Общероссийский математический портал

В. С. Владимиров, Адельные формулы для гамма- и бета-функций пополнений полей алгебраических чисел и их применения к струнным амплитудам, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 1, 63–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/im62>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:05:36

УДК 512.625.5+512.626.6+517.982.4

В.С. Владимиров

**Адельные формулы для гамма- и бета-функций
пополнений полей алгебраических чисел и
их применения к струнным амплитудам**

На основе анализа на группе аделей (формула Тейта) поля алгебраических чисел строится регуляризация расходящихся адельных произведений гамма- и бета-функций всех (неизоморфных) пополнений этого поля. Полученные формулы применяются к представлениям четырехточечных кроссинг-симметричных амплитуд Венециано и Вирасоро–Шапиро через регуляризованные адельные произведения струнных (для открытых или замкнутых струн) амплитуд, соответствующих всем неархимедовым пополнениям рассматриваемого поля алгебраических чисел.

Библиография: 24 наименования.

§1. Введение

В 1987г. Фрейндом и Виттенем [1] и немного позже и независимо Воловичем [2] была предложена адельная формула

$$V(s, t, u) \prod_{p=2}^{\infty} V_p(s, t, u) = 1, \quad s + t + u = -8, \quad (1.1)$$

для четырехточечной кроссинг-симметричной амплитуды Венециано $V(s, t, u)$, связывающая эту амплитуду с соответствующими струнными амплитудами $V_p(s, t, u)$ для открытых струн (§ 7).

В той же работе [1] была анонсирована адельная формула для четырехточечной кроссинг-симметричной амплитуды Вирасоро–Шапиро $V_-(s, t, u)$, $s + t + u = -32$ и для соответствующих струнных амплитуд $V_{-q}(s, t, u) = V_q(4s, 4t, 4u)$ для замкнутых струн в терминах максимальных идеалов комплексного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.

Однако предложенные адельные формулы обладают тем дефектом, что бесконечные произведения (типа (1.1)) в них расходятся при всех допустимых значениях переменных s, t, u , и поэтому неясен смысл этих равенств (см. обсуждение этого вопроса в [2]–[6]). По поводу струнных амплитуд см. работы [7] и [8]–[10].

В 1993 г. автором в [11], [12] на основе анализа на группе аделей (формула Тейта) была предложена регуляризация для расходящегося бесконечного произведения в формуле (1.1) (см. (7.9)), а в [13] установлена регуляризованная адельная формула для квадратичных полей $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (см. (7.10), (7.11)).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 93-011-140).

В этой работе получены регуляризованные адельные формулы для амплитуд Венициано и Вирасоро–Шапиро для *любого поля алгебраических чисел* $\mathbb{K}$ (см. (7.5)–(7.7)). В § 7 получены конкретные выражения для этих формул: для поля рациональных чисел – (7.9), для квадратичных полей – (7.10)–(7.12), для m -круговых полей – (7.13)–(7.15), для кубических полей – (7.16).

Перечисленные формулы для амплитуд эквивалентны адельным формулам для бета-функций пополнений рассматриваемого поля алгебраических чисел. В § 5 доказана регуляризованная адельная формула (5.17) для бета-функций пополнений любого поля алгебраических чисел $\mathbb{K}$ степени $n = \sigma + 2\tau$:

$$B_{\infty}^{\sigma}(\alpha, \beta) B_{-\infty}^{\tau}(\alpha, \beta) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} B_{q_{pj}}(\alpha, \beta) = \sqrt{|D_{\mathbb{K}}|}. \quad (1.2)$$

В § 6 дан конкретный вид формулы (1.2) для следующих случаев: поля рациональных чисел – (6.1), квадратичных полей – (6.2)–(6.4), m -круговых полей – (6.7)–(6.10), кубических полей – (6.18).

Адельная формула (1.2) основывается на ключевой адельной формуле (5.8) для приведенных гамма-функций

$$\Gamma_{\infty}^{\sigma}(\alpha) \Gamma_{-\infty}^{\tau}(\alpha) \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} \Gamma_{q_{pj}}(\alpha) \zeta_P(\alpha) = |D_{\mathbb{K}}|^{1/2-\alpha} \zeta_P(1-\alpha), \quad P = 2, 3, 5, \dots \quad (1.3)$$

Здесь $\zeta_P(\alpha)$ есть P -усеченная дзета-функция Дедекинда поля $\mathbb{K}$ (см. § 5).

Формула (1.3) – это по существу формула Тейта для надлежаще выбранной стандартной функции на аделе $A_{\mathbb{K}}$. Эта формула позволяет построить регуляризованные адельные формулы (5.12) для гамма-функций:

$$\Gamma_{\infty}^{\sigma}(\alpha) \Gamma_{-\infty}^{\tau}(\alpha) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} \Gamma_{p_j}(\alpha) = 1, \quad (1.4)$$

и адельные формулы (1.2) для бета-функций.

Необходимые предварительные сведения из анализа в локальных полях характеристики 0 и из теории алгебраических чисел, содержащиеся в книгах [14]–[20] и статьях [1], [2], [21], собраны в § 2–4.

Впредь под целыми (простыми) числами мы будем подразумевать целые (простые) рациональные числа. Множество всех целых чисел обозначим $\mathbb{Z}$, натуральных – $\mathbb{Z}_+$, рациональных – $\mathbb{Q}$. Через $\mathbb{K}^{\times}$ обозначаем мультипликативную группу поля (кольца) $\mathbb{K}$.

Предварительные результаты этой статьи (без доказательств и без формул для кубических полей) опубликованы в работе [22].

Автор благодарит РФФИ, а также И. Р. Шафаревича, И. В. Воловича и А. Н. Паршина за полезные обсуждения.

§2. Некоторые сведения из анализа в локальных полях характеристики 0

Локальным полем называем всякое неметрическое локально компактное поле. Такие поля характеристики 0 хорошо известны, это: $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, $\mathbb{Q}_{-\infty} = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\mathbb{Q}_p$, $p = 2, 3, 5, \dots$, – поля p -адических чисел и все их конечные расширения.

Перечислим некоторые необходимые в дальнейшем сведения из анализа в таких полях.

Для локального поля $\mathbb{K}$ (характеристики 0) обозначаем: x – точки, $d_{\mathbb{K}}x$ – мера Хаара, $N_{\mathbb{K}}(x) = \det A(x)$ – нормирование x , $|x|_{\mathbb{K}} = |N_{\mathbb{K}}(x)|_p$ – норма x , $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(x) = \text{Sp } A(x)$ – след x . Как известно,

$$d_{\mathbb{K}}(xy) = |x|_{\mathbb{K}} d_{\mathbb{K}}y. \quad (2.1)$$

Здесь $A(x)$ – матрица линейного преобразования $y \rightarrow xy$ поля $\mathbb{K}$.

Меру Хаара на мультипликативной группе $\mathbb{K}^\times$ поля $\mathbb{K}$ обозначим $d_{\mathbb{K}}^\times(x)$, так что можно положить

$$d_{\mathbb{K}}^\times(x) = |x|_{\mathbb{K}}^{-1} d_{\mathbb{K}}(x). \quad (2.2)$$

Приведем конкретные выражения.

Поле $\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty$. Здесь $d_{\mathbb{K}}x = dx$ – мера Лебега; $|x|_{\mathbb{K}} = |x|$; $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(x) = x$.

Поле $\mathbb{C} = \mathbb{Q}_{-\infty}$. $x = x_0 + ix_1$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$; $d_{\mathbb{K}}x = |dx \wedge d\bar{x}| = 2dx_0dx_1$; $N_{\mathbb{K}}(x) = |x|_{\mathbb{K}} = x_0^2 + x_1^2 = x\bar{x}$; $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(x) = 2x_0$. (Строго говоря, нормой здесь является величина $\sqrt{x\bar{x}}$.)

Поля $\mathbb{Q}_p$ ($p = 2, 3, 5, \dots$). $d_{\mathbb{K}}x = d_px$ – мера Хаара поля $\mathbb{Q}_p$; $|x|_{\mathbb{K}} = |x|_p$; $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(x) = x$; мера d_px нормирована условием

$$\int_{|x|_p \leq 1} d_px = 1.$$

Поля $\mathbb{Q}_p(\theta)$ ($p = 2, 3, 5, \dots$). Здесь θ – примитивный элемент расширения $\mathbb{Q}_p(\theta)$ поля $\mathbb{Q}_p$ степени n ; $\theta_1 = \theta, \theta_2, \dots, \theta_n$ – корни его минимального полинома; $1, \theta, \dots, \theta^{n-1}$ – базис поля $\mathbb{Q}_p(\theta)$; его точки –

$$x = x_0 + x_1\theta + \dots + x_{n-1}\theta^{n-1}, \quad x_j \in \mathbb{Q}_p, \quad j = 0, 1, \dots, n-1; \quad (2.3)$$

мера Хаара –

$$d_{\mathbb{K}}x = (1/\delta) d_px_0 d_px_1 \dots d_px_{n-1}, \quad (2.4)$$

где

$$\delta = \int_{|x|_{\mathbb{K}} \leq 1} d_px_0 d_px_1 \dots d_px_{n-1},$$

так что

$$\int_{|x|_{\mathbb{K}} \leq 1} d_{\mathbb{K}}x = 1.$$

Существует ровно n изоморфизмов

$$\sigma_j(x) = x_0 + x_1\theta_j + \dots + x_{n-1}\theta_j^{n-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

поля $\mathbb{Q}_p(\theta)$ на поля $\mathbb{Q}_p(\theta_j)$ таких, что $\sigma_j(x) = x$, $x \in \mathbb{Q}_p$, $\sigma_j(\theta) = \theta_j$. При этом для любого $x \in \mathbb{K}$

$$N_{\mathbb{K}}(x) = \sigma_1(x)\sigma_2(x)\dots\sigma_n(x), \quad \text{Sp}_{\mathbb{K}}(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x) + \dots + \sigma_n(x).$$

Базовый аддитивный характер обозначим: для поля $\mathbb{R} = \mathbb{Q}_{\infty}$

$$\chi_{\infty}(x) = \exp(-2\pi i x);$$

для полей $\mathbb{Q}_p$, $p = 2, 3, 5, \dots$,

$$\chi_p(x) = \exp 2\pi i \{x\}_p,$$

где $\{x\}_p$ – дробная часть p -адического числа x . Таким образом,

$$\chi_p(\text{Sp}_{\mathbb{K}}(x)) \quad (2.6)$$

– аддитивный характер поля $\mathbb{K}$.

Дифферентой поля $\mathbb{K}$ (относительно характера (2.6)) называется число q^r , где $r = r_{\mathbb{K}} \geq 0$ целое (*ранг* поля $\mathbb{K}$), такое, что

$$\chi_p(\text{Sp}_{\mathbb{K}}(x)) \equiv 1, \quad |x|_{\mathbb{K}} \leq q^r, \quad \chi_p(\text{Sp}_{\mathbb{K}}(x)) \not\equiv 1, \quad |x|_{\mathbb{K}} = q^{r+1}. \quad (2.7)$$

(При $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_{\pm\infty}$ считаем $r = 0$.)

Пусть $\mathbb{K}$ – неархимедово поле характеристики 0, т.е. поле $\mathbb{Q}_p$ или его конечное расширение. Обозначим через $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ максимальное компактное подкольцо (кольцо целых элементов) поля $\mathbb{K}$, через $I_{\mathbb{K}}$ простой (максимальный) *идеал* кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, через $q = p^f$, $f \geq 1$ целое, число классов вычетов поля $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}/I_{\mathbb{K}}$; q называется *модулем* поля $\mathbb{K}$.

В мультипликативной группе $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}^{\times}$ существует элемент ϵ порядка $q-1$, $\epsilon^{q-1} = 1$, такой, что элементы $\epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{q-1} = 1$ образуют полный набор классов вычетов поля $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}/I_{\mathbb{K}}$. В идеале $I_{\mathbb{K}}$ существует образующий элемент (дивизор) $\pi = \pi_{\mathbb{K}}$, $|\pi|_{\mathbb{K}} = q^{-1}$, такой, что любое число $x \in \mathbb{K}$, $|x|_{\mathbb{K}} = q^{-\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, однозначно представляется в виде ряда

$$x = \pi^{\gamma}(x_0 + x_1q + x_2q^2 + \dots), \quad (2.8)$$

сходящегося в $\mathbb{K}$, причем коэффициенты $x_0, x_1, \dots$ могут принимать значения $0, 1, \epsilon, \dots, \epsilon^{q-2}$, $x_0 \neq 0$.

ПРИМЕР. Для поля $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ $q = p$, $\pi = p$ и коэффициенты $x_0, x_1, \dots$ в (2.8) принимают значения $0, 1, \dots, p-1$, $x_0 \neq 0$. (В качестве ϵ достаточно взять первообразный корень по модулю p [23].)

Стандартной функцией называется: для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ – всякая функция из пространств Соболева–Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ или $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ соответственно; для полей $\mathbb{Q}_p(\theta)$ – всякая локально постоянная функция с компактным носителем (функция Брюа–Шварца). Множество стандартных функций поля $\mathbb{K}$ обозначим $\mathcal{S}(\mathbb{K})$, снабдив его стандартной топологией [15].

Преобразованием Фурье $\tilde{\varphi}(\xi)$ стандартной функции $\varphi(x)$ называется интеграл

$$\tilde{\varphi}(\xi) = q^{-r/2} \int_{\mathbb{K}} \varphi(x) \chi_p(\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(x\xi)) d_{\mathbb{K}}x. \quad (2.9)$$

Обратное преобразование Фурье дается формулой

$$\varphi(x) = q^{-r/2} \int_{\mathbb{K}} \tilde{\varphi}(\xi) \chi_p(-\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(x\xi)) d_{\mathbb{K}}\xi, \quad (2.9')$$

так что мера $q^{-r/2} d_{\mathbb{K}}x$ самодвойственна.

Отметим необходимые для дальнейшего формулы, справедливые при всех $\gamma \in \mathbb{Z}$, $p = 2, 3, 5, \dots$:

$$\int_{|x|_{\mathbb{K}} \leq q^\gamma} \chi_p(\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(x\xi)) d_{\mathbb{K}}x = q^\gamma \Omega(q^{\gamma-r} |\xi|_{\mathbb{K}}), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \int_{|x|_{\mathbb{K}} = q^\gamma} \chi_p(\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(x\xi)) d_{\mathbb{K}}x &= \\ &= q^\gamma (1 - q^{-1}) \Omega(q^{\gamma-r} |\xi|_{\mathbb{K}}) - q^{\gamma-1} \delta(|\xi|_{\mathbb{K}} - q^{r+1-\gamma}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\Omega(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases} \quad \delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Преобразование Фурье стандартным образом распространяется на обобщенные функции из $\mathcal{S}'(\mathbb{K})$.

Для полей $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p(\theta)$ *свертка и произведение*:

$$f * \psi = (f(y), \psi(x-y)), \quad f(x) \cdot \psi(x), \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{K}), \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{K}), \quad (2.12)$$

распространяются на обобщенные функции f и g из $\mathcal{S}'(\mathbb{K})$ следующим образом [21]:

$$(f * g, \varphi) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} ((f * (\Omega_\gamma g), \varphi), \quad (2.13)$$

$$(f \cdot g, \varphi) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (f(\Delta_\gamma * g), \varphi), \quad (2.14)$$

если пределы существуют для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$. Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_\gamma(x) &= \Omega(q^{-\gamma} |x|_{\mathbb{K}}) \rightarrow 1, \quad \gamma \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{S}'(\mathbb{K}), \\ \Delta_\gamma(x) &= q^\gamma \Omega(q^\gamma |x|_{\mathbb{K}}) \rightarrow \delta(x), \quad \gamma \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{S}'(\mathbb{K}), \\ \tilde{\Omega}_\gamma(\xi) &= q^{r/2} \Delta_{\gamma-r}(\xi) = q^{\gamma-r/2} \Omega_{r-\gamma}(\xi) \end{aligned} \quad (2.15)$$

(см. (2.10)).

ТЕОРЕМА [21]. Если обобщенные функции f и g из $S'(\mathbb{K})$ таковы, что одна из величин $f * g$, $g * f$, $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$, $\tilde{g} \cdot \tilde{f}$ существует в $S'(\mathbb{K})$, то существуют и остальные величины и справедливы равенства

$$f * g = g * f, \quad \widetilde{f * g} = q^{r/2} \tilde{f} \cdot \tilde{g}, \quad \tilde{f} \cdot \tilde{g} = \tilde{g} \cdot \tilde{f}. \quad (2.16)$$

§3. Гамма- и бета-функции локальных полей характеристики 0

Напомним аналитические свойства обобщенной функции $|x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1} \in S'(\mathbb{K})$, т.е. выражения

$$\text{AC} \int_{\mathbb{K}} |x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1} \varphi(x) d_{\mathbb{K}} x, \quad \varphi \in S(\mathbb{K}), \quad (3.1)$$

где AC обозначает аналитическое продолжение по α интеграла из области $\text{Re } \alpha > 0$.

Функция $|x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1}$ голоморфна всюду, кроме простых полюсов в точках $\alpha = 0, -2, -4, \dots$ для поля $\mathbb{R}$; в точках $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ для поля $\mathbb{C}$; в точках $\alpha = \frac{2k\pi i}{\log q}$, $k \in \mathbb{Z}$, для полей $\mathbb{Q}_p(\theta)$. Здесь q – модуль поля $\mathbb{K}$.

Гамма-функцией $\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha)$ поля $\mathbb{K}$ называется аналитическое продолжение преобразования Фурье однородной обобщенной функции $|x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1}$, взятое в точке 1:

$$\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha) = \text{AC} |\tilde{x}|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1}(1) = q^{-r/2} \text{AC} \int_{\mathbb{K}} |x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1} \chi_p(\text{Sp}_{\mathbb{K}}(x)) d_{\mathbb{K}} x, \quad (3.2)$$

из области $\text{Re } \alpha > 0$.

Бета-функцией $B_{\mathbb{K}}(\alpha, \beta)$ поля $\mathbb{K}$ называется аналитическое продолжение значения свертки $|x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1} * |x|_{\mathbb{K}}^{\beta-1}$, взятое в точках окружности $|x|_p = 1$:

$$|x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1} * |x|_{\mathbb{K}}^{\beta-1} = B_{\mathbb{K}}(\alpha, \beta) |x|_{\mathbb{K}}^{\alpha+\beta-1}, \quad (3.3)$$

из трубчатой области $\text{Re } \alpha > 0$, $\text{Re } \beta > 0$, $\text{Re}(\alpha + \beta) < 1$.

Для конкретных полей справедливы следующие формулы.

Поле $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbb{R}}(\alpha) &= \text{AC} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha-1} \exp(-2\pi i x) dx = 2(2\pi)^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \\ &= \pi^{1/2-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})} = \frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)} = \Gamma_{\infty}(\alpha), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера и $\zeta(\alpha)$ – дзета-функция Римана.

Поле $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbb{C}}(\alpha) &= 2 \text{AC} \int_{\mathbb{R}^2} (x_0^2 + x_1^2)^{\alpha-1} \exp(-4\pi i x_0) dx_0 dx_1 = (2\pi)^{1-2\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \\ &= 2^{1-2\alpha} \pi^{-2\alpha} \Gamma^2(\alpha) \sin \pi\alpha = \Gamma_{-\infty}(\alpha). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поля $\mathbb{Q}_p(\theta)$ ($p = 2, 3, 5, \dots$):

$$\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha) = q^{(\alpha-1/2)r} \Gamma_q(\alpha). \quad (3.6)$$

Формулы (3.4) и (3.5) хорошо известны. Формула (3.6) немедленно следует из формул (3.2), (2.10) и (2.11). Действительно, при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha) &= q^{-r/2} \int_{\mathbb{K}} |x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1} \chi_p(\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(x)) d_{\mathbb{K}}x = q^{-r/2} \int_{|x|_{\mathbb{K}} \leq q^r} |x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1} d_{\mathbb{K}}x \\ &\quad + q^{-r/2} \int_{|x|_{\mathbb{K}} = q^{r+1}} |x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1} \chi_p(\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(x)) d_{\mathbb{K}}x \\ &= q^{-r/2} \sum_{\gamma=-\infty}^r q^{\gamma(\alpha-1)} \int_{|x|_{\mathbb{K}} = q^{\gamma}} d_{\mathbb{K}}x \\ &\quad + q^{(\alpha-1)(r+1)-r/2} \int_{|x|_{\mathbb{K}} = q^{r+1}} \chi_p(\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(x)) d_{\mathbb{K}}x \\ &= \left(1 - \frac{1}{q}\right) q^{-r/2} \sum_{\gamma=-\infty}^r q^{\gamma\alpha} - q^{(\alpha-1/2)r+\alpha-1} \\ &= q^{(\alpha-1/2)r} \left(\frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-\alpha}} - q^{\alpha-1} \right) = q^{(\alpha-1/2)r} \Gamma_q(\alpha). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функция $\Gamma_q(\alpha)$ называется *приведенной гамма-функцией* поля $\mathbb{K}$.

Функции $\Gamma_q(\alpha)$ и $\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha)$ удовлетворяют функциональному соотношению

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = 1. \quad (3.8)$$

Для преобразования Фурье однородной обобщенной функции $|x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1}$ справедлива формула

$$|\tilde{x}|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1}(\xi) = \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha) |\xi|_{\mathbb{K}}^{-\alpha}. \quad (3.9)$$

Формула (3.9) при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ сразу следует из (3.2) с помощью замены переменных $x\xi \rightarrow x$ и с использованием формулы (2.1).

Применяя формулу преобразования Фурье свертки (см. (2.16)) к равенству (3.3) при $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 1$ и пользуясь (3.9) и (3.8), получим явное выражение для бета-функции поля $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{K}}(\alpha, \beta) &= q^{r/2} \frac{\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha)\Gamma_{\mathbb{K}}(\beta)}{\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha + \beta)} = q^{r/2} \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \Gamma_{\mathbb{K}}(x) \\ &= \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \Gamma_q(x) = B_q(\alpha, \beta), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отметим другие симметричные выражения для бета-функций полей $\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty$ и $\mathbb{C} = \mathbb{Q}_{-\infty}$:

$$\begin{aligned} B_\infty(\alpha, \beta) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} + \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} = \frac{4}{\pi} \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \frac{\cos \pi x}{2\Gamma(x)} \\ &= \sqrt{\pi} \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \frac{\Gamma(x/2)}{\Gamma(\frac{1-x}{2})} = \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \frac{\zeta(1-x)}{\zeta(x)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$B_{-\infty}(\alpha, \beta) = 2\pi \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} = \frac{2}{\pi^2} \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \Gamma^2(x) \sin \pi x. \quad (3.12)$$

Преобразование Меллина $\Phi_{\mathbb{K}}(\alpha)$ стандартной функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$ называется аналитическое продолжение нормированного интеграла (3.1) из области $\operatorname{Re} \alpha > 0$,

$$\Phi_{\mathbb{K}}(\alpha) = \operatorname{AC} \int_{\mathbb{K}^\times} \varphi(x) |x|_{\mathbb{K}}^\alpha d_{\mathbb{K}}^\times x = (1 - q^{-1})^{-1} \operatorname{AC} \int_{\mathbb{K}} \varphi(x) |x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1} d_{\mathbb{K}} x. \quad (3.13)$$

Справедлива формула

$$\Phi_{\mathbb{K}}(\alpha) = \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha) \tilde{\Phi}_{\mathbb{K}}(1 - \alpha), \quad (3.14)$$

где $\tilde{\Phi}_{\mathbb{K}}(\alpha)$ – преобразование Меллина функции $\tilde{\varphi}$.

Равенство (3.14) немедленно следует из формулы (3.9):

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbb{K}}(\alpha) &= (1 - q^{-1})^{-1} (|x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1}, \varphi) = (1 - q^{-1})^{-1} (|\tilde{x}|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1}, \tilde{\varphi}) \\ &= (1 - q^{-1})^{-1} \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha) (|x|_{\mathbb{K}}^{-\alpha}, \tilde{\varphi}) = \Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha) \tilde{\Phi}_{\mathbb{K}}(1 - \alpha). \end{aligned}$$

Здесь (f, φ) обозначает значение обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{K})$ на основной функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$.

Отметим два примера, необходимых в дальнейшем.

1. Преобразование Меллина $\Phi_{\mathbb{K}0}(x)$ характеристической функции $\Omega(|x|_{\mathbb{K}})$ кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ дается равенством

$$\Phi_{\mathbb{K}0}(x) = (1 - q^{-\alpha})^{-1}. \quad (3.15)$$

Это вытекает из (3.13) и (3.7).

2. $\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha)$ есть преобразование Меллина стандартной функции

$$\varphi_{\mathbb{K}0}(x) = (1 - q^{-1}) q^{-r/2} \chi_p(\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(x)) \Omega(q^{-1-r} |x|_{\mathbb{K}}),$$

т.е.

$$\Gamma_{\mathbb{K}}(\alpha) = \int_{|x|_{\mathbb{K}} \leq q^{r+1}} |x|_{\mathbb{K}}^{\alpha-1} \varphi_{\mathbb{K}0}(x) d_{\mathbb{K}} x. \quad (3.16)$$

Это вытекает из (3.13) и (3.7).

§4. Некоторые сведения из анализа на группах аделей полей алгебраических чисел

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\theta)$ – поле алгебраических чисел степени n [14]; $\theta_1 = \theta, \theta_2, \dots, \theta_n$ – корни минимального полинома для θ ; $1, \theta, \dots, \theta^{n-1}$ – базис поля $\mathbb{Q}(\theta)$; его точки –

$$x = x_0 + x_1\theta + \dots + x_{n-1}\theta^{n-1}, \quad x_j \in \mathbb{Q}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Без ограничения общности можно считать, что минимальный полином имеет целые коэффициенты. Обозначим через σ и 2τ соответственно число его вещественных и комплексных корней, так что $n = \sigma + 2\tau$.

Как и в § 2, введем нормирование $N_{\mathbb{K}}(x)$ и след $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(x)$ элемента $x \in \mathbb{K}$.

Существует ровно n изоморфизмов

$$\sigma_j(x) = x_0 + x_1\theta_j + \dots + x_{n-1}\theta_j^{n-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

поля $\mathbb{Q}(\theta)$ на поля $\mathbb{Q}(\theta_j)$ таких, что $\sigma_j(x) = x$, $x \in \mathbb{Q}$, $\sigma_j(\theta) = \theta_j$.

Если $\theta_j \in \mathbb{Q}(\theta)$, $j = 1, 2, \dots, n$, то поле $\mathbb{Q}(\theta)$ называется *полем Галуа*, а изоморфизмы σ_j , являясь автоморфизмами поля $\mathbb{Q}(\theta)$, образуют группу, которая называется *группой Галуа* поля $\mathbb{Q}(\theta)$.

Все числа поля $\mathbb{K}$, минимальные полиномы которых имеют целые коэффициенты, образуют кольцо $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, которое называется *максимальным порядком* поля $\mathbb{K}$. $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ – целое замыкание кольца $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{K}$; $\mathbb{K}$ есть поле отношений кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$.

Пусть $\pi_1 = \pi_{p1}$, $\pi_2 = \pi_{p2}$, $\dots$, $\pi_m = \pi_{pm_p}$ ($m = m_p \leq n$) – все простые дивизоры поля $\mathbb{K}$, делящие простое число p :

$$p = \pi_1^{e_1} \pi_2^{e_2} \dots \pi_m^{e_m}, \quad e_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.1)$$

Натуральное число $e_j = e_{pj}$ называется *индексом ветвления* дивизора π_j . Так как всякий простой дивизор есть делитель одного и только одного простого числа, то индексы ветвления определяются равенством (4.1) однозначно. Натуральное число

$$f_j = f_{pj} = -\ln_p |\pi_j|_{\mathbb{K}}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.2)$$

называется *степенью инерции* дивизора π_j ; $|\pi_j|_{\mathbb{K}}$ есть норма дивизора π_j . Число p^{f_j} равно числу элементов поля $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}/\pi_j$ (характеристики p).

Степени инерции f_j и индексы ветвления e_j удовлетворяют соотношению

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + \dots + e_m f_m = n. \quad (4.3)$$

В частности, если $\mathbb{K}$ – поле Галуа, то $e_1 = e_2 = \dots = e_m = e$ и $f_1 = f_2 = \dots = f_m = f$, и соотношение (4.3) принимает вид

$$m f e = n. \quad (4.4)$$

Обозначим через $(\sigma_{pj}, \mathbb{K}_{pj})$, где $p = \infty$, $j = 1, 2, \dots, \sigma$; $p = -\infty$, $j = 1, 2, \dots, \tau$; $p = 2$, $j = 1, 2, \dots, m_2$; $p = 3$, $j = 1, 2, \dots, m_3$; ... точки поля $\mathbb{K}$ [15]. Здесь

$\mathbb{K}_{pj}$ – пополнение поля $\mathbb{K}$ и σ_{pj} – соответствующие автоморфизмы, $\bar{\sigma}_{pj}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}_{pj}$; для бесконечных вещественных точек $\mathbb{K}_{\infty j} = \mathbb{Q}_{\infty} = \mathbb{R}$, для бесконечных мнимых точек $\mathbb{K}_{-\infty j} = \mathbb{Q}_{-\infty} = \mathbb{C}$ и для конечных точек $\mathbb{K}_{pj} = \mathbb{Q}_p(\sigma_{pj}(\theta))$.

Обозначим для краткости: $\mathbb{Z}_{pj} = \mathbb{Z}_{\mathbb{K}_{pj}}$ – максимальное компактное подкольцо в $\mathbb{K}_{pj}$; $I_{pj} = I_{\mathbb{K}_{pj}}$ – максимальный идеал в $\mathbb{Z}_{pj}$;

$$q_{pj} = p^{f_{pj}} \quad (4.5)$$

– модуль поля $\mathbb{K}_{pj}$; $r_{pj} = r_{\mathbb{K}_{pj}}$ – ранг поля $\mathbb{K}_{pj}$; $|x|_{pj} = |x|_{\mathbb{K}_{pj}}$; $\text{Sp}_{pj}(x) = \text{Sp}_{\mathbb{K}_{pj}}(x)$; $d_{pj} = d_{\mathbb{K}_{pj}}$; $\Gamma_{pj}(\alpha) = \Gamma_{\mathbb{K}_{pj}}(\alpha)$.

ПРИМЕР 1. Поле $\mathbb{Q}$ имеет одну вещественную точку $p = \infty$ и счетное число конечных точек $p = 2, 3, 5, \dots$, причем $m_p = 1$, $q_p = p$.

ПРИМЕР 2. Поле $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ имеет две вещественные точки при $d > 0$ и одну мнимую точку при $d < 0$; $m_p = 2$, если $d \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$, $m_p = 1$, если $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$; $q_{p1} = p^2$, если $|d|_p = 1$, $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$, $p \neq 2$ или $d \equiv 5 \pmod{8}$, $p = 2$; $q_{p1} = q_{p2} = p$, если $d \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$; $q_{p1} = p$ в остальных случаях.

Аделем X поля $\mathbb{K}$ называется бесконечная последовательность вида

$$X = (x_{\infty 1}, \dots, x_{\infty \sigma}, x_{-\infty 1}, \dots, x_{-\infty \tau}, x_{21}, \dots, x_{2m_2}, \dots, x_{p1}, \dots, x_{pm_p}, \dots),$$

где $x_{\infty j} \in \mathbb{R}$, $x_{-\infty j} \in \mathbb{C}$, $x_{pj} \in \mathbb{K}_{pj}$ и существует такое простое число P , что $x_{pj} \in \mathbb{Z}_{pj}$, $p > P$.

Совокупность всех аделей поля $\mathbb{K}$ обозначим через $A = A_{\mathbb{K}}$; $A_{\mathbb{K}}$ – кольцо аделей, его аддитивная группа называется группой аделей поля $\mathbb{K}$.

Элементы кольца аделей $A_{\mathbb{K}}$, для которых существует обратный элемент, называются идеями. Совокупность $A^{\times}$ всех идеей образует группу по умножению, называемую группой идеей поля $\mathbb{K}$.

Адели (идели) вида $\mathbf{x} = (\sigma_{pj}(x))$, $x \in \mathbb{K}$ ($x \in \mathbb{K}^{\times}$ соответственно) называются главными аделями (иделями) поля $\mathbb{K}$. Главные адели (идели) осуществляют вложение поля $\mathbb{K}$ (соответственно поля $\mathbb{K}^{\times}$) в $A_{\mathbb{K}}$ (соответственно в $A_{\mathbb{K}}^{\times}$).

В кольце аделей $A_{\mathbb{K}}$ и в группе идеей $A_{\mathbb{K}}^{\times}$ вводятся стандартные топологии [15], превращая их в локальные объекты.

Группа аделей $A_{\mathbb{K}}$, будучи коммутативной и локальной, обладает (единственной) инвариантной мерой (мерой Хаара)

$$dX = \prod_{pj} d_{pj} x_{pj}, \quad (4.6)$$

где меры $d_{pj}x$ равны: dx при $p = \infty$; $|dx \wedge d\bar{x}|$ при $p = -\infty$; $d_{pj}x$ при $p = 2, 3, 5, \dots$.

Если Y – идель, то $d(XY)$ есть инвариантная мера на $A_{\mathbb{K}}$ и, стало быть, она пропорциональна мере Хаара dX . Обозначая через $|Y|_A$ множитель пропорциональности, будем иметь

$$d(XY) = |Y|_A dX. \quad (4.7)$$

Число $|Y|_A$ называется *модулем* идеала Y . Ясно, что

$$|X|_A = \prod_{pj} |x_{pj}|_{pj}. \quad (4.8)$$

В частности, если $\mathbf{x}$ – главный идеал, то справедлива формула произведения Артина

$$|\mathbf{x}|_A = \prod_{pj} |\sigma_{pj}(x)|_{pj} = 1, \quad x \in \mathbb{K}^\times. \quad (4.9)$$

На группе идеалов $A_{\mathbb{K}}^\times$ имеется инвариантная мера Хаара

$$d^\times X = \prod_{pj} d_{pj}^\times x_{pj}, \quad (4.10)$$

где меры $d_{pj}^\times x$ равны: $|x|^{-1}dx$ при $p = \infty$; $|x|^{-2}|dx \wedge d\bar{x}|$ при $p = -\infty$;

$$(1 - q_{pj}^{-1})^{-1} |x|_{pj}^{-1} d_{pj} x \quad \text{при } p = 2, 3, 5, \dots$$

Стандартной функцией (функцией Брюа–Шварца) на кольце аделей $A_{\mathbb{K}}$ называется конечная сумма элементарных функций вида

$$\begin{aligned} \prod_{pj} \varphi_{pj}(x_{pj}), \quad \varphi_{pj} \in \mathcal{S}(\mathbb{K}_{pj}), \quad p = \pm\infty, 2, 3, 5, \dots, P, \\ \varphi_{pj} = \Omega(|x_{pj}|_{pj}), \quad p > P. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Стандартные функции непрерывны на $A_{\mathbb{K}}$; их множество обозначим $\mathcal{S}(A_{\mathbb{K}})$.

Аддитивный характер кольца $A_{\mathbb{K}}$ – это характер $\chi(X)$ его аддитивной группы. Обозначая через $\chi_{pj}(x_{pj})$ сужение характера χ на подкольцо аделей вида $(0, \dots, x_{pj}, 0, \dots)$, представим его в форме

$$\chi(X) = \prod_{pj}^P \chi_{pj}(x_{pj}). \quad (4.12)$$

В качестве χ_{pj} берутся стандартные характеры полей $\mathbb{K}_{pj}$ (§ 2).

Назовем *следом* $\text{Sp}(X)$ аделя X адель

$$\text{Sp}(X) = \left(\text{Sp}_{pj}(x_{pj}), \quad p = \pm\infty, 2, 3, 5, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, m_p \right); \quad (4.13)$$

$\text{Sp}(X)$ есть адель, так как $\text{Sp}_{pj}(x_{pj}) \in \mathbb{K}_{pj}$, $\text{Sp}_{pj}(x_{pj}) \in \mathbb{Z}_{pj}$, $p > P$.

В качестве меры Хаара на $A_{\mathbb{K}}$ возьмем меру

$$\prod_{pj} q^{-(1/2)r_{pj}} d_{pj} x_{pj}, \quad (4.14)$$

где r_{pj} – ранг характера χ_{pj} ($r_{pj} = 0$ для почти всех p).

Принимая во внимание равенство [14], [15]

$$\prod_{pj} q_{pj}^{r_{pj}} = |D_{\mathbb{K}}|, \quad (4.15)$$

где $D_{\mathbb{K}}$ – дискриминант поля $\mathbb{K}$, представим меру (4.14) в виде

$$\prod_{pj} q^{-(1/2)r_{pj}} d_{pj} x_{pj} = |D_{\mathbb{K}}|^{-1/2} \prod_{pj} d_{pj} x_{pj} = |D_{\mathbb{K}}|^{-1/2} dX, \quad (4.16)$$

где мера dX определена формулой (4.6).

Преобразование Фурье $\tilde{\varphi}(\Xi)$ стандартной функции $\varphi(X)$ определяется формулой

$$\tilde{\varphi}(\Xi) = |D_{\mathbb{K}}|^{-1/2} \int_{A_{\mathbb{K}}} \varphi(X) \chi(\mathrm{Sp}(X\Xi)) dX; \quad (4.17)$$

обратное преобразование Фурье дается формулой

$$\varphi(X) = |D_{\mathbb{K}}|^{-1/2} \int_{A_{\mathbb{K}}} \tilde{\varphi}(\Xi) \chi(-\mathrm{Sp}(X\Xi)) d\Xi. \quad (4.17')$$

Как мы видим, мера (4.16) *самодвойственна*, она называется *мерой Томагавы*.

Преобразование Фурье отображает $\mathcal{S}(A_{\mathbb{K}})$ на $\mathcal{S}(A_{\mathbb{K}})$ взаимно однозначно.

Преобразованием Меллина стандартной функции $\varphi(X)$ называется функция

$$\Phi(\alpha) = \int_{A_{\mathbb{K}}^{\times}} \varphi(X) |X|_{A_{\mathbb{K}}}^{\alpha} d^{\times} X, \quad (4.18)$$

где $d^{\times} X$ – мера Хаара на группе идеалов $A_{\mathbb{K}}^{\times}$, определенная формулой (4.10). Для стандартных функций φ вида (4.11) в подробной записи формула (4.18) в силу (3.15) принимает следующий вид:

$$\Phi(\alpha) = \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} \Phi_{pj}(\alpha) \prod_{p=P_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} (1 - q_{pj}^{-\alpha})^{-1}, \quad (4.19)$$

где $\Phi_{pj}(\alpha)$ – преобразование Меллина функции φ_{pj} ; P_1 – простое число, следующее за простым числом P .

Из представления (4.19) следует, что интеграл в (4.18) сходится абсолютно при $\mathrm{Re} \alpha > 0$, определяя тем самым голоморфную функцию $\Phi(\alpha)$ в $\mathrm{Re} \alpha > 0$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА (Тейт [15], [24]). *Функция $\Phi(\alpha)$ продолжается на всю плоскость комплексной переменной α за исключением простых полюсов $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ с вычетами $C_{\mathbb{K}}\varphi(0)$ и $C'_{\mathbb{K}}\tilde{\varphi}(0)$ соответственно. При этом для функций $\Phi(\alpha)$ и $\tilde{\Phi}(\alpha)$ (преобразования Меллина функции $\tilde{\varphi}$) справедливо следующее функциональное соотношение (формула Тейта):*

$$\Phi(\alpha) = \tilde{\Phi}(1 - \alpha), \quad \alpha \neq 0, 1. \quad (4.20)$$

Здесь числа $C_{\mathbb{K}}$ и $C'_{\mathbb{K}}$ зависят только от поля $\mathbb{K}$.

§5. Адельные формулы для гамма- и бета-функций пополнений полей алгебраических чисел

Применим теорему Тейта для стандартной функции $\varphi(X)$ вида (4.11), в которой

$$\begin{aligned}\varphi_{\infty j}(x) &= \exp(-\pi x^2), & \tilde{\varphi}_{\infty j}(\xi) &= \exp(-\pi \xi^2), & j &= 1, 2, \dots, \sigma; \\ \varphi_{-\infty j}(x) &= \exp(-2\pi x\bar{x}), & \tilde{\varphi}_{-\infty j}(\xi) &= \exp(-2\pi \xi\bar{\xi}), & j &= 1, 2, \dots, \tau; \\ \varphi_{pj}(x) &= (1 - q_{pj}^{-1})q_{pj}^{-(1/2)r_{pj}} \chi_p(\mathrm{Sp}_{pj}(x)) \Omega(q_{pj}^{-1-r_{pj}} |x|_{pj}), & p &= 2, 3, 5, \dots\end{aligned}$$

Тогда, как известно [15],

$$\begin{aligned}\Phi_{\infty j}(\alpha) &= \tilde{\Phi}_{\infty j}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2) |x|^{\alpha-1} dx \\ &= \pi^{-\alpha/2} \Gamma(\alpha/2) \equiv G_{\infty}(\alpha), & j &= 1, 2, \dots, \sigma,\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{-\infty j}(\alpha) &= \tilde{\Phi}_{-\infty j}(\alpha) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi x^2 - 2\pi y^2) (x^2 + y^2)^{\alpha-1} dx dy \\ &= (2\pi)^{1-\alpha} \Gamma(\alpha) \equiv G_{-\infty}(\alpha), & j &= 1, 2, \dots, \tau.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Далее, в силу формул (3.16) и (3.14)

$$\Phi_{pj}(\alpha) = \Gamma_{pj}(\alpha), \quad \tilde{\Phi}_{pj}(\alpha) = 1, \quad p = 2, 3, 5, \dots, P,$$

и, наконец, в силу (3.15), (3.6) и (3.14)

$$\Phi_{pj}(\alpha) = (1 - q_{pj}^{-\alpha})^{-1}, \quad \tilde{\Phi}_{pj}(\alpha) = (1 - q_{pj}^{\alpha})^{-1} q_{pj}^{(\alpha-1/2)r_{pj}}, \quad p \geq P_1.$$

Подставляя полученные выражения в формулу Тейта (4.20):

$$\prod_{pj} \Phi_{pj}(\alpha) = \prod_{pj} \tilde{\Phi}_{pj}(1 - \alpha),$$

при всех $P = 2, 3, 5, \dots$ получим равенства

$$\begin{aligned}G_{\infty}^{\sigma}(\alpha) G_{-\infty}^{\tau}(\alpha) \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} \Gamma_{pj}(\alpha) \zeta_P(\alpha) \\ = G_{\infty}^{\sigma}(1 - \alpha) G_{-\infty}^{\tau}(1 - \alpha) \zeta_P(1 - \alpha) \prod_{p=P_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} q_{pj}^{(1/2-\alpha)r_{pj}},\end{aligned}\tag{5.3}$$

где $\zeta_P(\alpha) = \zeta_{KP}(\alpha)$ — P -усеченная дзета-функция Дедекинда поля $\mathbb{K}$,

$$\zeta_P(\alpha) = \mathrm{AC} \prod_{p=P_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} (1 - q_{pj}^{-\alpha})^{-1}, \quad P = 2, 3, 5, \dots$$

При $P = \infty$ считаем $P_1 = 2$, и $\zeta_{\mathbb{K}\infty}(\alpha) = \zeta_{\mathbb{K}}(\alpha)$ есть дзета-функция Дедекинда поля $\mathbb{K}$,

$$\zeta_{\mathbb{K}}(\alpha) = \prod_{p=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} (1 - q_{pj}^{-\alpha})^{-1}.$$

По теореме Тейта обе части равенства (5.3) голоморфны по α всюду, кроме точки $\alpha = 0$, где они имеют простой полюс с вычетом

$$C_{\mathbb{K}}\varphi(0) = C_{\mathbb{K}} \prod_{pj} \varphi_{pj}(0) = C_{\mathbb{K}} \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} q_{pj}^{-r_{pj}/2} (1 - q_{pj}^{-1}). \quad (5.4)$$

В точке $\alpha = 1$ эти функции голоморфны, так как в ней вычет, равный $C'_{\mathbb{K}}\tilde{\varphi}(0)$, равен 0 в силу равенства (2.11) при $\gamma = r_{pj} + 1$:

$$\tilde{\varphi}_{pj}(0) = q_{pj}^{-r_{pj}/2} (1 - q_{pj}^{-1}) \int_{|x|_{pj} \leq q_{pj}^{r_{pj}+1}} \chi_p(\mathrm{Sp}_{pj}(x)) d_{pj}x = 0, \quad p \leq P.$$

Полагая в равенстве (5.3) $P = \infty$, $P_1 = 2$ (оно верно и в этом случае) и пользуясь равенством (4.15), согласно которому

$$\prod_{pj} q_{pj}^{(1/2-\alpha)r_{pj}} = |D_{\mathbb{K}}|^{1/2-\alpha}, \quad (5.5)$$

получим функциональное соотношение

$$\frac{\zeta_{\mathbb{K}}(1-\alpha)}{\zeta_{\mathbb{K}}(\alpha)} = |D_{\mathbb{K}}|^{\alpha-1/2} \frac{G_{\infty}^{\sigma}(\alpha)}{G_{\infty}^{\sigma}(1-\alpha)} \frac{G_{-\infty}^{\tau}(\alpha)}{G_{-\infty}^{\tau}(1-\alpha)} \quad (5.6)$$

для дзета-функции Дедекинда $\zeta_{\mathbb{K}}(\alpha)$ поля $\mathbb{K}$.

Замечая теперь, что (см. (3.4), (3.5), (5.1) и (5.2))

$$\Gamma_{\infty}(\alpha) = \frac{G_{\infty}(\alpha)}{G_{\infty}(1-\alpha)}, \quad \Gamma_{-\infty}(\alpha) = \frac{G_{-\infty}(\alpha)}{G_{-\infty}(1-\alpha)},$$

перепишем равенство (5.6) в виде

$$\Gamma_{\infty}^{\sigma}(\alpha) \Gamma_{-\infty}^{\tau}(\alpha) = |D_{\mathbb{K}}|^{1/2-\alpha} \frac{\zeta_{\mathbb{K}}(1-\alpha)}{\zeta_{\mathbb{K}}(\alpha)}. \quad (5.7)$$

При этом равенство (5.3) примет вид

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\infty}^{\sigma}(\alpha) \Gamma_{-\infty}^{\tau}(\alpha) \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} \Gamma_{pj}(\alpha) \zeta_P(\alpha) \\ &= \prod_{p=P_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} q_{pj}^{(1/2-\alpha)r_{pj}} \zeta_P(1-\alpha), \quad P = 2, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

Поскольку функции $G_{\pm\infty}(\alpha)$ в нуль нигде не обращаются и $G_{\pm\infty}(1) = 1$, то обе части равенства (5.8) остаются голоморфными по α всюду, кроме точки $\alpha = 0$, где они имеют простой полюс с вычетом (5.4).

В силу (5.7) и (5.5) равенство (5.8) можно теперь переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta_{\mathbb{K}}(1-\alpha)}{\zeta_{\mathbb{K}}(\alpha)} \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} \Gamma_{pj}(\alpha) \zeta_P(\alpha) \\ &= \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} q_{pj}^{(\alpha-1/2)r_{pj}} \zeta_P(1-\alpha), \quad \alpha \neq 0, \quad P = 2, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbb{K}$ – поле алгебраических чисел степени $n = \sigma + 2\tau$. Тогда справедливы адельные формулы (5.8) и (5.9), причем обе части этих равенств голоморфны по α всюду, кроме точки $\alpha = 0$, где они имеют простой полюс с вычетом (см. (5.4))

$$C_{\mathbb{K}} \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} q^{-r_{pj}/2} (1 - q_{pj}^{-1}).$$

При $\operatorname{Re} \alpha < 0$ правая часть равенства (5.8) имеет при $P \rightarrow \infty$ предел 1:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p=P_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} q_{pj}^{(1/2-\alpha)r_{pj}} (1 - q_{pj}^{\alpha-1})^{-1} = 1,$$

и, стало быть, такой же предел имеет и левая часть этого равенства:

$$\Gamma_{\infty}^{\sigma}(\alpha) \Gamma_{-\infty}^{\tau}(\alpha) \lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} \Gamma_{pj}(\alpha) \zeta_P(\alpha) = 1. \quad (5.10)$$

Предельное соотношение (5.10) дает возможность ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Регуляризованным произведением гамма-функций, $\operatorname{reg} \prod_{pj} \Gamma_{pj}(\alpha)$, назовем предел

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} \Gamma_{pj}(\alpha) \zeta_P(\alpha)$$

для тех α , для которых он существует, и его аналитическое продолжение для остальных α .

Таким образом, в силу (5.10) при $\operatorname{Re} \alpha < 0$ имеем

$$\operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} \Gamma_{pj}(\alpha) = \lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} \Gamma_{pj} \zeta_P(\alpha). \quad (5.11)$$

Из этих рассуждений следует такая

ТЕОРЕМА 2 [22]. *Регуляризованное произведение гамма-функций пополнений поля алгебраических чисел степени $n = \sigma + 2\tau$ существует, и справедлива адельная формула*

$$\Gamma_{\infty}^{\sigma}(\alpha)\Gamma_{-\infty}^{\tau}(\alpha)\operatorname{reg}\prod_{p=2}^{\infty}\prod_{j=1}^{m_p}\Gamma_{pj}(\alpha)=1. \quad (5.12)$$

Для приведенных гамма-функций $\Gamma_{q_{pj}}(\alpha)$ (см. (3.6)) формула (5.12) в силу (5.5) имеет вид

$$\Gamma_{\infty}^{\sigma}(\alpha)\Gamma_{-\infty}^{\tau}(\alpha)\operatorname{reg}\prod_{p=2}^{\infty}\prod_{j=1}^{m_p}\Gamma_{q_{pj}}(\alpha)=|D_{\mathbb{K}}|^{1/2-\alpha}, \quad (5.13)$$

или, что эквивалентно, в терминах дзета-функции Дедекинда $\zeta_{\mathbb{K}}(\alpha)$ (см. (5.9))

$$\frac{\zeta_{\mathbb{K}}(1-\alpha)}{\zeta_{\mathbb{K}}(\alpha)}\operatorname{reg}\prod_{p=2}^{\infty}\prod_{j=1}^{m_p}\Gamma_{q_{pj}}=1. \quad (5.13')$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вычет (5.4) в точке $\alpha = 0$ стремится к 0 при $P \rightarrow \infty$, так как

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} (1 - q_{pj}^{-1}) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обе части равенства (5.13) – целые функции, причем $|D_{\mathbb{K}}| > 1$, если $\mathbb{K} \neq \mathbb{Q}$.

Умножим равенство (5.8) на такое же равенство, в котором α заменено на β , и разделим полученное равенство на равенство (5.8), в котором α заменено на $\alpha + \beta$. В результате, воспользовавшись (3.10), для бета-функций получим равенство

$$\begin{aligned} B_{\infty}^{\sigma}(\alpha, \beta)B_{-\infty}^{\tau}(\alpha, \beta) \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} q_{pj}^{-r_{pj}/2} B_{q_{pj}}(\alpha, \beta) \zeta_P(\alpha) \zeta_P(\beta) \zeta_P^{-1}(\alpha + \beta) \\ = \prod_{p=P_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} q_{pj}^{r_{pj}/2} \zeta_P(1-\alpha) \zeta_P(1-\beta) \zeta_P^{-1}(1-\alpha-\beta). \end{aligned}$$

Наконец, принимая во внимание соотношение (4.15), из последнего равенства для бета-функций выводим равенство

$$\begin{aligned} B_{\infty}^{\sigma}(\alpha, \beta)B_{-\infty}^{\tau}(\alpha, \beta) \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} B_{q_{pj}}(\alpha, \beta) \zeta_P(\alpha) \zeta_P(\beta) \zeta_P^{-1}(\alpha + \beta) \\ = \sqrt{|D_{\mathbb{K}}|} \zeta_P(1-\alpha) \zeta_P(1-\beta) \zeta_P^{-1}(1-\alpha-\beta), \quad P = 2, 3, 5, \dots \quad (5.14) \end{aligned}$$

При $\operatorname{Re} \alpha < 0$ и $\operatorname{Re} \beta < 0$ правая часть равенства (5.14), равная

$$\sqrt{|D_{\mathbb{K}}|} \prod_{p=P_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} (1 - q_{pj}^{\alpha-1})^{-1} (1 - q_{pj}^{\beta-1})^{-1} (1 - q_{pj}^{\alpha+\beta-1}),$$

имеет при $P \rightarrow \infty$ предел, равный $\sqrt{|D_{\mathbb{K}}|}$, и, стало быть, такой же предел имеет и левая часть этого равенства:

$$B_{\infty}^{\sigma}(\alpha, \beta) B_{-\infty}^{\tau}(\alpha, \beta) \lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} B_{q_{pj}}(\alpha, \beta) \zeta_P(\alpha) \zeta_P(\beta) \zeta_P^{-1}(\alpha + \beta) = \sqrt{|D_{\mathbb{K}}|}. \quad (5.15)$$

Предельное соотношение (5.15) дает возможность ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Регуляризованным произведением бета-функций*, $\text{reg} \prod_{pj} B_{q_{pj}}(\alpha, \beta)$, назовем предел

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} B_{q_{pj}}(\alpha, \beta) \zeta_P(\alpha) \zeta_P(\beta) \zeta_P^{-1}(\alpha + \beta)$$

для тех (α, β) , для которых он существует, и его аналитическое продолжение для остальных (α, β) .

Таким образом, при $\text{Re } \alpha < 0$ и $\text{Re } \beta < 0$

$$\begin{aligned} \text{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} B_{q_{pj}}(\alpha, \beta) &= \lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p=2}^P \prod_{j=1}^{m_p} B_{q_{pj}}(\alpha, \beta) \\ &\times \text{AC} \prod_{p=P_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} (1 - q_{pj}^{-\alpha})^{-1} (1 - q_{pj}^{-\beta})^{-1} (1 - q_{pj}^{-\alpha-\beta}). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Из приведенных рассуждений следует такая

ТЕОРЕМА 3 [2]. *Регуляризованное произведение бета-функций пополнений поля алгебраических чисел степени $n = \sigma + 2\tau$ существует, и справедлива адельная формула*

$$B_{\infty}^{\sigma}(\alpha, \beta) B_{-\infty}^{\tau}(\alpha, \beta) \text{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} B_{q_{pj}}(\alpha, \beta) = \sqrt{|D_{\mathbb{K}}|}. \quad (5.17)$$

В дополнение к формуле (5.17) отметим симметричное равенство

$$B_{\infty}^{\sigma}(\alpha, \beta) B_{-\infty}^{\tau}(\alpha, \beta) = \sqrt{|D_{\mathbb{K}}|} \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \frac{\zeta_{\mathbb{K}}(1-x)}{\zeta_{\mathbb{K}}(x)}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad (5.18)$$

вытекающее из (5.7) и (3.10).

**§6. Частные случаи адельных формул для
бета-функций пополнений полей алгебраических чисел**

Выпишем адельные формулы (5.17) применительно к полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$, квадратичным полям $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, m -круговым полям и кубическим полям $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})$.

1. Поле рациональных чисел $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$: $n = 1$, $\sigma = 1$, $\tau = 0$, $D_{\mathbb{K}} = 1$, $m_p = 1$, $q_p = p$;

$$B_{\infty}(\alpha, \beta) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} B_p(\alpha, \beta) = 1 \quad (6.1)$$

(см. [1], [2], [11], [12]).

2. Квадратичное поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$: d – целое число, свободное от квадратов. Случай $d > 0$, $\sigma = 2$, $\tau = 0$ [13]:

$$B_{\infty}^2(\alpha, \beta) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} B_{q_p}^{m_p}(\alpha, \beta) = \sqrt{D}. \quad (6.2)$$

Случай $d < 0$, $\sigma = 0$, $\tau = 1$ [1], [13]:

$$B_{-\infty}(\alpha, \beta) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} B_{q_p}^{m_p}(\alpha, \beta) = \sqrt{|D|}. \quad (6.3)$$

В формулах (6.2) и (6.3): $q_p = p^2$, если $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$, $|d|_p = 1$, $p \neq 2$ или $d \equiv 5 \pmod{8}$, $p = 2$, и $q_p = p$ в остальных случаях; $m_p = 2$, если $d \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$, и $m_p = 1$, если $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$; $D = d$, если $d \equiv 1 \pmod{4}$, и $D = 4d$, если $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$.

При $d = -1$ формула (6.3) упрощается и принимает вид

$$B_{-\infty} B_2 \operatorname{reg} \left(\prod_{p=4N+1} B_p^2 \prod_{p=4N+3} B_{p^2} \right) = 2. \quad (6.4)$$

3. m -круговое поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\epsilon)$: $\epsilon = \exp(2\pi i k/m)$, $(k, m) = 1$, – примитивный корень m -й степени из 1,

$$m = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_r^{\gamma_r} \geq 3, \quad \gamma_j \in \mathbb{Z}_+.$$

Поле $\mathbb{Q}(\epsilon)$ есть расширение Галуа, его степень равна

$$2n = \varphi(m) = m(1 - p_1^{-1})(1 - p_2^{-1}) \dots (1 - p_r^{-1}),$$

где $\varphi(m)$ – функция Эйлера; $\sigma = 0$, $\tau = n$; $f_{p1} = f_{p2} = \dots = f_{pm_p} = f_p$, $e_{p1} = e_{p2} = \dots = e_{pm_p} = e_p$, $m_p f_p e_p = 2n$ (см. (4.4)); числа $1, \epsilon, \dots, \epsilon^{n-1}$ образуют фундаментальный базис поля $\mathbb{Q}(\epsilon)$ [14, с. 358]. Поэтому дискриминант D_m поля $\mathbb{Q}(\epsilon)$ совпадает с дискриминантом минимального полинома для ϵ ,

$$\Phi_m(x) = \prod_{(k, m)=1} (x - \epsilon^k).$$

Пусть $p \neq p_j$, $j = 1, 2, \dots, r$. Тогда p не делит D_m [14, лемма 2, с. 358], т.е. D_m есть единица в кольце p -целых чисел $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}_p$. Поэтому $e_p = 1$ [14, с. 226], так что $m_p f_p = 2n$. По теореме 2 [14, с. 359] f_p равно показателю числа p по mod m (см. [23]), и, стало быть (f_p делит $\varphi(m) = 2n$),

$$m_p = \frac{2n}{f_p}, \quad q_p = p^{f_p}. \quad (6.5)$$

Пусть теперь $p = p_j$, $j = 1, 2, \dots, r$. Тогда $f_j = f_{p_j}$ равен показателю числа p_j по mod $(m p_j^{-\gamma_j})$, $e_j = e_{p_j} = \varphi(p_j^{\gamma_j}) = p_j^{\gamma_j} (1 - p_j^{-1})$ и $m_j = m_{p_j} = 2n / (p_j e_j)$ [14, с. 369, задача 14]. Таким образом,

$$m_j = \frac{\varphi(m p_j^{-\gamma_j})}{f_j}, \quad q_j = p_j^{f_j}, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (6.6)$$

Адельная формула (5.17) принимает вид [22]

$$B_{-\infty}^n \prod_{j=1}^r B_{q_j}^{m_j} \operatorname{reg} \prod_{p \neq p_j} B_{q_p}^{m_p} = \sqrt{|D_m|}. \quad (6.7)$$

В частности, при $m = q^\gamma \geq 3$, $\gamma \in \mathbb{Z}_+$, где q – простое число, имеем $2n = q^{\gamma-1} \times (q-1)$, $f_q = m_q = 1$,

$$|D_m| = q^{q^{\gamma-1}(q\gamma - \gamma - 1)}$$

(см. [24, с. 82]), и формула (6.7) принимает вид

$$B_{-\infty}^n B_q \operatorname{reg} \prod_{p \neq q} B_{q_p}^{m_p} = q^{(1/2)q^{\gamma-1}(q\gamma - \gamma - 1)}. \quad (6.8)$$

Пусть $\gamma = 1$; тогда $m = q \geq 3$, $2n = q - 1$, $D_q = (-1)^n q^{q-2}$ и формула (6.8) принимает вид

$$B_{-\infty}^n B_q \operatorname{reg} \prod_{p \neq q} B_{q_p}^{m_p} = q^{q/2-1}. \quad (6.9)$$

Пусть $m = 3$; тогда $\mathbb{Q}(\epsilon) \sim \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ и формула (6.9) в точности совпадает с формулой (6.3) при $d = -3$:

$$B_{-\infty} B_4 B_3 \operatorname{reg} \left(\prod_{p=3N+2, p \neq 2} B_{p^2} \prod_{p=3N+1, p \neq 3} B_p^2 \right) = \sqrt{3}. \quad (6.10)$$

4. Кубическое поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})$: $d > 0$ – целое число, свободное от квадратов, $d = p_1 p_2 \dots p_r$; $n = 3$, $\sigma = \tau = 1$. Корни минимального полинома $x^3 - d$ равны

$$\theta_1 = \theta = \sqrt[3]{d}, \quad \theta_2 = \theta\omega, \quad \theta_3 = \theta\bar{\omega}, \quad \theta_2 + \theta_3 = -\theta,$$

где $\omega = \exp 2\pi i/3 = -1/2 + \sqrt{-3}/2$; $D = -27d^2$ – его дискриминант.

Предположим, что $d \not\equiv \pm 1 \pmod{9}$. Тогда числа $1, \theta, \theta^2$ образуют фундаментальный базис поля $\mathbb{Q}(\theta)$ [14, с. 112, задача 24], поэтому дискриминант этого поля равен $D = -27d^2$. Изоморфизмы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (см. § 2) имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1\theta + x_2\theta^2 \rightarrow \sigma_j(x) = x_0 + x_1\theta_j + x_2\theta_j^2, \\ x_0, x_1, x_2 &\in \mathbb{Q}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Для дальнейшего установим следующие три леммы.

ЛЕММА 1. $\sqrt{-3} \in \mathbb{Q}_p$, если $p \equiv 1 \pmod{3}$; $\sqrt{-3} \notin \mathbb{Q}_p$, если $p = 3$ или $p \equiv 2 \pmod{3}$.

Утверждение вытекает из формулы взаимности для символа Лежандра (см. [23])

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right), \quad p \neq 2, 3.$$

Поэтому при $p \equiv 1 \pmod{3}$ $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ и $\sqrt{-3} \in \mathbb{Q}_p$; при $p \equiv 2 \pmod{3}$, $p \neq 2$ $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$ и $\sqrt{-3} \notin \mathbb{Q}_p$; при $p = 2, 3$ $\sqrt{-3} \notin \mathbb{Q}_p$.

ЛЕММА 2. Если $\theta \notin \mathbb{Q}_p$, то: либо $1, \theta, \theta^2 \in \mathbb{Q}_p$ -линейно независимы, либо $\theta = a\omega$ или $\theta = a\bar{\omega}$, где $a \in \mathbb{Q}_p$, $|a|_p = 1$ (и тогда необходимо, чтобы $p = 3$ или $p \equiv 2 \pmod{3}$ и $|d|_p = 1$).

Действительно, если числа $1, \theta, \theta^2 \in \mathbb{Q}_p$ -линейно зависимы, то они удовлетворяют соотношению $\theta^2 + a\theta + b = 0$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Q}_p$. Используя равенство $\theta^2 = d/\theta$, получаем $a\theta^2 + b\theta + d = 0$ и, стало быть, $a \neq 0$ и

$$(a - b/a)\theta + b - d/a = 0,$$

откуда, поскольку $\theta \notin \mathbb{Q}_p$, следует, что $b = a^2$. Таким образом, число θ удовлетворяет уравнению $\theta^2 + a\theta + a^2 = 0$, $a \in \mathbb{Q}_p^\times$. Поэтому либо $\theta = a\omega$, либо $\theta = a\bar{\omega}$. Условия на p вытекают из леммы 1. Необходимость условия $|d|_p = 1$ вытекает из соотношения $a^3 = d$, $a \in \mathbb{Q}_p^\times$, согласно которому случай $|d|_p = 1/p$ невозможен, так как равенство $p^{3\gamma} = p^{-1}$ невозможно ни при каких $\gamma \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 3. Если $|\epsilon|_3 = 1$ и $\epsilon \in \mathbb{Q}_3^{\times 3}$, то $\epsilon \equiv \pm 1 \pmod{9}$.

Проверяется непосредственно.

Теперь рассмотрим возможные три случая.

1) Пусть $p \neq 3, p_1, \dots, p_r$. Тогда D есть единица в кольце p -целых чисел $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$. Поэтому $e_1 = \dots = e_{m_p} = 1$ и числа $f_1, \dots, f_{m_p}$ удовлетворяют соотношению

$$f_1 + f_2 + \dots + f_{m_p} = 3 \quad (6.12)$$

(см. [14, с. 227]); кроме того, $|d|_p = 1$.

Обозначим через P_k , $k = 0, 1, 3$, множество простых чисел, отличных от $3, p_1, \dots, p_r$, для которых полином $x^3 - d$ имеет k корней из $\mathbb{Q}_p$ (случай $k = 2$ невозможен в силу соотношения $\theta + \theta_2 + \theta_3 = 0$).

Возможны следующие три подслучая.

а) Пусть $k = 0$. Полином $x^3 - d$ неприводим в $\mathbb{Q}_p$ и $1, \theta_j, \theta_j^2$, $\mathbb{Q}_p$ -линейно независимы при каждом $j = 1, 2, 3$. Тогда в силу (6.11) и (6.12)

$$m_p = 1, \quad \bar{\sigma}_1(\mathbb{K}) \sim \bar{\sigma}_2(\mathbb{K}) \sim \bar{\sigma}_3(\mathbb{K}) \sim \mathbb{Q}_p(\theta), \quad f_p = 3, \quad p \in P_0. \quad (6.13)$$

б) Пусть $k = 1$. Если $\theta \notin \mathbb{Q}_p$, то по лемме 2 $\theta = a\omega$ или $\theta = a\bar{\omega}$, где $a \in \mathbb{Q}_p$, $|a|_p = 1$ и $p \equiv 2 \pmod{3}$. Пусть $\theta = a\omega$. Тогда $\theta_3 = a\omega\bar{\omega} = a \in \mathbb{Q}_p$ и в силу (6.11) и (6.12) имеем

$$m_p = 2, \quad \bar{\sigma}_1(\mathbb{K}) \sim \bar{\sigma}_2(\mathbb{K}) \sim \mathbb{Q}_p(\sqrt{-3}), \quad \bar{\sigma}_3(\mathbb{K}) \sim \mathbb{Q}_p, \\ f_1 = 1, f_2 = 2, \quad p \in P_1. \quad (6.14)$$

Аналогично рассматриваются и случай $\theta = a\bar{\omega}$ и, далее, случай $\theta \in \mathbb{Q}_p$.

в) Пусть $k = 3$. По лемме 1 $p \equiv 1 \pmod{3}$ и в силу (6.11) и (6.12)

$$m_p = 3, \quad \bar{\sigma}_j(\mathbb{K}) \not\sim \bar{\sigma}_k(\mathbb{K}), j \neq k, \quad f_1 = f_2 = f_3 = 1, \quad p \in P_3. \quad (6.15)$$

2) Пусть $p = p_j$, $j = 1, 2, \dots, r$. Тогда $|d|_p = 1/p$ и $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 3}$. По лемме 2 числа $1, \theta_j, \theta_j^2$ образуют базисы в $\mathbb{Q}_p(\theta_j)$, $j = 1, 2, 3$. В силу (6.11)

$$m_p = 1, \quad \bar{\sigma}_1(\mathbb{K}) \sim \bar{\sigma}_2(\mathbb{K}) \sim \bar{\sigma}_3(\mathbb{K}) \sim \mathbb{Q}_p(\theta), \quad ef = 3,$$

т.е. либо $f = 1$, $e = 3$, либо $f = 3$, $e = 1$. Но второй случай невозможен, поскольку p_j есть делитель D , и потому простое число p_j обязательно разветвлено [14, с. 260, задача 17]. Итак, $e = 3$ и

$$m_p = 1, \quad f_p = 1. \quad (6.16)$$

3) Пусть $p = 3$ и 3 не делит d , так что $|d|_p = 1$. (Случай, когда p делит d , разобран в 2). По лемме 3 $d \notin \mathbb{Q}_3^{\times 3}$, поскольку $d \not\equiv \pm 1 \pmod{9}$, так что $1, \theta_j, \theta_j^2$ $\mathbb{Q}_3$ -линейно независимы, $j = 1, 2, 3$. Стало быть, в силу (6.11)

$$m_3 = 1, \quad \bar{\sigma}_1(\mathbb{K}) \sim \bar{\sigma}_2(\mathbb{K}) \sim \bar{\sigma}_3(\mathbb{K}) \sim \mathbb{Q}_3(\theta), \quad ef = 3.$$

Поэтому либо $e = 3$, $f = 1$, либо $e = 1$, $f = 3$. Но второй случай невозможен, поскольку 3 – делитель дискриминанта D , и потому число 3 обязательно разветвлено [14, с. 260, задача 17]. Итак,

$$m_3 = 1, \quad f_3 = 1. \quad (6.17)$$

Объединяя формулы (6.13)–(6.17), запишем адельную формулу (5.15) при $d \not\equiv \pm 1 \pmod{9}$ в виде

$$B_\infty B_{-\infty} \prod_{p|D} B_p \operatorname{reg} \left[\prod_{p \in P_0} B_{p^3} \prod_{p \in P_1} (B_p B_{p^2}) \prod_{p \in P_3} B_p^3 \right] = 3\sqrt{3}d. \quad (6.18)$$

Здесь $p|D$ состоит из простых делителей числа D , т.е. из чисел $3, p_1, p_2, \dots, p_r$.

**§7. Адельные формулы для амплитуд Венециано и
Вирасоро–Шапиро в полях алгебраических чисел**

Функции [1], [2]

$$V(s, t, u) = B_\infty(-1 - s/2, -1 - t/2), \quad s + t + u = -8, \quad (7.1)$$

$$V_-(s, t, u) = B_{-\infty}(-1 - s/8, -1 - t/8), \quad s + t + u = -32, \quad (7.2)$$

называются *четырёхточечными кроссинг-симметричными амплитудами Венециано и Вирасоро–Шапиро* соответственно. Функции [1]–[10]

$$V_q(s, t, u) = B_q(-1 - s/2, -1 - t/2), \quad s + t + u = -8, \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} V_{-q}(s, t, u) &= B_q(-1 - s/8, -1 - t/8) \\ &\equiv V_q(s/4, t/4, u/4), \quad s + t + u = -32, \end{aligned} \quad (7.4)$$

называются *струнными амплитудами* для открытых и замкнутых струн соответственно. Здесь $B_q(\alpha, \beta)$, $p = \pm\infty, 2, 3, 5, \dots$, – бета-функции полей $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_{-\infty} = \mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}_p(\theta)$, $p = 2, 3, 5, \dots$, соответственно (§ 3); s, t, u – переменные Мандельштама.

Из определений (7.1)–(7.4) и из формулы (5.15) для любого поля алгебраических чисел $\mathbb{K}$ степени $n = \sigma + 2\tau$ вытекает следующая регуляризованная адельная формула для амплитуд Венециано и Вирасоро–Шапиро [22]:

$$V^\sigma(s, t, u) V_-^\tau(4s, 4t, 4u) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} V_{q_{pj}}(s, t, u) = \sqrt{|D_K|}, \quad s + t + u = -8, \quad (7.5)$$

или, эквивалентно,

$$V^\sigma(s/4, t/4, u/4) V_-^\tau(s, t, u) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} V_{-q_{pj}}(s, t, u) = \sqrt{|D_{\mathbb{K}}|}, \quad s + t + u = -32. \quad (7.5')$$

При $\sigma \geq 1$ и $\tau \geq 1$ формулы (7.5) связывают произведения амплитуд Венециано и Вирасоро–Шапиро с соответствующими струнными амплитудами.

Более простой вид формулы (7.5) принимают при $\tau = 0$ или $\sigma = 0$:

$$V^n(s, t, u) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} V_{q_{pj}}(s, t, u) = \sqrt{|D_{\mathbb{K}}|}, \quad s + t + u = -8, \quad (7.6)$$

$$V_-^{n/2}(s, t, u) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_p} V_{-q_{pj}}(s, t, u) = \sqrt{|D_{\mathbb{K}}|}, \quad s + t + u = -32. \quad (7.7)$$

Из формулы (5.16) следует соотношение между амплитудами Венециано и Вирасоро–Шапиро вида

$$V^\sigma(s, t, u) V_-^\tau(4s, 4t, 4u) = \sqrt{|D_{\mathbb{K}}|} \prod_{x=s, t, u} \frac{\zeta_{\mathbb{K}}(2 + x/2)}{\zeta_{\mathbb{K}}(-1 - x/2)}, \quad s + t + u = -8, \quad (7.8)$$

где $\zeta_{\mathbb{K}}(\alpha)$ – дзета-функция Дедекинда поля $\mathbb{K}$ (§ 5).

Отметим специальные случаи формул (7.5) и (7.6).

1. *Поле рациональных чисел* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Формула (6.1) дает

$$V(s, t, u) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} V_p(s, t, u) = 1, \quad s + t + u = -8. \quad (7.9)$$

Формула (7.9) выражает точный смысл формулы (1.1) [1],[11],[12].

2. *Квадратичное поле* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Формулы (6.2) и (6.3) дают: при $d > 0$ [13]

$$V^2(s, t, u) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} V_{q_p}^{m_p}(s, t, u) = \sqrt{D}, \quad s + t + u = -8; \quad (7.10)$$

при $d < 0$ [1], [13]

$$V_-(s, t, u) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} V_{-q_p}^{m_p}(s, t, u) = \sqrt{|D|}, \quad s + t + u = -32. \quad (7.11)$$

При $d = -1$ формула (7.11) упрощается:

$$V_- V_{-2} \operatorname{reg} \left(\prod_{p=4N+1} V_{-p}^2 \prod_{p=4N+3} V_{-p^2} \right) = 2, \quad s + t + u = -32. \quad (7.12)$$

3. *m-крупное поле* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\epsilon)$, где $m = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_r^{\gamma_r} \geq 3$, $2n = \varphi(m)$. Формула (6.7) принимает вид [22]

$$V_-^n \prod_{j=1}^r V_{-q_j}^{m_j} \operatorname{reg} \prod_{p \neq p_j} V_{-q_p}^{m_p} = \sqrt{|D_m|}, \quad s + t + u = -32. \quad (7.13)$$

При $m = q^{\gamma} \geq 3$, где q – простое число, формула (7.13) принимает вид

$$V_-^n V_{-q} \operatorname{reg} \prod_{p \neq q} V_{-q_p}^{m_p} = q^{(1/2)q^{\gamma-1}(q\gamma - \gamma - 1)}, \quad s + t + u = -32. \quad (7.14)$$

При $q = 3$ формула (7.14) принимает вид

$$V_- V_{-3} V_{-4} \operatorname{reg} \left(\prod_{p=3N+1, p \neq 3} V_{-p}^2 \prod_{p=4N+2, p \neq 2} V_{-p^2} \right) = \sqrt{3}, \quad s + t + u = -32. \quad (7.15)$$

4. *Кубическое поле* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})$, где $d = p_1 p_2 \dots p_r \geq 3$, $d \not\equiv \pm 1 \pmod{9}$. Формула (6.18) дает

$$\begin{aligned} & V(s, t, u) V_-(4s, 4t, 4u) \prod_{p|D} V_p(s, t, u) \operatorname{reg} \left[\prod_{p \in P_0} V_{p^3}(s, t, u) \right. \\ & \left. \times \prod_{p \in P_1} (V_p(s, t, u) V_{p^2}(s, t, u)) \prod_{p \in P_3} V_{p^3}(s, t, u) \right] = 3\sqrt{3}d, \quad s + t + u = -8. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Формулы (7.5), (7.8), (7.13), (7.14) и (7.16) новые.

Список литературы

1. *Freund P. G. O., Witten E.* Adelic String Amplitudes // *Phys.Lett.B.* 1987. V. 199. № 2. P. 191–194.
2. *Volovich I. V.* // *Lett.Math.Phys.* 1988. V. 16. P. 61–67.
3. *Aref'eva I. Ya., Dragovič B. G., Volovich I. V.* // *Phys.Lett.B.* 1988. V. 209. № 4. P. 445–450.
4. *Frampton P. H., Okada Y., Umbriaco M. R.* // *Phys.Lett.B.* 1988. V. 213. № 3. P. 260–262.
5. *Frampton P. H., Okada Y.* // *Phys.Rev.Lett.* 1988. V. 60. № 6. P. 484–486.
6. *Frampton P. H., Nishino H.* // *Phys.Rev.Lett.* 1989. V. 62. № 17. P. 1960–1963.
7. *Freund P. G. O., Olson M.* // *Phys.Lett.B.* 1987. V. 199. № 2. P. 186–190.
8. *Volovich I. V.* // *Class.Quantum Grav.* 1987. V. 4. P. L83–L87.
9. *Волович И. В.* // *Теор.и матем.физика.* 1987. Т. 71. № 3. С. 337–340.
10. *Aref'eva I. Ya., Dragovič B. G., Volovich I. V.* // *Phys.Lett.B.* 1988. V. 212. № 3. P. 283–289.
11. *Vladimirov V. S.* // *Lett.Math.Phys.* 1993. V. 27. P. 123–131.
12. *Владимиров В. С.* // *Теор.и матем.физика.* 1993. Т. 94. № 3. С. 355–367.
13. *Владимиров В. С.* // *Успехи матем.наук.* 1993. Т. 48. № 6. С. 3–38.
14. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1985.
15. *Вейль А.* Основы теории чисел. М.: Мир, 1972.
16. *Коблиц Н.* p -Адитические числа, p -адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.
17. *Гельфанд И. М., Граев М. М., Пятецкий-Шапиро И. И.* Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966.
18. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* p -Адитический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
19. *Schikhof W. H.* Ultrametric Calculus. An Introduction to p -Adic Analysis: Cambridge Univ.Press, 1984.
20. *Khrennikov A.* p -Adic Valued Distributions in Mathematical Physics: Kluwer Acad.Publ., 1994.
21. *Владимиров В. С., Волович И. В.* Применения p -адических чисел в математической физике // *Тр. Матем.ин-та им. В. А. Стеклова.* 1991. Т. 200. С. 88–99.
22. *Vladimirov V. S., Sapuzhak T. M.* Adelic Formulas for String Amplitudes in Fields of Algebraic Numbers // *Lett.Math.Phys.* 1995 (in press).
23. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.–Л.: Гостехиздат, 1952.
24. *Лэнг С.* Алгебраические числа. М.: Мир, 1966.

Математический институт
им. В.А. Стеклова

Поступило в редакцию
11.IX.1995