулятор поля k формулой

$$R_\ell(k) = \det(S_k(\varepsilon_i, \varepsilon_j)) \in \mathbb{Q}_\ell, \quad \text{где } 0 \leq i, j \leq r.$$

В [1] была выдвинута не доказанная до сих пор гипотеза об ℓ -адическом регуляторе, утверждающая, что $R_\ell(k) \neq 0$ для любого поля алгебраических чисел k и любого простого ℓ . Пусть K/k – конечное расширение полей алгебраических чисел, $U(K/k)$ – относительная группа единиц расширения K/k , т. е. $U(K/k) = \{u \in U(K) \mid N_{K/k}(u) \in \mu(k)\}$, где $N_{K/k}$ – норма из K в k , и $\mu(k)$ – группа всех корней из единицы в поле k . Пусть $u_1, \dots, u_t$ – некоторый базис

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00777).

группы $U(K/k)/\mu(K)$. Тогда, как и в [1], относительный ℓ -адический регулятор расширения K/k определяется формулой

$$R_\ell(K/k) = \det(S_k(u_i, u_j)) \in \mathbb{Q}_\ell, \quad \text{где } 1 \leq i, j \leq t.$$

Пусть k_∞/k – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля k . Здесь и далее мы выбираем нумерацию промежуточных подполей расширения k_∞/k следующим образом. В расширении $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ мы обозначаем через $\mathbb{Q}_n$ единственное подполе расширения $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ степени ℓ^n над $\mathbb{Q}$. Для произвольного поля алгебраических чисел k мы полагаем $k_n = k \cdot \mathbb{Q}_n$. В [1] была выдвинута *слабая гипотеза об ℓ -адическом регуляторе*, утверждающая, что для любых k и ℓ найдется индекс n_0 , зависящий только от k , ℓ и такой, что $R_\ell(k_m/k_n) \neq 0$ для всех $m > n \geq n_0$. Отметим, что более детальные определения этих регуляторов и обсуждение их свойств можно найти в [2, §2]. Хотя слабая гипотеза об ℓ -адическом регуляторе и является аналогом *слабой гипотезы Леопольдта*, в отличие от последней, она в настоящий момент далека от доказательства. Поэтому представляет интерес ее доказательство в отдельных частных случаях.

В [3, теоремы 6.2 и 6.3] нами были доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\ell \neq 2$, k – абсолютно абелево поле и K – конечное ℓ -расширение k , причем K абелево над ℓ , т.е. локальные поля K_v абелевы для всех $v|\ell$. Тогда для K и ℓ справедлива слабая гипотеза об ℓ -адическом регуляторе.

ТЕОРЕМА В. Пусть $\ell \neq 2$, k – поле СМ-типа, ℓ – простое число такое, что k содержит первообразный корень степени ℓ из единицы, и круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение k_∞/k имеет нулевой μ -инвариант Ивасава. Пусть K – конечное ℓ -расширение k , причем K абелево над ℓ . Тогда для пары (K, ℓ) справедлива слабая гипотеза об ℓ -адическом регуляторе.

В [4, теорема 7.2] данный результат был обобщен и в случае $\ell = 2$. При этом возникла необходимость рассматривать модули Галуа периода 2 с ненулевым μ -инвариантом Ивасава. Наконец, используя результаты из работы [5] о строении билинейных форм S_k в случае, когда локальные поля k_v не предполагаются абелевыми, автору удалось доказать аналоги теорем А, В (для нечетного ℓ) без предположения, что поля k и K абелевы над ℓ [6, теорема 6.3]. В настоящей работе мы показываем, что условие абелевости поля над ℓ является излишним и в случае $\ell = 2$. Именно, нами доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k – чисто мнимое поле СМ-типа такое, что его μ -инвариант Ивасава $\mu_2(k)$ равен нулю. Пусть K – произвольное конечное 2-расширение поля k . Тогда для кругового $\mathbb{Z}_2$ -расширения K_∞/K справедлива слабая гипотеза о 2-адическом регуляторе.

ТЕОРЕМА 2. Пусть k – конечное абелево расширение $\mathbb{Q}$ и K – произвольное конечное 2-расширение поля k . Тогда для кругового $\mathbb{Z}_2$ -расширения K_∞/K справедлива слабая гипотеза о 2-адическом регуляторе.

Мы выводим эти теоремы как простые следствия из доказываемой ниже теоремы 3, которая существенно точнее, но имеет весьма громоздкую формулировку.

План работы таков. В §2 мы напоминаем основные определения и результаты из [6], которые потребуются в настоящей работе. В §3 мы формулируем

и доказываем нашу основную теорему (теорему 3). Это доказательство опирается на предложение 2, которое специфично именно для случая $\ell = 2$. Затем выводим из теоремы 3 сформулированные выше теоремы 1, 2. Мы обсуждаем также смысл условий (v) и (v'), входящих в формулировку теоремы 3.

§ 2. Предварительные определения и результаты

Сформулируем ряд определений и результатов, необходимых для нашего доказательства. Пусть K – конечное расширение поля рациональных ℓ -адических чисел $\mathbb{Q}_\ell$ и K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K . Для промежуточного поля K_n расширения K_∞/K пусть q_n – порядок ℓ -компоненты $\mu_\ell(K_n)$ группы всех корней из единицы в поле K_n . Над полем K_n существует единственное неразветвленное расширение L_n степени q_n , и согласно теории Куммера $L_n = K_n(\sqrt[q_n]{u_n})$ для некоторой единицы $u_n \in U(K_n)$. Через $V(K_n)$ обозначим мультипликативный модуль Галуа, порожденный группой $U(K_n)/\mu(K_n)$ и элементом $\sqrt[q_n]{u_n}$. Для упрощения обозначений мы часто будем записывать операцию в $V(K_n)$ аддитивно.

Для поля алгебраических чисел k и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞/k мы полагаем $V(k_n) = \prod_{v|\ell} V(k_{n,v})$. Спаривание (1) по линейности продолжается на $V(k_n)$. Если поле k абелево над ℓ , т. е. локальные поля k_v абелевы для всех $v|\ell$, то основное свойство спариваний $S_{k_n}(\cdot, \cdot)$ выражает (см. [2, предложение 7.2]) следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть K – конечное абелево расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$. Тогда существует индекс r , зависящий только от K и такой, что для всех $n > r \geq r$ справедливо равенство

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log V(k_n) = \text{Ker } \text{Sp}_{k_n/k_p}(V(k_n)^\perp). \quad (2)$$

Здесь γ_p – некоторая фиксированная топологическая образующая группы Галуа $G(k_\infty/k_p)$, $\Phi_n(p)$ – некоторый явно указанный в [2] элемент групповой алгебры $\mathbb{Q}_\ell[G(k_n/k_p)]$, который зависит только от n и p , но не от поля k , $V(k_n)^\perp$ – модуль, дуальный к $\log V(k_n)$, т. е.

$$V(k_n)^\perp = \left\{ y \in \prod_{v|\ell} k_{n,v} \mid \text{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}}(y \log x) \in \mathbb{Z}_\ell \quad \forall x \in V(k_n) \right\},$$

и $\text{Ker } \text{Sp}_{k_n/k_p} A$ обозначает ядро отображения следа Sp_{k_n/k_p} , примененного к модулю A .

Пусть $V(k_\infty) = \varprojlim V(k_n)$, где предел берется относительно норменных отображений. Тогда $V(k_\infty)$ является $\Lambda(p)$ -модулем, где $\Lambda(p)$ – пополненная групповая алгебра $\mathbb{Z}_\ell[[G(k_\infty/k_p)]]$ группы $G(k_\infty/k_p)$, и из выполнения равенств (2) для всех $n > p$ следует существование внутреннего произведения (см. [2, предложение 7.3])

$$V(k_\infty) \times V(k_\infty) \rightarrow \Lambda(p). \quad (3)$$

Напомним, что произведение (3) называется *внутренним*, если оно индуцирует изоморфизм $V(k_\infty) \cong \text{Hom}_{\Lambda(p)}(V(k_\infty), \Lambda(p))$. Именно существование произведения (3) сыграло главную роль в доказательстве теоремы A из [3].

Ситуация существенно иная в случае, когда локальные поля k_v для $v|\ell$ или хотя бы некоторые из них неабелевы. В [6] при описании этой новой ситуации для конечного расширения $K/\mathbb{Q}_\ell$ и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K были определены при всех n , больших некоторого p , конечные абелевы ℓ -группы $\mathcal{A}^{(p)}(K_n)$ и $\mathcal{B}^{(p)}(K_n)$, где

$$\mathcal{A}^{(p)}(K_n) = (\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log V(K_n)/\mathcal{M}(K_n),$$

$$\mathcal{B}^{(p)}(K_n) = \text{Ker } \text{Sp}_{K_n/K_p}(V(K_n)^\perp)/\mathcal{M}(K_n),$$

$$\mathcal{M}(K_n) = (\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log V(K_n) \cap \text{Ker } \text{Sp}_{K_n/K_p}(V(K_n)^\perp).$$

Главный результат о группах $\mathcal{A}^{(p)}(K_n)$ и $\mathcal{B}^{(p)}(K_n)$ составляет основная теорема работы [5], утверждающая, что существует константа c , зависящая только от K , ℓ и такая, что для всех $n > p$ справедливы неравенства $d(\mathcal{A}^{(p)}(K_n)) \leq cn$ и $d(\mathcal{B}^{(p)}(K_n)) \leq cn$, где $d(A)$ – минимальное число образующих $\mathbb{Z}_\ell$ -модуля A . Этот результат был использован в [6] при изучении групп $\mathcal{A}^{(p)}(K_n)$ и $\mathcal{B}^{(p)}(K_n)$. Для поля алгебраических чисел k и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞/k мы выбираем в качестве p такой индекс, что при этом p справедливы сформулированные выше утверждения для пополнений k_v относительно всех точек $v|\ell$.

Итак, пусть k – поле алгебраических чисел. Композиция ℓ -адического логарифма с умножением на $(\gamma_p - 1)\Phi_n(p)$ определяет эпиморфизм (см. [6, формула (4.2)])

$$\varphi_n: V(k_n) \rightarrow (\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log V(k_n).$$

Обозначим подгруппу $\varphi_n^{-1}(\mathcal{M}^{(p)}(k_n))$ через $V'(k_n)$. Тогда $d(V(k_n)/V'(k_n)) \leq cn$ для некоторой константы c , не зависящей от n . Для $\mathbb{Z}_\ell$ -модуля A и фиксированного натурального s через $A(s)$ мы обозначаем группу $A/\ell^s A$. В [6, формула (4.5)] было определено естественное произведение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_n^s: V(k_n)(s) \times V'(k_n)(s) \rightarrow \mathbb{Z}(s) \quad (4)$$

и было доказано, что существует константа c_1 , не зависящая от n и такая, что ядра произведения (4) слева и справа имеют не более $c_1 n$ образующих (см. [6, предложение 4.1]). В явном виде произведение (4) задается формулой

$$\langle x, y \rangle_n^s = \text{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}}((\log x)(\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log y) \pmod{\ell^s},$$

где $x \in V(k_n)(s)$, $y \in V'(k_n)(s)$. Будем использовать произведение (4) только в случае $s = 1$. Для того чтобы явно указать поле k , мы будем обозначать соответствующее произведение через $\langle \cdot, \cdot \rangle^1(k_n)$. Как и в [6], мы используем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей $\{A_n\}$ назовем *ограниченной*, если существует не зависящая от n константа c такая, что $d(A_n) \leq cn$ для всех n . Если $\{A_n\}$ – последовательность $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -модулей, где $G \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, то мы говорим, что последовательность $\{A_n\}$ имеет *ограниченные кохомологии*, если для любой размерности i группы кохомологий Тэйта $H^i(G, A_n)$ образуют ограниченную последовательность (ввиду цикличности G это условие достаточно проверять только для $i = 0$ и $i = 1$). Пусть A_n – последовательность $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей и $B_n, C_n \subseteq A_n$. Мы будем говорить, что последовательности подгрупп $\{B_n\}$ и $\{C_n\}$ *эквивалентны*, если последовательности групп $\{B_n/(B_n \cap C_n)\}$ и $\{C_n/(B_n \cap C_n)\}$ ограничены.

Для поля алгебраических чисел k и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞/k мы полагаем $V(k_\infty) = \varprojlim V(k_n)$, где предел берется относительно норменных отображений. Если $\Lambda = \Lambda(p)$ – пополненная групповая алгебра группы $G(k_\infty/k_p)$, то согласно [4, предложение 3.1] $V(k_\infty)$ является свободным Λ -модулем ранга $[k_p : \mathbb{Q}]$. Если $V^0(k_n)$ – образ естественной проекции $V(k_\infty) \rightarrow V(k_n)$, то последовательности групп $V(k_n)$ и $V^0(k_n)$ эквивалентны. Пусть $U(k_n)[\ell]$ – про- ℓ -пополнение группы единиц поля k_n и $\bar{U}(k_\infty) = \varprojlim (U(k_n)[\ell]/\mu(k_n))$, где предел берется относительно норменных отображений. Тогда существует естественное вложение $\bar{U}(k_\infty) \hookrightarrow V(k_\infty)$. Как и в [4], мы обозначаем через $V^+(k_\infty)$ минимальный Λ -подмодуль в $V(k_\infty)$ такой, что $\bar{U}(k_\infty) \subseteq V^+(k_\infty)$ и Λ -модуль $V(k_\infty)/V^+(k_\infty)$ не имеет кручения. Для чисто мнимого поля k выполняется равенство

$$\mathrm{rk}(V^+(k_\infty)) = \mathrm{rk}(V(k_\infty)/V^+(k_\infty)) = \frac{1}{2}[k_p : \mathbb{Q}].$$

Как и в [6], пусть f_n – естественное отображение, $f_n : U(k_n)[\ell] \rightarrow V(k_n)$. Тогда мы полагаем

$$V^+(k_n) = \{x \in V(k_n) \mid x^{\ell^a} \in \mathrm{Im} f_n \text{ для некоторого } a\}.$$

Как мы увидим далее, в условиях теоремы 3 последовательности подгрупп $\{V^+(k_n)\}$ и $\{\mathrm{Im} \psi_n\}$, где $\psi_n : V^+(k_\infty) \rightarrow V(k_n)$ – естественная проекция, эквивалентны. Поскольку в рассматриваемом случае нет произведения (3) и, соответственно, мы не можем определить модуль $V^-(k_\infty)$ как ортогональное дополнение к $V^+(k_\infty)$, то, как и в [6], положим

$$V^-(k_n) = \{x \in V(k_n) \mid \mathrm{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}}(\log x \log y) = 0 \quad \forall y \in V^+(k_n)\}.$$

Рассмотрим (в аддитивной записи) Λ -модуль $P'(k_\infty) = V(k_\infty)/(V^+(k_\infty) + 2V(k_\infty))$. Если F – максимальный конечный подмодуль в $P'(k_\infty)$, то модуль Галуа $P(k_\infty) = P'(k_\infty)/F$ является свободным $(\Lambda/2\Lambda)$ -модулем ранга $\frac{1}{2}[k_p : \mathbb{Q}]$. Через $Q(k_\infty)$ мы обозначаем ядро естественной проекции $V(k_\infty) \rightarrow P(k_\infty)$. Существование модуля $Q(k_\infty)$, отличного от $V(k_\infty)$, и составляет основную особенность случая $\ell = 2$. Мы определим (в аддитивной записи) $P(k_n)$ как $V(k_n)/(V^+(k_n) + 2V(k_n))$ и $Q(k_n)$ как ядро естественного отображения $V(k_n) \rightarrow P(k_n)$. Таким образом, при проекции $V(k_\infty)(1) \rightarrow V(k_n)(1)$ модуль $P(k_\infty)$ отображается в $P(k_n)$, а подмодуль $Q(k_\infty)$ при проекции $V(k_\infty) \rightarrow V(k_n)$ отображается в $Q(k_n)$.

§ 3. Формулировка и доказательство основной теоремы

Напомним, что для поля алгебраических чисел k и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞/k через $T_\ell(k_\infty)$ (соответственно, через $X(k_\infty)$) мы обозначаем группу Галуа максимального абелева неразветвленного (соответственно, неразветвленного вне ℓ) ℓ -расширения поля k_∞ . Через $\mathrm{Tors}(X(k_\infty))$ мы обозначаем подмодуль Λ -кручения в $X(k_\infty)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\ell = 2$ и k – чисто мнимое поле алгебраических чисел, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) группа $T_\ell(k_\infty)$ конечно порождена как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль, т.е. $\mu_2(k) = 0$, где $\mu_2(k)$ – μ -инвариант Ивасава поля k ;

- (ii) группа $\text{Tors}(X(k_\infty))$ конечно порождена как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль;
- (iii) для поля k и его кругового $\mathbb{Z}_2$ -расширения k_∞ справедлива слабая гипотеза о 2-адическом регуляторе;
- (iv) последовательность $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей $Q(k_n)/(Q(k_n) \cap (V^+(k_n) + V^-(k_n)))$ ограничена;
- (v) последовательность $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей $E(k_n) := V^-(k_n)/(Q(k_n) \cap V^-(k_n))$ ограничена.

Тогда для любого поля K , являющегося конечным 2-расширением поля k , выполняются условия:

- (i') $\mu_2(K) = 0$;
- (ii') $\mu_2(\text{Tors}(X(K_\infty))) = 0$;
- (iii') для поля K и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K справедлива слабая гипотеза о 2-адическом регуляторе;
- (iv') последовательность $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей $Q(K_n)/(Q(K_n) \cap (V^+(K_n) + V^-(K_n)))$ ограничена;
- (v') последовательность $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей $E(K_n) := V^-(K_n)/(Q(K_n) \cap V^-(K_n))$ ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать теорему только для случая, когда K – квадратичное расширение k , так как общий случай следует отсюда по индукции. Итак, предположим, что $[K : k] = 2$, и обозначим через G группу Галуа расширения K/k . Таким образом, $[K_n : k_n] = 2$ для любого n , и $G \cong G(K_n/k_n) \cong G(K_\infty/k_\infty)$.

То, что условия (i) и (i') эквивалентны, составляет содержание известной теоремы Ивасава о μ -инварианте. В [6, § 5] объясняется, что условия (ii) и (ii') также эквивалентны. Впрочем, поскольку $-1 \in K$, в нашем случае условия (i') и (ii') эквивалентны. Действительно, ранг $X(K_\infty)$ над $\Lambda = \Lambda(p)$ равен $\frac{1}{2}[k_p : \mathbb{Q}]$, поэтому

$$\mu_2(X(K_\infty)(1)) = \frac{1}{2}[k_p : \mathbb{Q}] + \mu_2((\text{Tors}(X(K_\infty)))(1)),$$

но, применяя теорию Куммера для описания расширения Галуа поля K_∞ с группой Галуа $X(K_\infty)(1)$, мы получаем, что

$$\mu_2(X(K_\infty)(1)) = \frac{1}{2}[k_p : \mathbb{Q}] + \mu_2(T_\ell(K_\infty)(1)),$$

т. е. $\mu_2((\text{Tors}(X(K_\infty)))(1)) = \mu_2(T_\ell(K_\infty)(1))$.

Для дальнейшего нам потребуется несколько утверждений из [6]. Именно, в [6] было доказано, что последовательности G -модулей $\{V(K_n)\}$, $\{V^+(K_n)\}$ и $\{V^-(K_n)\}$ имеют ограниченные когомологии (см. [6, леммы 6.2, 6.4, 6.5]).

ЛЕММА 1. Последовательности $\{P(K_n)\}$ и $\{Q(K_n)\}$ имеют ограниченные когомологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $V(K_n)$ и $V^+(K_n)$ не имеют кручения над $\mathbb{Z}_\ell$, из ограниченности когомологий для последовательностей $\{V(K_n)\}$ и $\{V^+(K_n)\}$ следует ограниченность когомологий для последовательностей $\{V(K_n)(1)\}$ и $\{V^+(K_n)(1)\}$. Далее, $V(K_n)/V^+(K_n)$ не имеет кручения над $\mathbb{Z}_\ell$, поэтому для любого n точна последовательность

$$0 \rightarrow V^+(K_n)(1) \rightarrow V(K_n)(1) \rightarrow P(K_n) \rightarrow 0,$$

из которой следует ограниченность когомологий для последовательности $\{P(K_n)\}$. Наконец, ограниченность когомологий для $\{Q(K_n)\}$ следует из существования при любом n точной последовательности

$$0 \rightarrow Q(K_n) \rightarrow V(K_n) \rightarrow P(K_n) \rightarrow 0.$$

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В условиях теоремы 3 для поля K выполняется условие (v') этой теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произведения (4) для $s = 1$. Заметим, что группа $V(k_n)(1)$ содержит подгруппу $V^+(k_n)(1)$, а группа $V'(k_n)(1)$ содержит подгруппу $\tilde{V}^-(k_n)(1)$, которая определяется как образ группы $V^-(k_n) \cap V'(k_n)$ относительно проекции $V^-(k_n) \cap V'(k_n) \rightarrow V'(k_n)(1)$.

Из определения произведения (4) следует, что группы $V^+(k_n)(1)$ и $\tilde{V}^-(k_n)(1)$ ортогональны относительно этого произведения. Более того, поскольку $\text{rk } V^+(k_n) + \text{rk } V^-(k_n) = \text{rk } V(k_n)$, из условия (v) следует, что последовательности подгрупп $\{V^+(k_n)(1)\}$ и $\{\tilde{V}^-(k_n)(1)\}$ в $V(k_n)(1)$ эквивалентны. Действительно, $V^+(k_n)$ содержится в ядре естественного отображения $V(k_n)(1) \rightarrow P(k_n)$ по определению, а группы $\tilde{V}^-(k_n)(1)$ в силу условия (v) содержатся в ядрах таких отображений с точностью до ограниченной последовательности. Из определения произведения (4) следует, что для $a \in V^+(k_n)$ и $b \in V^-(k_n) \cap V'(k_n)$ мы имеем $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_n^1 = 0$, где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – образы a и b в группах $V(k_n)(1)$ и $V'(k_n)(1)$ соответственно. Таким образом, произведения (4) индуцируют набор произведений (по одному для каждого n)

$$V^+(k_n)(1) \times P'(k_n) \rightarrow \mathbb{Z}(1), \quad (5)$$

где $P'(k_n) \subseteq P(k_n)$ – образ $V'(k_n)$ в $P(k_n)$. При этом последовательности $\{P'(k_n)\}$ и $\{P(k_n)\}$ эквивалентны, а левые и правые ядра этих произведений образуют ограниченные последовательности.

С другой стороны, мы имеем $E(K_n) \subseteq P(K_n)$, и если последовательность $\{E(K_n)\}$ не ограничена, то последовательность $\{E(K_n)^G\}$ также не ограничена. Таким образом, если условие (v') не выполняется, то мы имеем в $\{P(K_n)^G\}$ неограниченную последовательность $\{E(K_n)^G\}$. Рассмотрим естественные отображения $N(n): P(K_n) \rightarrow P(k_n)$ и $i(n): P(k_n) \rightarrow P(K_n)$, из которых первое индуцировано норменным отображением $N_{K_n/k_n}: V(K_n) \rightarrow V(k_n)$, а второе – вложением $i_{k_n/K_n}: V(k_n) \rightarrow V(K_n)$. Поскольку последовательность групп когомологий $\{H^0(G, P(K_n))\}$ ограничена, мы получаем, что последовательность $\{E(K_n)^G\}$ эквивалентна последовательности $\{\text{Im } i(n) \cap E(K_n)^G\}$. Таким образом, в последовательности $\{P(k_n)\}$ имеется неограниченная последовательность подгрупп $\{E'(k_n)\}$ такая, что $i(n)(E'(k_n)) \subseteq E(K_n)^G$ для всех достаточно больших n . Рассмотрим теперь произведения (4) одновременно для полей k_n и K_n . Если $x \in E'(k_n)$, то $i(n)(x) \in E(K_n)^G$ и, следовательно, $\langle \bar{y}, i(n)(x) \rangle^1(K_n) = 0$ для любого $y \in V^+(K_n)$, но тогда $\langle \bar{z}, x \rangle^1(k_n) = 0$ для всякого z из группы $N_{K_n/k_n}(V^+(K_n))$. Поскольку последовательность $\{V^+(K_n)\}$ имеет ограниченные когомологии, мы получаем, что последовательности подгрупп $\{V^+(k_n)\}$ и $\{N_{K_n/k_n}(V^+(K_n))\}$ эквивалентны. Итак, заменяя в случае необходимости последовательность $\{E'(k_n)\}$ на эквивалентную (следовательно, неограниченную) последовательность $\{E''(k_n)\}$ такую, что $E''(k_n) \subseteq P'(k_n)$,

мы получаем, что для любых $x \in E''(k_n)$ и $z \in V^+(k_n)(1)$ выполняется равенство $\langle z, x \rangle^1(k_n) = 0$, это противоречит ограниченности последовательности ядер произведений (5). Предложение доказано.

Продолжим доказательство теоремы. Положим $V_1^-(K_n) = V^-(K_n) \cap Q(K_n)$. Аналогичным образом определим $V_1^-(k_n)$. В силу предложения 2 для поля K выполнено условие (v'), т. е. последовательности $\{V^-(K_n)\}$ и $\{V_1^-(K_n)\}$ эквивалентны. Таким образом, мы имеем три последовательности G -модулей с ограниченными когомологиями: $\{Q(K_n)\}$, $\{V^+(K_n)\}$ и $\{V_1^-(K_n)\}$, причем вложения $V^+(K_n) \hookrightarrow Q(K_n)$ и $V_1^-(K_n) \hookrightarrow Q(K_n)$ индуцируют вложения

$$V^+(K_n)(1) \hookrightarrow Q(K_n)(1), \quad V_1^-(K_n)(1) \hookrightarrow Q(K_n)(1).$$

Согласно [6, предложение 5.6] для поля K справедлива слабая гипотеза о 2-адическом регуляторе тогда и только тогда, когда ранги $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей $C(K_n) := V^+(K_n) \cap V^-(K_n)$ остаются ограниченными в совокупности. Так как $V_1^-(K_n)$ имеет конечный индекс в $V^-(K_n)$, группа $C'(K_n)$, определяемая как $V^+(K_n) \cap V_1^-(K_n)$, имеет конечный индекс в $C(K_n)$, поэтому достаточно доказать, что ранги $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей $C'(K_n)$ ограничены в совокупности при условии, что аналогичным свойством обладают модули $C'(k_n)$.

Поскольку $\mathbb{Z}_\ell$ -модули $Q(k_n)/V^+(k_n)$ и $Q(k_n)/V_1^-(k_n)$ не имеют кручения и аналогичное утверждение справедливо для поля K_n , мы видим, что $C'(k_n)(1) = V^+(k_n)(1) \cap V_1^-(k_n)(1)$ (пересечение берется в $Q(k_n)(1)$) и аналогичное утверждение верно для $C'(K_n)(1)$. Учитывая, что последовательности $\{V^+(K_n)(1)\}$ и $\{V_1^-(K_n)(1)\}$ имеют ограниченные когомологии, мы получаем, что последовательности $\mathbb{F}_2$ -модулей, где $\mathbb{F}_2$ – поле из двух элементов,

$$\{V^+(K_n)(1)^G / i_{k_n/K_n}(V^+(k_n)(1))\}, \quad \{V_1^-(K_n)(1)^G / i_{k_n/K_n}(V_1^-(k_n)(1))\} \quad (6)$$

ограничены. Из ограниченности когомологий для последовательности G -модулей $\{Q(K_n)\}$ следует, что последовательность ядер отображений $i_{k_n/K_n}: Q(k_n)(1) \rightarrow Q(K_n)(1)$ также ограничена. Из этого и из ограниченности последовательности $\{C'(k_n)(1)\}$ следует, что последовательность

$$\{i_{k_n/K_n}(V^+(k_n)(1)) \cap i_{k_n/K_n}(V_1^-(k_n)(1))\}$$

также ограничена. Тогда из ограниченности последовательностей (6) вытекает ограниченность последовательности $V^+(K_n)(1)^G \cap V_1^-(K_n)(1)^G$, а следовательно, и последовательности $\{C'(K_n)(1) = V^+(K_n)(1) \cap V_1^-(K_n)(1)\}$. Тогда и последовательность $\{C'(K_n)\}$ ограничена, т. е. $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг модуля $C'(K_n)$ не превосходит cn для некоторой константы c , не зависящей от n . Теперь предположим, что $\text{rk } C'(K_{n+1}) > \text{rk } C'(K_n)$. Это означает, что $\mathbb{Q}_2[G(K_{n+1}/K_p)]$ -модуль $C'(K_{n+1}) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Q}_2$ содержит хотя бы одно прямое слагаемое I_{n+1} , которое изоморфно ядру естественного эпиморфизма $\mathbb{Q}_2[G(K_{n+1}/K_p)] \rightarrow \mathbb{Q}_2[G(K_n/K_p)]$, имеющему $\mathbb{Z}_2$ -ранг $2^n - 2^p$. Очевидно, что при фиксированном c неравенство $cn \geq 2^n - 2^p$ не может выполняться для сколь угодно больших n , т. е. ранг $C'(K_n)$ стабилизируется начиная с некоторого n , но согласно [6, предложение 5.6] это и означает, что для расширения K_∞/K выполнено условие (iii').

Осталось показать, что для расширения K_∞/K выполняется условие (iv'). Действительно, последовательности $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей $\{V^-(K_n)\}$ и $\{V_1^-(K_n)\}$ эквивалентны. В частности, для $\mathbb{Z}_\ell$ -рангов соответствующих модулей выполняется

условие $\mathrm{rk} V_1^-(K_n) + cn \geq \mathrm{rk} V^-(K_n)$ при всех достаточно больших n . Далее, мы показали, что при всех достаточно больших n мы имеем $d(C'(K_n)) = c_0$ для некоторой константы c_0 , не зависящей от n . Тогда для всех достаточно больших n

$$\begin{aligned} d(Q(K_n)/(Q(K_n) \cap (V^+(K_n) + V^-(K_n)))) \\ \leq d(Q(K_n)/(Q(K_n) \cap (V^+(K_n) + V_1^-(K_n)))) \\ = d(Q(K_n)(1)) - d(V^+(K_n)(1)) - d(V_1^-(K_n)(1)) + c_0 \\ \leq d(Q(K_n)(1)) - d(V^+(K_n)(1)) - d(V^-(K_n)(1)) + cn \leq c_1 n, \end{aligned}$$

где $c_1 = c + c_0$. Таким образом, условие (iv') выполняется для расширения K_∞/K . Теорема доказана полностью.

Теперь мы покажем, как из теоремы 3 следуют теоремы 1, 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1, 2. Пусть k – чисто мнимое поле СМ-типа и k_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля k . Предположим, что для k выполняется условие (i) теоремы 3, а следовательно, и (ii). Условие (iii) выполнено в нашем случае, так как для поля СМ-типа слабая гипотеза об ℓ -адическом регуляторе эквивалентна (доказанной) слабой гипотезе Леопольдта.

Чтобы доказать, что для k выполнены условия (iv) и (v), мы положим $G = \{1, \tau\} = G(k/k_0)$, где k_0 – максимальное вполне вещественное подполе поля k . Для любого $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -модуля A через $A^\oplus$ и $A^\ominus$ мы обозначаем максимальные подмодули в A , на которые τ действует тождественно и умножением на -1 (в аддитивной записи) соответственно. Для упрощения обозначений мы будем вместо $V(k_n)$ записывать V_n , вместо $V^+(k_n)$ записывать V_n^+ и т. д. В частности, в V_n имеются подмодули V_n^+ , $V_n^\oplus$, V_n^- и $V_n^\ominus$. Легко видеть, что для любого n модуль V_n^+ содержится в $V_n^\oplus$, причем $d(V_n^\oplus/V_n^+) \leq c$ для некоторой константы c , не зависящей от n (можно положить $c = r + 1$, где r – ранг ядра из гипотезы Леопольдта). Соответственно, $V_n^- \supseteq V_n^\ominus$ и $d(V_n^-/V_n^\ominus) \leq c$. Далее, $V_n^\oplus$ содержит группу $(1 + \tau)V_n$ и $V_n^\oplus/(1 + \tau)V_n = H^0(G, V_n)$. Аналогично, $V_n^\ominus$ содержит $(1 - \tau)V_n$ и $V_n^\ominus/(1 - \tau)V_n = H^{-1}(G, V_n)$. Из локальной теории полей классов следует, что при любом n выполняются неравенства $d(V_n^\oplus/(1 + \tau)V_n) \leq c_1$ и $d(V_n^\ominus/(1 - \tau)V_n) \leq c_1$ для некоторой константы c_1 , не зависящей от n . Тогда

$$d(V_n^-(Q_n \cap V_n^-)) \leq d(V_n^-/V_n^\ominus) + d(V_n^\ominus/(1 - \tau)V_n) \leq c + c_1.$$

Это показывает, что для расширения k_∞/k выполнено условие (v).

Чтобы доказать выполнение условия (iv), мы положим $Q'_n = V_n^\oplus + 2V_n = V_n^\oplus \oplus (1 - \tau)V_n$. Тогда $Q_n \subseteq Q'_n$ и $d(Q'_n/Q_n) \leq c_2$, где c_2 не зависит от n . Таким образом, $d(Q_n/(Q_n \cap (V_n^+ + V_n^-))) \leq c_2 + d(Q'_n/(Q'_n \cap (V_n^+ + V_n^-)))$. Далее,

$$Q'_n \cap (V_n^+ + V_n^-) = (V_n^\oplus \oplus (1 - \tau)V_n) \cap (V_n^+ + V_n^-) \supseteq V_n^+ \oplus (1 - \tau)V_n.$$

Таким образом, $d(Q'_n/(Q'_n \cap (V_n^+ + V_n^-))) \leq d(V_n^\oplus/V_n^+) = c$. Собирая вместе все эти оценки, мы получаем, что $d(Q_n/(Q_n \cap (V_n^+ + V_n^-)))$ не превосходит некоторой константы c_3 , не зависящей от n . Это доказывает теорему 1.

Для доказательства теоремы 2 заметим, что теорему достаточно доказать для случая мнимого абелева поля k , но в этом случае мы оказываемся в ситуации теоремы 1, а условие (i) следует из теоремы Ферреро–Вашингтона.

В заключение сделаем замечание по поводу условий (iv) и (iv') теоремы 3. Рассмотрим Λ -модуль $W := \varprojlim V^-(K_n)$. Предположим, что W является Λ -модулем без кручения ранга $\frac{1}{2}[K_p : \mathbb{Q}]$, и определим $V^-(K_\infty)$ как минимальный подмодуль в $V(K_\infty)$ такой, что $W \subseteq V^-(K_\infty)$ и $V(K_\infty)/V^-(K_\infty)$ является Λ -модулем без кручения. Известно, что такой $V^-(K_\infty)$ существует, если K имеет абелевы пополнения K_v для всех точек v , лежащих над ℓ . В предположении существования $V^-(K_\infty)$ условие (iii') равносильно тому, что $V^+(K_\infty) \cap V^-(K_\infty) = 0$. В силу условия (v') имеем $V^-(K_\infty) \subset Q(K_\infty)$, поэтому существует периодический Λ -модуль $D(K_\infty) := Q(K_\infty)/(V^+(K_\infty) + V^-(K_\infty))$, и в этом случае условие (iv') означает, что модуль $D(K_\infty)$ имеет нулевой μ -инвариант. Вопрос о том, существует ли такой модуль $V^-(K_\infty)$ в общем случае, весьма труден, и ответ на него неизвестен.

Список литературы

1. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о l -адической теореме Дирихле и l -адическом регуляторе”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:6 (1981), 1203–1240; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the l -adic Dirichlet theorem and the l -adic regulator”, *Math. USSR-Izv.*, **19**:3 (1982), 445–478.
2. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. V. Рост ℓ -адического регулятора в круговом $\mathbb{Z}_\ell$ -расширении поля алгебраических чисел”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:5 (2009), 105–170; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the ℓ -adic regulator. V. Growth of the ℓ -adic regulator in the cyclotomic $\mathbb{Z}_\ell$ -extension of an algebraic number field”, *Izv. Math.*, **73**:5 (2009), 959–1021.
3. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о l -адическом регуляторе. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:4 (1989), 782–813; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the l -adic regulator. II”, *Math. USSR-Izv.*, **35**:1 (1990), 113–144.
4. Л. В. Кузьмин, “Новые явные формулы для символа норменного вычета и их приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:6 (1990), 1196–1228; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “New explicit formulas for the norm residue symbol, and their applications”, *Math. USSR-Izv.*, **37**:3 (1991), 555–586.
5. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. III”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:6 (1999), 29–82; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the ℓ -adic regulator. III”, *Math. USSR-Izv.*, **63**:6 (1999), 1089–1138.
6. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. IV”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:2 (2000), 43–88; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the ℓ -adic regulator. IV”, *Izv. Math.*, **64**:2 (2000), 265–310.

Л. В. КУЗЬМИН (L. V. KUZ'MIN)
 Российский научный центр “Курчатовский институт”,
 г. Москва
 E-mail: helltiapa@mail.ru

Поступило в редакцию
 29.11.2010