Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Колесов, Структура характеристических многочленов матриц с неотрицательными элементами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 1, 5–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/im617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:53:48

УДК 512.83+517.9

Ю. С. Колесов

Структура характеристических многочленов матриц с неотрицательными элементами

Указываются необходимые и достаточные ограничения на свойства вещественного многочлена, при которых он является характеристическим для некоторой матрицы с неотрицательными элементами.

Библиография: 7 наименований.

Введение

К настоящему времени спектральная теория матриц с неотрицательными элементами в основном исчерпывается известной теоремой Перрона, доказанной еще в 1907 г., окончательный вид которой придал Ф. Фробениус в 1912 г.

В 1938 г. А. Н. Колмогоров поставил задачу о локализации характеристических чисел всей совокупности стохастических матриц. Значительный шаг в направлении решения этой задачи был сделан в статье [1]. Однако окончательное решение дано в [2].

Иная задача была исследована в работе [3]: сформулировать ограничения на заданный набор вещественных чисел, при которых они являются собственными значениями некоторой матрицы с неотрицательными элементами. Примерно в этом же объеме данный вопрос был исследован в работах ряда зарубежных математиков.

Рассматриваемая ниже задача скорее примыкает к работам О. Перрона и Ф. Фробениуса: вводятся понятия, в терминах которых описывается полный набор свойств характеристических многочленов матриц с неотрицательными элементами.

§ 1. Базовые понятия и формулировка теоремы

Итак, нас интересует следующий вопрос: каковы необходимые и достаточные условия, при которых заданный многочлен с вещественными коэффициентами

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \dots + a_1, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

является характеристическим для некоторой квадратной матрицы n -го порядка с неотрицательными элементами.

Первый результат в данном направлении получен в заметке [4]. Используемый в ней подход получил развитие в [5]. Настоящее исследование – завершающий этап в теоретическом анализе проблемы.

В работе [5] показано, что с многочленом (1) полезно связать величины

$$\Delta^0(\lambda_1) = P(\lambda_1), \quad \Delta^1(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad \Delta^{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{\Delta^{n-2}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) - \Delta^{n-2}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}, \lambda_n)}{\lambda_{n-1} - \lambda_n},$$

где формулам придается предельный смысл при совпадении некоторых из постоянных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, которые условимся называть *константами позитивности*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Многочлен (1) назовем *сильно позитивным*, если

$$\Delta^{k-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \leq 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

при каких-то неотрицательных константах позитивности $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ и при $\lambda_n = 0$. Назовем его *неразложимым*, если дополнительно

$$\Delta^0(\lambda_1) < 0. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Многочлен (1) назовем *ослабленно позитивным*, если он может быть записан в виде

$$-R_{n-1}(\lambda) + Q_1(\lambda) \dots Q_m(\lambda), \quad (4)$$

где

$$R_{n-1}(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1}, \quad \alpha_s \geq 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad (5)$$

причем все многочлены $Q_j(\lambda)$, $j = 1, \dots, m$, являются сильно позитивными (линейные многочлены $\lambda - \gamma$ в них включаются при $\gamma \geq 0$).

Если же некоторые из них (или все) данным свойством не обладают, то каждый из упомянутых многочленов представим в аналогичном (4) виде и т. д. Формулировки критериев его неразложимости базируются на приведенной в следующем параграфе лемме 4.

Отметим, что каждый сильно позитивный многочлен является особым случаем ослабленно позитивного.

ТЕОРЕМА. *Ослабленно позитивен характеристический многочлен матрицы n -го порядка с неотрицательными элементами. Наоборот, каждый ослабленно позитивный многочлен является характеристическим для некоторой матрицы с неотрицательными элементами.*

§ 2. Основные элементы доказательства достаточности

Доказательство достаточности технически громоздко. Поэтому сосредоточимся на рассмотрении двух эталонных вариантов. Безусловно, к числу таких относится следующий вариант: сильно позитивен многочлен (1). Рассмотрим одну из матриц

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{pmatrix}, \quad (6)$$

характеристическим многочленом которой он является.

ЛЕММА 1. При $\lambda_n = \lambda$ справедливо тождество

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) P_k(\lambda), \quad (7)$$

где $P_0(\lambda) \equiv 1$, а

$$P_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_k), \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 2$

$$\Delta^1(\lambda_1, \lambda) = \lambda_1 + \lambda + a_2,$$

а значит, следует убедиться в том, что

$$\lambda^2 + a_2\lambda + a_1 = P(\lambda_1) + (\lambda_1 + \lambda + a_1)(\lambda - \lambda_1). \quad (9)$$

Детализируя правую часть в (9), получаем левую часть.

При $n \geq 3$ положим

$$Q(\lambda) = \frac{P(\lambda) - P(\lambda_1)}{\lambda - \lambda_1}. \quad (10)$$

По предположению для многочлена (10) справедливо аналогичное (7) тождество. Отсюда и из равенства

$$\Delta^{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda) = a_n + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda \quad (11)$$

следует, что для исходного многочлена (1) имеет место требуемое тождество. Лемма доказана.

Введем в рассмотрение невырожденную матрицу

$$U^* = (P_0(D^*)e_1, P_1(D^*)e_1, \dots, P_{n-1}(D^*)e_1), \quad (12)$$

где звездочкой обозначено транспонирование, а e_1 является первым единичным вектором в $\mathbb{R}^n$. При работе с матрицей (12) будут полезны два равенства, связанные с леммой 1. Во-первых, из (8) следует, что

$$\lambda P_k(\lambda) = \lambda_{k+1} P_k(\lambda) + P_{k+1}(\lambda), \quad k = 0, \dots, n-2, \quad (13)$$

а значит,

$$D^* P_k(D^*) = \lambda_{k+1} P_k(D^*) + P_{k+1}(D^*). \quad (14)$$

Во-вторых, в силу тождеств (7), (11) и равенства $P(D^*) = 0$ выполнено

$$D^* P_{n-1}(D^*) = - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) P_k(D^*), \quad (15)$$

где, однако, теперь $\lambda_n = 0$.

Из (12) и (14), (15) вытекает, что UDU^{-1} – это матрица с неотрицательными элементами:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\Delta^0(\lambda_1) & -\Delta^1(\lambda_1, \lambda_2) & -\Delta^2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) & \dots & -\Delta^{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0) \end{pmatrix},$$

которая является неразложимой при условии (3).

Согласно (4) в простейшем содержательном варианте ослабленно позитивный многочлен представим в виде

$$P(\lambda) = -R_{n-1}(\lambda) + Q_1(\lambda)Q_2(\lambda), \quad (16)$$

где степени сильно позитивных многочленов $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$ соответственно равны m и k , $m+k = n$. Многочлен (16) служит характеристическим для матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_1 & -c_2 & \dots & -c_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k - b_1 & \alpha_{k+1} - b_2 & \dots & \alpha_{n-1} - b_m \end{pmatrix}, \quad (17)$$

которую для единообразия также обозначим через D . Через U_2^* и U_1^* обозначим матрицы, которые устроены подобно матрице (12), но с использованием многочленов $Q_2(\lambda)$ и $Q_1(\lambda)$ соответственно. Положим

$$U^* = \text{diag}(U_2^*, U_1^*) \quad (18)$$

и покажем, что неотрицательны элементы матрицы UDU^{-1} , где теперь D имеет вид (17).

ЛЕММА 2. Пусть K_+ – конус векторов с неотрицательными координатами, $K^* = \{u: U^*u \in K_+\}$, где U^* – оператор, задаваемый матрицей (12). Тогда все единичные векторы $e_1, \dots, e_n$ принадлежат K^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор, связанный с транспонированной с (6) матрицей D^* , преобразует в себя конус K^* . Из (12) следует, что $U^*e_1 = e_1$, т.е. $e_1 \in K^*$. Отсюда последовательно выводим, что $e_2 = D^*e_1 \in K^*, \dots, e_n = D^*e_{n-1} \in K^*$. Лемма доказана.

Обозначим через $\beta_1 \in \mathbb{R}^k$ и $\beta_2 \in \mathbb{R}^m$, $m = n - k$, векторы с компонентами $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$ и $\alpha_k, \dots, \alpha_{n-1}$ соответственно. Из леммы 2 вытекает, что $\beta_1 \in K_2^* = U_2^*K_+$ и $\beta_2 \in K_1^* = U_1^*K_+$, где единое обозначение K_+ используется в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$.

Перейдем к построению матрицы UDU^{-1} .

Сначала введем прямоугольную $(k \times (k+1))$ -матрицу:

$$C_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\Delta^0(\lambda_1) & -\Delta^1(\lambda_1, \lambda_2) & \dots & -\Delta^{k-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, 0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем введем квадратную $(m \times m)$ -матрицу с неотрицательными элементами, которую обозначим C_1 и которая устроена подобно C_2 , но без последнего столбца. Через B_2 обозначим прямоугольную $(m \times k)$ -матрицу, у которой ненулевой является только последняя строка, состоящая из координат вектора $(U_2^*)^{-1}\beta_1$, а через B_1 – $(m \times m)$ -матрицу, у которой ненулевой также является только последняя строка, состоящая из элементов вектора $(U_1^*)^{-1}\beta_2$. Отметим, что в силу замечания, сделанного после доказательства леммы 2, координаты этих векторов неотрицательны.

Завершающим этапом является следующее предложение.

ЛЕММА 3. При переходе к базису, связанному с матрицей (18), исходная матрица (17) принимает вид

$$\begin{pmatrix} C_2 & 0 \\ B_2 & C_1 + B_1 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом варианте имеем равенства

$$D_2 u = e_k(e_1, v), \quad D_1 v = e_m[(\beta_2, u) + (\beta_1, v)], \quad (19)$$

где согласно (17) матрицы D_2 , D_1 структурно подобны матрице (6). После замен

$$u \rightarrow U_2^{-1}u, \quad v \rightarrow U_1^{-1}v$$

равенства (19) принимают следующий вид:

$$U_2 D_2 U_2^{-1}u = U_2 e_k((U_1^*)^{-1}e_1, v), \quad (20)$$

$$U_1 D_1 U_1^{-1}v = U_1 e_m[(U_2^*)^{-1}\beta_1, u) + ((U_1^*)^{-1}\beta_2, v)]. \quad (21)$$

Остается заметить, что в силу (6) и (12), (13) $U_1^* e_1 = e_1$, $U_2 e_k = e_k$, $U_1 e_m = e_m$, а значит, из (20), (21) следует требуемая формула. Лемма доказана.

Остается отметить, что неравенство

$$(U_2^{-1}e_1, \beta_1) > 0$$

гарантирует неразложимость матрицы, фигурирующей в лемме 3. Покажем, что данное неравенство эквивалентно неравенству

$$R_{n-1}(\lambda_1) > 0, \quad (22)$$

где константа позитивности λ_1 связана с многочленом $Q_2(\lambda)$ из формулы (16).

Имеет место следующее предложение.

ЛЕММА 4. Справедливо равенство $U^{-1}e_1 = \text{colon}(1, \lambda_1, \dots, \lambda_1^{n-1})$, где U^* — это матрица (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (12) при $k = 2, \dots, n-1$

$$U^* e_k = P_{k-1}(D^*)e_1 = e_k + \gamma_1 e_{k-1} + \dots + \gamma_{k-1} e_1,$$

а значит,

$$(U^*)^{-1}e_k = e_k - \gamma_1 (U^*)^{-1}e_{k-1} - \dots - \gamma_{k-1} (U^*)^{-1}e_1,$$

т.е. для нахождения первых компонент векторов $(U^*)^{-1}e_k$ можно воспользоваться методом математической индукции.

При $n = 2$ утверждение леммы проверяется просто. Пусть оно имеет место при $n = k-1$, $k \geq 3$, но тогда в силу последней формулы

$$((U^*)^{-1}e_k, e_1) = -\gamma_1 \lambda_1^{k-1} - \dots - \gamma_{k-1}.$$

Остается заметить, что согласно (8)

$$P_k(\lambda_1) = \lambda_1^k + \gamma_1 \lambda_1^{k-1} + \dots + \gamma_{k-1} = 0,$$

т.е. завершено обоснование леммы.

Неравенство (22) в силу леммы 4 очевидно.

§ 3. Доказательство необходимости

Не ограничивая общности, рассмотрим матрицу A , все элементы которой положительны, причем все корни характеристического многочлена $P(\lambda)$ простые.

Для доказательства необходимости воспользуемся методом математической индукции. При $n = 2$ тривиально показывается сильная позитивность характеристического многочлена. Покажем, что в общем случае при $n \geq 3$ он только ослабленно позитивен.

Очевидно, при почти произвольном ненулевом векторе $c \in K_+$ является невырожденной матрица

$$U^* = (c, A^*c, \dots, (A^*)^{n-1}c). \quad (23)$$

Ясно, что

$$UAU^{-1} = D, \quad (24)$$

где D – матрица (6). По построению матрица D положительна относительно конуса

$$K = UK_+. \quad (25)$$

Нам потребуется также сопряженный конус. Из (24) вытекает, что

$$K^* = (U^*)^{-1}K_+. \quad (26)$$

Из формулы (26) и леммы 2 следует, что $K_+ \subset K^*$.

Введем в рассмотрение векторное множество

$$Du - (\alpha, u)e_n, \quad u \in Ku, \quad \alpha \in K_+. \quad (27)$$

ЛЕММА 5. *Вектор $-e_n$ не принадлежит K .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно заметить, что согласно (23) и (26) $K \subset K_+$.

Через $D(\alpha)$ обозначим матрицу, связанную с первыми векторами (27). Через $\Pi(\alpha)$ обозначим совокупность тех векторов $\alpha \in K_+$, при которых неотрицательна каждая из матриц $D(\alpha)$.

ЛЕММА 6. *Телесное множество $\Pi(\alpha)$ ограничено и выпукло.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственно, в доказательстве нуждается только факт ограниченности множества $\Pi(\alpha)$. Обоснуем его, рассуждая от противного.

Пусть найдется такая неограниченная по евклидовой норме последовательность векторов $\alpha_s \in K_+$, что $D(\alpha_s)K \subset K$ при $s = 1, 2, \dots$. Тогда выберем такую ограниченную последовательность векторов $u_s \in K$, что $(\alpha_s, u_s) \rightarrow \infty$. Но это не согласуется с утверждением, содержащимся в лемме 5. Доказательство завершено.

Используя множество $\Pi(\alpha)$, в конусе K_+ введем норму Минковского

$$\|\alpha\| = \min s, \quad \frac{\alpha}{s} \in \Pi(\alpha). \quad (28)$$

Напомним, что она обладает обычными свойствами нормы. Через α_0 условимся обозначать такие векторы из внутренности K_+ , для которых $\|\alpha_0\| = 1$.

Дальнейший анализ связан с рассмотрением свойств матриц $D_0 = D(\alpha_0)$. В силу (24) они эквивалентны матрицам A_0 с элементами

$$a_{jk}^0 = a_{jk} - (\alpha_0, a_j)(b_k, e_n) \geq 0, \quad (29)$$

где согласно (25) и (26) a_j и b_k – ребра конусов K и K^* соответственно, a_{jk} – элементы исходной матрицы A .

ЛЕММА 7. *Невозможен полный набор неравенств*

$$(b_k, e_n) \leq 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно, например, сослаться на формулы (29) и содержащееся в лемме 6 утверждение.

Пусть для определенности

$$(b_k, e_n) > 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (31)$$

где заведомо $m < n$, так как согласно (23) и (25) $e_n \notin K$.

Обозначим через M_k^0 множество таких индексов j , при которых $a_{jk}^0 = 0$. Через M_k^+ обозначим множество таких индексов j , что $a_{jk}^0 > 0$.

Имеет место следующее ключевое утверждение.

ЛЕММА 8. *Существует такое α_0 , что пусто каждое числовое множество M_k^+ , $k = 1, \dots, m$.*

Отсюда следует, что матрица A_0 разложима при некотором α_0 , а значит, для характеристического многочлена исходной матрицы A имеет место представление (4). Тем самым, остается обосновать лемму 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем, рассуждая от противного, когда

$$a_{j_0 k_0}^0 = \min a_{jk}^0 > 0, \quad j \in M_k^+, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (32)$$

В этом случае положим

$$\delta\alpha = \varepsilon b_{j_0}, \quad (33)$$

где ε – малый положительный параметр. Из (33) следует, что

$$(\delta\alpha, a_j) = 0, \quad j \neq j_0, \quad (34)$$

так как $(b_k, a_j) = \delta_{kj}$, где δ_{kj} – символ Кронекера. В свою очередь, из (32) и (34) вытекает, что при подходящей малости ε неравенство (29) выполняется при $\alpha_0 + \varepsilon b_{j_0}$.

Покажем существование такого α_0 , что

$$\|\alpha_0 + \varepsilon b_{j_0}\| > 1, \quad (35)$$

а это невозможно: $\|\alpha\| \leq 1$ для элементов из $\Pi(\alpha)$.

Допустим, что при всех α_0

$$(b_{j_0}, \alpha_0) \leq 0. \quad (36)$$

Из (36) вытекает, что $(b_{j_0}, e_p) \leq 0$ при всех p . Последнее означает, что $-b_{j_0} \in K_+$. Однако $K_+ \subset K^*$, т. е., с одной стороны, $(-b_{j_0}, a_{j_0}) \geq 0$, а с другой стороны, $(b_{j_0}, a_{j_0}) = 1$.

Таким образом, найдется такое α_0 , что

$$(b_{j_0}, \alpha_0) > 0. \quad (37)$$

Из неравенства (37) вытекает, что при подходящем $\gamma > 0$

$$\|\alpha_0 + \varepsilon b_{j_0}\| \geq 1 + \varepsilon \gamma,$$

а значит, в предположении противного показана возможность выполнения неравенства (35). Лемма доказана.

§ 4. Четыре простых следствия

В работах [3] и [6] приведены примеры, ограничивающие теоретические выводы. Относятся они к случаю, когда вещественные корни характеристического многочлена четвертой степени разбиваются на две группы: два корня положительны и два отрицательны.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Такой многочлен является характеристическим для некоторой матрицы с неотрицательными элементами в том и только в том случае, если его можно представить в виде*

$$(\lambda^2 - a)(\lambda^2 - b) - \alpha_0 \lambda^3 - \alpha_1 \lambda^2 - \alpha_2 \lambda - \alpha_3, \quad (38)$$

где неотрицательны все параметры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что согласно нашей теореме характеристический многочлен в рассматриваемой ситуации представим в виде (16), в котором Q_1, Q_2 — сильно позитивные многочлены второй степени. Простая выкладка показывает, что в силу произвольного выбора постоянных α_k , $0 \leq k \leq 3$, эти многочлены можно преобразовать к более простому виду (38).

Естественно, следствие 1 включает контрпримеры из [3], [6].

Второй рассматриваемый вопрос намного сложнее: выписать явно функции, при помощи которых задаются границы области изменения собственных значений стохастических матриц. Пока наиболее полно данный вопрос исследован в работе [2]: составлены однопараметрические многочлены, одним из корней которых является граничное значение собственного числа.

Для простоты ограничимся анализом многочленов четвертой степени, для которых составим функции $r = r_b(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, описывающие границу интересующего нас множества.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Справедливы формулы*

$$r_b = \frac{1}{\sqrt{1 - 3 \cos^2 \varphi} - \cos \varphi}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, \quad (39)$$

$$r_b = \sqrt{-1 - 4 \cos \varphi - 3 \cos^2 \varphi} - \cos \varphi, \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \pi. \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выводе формул (39), (40) используется следующий результат из [1]: в пограничном случае сумма характеристических чисел равна нулю. Поэтому корни характеристического многочлена стохастической матрицы исчерпываются числовым набором

$$1, \quad r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi), \quad -1 - 2r \cos \varphi, \quad (41)$$

а значит,

$$\begin{aligned} P(\lambda) = & \lambda^4 - (1 + 2r \cos \varphi - r^2(1 + 2r \cos \varphi))\lambda^2 \\ & + 2r \cos \varphi(1 + 2r \cos \varphi + r^2)\lambda - r^2(1 + 2r \cos \varphi). \end{aligned} \quad (42)$$

При выводе формулы (39) априори считаем (а позднее обоснуем) справедливым неравенство

$$r_b < -\frac{1}{2 \cos \varphi}, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}. \quad (43)$$

Из (43) следует, что многочлен (42) сильно позитивен, если

$$1 + 2r \cos \varphi - r^2(1 - 4 \cos^2 \varphi) > 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}. \quad (44)$$

Неравенство (44) и влечет формулу (39).

Остается убедиться в том, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 3 \cos^2 \varphi} - \cos \varphi} < -\frac{1}{2 \cos \varphi}, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6},$$

т.е. что справедливо очевидное неравенство $4 \cos^2 \varphi < 1$ при рассматриваемых φ .

При $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} < \varphi < \pi$ многочлен (42) запишем в виде

$$P(\lambda) = \lambda^4 - a\lambda^2 - b\lambda + c, \quad (45)$$

где $a, b, c > 0$, так как (покажем это позднее) справедливо неравенство

$$z = -1 - 2r_b \cos \varphi > 0, \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} < \varphi < \pi. \quad (46)$$

Ослабленную позитивность многочлена (45) выведем из формулы

$$P(\lambda) = (\lambda^2 - p_1)(\lambda^2 - p_2) - b\lambda,$$

где $p_1 + p_2 = a$, $p_1 p_2 = c$, а значит, постоянные p_1, p_2 – корни уравнения

$$p^2 - ap + c = 0.$$

Последнее означает, что должно выполняться неравенство

$$a^2 \geq 4c. \quad (47)$$

Чтобы упростить анализ неравенства (47), введем переменную $x = \sqrt{z}$. С ее помощью неравенство (47) записывается в удобной для дальнейшего исследования виде

$$x^4 + x^2 + 1 - r^2 \geq 2rx,$$

т. е. $(x^2 + 1)^2 \geq (x + r)^2$, а значит,

$$z + 1 - r \geq \sqrt{z}. \quad (48)$$

Из (48) выводим $z^2 + (1 - 2r)z + (1 - r)^2 \geq 0$, откуда с учетом (46) следует, что

$$(1 + 2 \cos \varphi)^2 r^2 + 2r \cos \varphi + 1 \geq 0. \quad (49)$$

Неравенство (49) убеждает нас в том, что справедливо равенство

$$r_b = \frac{-\cos \varphi - \sqrt{-1 - 4 \cos \varphi - 3 \cos^2 \varphi}}{(1 + 2 \cos \varphi)^2}, \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \pi,$$

из которого и вытекает формула (40).

Убедимся в справедливости неравенства (46), т. е. покажем, что

$$\sqrt{-1 - 4 \cos \varphi - 3 \cos^2 \varphi} - \cos \varphi > -\frac{1}{2 \cos \varphi}.$$

Последнее неравенство означает, что

$$\sqrt{-1 - 4 \cos \varphi - 3 \cos^2 \varphi} > \frac{2 \cos^2 \varphi - 1}{2 \cos \varphi}. \quad (50)$$

Правая часть неравенства (50) положительна только при $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. При этих φ неравенство (50) эквивалентно очевидному неравенству

$$16 \cos^3 \varphi (1 + \cos \varphi) < -1.$$

Некоторый интерес представляет также случай, когда $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. При этом ограничении перестает быть содержательным набор собственных значений (41). Его удобно заменить набором

$$1, \quad a \pm ib, \quad a - b, \quad a + b = 1, \quad (51)$$

где неотрицательны параметры a, b . При указанном выборе корней характеристического многочлена он принимает вид

$$P(\lambda) = (\lambda - a)^4 - (1 - a)^4,$$

т. е., очевидно, является сильно позитивным.

Дальнейшее продвижение по указанному пути требует значительных усилий.

Третий вопрос относится к следующей проблеме: при каких необходимых и достаточных ограничениях на характеристический многочлен (1) некоторой матрицы A она в подходящем базисе является матрицей с неотрицательными недиагональными элементами? При этом от рассматриваемой матрицы A требуем определенной общности положения. Именно, считаем, что при некотором векторе $a \in \mathbb{R}^n$ линейно независима система векторов

$$a, A^* a, \dots, (A^*)^{n-1} a. \quad (52)$$

Пусть λ_0 – некоторая неотрицательная постоянная. Введем в рассмотрение матрицу $A_0 = A + \lambda_0 I$ и ее характеристический многочлен

$$P_0(\mu) = \det(\mu I - A_0). \quad (53)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. При сформулированном выше предположении о линейной независимости векторной системы (52) в некотором базисе недиагональные элементы матрицы A неотрицательны в том и только в том случае, если при подходящем λ_0 многочлен (53) ослабленно позитивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через S такую невырожденную матрицу, что неотрицательны все элементы матрицы SA_0S^{-1} . Отсюда вытекает, что

$$SAS^{-1} = SA_0S^{-1} - \lambda_0 I, \quad (54)$$

а значит, неотрицательны недиагональные элементы матрицы SAS^{-1} . Из равенства (54) следует одновременно необходимость и достаточность сформулированного выше ограничения.

В пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (55)$$

и нелинейный функционал

$$V(x) = \max l_s(x), \quad 1 \leq s \leq n+1, \quad (56)$$

где линейные функционалы l_s , $s = 1, \dots, n+1$, таковы, что $V(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Скажем, что нелинейный функционал (56) является функцией Ляпунова для уравнения (55), если из неравенства $V(x) \leq 1$ следует, что $V(e^{At}x) < 1$ при всех $t > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Уравнение (55) с гурвицевой матрицей A имеет функцию Ляпунова вида (56) в том и только в том случае, если многочлен $(\mu - \lambda_0)P_0(\mu)$, где $P_0(\mu)$ – многочлен (53), ослабленно позитивен и неразложим при некотором неотрицательном λ_0 .

Доказательство не приводим, поскольку геометрически оно очевидно.

В заключение отметим, что настоящая статья является развернутым изложением уточненных результатов заметки [7].

Список литературы

1. Н. А. Дмитриев, Е. Б. Дынкин, “Характеристические корни стохастических матриц”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10:2** (1946), 167–184.
2. Ф. И. Карпелевич, “О характеристических корнях матрицы с неотрицательными элементами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15:4** (1951), 361–383.
3. Х. Р. Сулейманова, “О характеристических числах стохастических матриц”, *Учен. зап. Моск. гос. пед. ин-та. Сер. матем.*, **71:1** (1953), 167–197.
4. Ю. С. Колесов, “Периодические решения уравнения n -го порядка с релейным управлением”, *Автоматика и телемеханика*, 1969, № 11, 178–181; англ. пер.: Yu. S. Kolesov, “Periodic solution of n -th order equations with relay control”, *Automat. Remote Control*, 1969, № 11, 1872–1875.

5. Ю. С. Колесов, “Построение матрицы с неотрицательными элементами по ее заданному спектру”, *Матем. заметки*, **53**:1 (1993), 143–145; англ. пер.: Yu. S. Kolesov, “Construction of a matrix with nonnegative elements from its spectrum”, *Math. Notes*, **53**:1 (1993), 101–103.
6. H. Perfect, “On positive stochastic matrices with real characteristic roots”, *Duke Math. J.*, **22**:2 (1955), 305–311.
7. Ю. С. Колесов, “Свойства характеристических многочленов матриц с неотрицательными элементами”, *УМН*, **26**:3 (1971), 205–206.

Ю. С. КОЛЕСОВ (Yu. S. Kolesov)
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: kharkov@e-logic.ru

Поступило в редакцию
26.10.2005