Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Вербицкий, Голоморфные расслоения на диагональных многообразиях Хопфа, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 5, 13–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/im616>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:54:32

УДК 515.171.3+515.174.5

М. С. Вербицкий

Голоморфные расслоения на диагональных многообразиях Хопфа

Доказано, что каждое стабильное голоморфное расслоение на многообразии Хопфа $M = (\mathbb{C}^n \setminus 0)/\langle A \rangle$, где A – линейный автоморфизм, $\dim M \geq 3$, поднимается до $\tilde{G}_F$ -эquivариантного когерентного пучка на $\mathbb{C}^n$, где $\tilde{G}_F \cong (\mathbb{C}^*)^l$ – коммутативная редуктивная группа, действующая на $\mathbb{C}^n$ и содержащая диагональный линейный оператор $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Также доказано, что все расслоения на M фильтруемые, т. е. получаются в результате последовательных расширений когерентных пучков ранга 1.

Библиография: 24 наименования.

§ 1. Введение

В настоящей работе мы изучаем многообразия Хопфа вида $M = (\mathbb{C}^n \setminus 0)/\langle A \rangle$, где $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ – линейный оператор с собственными значениями $|\alpha_i| < 1$ (такой оператор называется *линейной контракцией*). Деформируя A к скалярному оператору $\lambda \cdot \mathrm{Id}$, $0 < |\lambda| < 1$, мы находим, что M диффеоморфно $S^{2n-1} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong S^{2n-1} \times S^1$. Нечетные номера Бетти многообразия M нечетны, а значит, M не допускает кэлеровой структуры. Многообразие Хопфа – первый и наиболее фундаментальный пример некэлерова многообразия, встречающийся в алгебраической геометрии.

Если оператор A диагонален и имеет форму $A = \tau \cdot \mathrm{Id}$, $\tau \in \mathbb{C}$, то M – эллиптическое расслоение над $\mathbb{C}P^{n-1}$ со слоями, изоморфными (неканонически) эллиптической кривой $C_\tau = \mathbb{C}^*/\langle \tau \rangle$. В этом (так называемом “классическом”) случае алгебраическая размерность M максимально возможная для многообразия Хопфа. Для произвольного A алгебраическая размерность M может принимать любое значение от 0 до $n - 1$.

Алгебраическая геометрия многообразий Хопфа, особенно поверхностей Хопфа, хорошо изучена (см. [3], [4], [10], [11], [15]). Для $\dim M = 2$ достаточно хорошо изучена геометрия стабильных голоморфных расслоений на M (см. [16]).

Типичное стабильное векторное расслоение в такой ситуации не фильтруемо.

Если $\dim_{\mathbb{C}} M > 2$, геометрия голоморфных векторных расслоений на многообразии Хопфа устроена принципиально иначе. В работе [24] показано, что

любое голоморфное расслоение (и любой когерентный пучок) на классическом многообразии Хопфа

$$M = (\mathbb{C}^n \setminus 0) / \langle \lambda \cdot \text{Id} \rangle, \quad n > 2, \quad 0 < |\lambda| < 1,$$

фильтруемо. В настоящей работе мы доказываем этот результат для произвольного диагонального многообразия Хопфа.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ – диагональный линейный оператор со всеми собственными значениями $|\alpha_i| < 1$, а $M = (\mathbb{C}^n \setminus 0) / \langle A \rangle$ – соответствующее многообразие Хопфа. Тогда любой когерентный пучок $F \in \text{Coh}(M)$ является фильтруемым, иначе говоря, допускает фильтрацию

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_m = F$$

с подфакторами $\text{rk } F_i / F_{i-1} \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя метод индукции, мы можем предположить, что любой пучок F' , $\text{rk } F' < \text{rk } F$, фильтруемый. Тогда пучок F является фильтруемым, если он имеет собственный когерентный подпучок. В том случае, когда такого подпучка нет, F стабилен. Поэтому теорема вытекает из следующей теоремы, доказанной в § 6 методами калибровочной теории.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ – диагональный линейный оператор со всеми собственными значениями $|\alpha_i| < 1$, а $M = (\mathbb{C}^n \setminus 0) / \langle A \rangle$ – соответствующее многообразие Хопфа. Выберем локально конформно кэлерову эрмитову метрику на M , как в п. 2.2. Пусть F – голоморфное расслоение (или рефлексивный когерентный пучок) на M , стабильное по отношению к этой эрмитовой структуре¹. Тогда F фильтруемое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 6.5 (см. замечание 6.4).

Доказательство теоремы 1.2 устроено следующим образом. Используя соответствие Кобаяши–Хитчина на комплексных эрмитовых многообразиях (см. § 3), мы покажем, что любое стабильное расслоение на диагональном многообразии Хопфа эквивариантно по отношению к некоторому голоморфному потоку $A(t) \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ (следствие 4.4). Взяв пополнение этого потока, мы получим абелеву группу Ли $\tilde{G}_F$, которая изоморфна $(\mathbb{C}^*)^l$ (предложение 6.1). Мы доказываем, что F $\tilde{G}_F$ -эквивариантно. Это позволяет рассматривать стабильные голоморфные расслоения (или рефлексивные пучки) на M как объекты в категории $(\mathbb{C}^*)^l$ -эквивариантных когерентных пучков на $\mathbb{C}^n \setminus 0$ (замечание 6.4). Затем мы показываем, что все объекты в этой категории фильтруемы (теорема 6.5).

§ 2. Диагональные многообразия Хопфа и вайсманова геометрия

2.1. Введение в вайсманову геометрию. Работы по вайсмановой геометрии восходят к трудам И. Вайсмана [21], [22].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть M – комплексное многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M > 1$, а $\tilde{M}$ – его накрытие. Предположим, что $\tilde{M}$ снабжено кэлеровой формой ω_K

¹Определение стабильности на эрмитовых комплексных многообразиях дано в § 3.

таким образом, что отображение монодромии действует на $(\widetilde{M}, \omega_K)$ гомотетиями. Форма ω_K задает конформный класс эрмитовых метрик на M , который мы обозначим $[\omega_K]$. Пара $(M, [\omega_K])$ называется *локально конформным кэлеровым (ЛКК) многообразием*. Эрмитова форма ω_H на M называется *ЛКК-формой*, если она принадлежит конформному классу $[\omega_K]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Рассмотрим ЛКК-многообразие M с ЛКК-формой ω_H . Обратный образ ω_H на $\widetilde{M}$ записывается в виде $f\omega_K$, где f – гладкая функция, а ω_K – кэлерова форма на $\widetilde{M}$. Следовательно, $d\omega_H = \omega_H \wedge \theta$, где $\theta = \frac{df}{f}$ – гладкая 1-форма на M . Поскольку $\theta = d \log f$, форма θ замкнута. Эта форма называется *формой Ли* (M, ω_H) .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Для общего эрмитова комплексного многообразия (M, ω_H) форма Ли определяется как $(d^c)^*\omega_H$, где $d^c = I \circ d \circ I^{-1}$ обозначает скрученный дифференциал де Рама, а d^{c*} – оператор, двойственный d^c относительно эрмитовой метрики. Нетрудно доказать, что это определение совпадает с приведенным выше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть (M, ω_H) , $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, – эрмитово комплексное многообразие. Метрика ω_H называется *метрикой Годушона*, если $d^*d^{c*}\omega_H = 0$, или, что эквивалентно, $dd^c(\omega_H^{n-1}) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. В работе [7] П. Годушон доказал, что такая метрика существует на любом компактном комплексном многообразии и единственна в каждом конформном классе.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. На компактном ЛКК-многообразии результат Годушона превращается в результат о существовании и единственности ЛКК-метрики с гармонической формой Ли θ . Действительно, форма Ли $d^{c*}\omega_H = \theta$ всегда замкнута, следовательно, $d^*d^{c*}\omega_H = 0$ эквивалентно $d^*\theta = 0$.

Далее мы фиксируем выбор эрмитовой метрики на компактном ЛКК-многообразии, выбирая метрику Годушона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть M – ЛКК-многообразие, снабженное годушоновою метрикой ω_H , а θ – ее форма Ли. Предположим, что θ параллельна относительно связности Леви-Чивита на (M, ω_H) . Тогда M называется *многообразием Вайсмана*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Согласно результатам Камишимы и Орнеа [9] компактное ЛКК-многообразие M вайсманово тогда и только тогда, когда оно допускает голоморфное векторное поле, действующее на M конформно и таким образом, что поднятие этого действия на кэлерово накрытие $\widetilde{M}$ не является изометрией $(\widetilde{M}, \omega_K)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. Нетрудно видеть (см. [6]), что из параллельности θ вытекает голоморфность векторного поля $\theta^\sharp$, двойственного θ (так называемого *поля Ли*). Более того, $\theta^\sharp$ действует на M изометриями, и его поднятие на $\widetilde{M}$ задает на $(\widetilde{M}, \omega_K)$ неизометрическое конформное преобразование. Отсюда следует первая часть теоремы Камишимы–Орнеа.

Дальнейшие результаты и детали вайсмановой геометрии можно найти в [6], [8], [18]–[20].

Далее нам понадобится следующая лемма, которая доказана в работе [23] (см. также [19]).

ЛЕММА 2.10. Пусть M – вайсманово многообразие, $\theta^\sharp$ – его поле Ли, а Σ – комплексное голоморфное слоение, порожденное $\theta^\sharp$. Обозначим через $\omega_0 := d^c\theta$ вещественную $(1,1)$ -форму, где $d^c = I \circ d \circ I^{-1}$ – скрученный дифференциал де Рама. Тогда $\omega_0 \geq 0$ и нуль-слоение формы ω_0 – это Σ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.11. Пусть $L_{\mathbb{R}}$ – вещественное плоское линейное расслоение на M с теми же коэффициентами монодромии, как и ω_K (в конформной геометрии это расслоение известно как *весовое расслоение*). Каждое невырожденное положительное сечение $L_{\mathbb{R}}$ однозначно соответствует ЛКК-метрике на M , обратное также верно. Метрика Годушона определяет, таким образом, сечение $\mu_G \in L_{\mathbb{R}}$. Рассмотрим комплексификацию $L := L_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ как голоморфное эрмитово линейное расслоение с голоморфной структурой, индуцированной из плоской связности, и эрмитовой структурой, которая определяется соотношением $|\mu_G| = \text{const}$. Обозначим через ∇_C связность Черна, соответствующую данной метрике и голоморфной структуре. Тогда кривизна ∇_C равна $-\sqrt{-1}\omega_0$ (см. [19], [23]).

2.2. ЛКК-структура на диагональных многообразиях Хопфа. Примеры ЛКК-многообразий и многообразий Вайсмана можно получить, изучая геометрию многообразий Хопфа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Пусть $A \in \text{GL}(n)$ – линейный оператор, действующий на $\mathbb{C}^n$, с собственными значениями $|\alpha_i| < 1$. Обозначим через $\langle A \rangle \subset \text{GL}(n, \mathbb{C})$ циклическую группу, порожденную A . Фактор

$$(\mathbb{C}^n \setminus 0) / \langle A \rangle$$

называется *линейным многообразием Хопфа*. Если A диагонализуемо, то $(\mathbb{C}^n \setminus 0) / \langle A \rangle$ называется *диагональным многообразием Хопфа*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.13. Если взять произвольное голоморфное сжатие вместо линейного, можно получить общее определение многообразия Хопфа (см., например, [10], [11]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. Изучение многообразия Вайсмана восходит к трудам И. Вайсмана, который посвятил рассмотрению этих многообразий большую серию статей в конце 1970-х и начале 1980-х годов (см., например, [21], [22]). Вайсман называл их *обобщенными многообразиями Хопфа*. Это название не прижилось, поскольку многие многообразия Хопфа, как было впоследствии доказано, не являются вайсмановыми. Для линейных многообразий Хопфа факторпространство $(\mathbb{C}^n \setminus 0) / \langle A \rangle$ вайсманово тогда и только тогда, когда A диагонализуемо (см. [20]).

Пусть задан диагональный линейный оператор $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad |\alpha_i| < 1.$$

Рассмотрим кэлерову метрику $\omega_K := -\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi$ на $\mathbb{C}^n \setminus 0$, определенную посредством кэлерова потенциала $\varphi: \mathbb{C}^n \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$, где φ определяется формулой

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = \sum |t_i|^{\beta_i}, \quad (2.1)$$

а $\beta_i := \log_{|\alpha_i|^{-1}} C$ – положительные вещественные числа, которые удовлетворяют соотношению $|\alpha_i|^{-\beta_i} = C$ для некоторой вещественной константы $C > 1$, выбранной таким образом, что все β_i удовлетворяют неравенству $|\beta_i| \geq 2$. По построению имеем $A^* \varphi = C^{-1} \varphi$. Действительно,

$$A^* \varphi(t_1, \dots, t_n) = \varphi(A(t_1, \dots, t_n)) = \sum_i |\alpha_i t_i|^{\beta_i} = C^{-1} \varphi(t_1, \dots, t_n).$$

Следовательно, $\omega_K := -\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi$ – кэлерова форма, удовлетворяющая равенству $A^* \omega_K = C^{-1} \omega_K$. Мы получаем, что диагональное многообразие Хопфа $(\mathbb{C}^n \setminus 0)/\langle A \rangle$ локально конформно кэлерово. Чтобы убедиться в том, что оно вайсманово, заметим, что голоморфное векторное поле $\log A$ действует на $(\mathbb{C}^n \setminus 0, \omega_K)$ конформно, и применим теорему Кашипера–Орнеа (замечание 2.8).

Далее нам понадобится явная форма поля Ли для метрики Годушона, индуцированной локально конформно кэлеровой структурой на $(\mathbb{C}^n \setminus 0)/\langle A \rangle$.

Рассмотрим действие комплексной группы Ли $V(t) = e^{Cv}$, порожденной голоморфным векторным полем

$$v := \sum_i -t_i \log |\alpha_i| \frac{d}{dt_i}.$$

По построению $V(\lambda)$ – линейный оператор, который можно записать в виде $\sum e^{|\alpha_i| \lambda} t_i$. Для вещественных λ этот оператор умножает φ на константу C^λ (это доказывается так же, как и равенство $A(\varphi) = C^{-1} \varphi$). Для чисто мнимого λ оператор $V(\lambda)$ сохраняет φ (это ясно из конструкции). Следовательно, $v^c := I(v)$ действует на $(\mathbb{C}^n \setminus 0, \omega_K)$ голоморфными изометриями.

Соответствующее отображение моментов $\mu: \mathbb{C}^n \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ задается формулой $d\mu = \omega_K(v^c, \cdot)$. Эту дифференциальную форму также можно записать в виде

$$(dd^c \varphi) \lrcorner v^c = \mathrm{Lie}_{v^c} d^c \varphi - d(d^c \varphi \lrcorner v^c). \quad (2.2)$$

Первый член в правой части равенства (2.2) равен нулю, поскольку v^c действует на $(\mathbb{C}^n \setminus 0)$, сохраняя φ и комплексную структуру. Имеем

$$\omega_K(v^c, \cdot) = (dd^c \varphi) \lrcorner v^c = -d(d^c \varphi \lrcorner v^c) = d(d\varphi \lrcorner v) = (\log C) d\varphi$$

(последнее равенство следует из соотношения $d\varphi \lrcorner v = \mathrm{Lie}_v \varphi = (\log C) \varphi$). Мы получили, что $(\log C) \varphi$ – отображение моментов для группы $V(t)$, действующей на $(\mathbb{C}^n \setminus 0, \omega_K)$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.15. Пусть $A \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ – диагональный линейный оператор со всеми собственными значениями $|\alpha_i| < 1$. Рассмотрим кэлерову метрику $\omega_K := -\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi$ на $\mathbb{C}^n \setminus 0$, где кэлеров потенциал φ определяется формулой (2.1), и пусть $V(t) = e^{\mathbb{C}v}$ – голоморфный поток, порожденный $v := -\sum_i t_i \log |\alpha_i| \frac{d}{dt_i}$. Обозначим через v^c векторное поле $I(v)$. Тогда $e^{\mathbb{R}v^c} \subset V(t)$ сохраняет кэлерову структуру на $\mathbb{C}^n \setminus 0$ и соответствующее отображение моментов равно $(\log C)\varphi$:

$$d((\log C)\varphi) = \omega_K(v^c, \cdot).$$

Рассмотрим эрмитову форму $\omega_H = \frac{\omega_K}{\varphi}$ на $M = (\mathbb{C}^n \setminus 0)/\langle A \rangle$. Соответствующая форма Ли θ получена по формуле

$$d\omega_H = -\omega_H \wedge \log d\varphi,$$

следовательно, $\theta = \frac{d\varphi}{\varphi}$. Двойственное по отношению к ω_H векторное поле (поле Ли) задается как $\theta^\sharp = v$, где $v = (\log C) \sum_i (-t_i \log |\alpha_i| \frac{d}{dt_i})$. Это ясно, потому что v двойственно $(\log C) d\varphi$ по отношению к ω_K , как следует из утверждения 2.15, а $\omega_H = \frac{\omega_K}{\varphi}$.

Мы получили следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.16. В условиях утверждения 2.15 рассмотрим эрмитову форму $\omega_H = \frac{\omega_K}{\varphi}$ на $M = (\mathbb{C}^n \setminus 0)/\langle A \rangle$. Тогда соответствующее поле Ли задается формулой

$$\theta^\sharp = (\log C) \sum_i \left(-t_i \log |\alpha_i| \frac{d}{dt_i} \right). \quad (2.3)$$

Более того, метрика ω_H годушонова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (2.3) доказано выше. Чтобы доказать, что метрика ω_H годушонова, достаточно удостовериться в том, что функция $|\theta^\sharp|_{\omega_H}$ постоянна. В самом деле, из определения d^* сразу следует, что

$$d^*\theta = \frac{(\nabla_{\theta^\sharp} \theta^\sharp, \theta^\sharp)}{|\theta^\sharp|^2}.$$

С другой стороны, поле $\theta^\sharp$ киллингово, поскольку

$$\mathrm{Lie}_{\theta^\sharp} \varphi = C\varphi, \quad \mathrm{Lie}_{\theta^\sharp} \omega_K = C\omega_K,$$

а следовательно,

$$\mathrm{Lie}_{\theta^\sharp} \omega_H = C\omega_H - C\omega_H = 0.$$

По другому определению киллинговых полей это значит, что

$$(\nabla_X \theta^\sharp, Y)_{\omega_H} = -(\nabla_Y \theta^\sharp, X)_{\omega_H}$$

для любых векторных полей X, Y . Взяв $Y = \theta^\sharp$ и применив равенство

$$\mathrm{Lie}_X(\theta^\sharp, \theta^\sharp)_{\omega_H} = 0,$$

мы получим

$$0 = (\nabla_X \theta^\sharp, \theta^\sharp)_{\omega_H} = -(\nabla_{\theta^\sharp} \theta^\sharp, X)_{\omega_H}.$$

Поскольку поле X произвольное, то получаем $\nabla_{\theta^\sharp} \theta^\sharp = 0$. Следовательно, доказательство предложения вытекает из равенства $\omega_H(\theta^\sharp, \bar{\theta}^\sharp) = \text{const}$, или, что то же самое, из равенства

$$\omega_K(\theta^\sharp, \bar{\theta}^\sharp) = \text{const} \cdot \varphi. \quad (2.4)$$

Записывая ω_K в виде

$$\omega_K = -\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi = \sum_i dt_i \wedge d\bar{t}_i |t_i|^{\beta_i - 2} \frac{\beta_i^2}{4}$$

и используя $\theta^\sharp = (\log C) \sum_i (-t_i \log |\alpha_i| \frac{d}{dt_i})$, мы получаем

$$\omega_K(\theta^\sharp, \bar{\theta}^\sharp) = (\log C)^2 \sum_i (\log |\alpha_i|)^2 |t_i|^{\beta_i} \frac{\beta_i^2}{4}. \quad (2.5)$$

По определению $e^{-\log |\alpha_i| \beta_i} = C$, другими словами, $\beta_i = -\frac{\log C}{\log \alpha_i}$. Подставляя это в (2.5), мы получаем

$$\omega_K(\theta^\sharp, \bar{\theta}^\sharp) = \sum_i |t_i|^{\beta_i} \frac{(\log C)^4}{4} = \frac{(\log C)^4}{4} \varphi.$$

Отсюда следует доказательство предложения.

§ 3. Стабильные расслоения на эрмитовых многообразиях

3.1. Метрика Годушона и стабильность. Стабильность голоморфных расслоений на комплексных многообразиях определяется с помощью метрики Годушона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть M – компактное комплексное эрмитово многообразие. Выберем метрику Годушона в том же самом конформном классе². Рассмотрим когерентный пучок без кручения F на M . Обозначим его детерминантное расслоение через $\det F$. Выберем эрмитову метрику ν на $\det F$, и пусть Θ обозначает кривизну соответствующей связности Черна. Мы определяем *степень* F следующим образом:

$$\deg F := \int_M \Theta \wedge \omega^{\dim_{\mathbb{C}} M - 1},$$

где $\omega \in \Lambda^{1,1}(M)$ – эрмитова форма метрики Годушона. Степень не зависит от выбора эрмитовой метрики ν на $\det F$. Действительно, если $\nu' = e^\psi \nu$,

²Эрмитова метрика ω на комплексном многообразии M размерности n называется *метрикой Годушона*, или *годушоновой*, если $\partial \bar{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$ (определение 2.4). Если M компактно, метрика Годушона существует в каждом конформном классе и единственна с точностью до множителя, как доказано в [7].

$\psi \in C^\infty(M)$, то ассоциированная форма кривизны записывается в виде $\Theta' = \Theta + \partial\bar{\partial}\psi$ и мы получаем

$$\int_M \partial\bar{\partial}\psi \wedge \omega^{\dim_{\mathbb{C}} M - 1} = 0,$$

поскольку метрика ω годушонова.

Если F – голоморфное эрмитово векторное расслоение, Θ_F – его кривизна, а метрика ν получена ограничением из F , то $\Theta = \text{Tr}_F \Theta_F$. В кэлеровом случае это позволяет сравнить степень расслоения и его первый класс Черна. В некэлеровом случае степень не является топологическим инвариантом: степень зависит от голоморфной геометрии пучка F . Более того, степень не дискретна, как это происходит в кэлеровой ситуации, но принимает континуум значений.

В § 4 мы проиллюстрируем это следующим примером. На многообразии Вайсмана можно задать голоморфную структуру любой заданной степени $\lambda \in \mathbb{R}$ на тривиальном C^∞ -расслоении (см. замечание 4.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть F – ненулевой когерентный пучок без кручения на компактном комплексном эрмитовом многообразии M . Тогда $\text{slope}(F)$ (наклон) определяется следующим образом:

$$\text{slope}(F) := \frac{\deg F}{\text{rk } F}.$$

Пучок F называется:

- *стабильным*, если для любого подпучка $F' \subset F$ соблюдается $\text{slope}(F') < \text{slope}(F)$;
- *полустабильным*, если для любого подпучка $F' \subset F$ соблюдается $\text{slope}(F') \leq \text{slope}(F)$;
- *полистабильным*, если F можно представить как прямую сумму стабильных когерентных пучков одного и того же наклона.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Такое определение стабильности для эрмитовых комплексных многообразий весьма полезно, поскольку основная часть стандартных свойств стабильных и полустабильных расслоений, известных из алгебраической геометрии, выполняются и в этой ситуации. В частности, выполняется следующее: любое линейное расслоение стабильно; все стабильные пучки просты; фильтрация Жордана–Гёльдера и Хардера–Нарасимхана определена и построена точно так же, как и в обычной (кэлеровой) ситуации (см. [13], [15]).

С другой стороны, не все расслоения *фильтруемы*, иначе говоря, получают-ся последовательными расширениями когерентных пучков ранга 1. Например, на общей (неалгебраической) КЗ-поверхности касательное расслоение нефильтруемо.

3.2. Соответствие Кобаяши–Хитчина. Утверждение о соответствии Кобаяши–Хитчина (теорема Дональдсона–Уленбек–Яу) применяется в случае эрмитовых многообразий аналогично работе [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть B – голоморфное эрмитово векторное расслоение на компактном комплексном эрмитовом многообразии M , а $\Theta \in \Lambda^{1,1}(M) \otimes$

$\text{End}(B)$ – кривизна соответствующей связности Черна ∇ . Рассмотрим оператор $\Lambda: \Lambda^{1,1}(M) \otimes \text{End}(B) \longrightarrow \text{End}(B)$ (эрмитов сопряженный к $b \longrightarrow \omega \otimes b$, где ω – эрмитова форма на M). Связность ∇ называется *связностью Эрмита–Эйнштейна* (или *Янга–Миллса*), если $\Lambda\Theta = \text{const} \cdot \text{Id}_B$.

ТЕОРЕМА 3.5 (соответствие Кобаяши–Хитчина). *Пусть B – голоморфное векторное расслоение на компактном комплексном многообразии, снабженном метрикой Годушона. Расслоение B допускает связность Эрмита–Эйнштейна ∇ тогда и только тогда, когда B полистабильно. Более того, связность Эрмита–Эйнштейна в этом случае единственна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [12]–[14].

§ 4. Стабильные расслоения на вайсмановых многообразиях

Существование положительной точной $(1, 1)$ -формы ω_0 , определенной в лемме 2.10, приводит к большому количеству сильных результатов в алгебраической геометрии вайсмановых многообразиях (см., например, [23] и [19]). Для нас особенно важна структурная теорема для расслоений Эрмита–Эйнштейна, которая впервые получена в [24, теорема 4.3] для положительных главных эллиптических расслоений, допускающих похожую структуру. Эти многообразия не всегда вайсмановы (например, многообразие Калаби–Экманна не вайсманово); точно так же не все вайсмановы многообразия являются эллиптическими расслоениями. Тем не менее, доказательство структурной теоремы из [24] может быть практически дословно повторено в вайсмановой геометрии.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть M , $\dim_{\mathbb{C}} M > 2$ – компактное многообразие Вайсмана, а B – стабильное расслоение степени 0 на M . Обозначим через Σ одномерное комплексное голоморфное расслоение, порожденное полем $\text{Ли } \theta^\sharp$ (поле Ли голоморфно, так как многообразие M вайсманово). Тогда $\Theta(v, \cdot) = 0$ для каждого $v \in \Sigma$. В частности, B эквивариантно по отношению к комплексной группе $\text{Ли } V(t)$, порожденной $\theta^\sharp$, и эта эквивариантная структура совместима со связностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение

$$\Lambda: \Lambda^{1,1}(M, \text{End}(B)) \longrightarrow \text{End}(B),$$

определенное в п. 3.2. По определению форма Θ примитивна, иначе говоря, удовлетворяет уравнению $\Lambda\Theta = 0$. Теперь теорема вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Пусть M , $\dim_{\mathbb{C}} M > 2$, – компактное многообразие Вайсмана, B – эрмитово расслоение со связностью, $\Theta \in \Lambda^{1,1}(M, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(B)$ – замкнутая антиэрмитова вещественная $(1, 1)$ -форма. Предположим, что Θ примитивна, т. е. $\Lambda\Theta = 0$. Тогда $\Theta(v, \cdot) = 0$ для любого $v \in \Sigma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножая метрику на константу, мы нормализуем форму Ли θ таким образом, что $|\theta| = 1$. Пусть $\theta, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ – ортонормальный базис в $\Lambda^{1,0}(M)$ такой, что $\theta \in \Sigma$, $\theta_i \in \Sigma^\perp$. Рассмотрим форму ω_0 (лемма 2.10).

Эта форма точна, положительно и имеет $n - 1$ строго положительных собственных значений. Используя базис, описанный выше, мы можем записать выражения

$$\omega_H = -\sqrt{-1} \left(\theta \wedge \bar{\theta} + \sum_i \theta_i \wedge \bar{\theta}_i \right), \quad \omega_0 = -\sqrt{-1} \left(\sum_i \theta_i \wedge \bar{\theta}_i \right), \quad (4.1)$$

где ω_H – эрмитова форма на M (см. [23, предложение 6.1]).

В этом базисе мы можем записать Θ в виде

$$\begin{aligned} \Theta = & \sum_{i \neq j} (\theta_i \wedge \bar{\theta}_j + \bar{\theta}_i \wedge \bar{\theta}_j) \otimes b_{ij} + \sum_i (\theta_i \wedge \bar{\theta}_i) \otimes a_i \\ & + \sum_i (\theta \wedge \bar{\theta}_i + \bar{\theta} \wedge \bar{\theta}_i) \otimes b_i + \theta \wedge \bar{\theta} \otimes a, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $b_{ij}, b_i, a_i, a \in \mathfrak{u}(B)$ – антиэрмитовы автоморфизмы B .

Пусть $\Xi := \text{Tr}(\Theta \wedge \Theta)$. Это замкнутая $(2, 2)$ -форма на M . Из уравнения (4.2) следует

$$(\sqrt{-1})^n \Xi \wedge \omega_0^{n-2} = \text{Tr} \left(-\sum_i b_i^2 + a \left(\sum_i a_i \right) \right).$$

С другой стороны, $\sum a_i + a = \Lambda \Theta = 0$, а следовательно,

$$(\sqrt{-1})^n \Xi \wedge \omega_0^{n-2} = \text{Tr} \left(-\sum_i b_i^2 - a^2 \right).$$

Поскольку $u \longrightarrow \text{Tr}(-u^2)$ – положительно определенная симметрическая билинейная форма на $\mathfrak{u}(B)$, интеграл

$$\int_M (\sqrt{-1})^n \Xi \wedge \omega_0^{n-2} \quad (4.3)$$

неотрицателен и равен нулю, только если b_i и a тождественно равны нулю. Используя то, что $n > 2$, мы находим, что интеграл (4.3) равен нулю, поскольку форма ω_0 точна, а Ξ замкнута. Следовательно, b_i и a тождественно равны нулю, как и утверждается в предложении. Мы доказали теорему 4.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Можно применить результаты теоремы 4.1 к произвольному стабильному расслоению на M , используя следующий трюк. Рассмотрим линейное расслоение L (замечание 2.11). Запишем связность Черна на L в виде

$$\nabla_C = \nabla_{\text{triv}} - \sqrt{-1} \theta^c,$$

где $\theta^c = I(\theta)$ (см. [23, (6.11)]), и пусть ∇_{triv} – тривиальная связность на L , ассоциированная с тривиализацией L , заданной в замечании 2.11. Поскольку $d\theta^c = \omega_0$, то L имеет степень $\delta := \int \omega_0 \wedge \omega_H^{n-1}$ и это число, очевидно, положительно (см. (4.1)). Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ обозначим через L_λ голоморфное эрмитово расслоение со связностью $\nabla_{\text{triv}} - \sqrt{-1} \frac{\lambda}{\delta} \theta^c$. Очевидно, L_λ имеет степень λ . Мы получаем, что любое многообразие Вайсмана допускает голоморфное линейное расслоение L_λ любой наперед заданной степени λ . Более того, расслоение L_λ по построению $V(t)$ -эквивариантно (форма θ^c $V(t)$ -инвариантна, поскольку $V(t)$ действует на M , сохраняя метрику и голоморфную структуру). Мы получили следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть M , $\dim_{\mathbb{C}} M > 2$, – компактное многообразие Вайсмана, а B – стабильное голоморфное расслоение на M . Рассмотрим комплексный голоморфный поток $V(t) = e^{t\theta^\sharp}$, порожденный полем Ли $\theta^\sharp$. Тогда B допускает естественную $V(t)$ -эquivariantную структуру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножая B на L_λ с подходящим выбором $\lambda \in \mathbb{R}$, мы получим стабильное расслоение степени 0. Теперь из теоремы 4.1 вытекает следствие.

§ 5. Стабильные расслоения на многообразиях Хопфа и когерентные пучки на $\mathbb{C}^n$

5.1. Допустимые эрмитовы структуры на рефлексивных пучках.

Далее нам потребуется несколько хорошо известных определений и результатов из теории когерентных пучков на комплексных многообразиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть X – комплексное многообразие и F – когерентный пучок на X . Пусть $F^* := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, \mathcal{O}_X)$ – “двойственный” пучок F^* , $\rho_F: F \longrightarrow F^{**}$ – естественное функториальное отображение. Пучок F^{**} называется *рефлексивной оболочкой*, или *рефлексизацией* F . Пучок F называется *рефлексивным*, если естественное отображение $\rho_F: F \longrightarrow F^{**}$ является изоморфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Для любого когерентного пучка F отображение $\rho_F: F^* \longrightarrow F^{***}$ является изоморфизмом (см. [17, гл. II, доказательство леммы 1.1.12]). Следовательно, рефлексивная оболочка любого пучка всегда рефлексивна.

Рефлексивная оболочка может быть получена ограничением на открытое подмножество и взятием прямого образа.

ЛЕММА 5.3. Пусть X – комплексное многообразие, F – когерентный пучок на X и $Z \subset X$ – замкнутое комплексное подмногообразие. Обозначим через j открытое вложение $X \setminus Z \xrightarrow{j} X$. Предположим, что обратный образ j^*F рефлексивен на $X \setminus Z$. Тогда прямой образ j_*j^*F также рефлексивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [17, гл. II, лемма 1.1.12].

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Из леммы 5.3 следует, что рефлексизация неособого в ко-размерности 1 пучка F изоморфна j_*j^*F , где $j: X \setminus Z \hookrightarrow X$ – естественное вложение, а Z – особый локус F .

Используя результаты работы [2], можно обобщить соответствие Кобаяши–Хитчина на рефлексивные пучки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5 [2]. Пусть F – когерентный пучок на гладком комплексном многообразии M , а ∇ – эрмитова связность на F , определенная вне его особенностей. Обозначим через Θ кривизну ∇ . Связность ∇ называется *допустимой*, если выполнены следующие условия:

- (i) $\Lambda(\Theta) \in \text{End } F$ равномерно ограничена;
- (ii) $|\Theta|^2$ локально интегрируемо на M .

ТЕОРЕМА 5.6 [2]. Любой когерентный пучок без кручения на гладком многообразии можно наделить допустимой связностью. Любую допустимую связность можно продолжить на множество гладких точек F . Более того, если расслоение B на $M \setminus Z$, $\text{codim}_{\mathbb{C}} Z \geq 2$, снабжено допустимой связностью с кривизной Θ , которая локально квадратично интегрируема на M , то B можно продолжить до когерентного рефлексивного пучка на M .

Для когерентных пучков существует версия теоремы Дональдсона–Уленбек–Яу, доказанная Бандо и Сиу.

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть M – компактное кэлерово многообразие, а F – когерентный пучок без кручения. Пучок F можно снабдить допустимой метрикой Эрмита–Эйнштейна тогда и только тогда, когда F полистабилен. Если к тому же F стабилен, то эта метрика единственна с точностью до постоянного множителя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [2, теорема 3].

Доказательство, приведенное в [2], нетрудно использовать для эрмитовых комплексных многообразий, снабженных метрикой Годушона.

5.2. Расслоения Эрмита–Эйнштейна на многообразиях Хопфа и допустимые метрики. Результаты Бандо и Сиу можно применить для изучения голоморфных расслоений на многообразиях Хопфа.

ТЕОРЕМА 5.8. Пусть $M = (\mathbb{C}^n \setminus 0)/\langle A \rangle$, $n \geq 3$, – диагональное многообразие Хопфа, а B – стабильное голоморфное расслоение на M . Обозначим через $\tilde{B}$ обратный образ B на $\mathbb{C}^n \setminus 0$. Тогда $\tilde{B}$ можно продолжить до рефлексивного когерентного пучка F на $\mathbb{C}^n$. Более того, F $V(t)$ -эквивариантен, где $V(t)$ – комплексный голоморфный поток на $\mathbb{C}^n$, порожденный полем Ли $\theta^\# = (\log C) \sum_i (-t_i \log |\alpha_i| \frac{d}{dt_i})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя замечание 4.3, можно предположить, что B имеет степень 0. Рассмотрим метрику Эрмита–Эйнштейна на B и поднимем ее на $\tilde{B}$. Обозначим через $\tilde{\Theta}$ кривизну $\tilde{B}$. Чтобы продолжить $\tilde{B}$ на $\mathbb{C}^n$, применим теорему Бандо–Сиу (теорема 5.6). Нужно доказать, что $\tilde{B}$ допустимо (в смысле определения 5.5). Кэлерова метрика ω_K на $\mathbb{C}^n$ конформно эквивалентна поднятой с M , а следовательно $\Lambda \tilde{\Theta} = 0$ (это условие означает, что $\tilde{\Theta}$ ортогонально эрмитовой форме поточечно, а значит, оно конформно инвариантно). Чтобы доказать, что $\tilde{B}$ допустимо, остается убедиться в том, что $\tilde{\Theta}$ локально квадратично-интегрируемо на $\mathbb{C}^n$. Функция $|\tilde{\Theta}|^2$ может быть выражена с помощью соотношений Ходжа–Римана следующим образом.

ЛЕММА 5.9. Пусть B_1 – эрмитово расслоение на эрмитовом почти комплексном многообразии M_1 размерности n , а

$$\nu \in \Lambda^{1,1}(M_1, \mathfrak{su}(B_1))$$

– $\mathfrak{su}(B_1)$ -значная $(1,1)$ -форма, которая примитивна, т. е. удовлетворяет равенству $\Lambda(\nu) = 0$. Тогда

$$|\nu|^2 = -\sqrt{-1} \frac{n-1}{2n} \text{Tr}(\Lambda^2(\nu \wedge \nu)), \quad (5.1)$$

где

$$\Lambda: \Lambda^{p,q}(M_1, \mathfrak{su}(B_1)) \longrightarrow \Lambda^{p-1,q-1}(M_1, \mathfrak{su}(B_1))$$

стандартный оператор Ходжа на дифференциальных формах, двойственный умножению на кэлерову форму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из элементарного вычисления, по сути того же самого, которое доказывает билинейные соотношения Ходжа–Римана (см., например, [2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.10. Уравнение (5.1) можно переписать в виде

$$|\nu|^2 \text{Vol}(M_1) = -\sqrt{-1} \frac{n-1}{2n \cdot 2^n \cdot n!} \text{Tr}(\nu \wedge \nu) \wedge \omega_1^{n-2}, \quad (5.2)$$

где ω – эрмитова форма на M_1 , а $\text{Vol}(M_1)$ – форма объема, связанная с римановой структурой. Это ясно из определения Λ и соотношения $\text{Vol}(M_1) = \frac{1}{2^n n!} \omega_1^n$.

Используя (5.2), мы получаем, что L^2 -интегрируемость $\tilde{\Theta}$ равносильна интегрируемости формы

$$\text{Tr}(\tilde{\Theta} \wedge \tilde{\Theta}) \wedge \omega_K^{n-2}. \quad (5.3)$$

Форма $\tilde{\Theta}$ по построению A -инвариантна, а ω_K удовлетворяет соотношению

$$A^*(\omega_K) = c\omega_K,$$

поскольку M локально конформно кэлерово. Следовательно, форма (5.3) однородна по отношению к действию A :

$$A^*(\text{Tr}(\tilde{\Theta} \wedge \tilde{\Theta}) \wedge \omega_K^{n-2}) = c^{n-2} \text{Tr}(\tilde{\Theta} \wedge \tilde{\Theta}) \wedge \omega_K^{n-2}, \quad c < 1. \quad (5.4)$$

Обозначим через D фундаментальную область для группы $\langle A \rangle$,

$$D := \{x \in \mathbb{C}^n \setminus 0 \mid 1 \leq \rho(x) < C\}.$$

Тогда $\mathbb{C}^n \setminus 0 = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} A^i(D)$. Чтобы проверить, что форма $\tilde{\Theta}$ L^2 -интегрируема в окрестности нуля, необходимо показать, что ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{A^i(D)} |\tilde{\Theta}|^2 \text{Vol} = -\sqrt{-1} \frac{n-1}{2n \cdot 2^n \cdot n!} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A^i(D)} \text{Tr}(\tilde{\Theta} \wedge \tilde{\Theta}) \wedge \omega_K^{n-2}$$

сходится. В силу (5.4) эта сумма является геометрической прогрессией, и она сходится, если $n > 2$. Мы доказали, что $\tilde{B}$ допустимое. Теперь из теоремы Бандо–Сиу (теоремы 5.6) немедленно следует первое утверждение теоремы 5.8. Второе утверждение вытекает из леммы 5.3. Действительно, пусть $(\mathbb{C}^n \setminus 0) \xrightarrow{j} \mathbb{C}^n$ – стандартное вложение. Тогда $F = j_* \tilde{B}$ (лемма 5.3). В силу следствия 4.4 расслоение $\tilde{B}$ $V(t)$ -эквивариантно. Следовательно, $j_* \tilde{B}$ также $V(t)$ -эквивариантно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11. При использовании версии теоремы Дональдсона–Уленбек–Яу для рефлексивных пучков теорема 5.8 обобщается дословно на случай рефлексивных когерентных пучков.

§ 6. Эquivariantные пучки на $\mathbb{C}^n$

6.1. Продолжение $V(t)$ -equivariantности до $(\mathbb{C}^*)^l$ -equivariantности. Пусть дано диагональное многообразие Хопфа

$$M = (\mathbb{C}^n \setminus 0) / \langle A \rangle,$$

а $V(t) = e^{\mathbb{C}\theta^\sharp}$, $t \in \mathbb{C}$, – голоморфный поток, порожденный полем Ли $\theta^\sharp$, как указано выше. Тогда $V(t)$ действует на M голоморфными изометриями [9]. Рассмотрим замыкание G группы $V(t)$, $t \in \mathbb{C}$, внутри группы $\text{Iso}(M)$ изометрий M . Обозначим через $\tilde{G}$ поднятие G в $\text{Aut}(\tilde{M})$, где $\tilde{M}$ – минимальное кэлерово накрытие M [18], [19]. По построению имеем, что $\tilde{G}$ – наименьшая замкнутая подгруппа в $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, содержащая $V(t)$ и A . Нетрудно убедиться в том, что $\tilde{G}$ – редуктивная комплексная коммутативная группа Ли. Аналогичный результат верен для любых многообразий Вайсмана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть M – многообразие Вайсмана с полем Ли $\theta^\sharp$, G – замыкание соответствующего $\theta^\sharp$ голоморфного потока в $\text{Iso}(M)$, $\tilde{M}$ – минимальное кэлерово накрытие, а $\tilde{G}$ – поднятие G в $\text{Aut}(\tilde{M})$. Тогда группа монодромии накрытия $\tilde{M}$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Более того, $\tilde{G} \cong (\mathbb{C}^*)^k$, и группа монодромии накрытия лежит в $\tilde{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [19, предложение 4.3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. В предположениях теоремы 5.8 рассмотрим действие группы $V(t)$ на $\Gamma(\mathbb{C}^n, F)$. Введем на $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ и $\Gamma(\mathbb{C}^n, F)$ адическую топологию таким образом, что $\lim f_i \rightarrow 0$, когда $[f_i]_0 \rightarrow \infty$, где $[f_i]_0$ обозначает порядок нуля f_i в $0 \in \mathbb{C}^n$. Очевидно, что $V(t)$ непрерывно в адической топологии. Обозначим через $\tilde{G}_F$ замыкание $V(t)$ -действия в $\Gamma(\mathbb{C}^n, F) \times \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ в адической топологии. Тогда:

- (i) естественное отображение $\tilde{G}_F \xrightarrow{p} \text{GL}(F/\mathfrak{m}F) \times \text{GL}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ инъективно, где $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал 0 в $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$;
- (ii) $\tilde{G}_F$ изоморфно замыканию образа $V(t)$ при естественном отображении $V(t) \rightarrow \text{GL}(F/\mathfrak{m}F) \times \text{GL}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$;
- (iii) естественная проекция $\tilde{G}_F \xrightarrow{\pi} \tilde{G}$, индуцированная

$$\text{GL}(F/\mathfrak{m}F) \times \text{GL}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2),$$

удовлетворяет соотношению $g(af) = \pi(g)(a)g(f)$ для любых

$$f \in \Gamma(\mathbb{C}^n, F), \quad a \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}, \quad g \in \tilde{G}_F,$$

что задает $\tilde{G}_F$ -equivariantную структуру на F ;

- (iv) группа $\tilde{G}_F$ изоморфна $(\mathbb{C}^*)^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) очевидно в силу леммы Накаямы, утверждение (ii) немедленно следует из утверждения (i), а (iii) вытекает из (ii) и $V(t)$ -equivariantности F .

Чтобы доказать утверждение (iv), мы используем утверждение (ii), при этом заметим, что $\tilde{G}_F$ коммутативна как замыкание однопараметрической группы

в группе Ли $\mathrm{GL}(F/\mathfrak{m}F) \times \mathrm{GL}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Чтобы доказать, что $\tilde{G}_F \cong (\mathbb{C}^*)^l$, необходимо убедиться в том, что эта группа Ли редуктивна, другими словами, показать, что $V(t)$ действует диагонально на $(F/\mathfrak{m}F) \times (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Группа $V(t)$ действует на $\mathbb{C}^n$ голоморфно и конформно. Поскольку метрика Эрмита–Эйнштейна на B единственна с точностью до множителя, группа $V(t)$ действует на B также конформно. Мы получаем, что $V(t)$ действует конформно на бесконечномерном эрмитовом пространстве $\Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, F)$ голоморфных сечений F на открытом шаре $B_{\mathbb{C}^n} \subset \mathbb{C}^n$, а также на $\Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Поскольку унитарные преобразования конечномерного пространства диагонализуются, группа $V(t)$ диагонально действует на любом конечномерном подпространстве

$$L \subset \Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, F) \times \Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}),$$

которое сохраняется действием группы $V(t)$. Используя классический аргумент, восходящий к теории нормальных форм и теореме Пуанкаре–Дюлака (см. [20, теорема 3.3]), мы находим следующее. Пространство

$$\Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, F) \times \Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$$

содержит всюду плотное (в подходящей, например $\mathfrak{m}$ -адической, топологии) подпространство, порожденное конечномерными $V(t)$ -инвариантными подпространствами. Следовательно, действие $V(t)$ на $\Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, F) \times \Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ диагонально в плотном подпространстве. Из этого видно, что действие $V(t)$ диагонально на любом конечномерном факторпространстве и, в частности, на

$$(F/\mathfrak{m}F) \times (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Мы доказали утверждение (iv).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Используя версию теоремы Дональдсона–Уленбек–Яу для когерентных пучков (теорему Бандо–Сиу), предложение 6.2 можно дословно повторить для случая стабильных когерентных пучков (см. замечание 5.11).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Обозначим через $\mathbb{C}_*^n$ комплексное многообразие $\mathbb{C}^n \setminus 0$. Для любого $\tilde{G}_F$ -эквивариантного когерентного пучка на $\mathbb{C}_*^n$ мы можем получить когерентный пучок на $\mathbb{C}_*^n/\langle A \rangle$ следующим образом. Когерентные пучки на $\mathbb{C}_*^n/\langle A \rangle$ – это то же самое, что $\langle A \rangle$ -эквивариантные пучки на $\mathbb{C}_*^n$, а группа $\langle A \rangle$ лежит в $\tilde{G}$ в силу предложения 6.1. Следовательно, чтобы доказать фильтруемость стабильного расслоения B на $M = (\mathbb{C}_*^n)/\langle A \rangle$, достаточно убедиться в том, что соответствующий $\tilde{G}_F$ -эквивариантный когерентный пучок F фильтруем на $\mathbb{C}_*^n$ в категории $\mathrm{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}_*^n)$ $\tilde{G}_F$ -эквивариантных когерентных пучков. Значит, следующая теорема доказывает теорему 1.2.

ТЕОРЕМА 6.5. *Рассмотрим коммутативную группу Ли $\tilde{G}_F \cong (\mathbb{C}^*)^l$, действующую на $\mathbb{C}_*^n$ посредством гомоморфизма $\tilde{G}_F \xrightarrow{\pi} \mathrm{GL}(\mathbb{C}, n)$. Обозначим через $\mathrm{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}_*^n)$ категорию $\tilde{G}_F$ -эквивариантных когерентных пучков на $\mathbb{C}_*^n$. Предположим, что $\pi(\tilde{G}_F)$ содержит эндоморфизм, у которого все собственные значения меньше 1. Тогда все объекты $\mathrm{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}_*^n)$ получают последовательными расширениями $\tilde{G}_F$ -эквивариантных когерентных пучков ранга 1.*

Теорему 6.5 докажем в следующем пункте.

6.2. $(\mathbb{C}^*)^l$ -эквивариантные когерентные пучки на $\mathbb{C}^n \setminus 0$. Пусть выполнены предположения теоремы 6.5.

ЛЕММА 6.6. Пусть $R \in \text{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}_*^n)$ – $\tilde{G}_F$ -эквивариантный когерентный пучок над $\mathbb{C}_*^n := \mathbb{C}^n \setminus 0$. Тогда R порожден над $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_*^n}$ конечномерным $\tilde{G}_F$ -инвариантным подпространством сечений $V \subset \Gamma(R, \mathbb{C}_*^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подгруппы вида $\mathbb{C}^*$ плотны в $\tilde{G}_F \cong (\mathbb{C}^*)^l$. Следовательно, существует вложение $\mathbb{C}^* \xrightarrow{\mu} \tilde{G}_F$, действующее на $\mathbb{C}^n$, со всеми собственными значениями, отличными от 1. Это действие можно записать в виде

$$t \longrightarrow \begin{pmatrix} t^{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{k_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t^{k_n} \end{pmatrix},$$

где все k_i – целые числа, не равные нулю. Легко видеть, что μ действует на $\mathbb{C}_*^n$ свободно в общей точке и фактор $\mathbb{C}_*^n / \mu(\mathbb{C}^*)$ хорошо определен. Этот фактор известен как *взвешенное проективное пространство* и обозначается как

$$\mathbb{C}P^{n-1}(k_1, k_2, \dots, k_n).$$

Взвешенное проективное пространство наделено структурой проективного орбиобразия. Задать μ -эквивариантный когерентный пучок на $\mathbb{C}_*^n$ – это по определению то же самое, что задать когерентный пучок на орбиобразии

$$\mathbb{C}P^{n-1}(k_1, k_2, \dots, k_n).$$

Пусть R_0 – пучок на $\mathbb{C}P^{n-1}(k_1, k_2, \dots, k_n)$, соответствующий пучку R , рассматриваемому как μ -эквивариантный пучок на $\mathbb{C}_*^n$. Сечения $R_0 \otimes \mathcal{O}(i)$ соответствуют сечениям R , на которые $\mu(\mathbb{C}^*)$ действует с весом i . Мы получаем последовательность конечномерных подпространств

$$\Gamma(R_0 \otimes \mathcal{O}(i)) \subset \Gamma(R),$$

где $\Gamma(R)$ – пространство сечений R над $\mathbb{C}_*^n$. Поскольку $\mathcal{O}(1)$ обильно, пучок $R_0 \otimes \mathcal{O}(N)$ глобально порожден для достаточно большого N (это следует, например, из теоремы Кодаиры–Накано для орбиобразий [1]). Тогда пространство $\bigoplus_{i \leq N} \Gamma(R_0 \otimes \mathcal{O}(i))$ порождает $\Gamma(R)$ над $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_*^n}$. Поскольку $\tilde{G}_F$ коммутирует с $\mu(\mathbb{C}^*)$, пространство $\Gamma(R_0 \otimes \mathcal{O}(i)) \subset \Gamma(R)$ $\tilde{G}_F$ -инвариантно. Это доказывает лемму.

Теперь мы можем доказать фильтруемость для произвольного $R \in \text{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}_*^n)$. В силу леммы 6.6 для любого $R \in \text{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}_*^n)$ существует $\tilde{G}_F$ -эквивариантное сюръективное отображение $R_1 \rightarrow R$, где $R_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_*^n} \otimes_{\mathbb{C}} W$, а W – конечномерное представление $\tilde{G}_F$. Поскольку $\tilde{G}_F$ коммутативно, то $W = \bigoplus W_i$, где W_i – $\tilde{G}_F$ -инвариантные одномерные подпространства в W . Это дает эпиморфизм

$$\bigoplus (\mathcal{O}_{\mathbb{C}_*^n} \otimes W_i) \longrightarrow R \longrightarrow 0,$$

где все слагаемые $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_*^n} \otimes W_i - \tilde{G}_F$ -эquivариантные линейные расслоения. Следовательно, R фильтруемо в категории $\mathrm{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}_*^n)$. Это доказывает теорему 6.5. Теорема 1.2 также доказана.

Автор благодарен Р. Морару, которая обратила его внимание на вопрос о фильтруемости пучков на многообразиях Хопфа, и Д. Новикову за телефонную лекцию о теории нормальных форм и теореме Пуанкаре–Дюлака.

Список литературы

1. Baily W. L., “On the imbedding of V -manifolds in projective spaces”, *Amer. J. Math.*, **79** (1957), 403–430.
2. Bando S., Siu Y.-T., “Stable sheaves and Einstein–Hermitian metrics”, *Geometry and Analysis on Complex Manifolds, Festschrift for Professor S. Kobayashi’s 60th Birthday*, eds. T. Mabuchi, J. Noguchi, T. Ochiai, World Scientific, Singapore, 1994, 39–50.
3. Brînzănescu V., Moraru R., *Stable bundles on non-Kähler elliptic surfaces*, [math.AG/0306192](#), 15 p.
4. Brînzănescu V., Moraru R., *Twisted Fourier–Mukai transforms and bundles on non-Kähler elliptic surfaces*, [math.AG/0309031](#), 13 p.
5. Bruasse L., “Harder–Narasimhan filtration on non-Kähler manifolds”, *Internat. J. Math.*, **12**:5 (2001), 579–594.
6. Dragomir S., Ornea L., *Locally conformal Kähler geometry*, Progress in Mathematics, **155**, Birkhäuser, Boston, 1998.
7. Gauduchon P., “La 1-forme de torsion d’une variété hermitienne compacte”, *Math. Ann.*, **267**:4 (1984), 495–518.
8. Gauduchon P., Ornea L., “Locally conformally Kähler metrics on Hopf surfaces”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **48** (1998), 1107–1127.
9. Kamishima Y., Ornea L., “Geometric flow on compact locally conformally Kähler manifolds”, *Tohoku Math. J., II. Ser.* **57**, 2005, № 2, 201–221; [math.DG/0105040](#).
10. Kato M., “Some remarks on subvarieties of Hopf manifolds”, *A Symposium on Complex Manifolds (Kyoto, 1974)*, **240**, Sûrikaiseikikenkyûsho Kôkyûroku, 1975, 64–87.
11. Kato M., “On a characterization of submanifolds of Hopf manifolds”, *Complex analysis and algebraic geometry*, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, 191–206.
12. Li J., Yau S.-T., “Hermitian–Yang–Mills connection on non-Kähler manifolds”, *Mathematical aspects of string theory*, ed. S.-T. Yau, World Scientific Publ., Singapore, 1987, 560–573.
13. Lübke M., Teleman A., *The Kobayashi–Hitchin correspondence*, World Scientific Publ., Singapore, 1995.
14. Lübke M., Teleman A., *The universal Kobayashi–Hitchin correspondence on Hermitian manifolds*, [math.DG/0402341](#), 90 p.
15. Moraru R., “Integrable systems associated to a Hopf surface”, *Canad. J. Math.*, **55**:3 (2003), 609–635.
16. Moraru R., *Stable bundles on Hopf manifolds*, [math.AG/0408439](#).
17. Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х., *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах*, Мир, М., 1984.
18. Ornea L., Verbitsky M., “Structure theorem for compact Vaisman manifolds”, *Math. Res. Lett.*, **10**:5–6 (2003), 799–805; [math.DG/0305259](#).
19. Ornea L., Verbitsky M., “An immersion theorem for Vaisman manifolds”, *Math. Ann.*, **332**:1 (2005), 121–143; [math.AG/0306077](#).

20. Ornea L., Verbitsky M., *Locally conformal Kähler manifolds with potential*, [math.AG/0407231](#), 11 p.
21. Vaisman I., “Generalized Hopf manifolds”, *Geom. Dedicata*, **13**:3 (1982), 231–255.
22. Vaisman I., “A survey of generalized Hopf manifolds”, Conference on differential geometry on homogeneous spaces (Turin, 1983), *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Special issue*, 1984, 205–221.
23. Verbitsky M., *Vanishing theorems for locally conformal hyperkähler manifolds*, 2003, [math.DG/0302219](#), 41 p.
24. Verbitsky M., “Stable bundles on positive principal elliptic fibrations”, *Math. Res. Lett.*, **12**:2–3 (2005), 251–264; [math.AG/0403430](#).

М. С. ВЕРБИЦКИЙ (M. S. VERBITSKY)

University of Glasgow, Department of Mathematics

Institute of Theoretical and Experimental Physics

E-mail: verbit@maths.gla.ac.uk, verbit@mccme.ru

Поступило в редакцию

30.08.2005