Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Журавлев, Одномерные разбиения Фибоначчи,
Изв. РАН. Сер. матем., 2007, том 71, выпуск 2, 89–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/im620>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:47:29

УДК 511

В. Г. Журавлев

Одномерные разбиения Фибоначчи

С помощью B -оператора строится семейство разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ единичного полуинтервала $I_0 = [0, 1)$, состоящих из F_{m+1} коротких и F_{m+2} длинных элементарных полуинтервалов с отношением длин, равным золотому сечению $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Доказано, что разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению, аналогичному соотношению для чисел Фибоначчи: $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$. Концы элементарных полуинтервалов из разбиений $\text{Til}(\varepsilon_m)$ образуют последовательность точек O_0 , производные которой $d^m O_0 = O_0 \cap [1 - \tau^{-m}, 1)$ суть последовательности O_m , подобные самой O_0 . Для последовательностей O_m вычислены прямые $R_m(i)$ и обратные $R_{-m}(i)$ перенормировки. Установлена связь между разбиениями Фибоначчи и последовательностью Штурма. Приведены приложения разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ к теории чисел.

Библиография: 15 наименований.

Введение

В работе определяется и изучается специальный класс разбиений единичного полуинтервала – одномерные разбиения Фибоначчи. При помощи этих разбиений вычисляются отображения первого возвращения для иррационального поворота окружности на угол $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, а также доказываются явные формулы для времени первого попадания точки 0 в полуинтервалы из разбиений Фибоначчи под действием рассматриваемого поворота и формулы для числа точек последовательности дробных долей $\{\langle n\tau \rangle\}_{n=0}^i$, попавших в некоторый фиксированный полуинтервал. Здесь $\langle \alpha \rangle$ означает дробную долю числа α .

0.1. Отождествим единичную окружность с полуинтервалом $I = [0, 1)$ и определим на нем сдвиг $S: x \rightarrow x + \tau \pmod{1}$. Рассмотрим отображение Пуанкаре или отображение первого возвращения $S_\varepsilon: [\varepsilon, 1) \rightarrow [\varepsilon, 1)$, $\varepsilon \in I$, определяемое следующим образом [3]. Для $x \in [\varepsilon, 1)$ полагаем $S_\varepsilon(x) = S^{n_\varepsilon}(x)$, где $n_\varepsilon(x) = \min\{n: n > 0, S^n(x) \in [\varepsilon, 1)\}$ – время первого возвращения точки x в полуинтервал $[\varepsilon, 1)$ под действием сдвига S . Возможны два сценария: отображение S_ε является нециклическим перекладыванием трех полуинтервалов или перекладыванием двух полуинтервалов. В последнем случае S_ε изоморфно вращению окружности на некоторый угол и множество таких ε имеет вид $\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m}$ для $m = 0, 1, 2, \dots$. При этом отображение первого возвращения $S^{(m)} = S_{\varepsilon_m}$ изоморфно (теорема 3.2) исходному сдвигу S или ему обратному S^{-1} в зависимости от четности m :

$$S^{(m)} \sim S^{\pm 1}. \quad (0.1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00435).

Изоморфизм отображений $S^{(m)}$ и $S^{\pm 1}$ означает их сопряженность при помощи гомотетии h_m с центром в точке 1, переводящей полуинтервал I в полуинтервал $I_m = [\varepsilon_m, 1)$. На геометрическом языке это можно переформулировать следующим образом: множество точек вида $\langle n\tau \rangle$, содержащихся в полуинтервале I_m , подобно множеству всех точек вида $\langle n\tau \rangle$ при четных m и множеству всех точек вида $\langle -n\tau \rangle$ при нечетных m . Для других иррациональностей отображения первого возвращения рассмотрены в [14].

0.2. Одно из возможных определений разбиений Фибоначчи состоит в следующем. Для любой пары полуинтервалов X, Y обозначим через $X \oplus Y$ полуинтервал, состоящий из X и приложенного к нему справа полуинтервала, имеющего ту же длину, что и полуинтервал Y . Тогда каждый полуинтервал I_m разбивается на приложенные друг к другу полуинтервалы G_0^m, E_0^m , перекладываемые отображением $S^{(m)}$: $I_m = G_0^m \oplus E_0^m$. Если действовать на каждый из полуинтервалов G_0^m, E_0^m сдвигом S до их первого возвращения в полуинтервал I_m , то получим разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m)$ единичного полуинтервала I . Это разбиение и будем называть *разбиением Фибоначчи уровня m* (§ 1). Разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m)$ состоит из полуинтервалов двух типов: G^m и E^m . Количество этих полуинтервалов равны F_{m+1} и F_{m+2} соответственно. Здесь F_m – числа Фибоначчи.

Имеет место структурная теорема об инвариантности разбиений $\text{Til}(\varepsilon_m)$ относительно сдвига S (теорема 3.2), содержащая следующее равенство:

$$S \text{Til}(\varepsilon_m) = \text{Til}^+(\varepsilon_m). \quad (0.2)$$

В формуле (0.2) разбиение $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ получается перекладыванием двух крайних правых полуинтервалов G^0, E^0 из $\text{Til}(\varepsilon_m)$. Свойство инвариантности (0.2) лежит в основе доказательств всех полученных в настоящей работе результатов.

Разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ можно также получить через подстановку или инфляцию, начиная с разбиения $\text{Til}(\varepsilon_0) = [0, 2 - \tau) \oplus [2 - \tau, 1)$ уровня $m = 0$. Подстановка заменяет длинные полуинтервалы на два полуинтервала $X \oplus Y$ с отношением длин, равным τ (п. 1.1). Способ построения разбиений через подстановки весьма распространен и имеет многомерные обобщения [1], [8], [15]. Разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ тесно связаны (предложение 6.3) с последовательностью Штурма [6], [7], [10], кодирующей повороты окружности.

Возможно также построение разбиений $\text{Til}(\varepsilon_m)$ при помощи τ -системы счисления. Любое действительное число $x \in [0, 1)$ может быть единственным образом представлено как сумма степеней τ вида $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(x) \tau^{-i}$, где каждое из чисел $c_i(x)$ равно 0 или 1, причем $c_i(x) c_{i+1}(x) = 0$. Это разложение может быть получено при помощи так называемого *жадного алгоритма*. В этих терминах разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ определяются следующим свойством: две точки x и y принадлежат одному интервалу разбиения Фибоначчи уровня m тогда и только тогда, когда совпадают первые m цифр их разложений в τ -системе счисления, т. е.

$$c_1(x) = c_1(y), \dots, c_m(x) = c_m(y).$$

Опирающийся на системы счисления подход допускает многомерные обобщения [1].

Разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ также могут быть определены рекуррентно. Для разбиений T_1, T_2 обозначим через $T_1 \oplus T_2$ разбиение, полученное прикладыванием к правому концу разбиения T_1 левого конца разбиения T_2 . Тогда справедливо следующее рекуррентное соотношение (предложение 1.1):

$$: \text{Til}^+(\varepsilon_{m+2}) = \tau^{-1} \text{Til}^+(\varepsilon_{m+1}) \oplus \tau^{-2} \text{Til}^+(\varepsilon_m), \quad (0.3)$$

где умножения на τ^{-1}, τ^{-2} – это преобразования подобия.

0.3. Для произвольных точки x и полуинтервала J обозначим через $x \bmod J$ единственную точку $x' \in J$, для которой $\frac{x'-x}{|J|} \in \mathbb{Z}$, где $|J|$ – длина полуинтервала J . Обозначим O_m , $m = 0, 2, 4, \dots$, последовательность элементов $a(m, i) = 1 - \tau^{-m} + i\tau^{-(m+1)} \pmod{I_m}$ из полуинтервала I_m , получающихся из начальной точки $a(m, 0) = 1 - \tau^{-m}$ сдвигом на дугу $\tau^{-(m+1)}$ окружности длиной $|I_m| = \tau^{-m}$. В теореме 3.1 доказывается, что последовательность O_0 обладает свойством самоподобия:

$$O_0 \cap I_m = h_m O_0,$$

где h_m – гомотетия с центром 1 и коэффициентом τ^{-m} , и при этом $h_m O_0 = O_m$. Следовательно, каждая точка $a(m, i)$ последовательности O_m является одновременно и точкой последовательности O_0 и имеет в этой последовательности некоторый номер $R_m(i)$, т. е. $a(m, i) = a(0, R_m(i))$. Таким образом мы получаем вложение R_m множества $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ в себя, называемое *перенормировкой степени m* . Отметим, что $R_m(i)$ есть время m -го попадания точки 0 в полуинтервал I_m под действием сдвига S . Согласно предложению 6.2 для $R_m(i)$ имеет место формула

$$R_m(i) = iF_{m+1} + ([i\tau^{-1}] + 1)F_m, \quad (0.4)$$

где $[\alpha]$ обозначает целую часть α .

Обратные перенормировки $R_{-m}(i)$ определяются как сюръективные отображения $R_{-m}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, обладающие следующим свойством. Для произвольного целого неотрицательного числа i величина $R_{-m}(i)$ есть целое неотрицательное число, удовлетворяющее условиям: $a(m, R_{-m}(i)) = a(0, j)$ для некоторого j , $0 \leq j \leq i$, и $a(m, R_{-m}(i) + 1) \neq a(0, j)$ для всех j , $0 \leq j \leq i$. Так, например, в случае четных m справедлива следующая формула для обратной перенормировки $R_{-m}(i)$ (теорема 5.1):

$$R_{-m}(i) = \underbrace{[\dots [i\tau^{-2}]\tau^{-2} \dots] \tau^{-2}}_{m/2}, \quad (0.5)$$

где в правой части записана $(m/2)$ -кратная композиция для функции $i \mapsto [i\tau^{-2}]$.

0.4. Пусть $N_m(i)$ равно количеству номеров $j = 0, 1, \dots, i$, для которых дробная часть $\langle j\tau \rangle$ попадает в полуинтервал I_m . В предложении 6.1 доказано, что для $N_m(i)$ четного уровня $m \geq 4$ имеет место явная формула

$$N_m(i) = \underbrace{[\dots [i\tau^{-2}]\tau^{-2} \dots] \tau^{-2}}_{m/2} + 1, \quad i \geq F_m, \quad (0.6)$$

и $N_m(i) = 0$, если $i < F_m$. Если поставить задачу об аппроксимации для $N_m(i)$, то главным членом естественно выбрать целую часть $[i\tau^{-m}]$, и возникает вопрос об остаточном члене $r_m(i)$ в формуле

$$N_m(i) = [i\tau^{-m}] + r_m(i).$$

Для полуинтервалов вида $I_m = [1 - \tau^{-m}, 1)$ Е. Гекке получил (см. [5]) оценку $r_m(i) = O_m(1)$, причем константа в O_m стремится к бесконечности при $m \rightarrow \infty$. Из формулы (0.6) следует, что остаток $r_m(i)$ может принимать только два значения:

$$r_m(i) = 0, 1 \quad \text{для всех } i = 0, 1, 2, \dots \quad (0.7)$$

Данный факт позволяет сделать вывод, что I_m представляют собой простейшие базисные полуинтервалы ограниченного остатка, на которые необходимо разбивать произвольные полуинтервалы из $I = [0, 1)$ с целью получить оптимальные оценки для остатков в задаче о равномерном распределении точек на окружности. Для поворотов на другие иррациональные углы α оценки, аналогичные (0.7), получены в [2], [4], а для сдвигов тора – в [1]. Г. Рози [11], [12] первым применил разбиения к изучению поворотов окружности. Он доказал, что свойство полуинтервала иметь ограниченный остаток равносильно тому, что отображение Пуанкаре для указанного полуинтервала снова является поворотом окружности. Поскольку, как уже отмечалось, $S^{(m)} \sim S^{\pm 1}$, то полуинтервалы I_m указанным свойством обладают.

В работе [5] было высказано предположение о возможности получать посредством разбиений значительно более тонкие результаты об иррациональных поворотах, чем с помощью традиционных кодирующих последовательностей. Настоящая работа служит свидетельством в пользу этого предположения.

0.5. В § 1 приводится построение разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ тремя различными способами: при помощи подстановок, при помощи итераций B -оператора (закрывающегося в откладывании полуинтервала наименьшей длины от левых концов всех полуинтервалов разбиения) и при помощи рекуррентного соотношения для разбиений. В § 2 вычисляются координаты полуинтервалов, составляющих разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m)$, и описывается порядок расположения полуинтервалов в этих разбиениях. В § 3 разбиения Фибоначчи применяются к вычислению отображений первого возвращения для поворота окружности $S: x \rightarrow x + \tau \pmod{1}$. В § 4, 5 определяются прямые $R_m(i)$ и обратные $R_{-m}(i)$ перенормировки и для них доказываются явные формулы. В § 6 содержатся приложения полученных результатов к теории чисел: вычисляется количество дробных долей $\langle n\tau \rangle$, $0 \leq n \leq i$, попавших в полуинтервал I_m , и доказывается оценка для остаточного члена $r_m(i) = N_m(i) - [i\tau^{-m}]$ в задаче о распределении дробных долей $\langle n\tau \rangle$ на полуинтервале I_m , а также доказываются некоторые свойства последовательности Штурма.

§ 1. Разбиения Фибоначчи

1.1. Подстановки. Разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ единичного полуинтервала $I = [0, 1)$ определим индукцией по $m = 0, 1, 2, \dots$. В качестве нулевого выбираем разбиение $\text{Til}(\varepsilon_0) = Y_0 \oplus X_0$, где $Y_0 = [0, 2 - \tau)$, $X_0 = [2 - \tau, 1)$ и $\oplus -$

операция, определенная во введении. Переход от разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ к разбиению $\text{Til}(\varepsilon_{m+1})$ осуществляется с помощью подстановки (инфляции)

$$\pi: \text{Til}(\varepsilon_m) \rightarrow \text{Til}(\varepsilon_{m+1}). \quad (1.1)$$

Разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m)$ состоит из полуинтервалов двух различных длин. Инфляция π сохраняет короткие полуинтервалы. Каждый из длинных полуинтервалов под действием инфляции π разбивается на два полуинтервала: $X \oplus Y$ – с отношением длин $|X|/|Y| = \tau$, равным золотому сечению $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Так (рис. 1), для $m = 1$ получаем разбиение $\text{Til}(\varepsilon_1) = G^1 \oplus G^1 \oplus E^1$, где $|G^1| = (\tau - 1)^2$, $|E^1| = (\tau - 1)^3$, а для $m = 2$ – разбиение $\text{Til}(\varepsilon_2) = E^2 \oplus G^2 \oplus E^2 \oplus G^2 \oplus E^2$, где $|E^2| = (\tau - 1)^3$, $|G^2| = (\tau - 1)^4$. Для произвольного уровня m разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m)$ состоит из полуинтервалов двух типов: G_j^m и E_j^m . Здесь G и E – типы полуинтервалов, верхний индекс m указывает на уровень разбиения, а нижний индекс j представляет собой номер интервала в некоторой естественной нумерации. Как устроена эта нумерация, будет объяснено в п. 2.1. Количества полуинтервалов каждого из типов могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\#G^m = F_{2[(m+1)/2]+1}, \quad \#E^m = F_{2[m/2]+2}, \quad (1.2)$$

где F_n – числа Фибоначчи, определяемые рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ и начальным условием $F_1 = F_2 = 1$. Полуинтервалы G_j^m , E_j^m имеют длины

$$g^m = (\tau - 1)^{2[m/2]+2}, \quad e^m = (\tau - 1)^{2[(m+1)/2]+1}. \quad (1.3)$$

1.2. В-оператор. Рассмотрим множество $\mathbb{T}$ разбиений произвольного полуинтервала на конечное число полуинтервалов. Введем оператор $B: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, действующий следующим образом. Пусть $\text{Til} \in \mathbb{T}$ – некоторое разбиение, $|X|$ – наименьшая из длин полуинтервалов разбиения. Тогда в разбиении $B(\text{Til})$ полуинтервалы длиной $|X|$ сохраняются, а полуинтервалы длиной $|Y| > |X|$ распадаются на два полуинтервала, имеющих длины $|X|$ и $|Y| - |X|$ соответственно. Другими словами, действие B -оператора заключается в откладывании интервала, имеющего наименьшую длину, от левых концов всех интервалов разбиения Til . Тогда разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m)$ может быть определено следующим образом:

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = B^m(\text{Til}(\varepsilon_0)).$$

Разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m)$ назовем *разбиением Фибоначчи уровня m* .

С разбиениями $\text{Til}(\varepsilon_m)$ тесно связаны другие разбиения $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$, определенные во введении. Для разбиений $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ можно дать и другое определение, аналогичное определению разбиений $\text{Til}(\varepsilon_m)$:

$$\text{Til}^+(\varepsilon_m) = B^m(\text{Til}^+(\varepsilon_0)),$$

где $\text{Til}^+(\varepsilon_0) = [0, \tau - 1] \oplus [\tau - 1, 1]$. Таким образом, разбиения $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ так же, как и разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$, получаются последовательными откладываниями полуинтервала, имеющего наименьшую длину, от левых концов всех полуинтервалов разбиения. Отличие в определениях состоит в различном выборе разбиения нулевого уровня: $\text{Til}(\varepsilon_0) \neq \text{Til}^+(\varepsilon_0)$. При этом разбиения $\text{Til}^+(\varepsilon_0) = E^0 \oplus G^0$ и $\text{Til}(\varepsilon_0) = G^0 \oplus E^0$ различаются только порядком следования полуинтервалов. Разбиения $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ также будем называть *разбиениями Фибоначчи уровня m* . Чтобы сравнить эти разбиения, рассмотрим разбиения следующего уровня $\text{Til}^+(\varepsilon_1) = G^1 \oplus E^1 \oplus G^1$ и $\text{Til}(\varepsilon_1) = G^1 \oplus G^1 \oplus E^1$. Ясно, что при таком

новом определении разбиения $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ и $\text{Til}(\varepsilon_m)$ для $m = 0, 1$ получаются одно из другого перестановкой в них двух последних полуинтервалов.

Рис. 1. Разбиения Фибоначчи

Индукцией по m легко доказать, что новое определение эквивалентно определению из введения для всех m , т. е. разбиение $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ получается из $\text{Til}(\varepsilon_m)$ перекладыванием двух его крайних справа полуинтервалов.

1.3. Процесс Фибоначчи. Поскольку начальные разбиения Фибоначчи имеют вид (см. рис. 1)

$$\text{Til}^+(\varepsilon_0) = E^0 \oplus G^0, \quad \text{Til}^+(\varepsilon_1) = G^1 \oplus E^1 \oplus G^1, \quad \text{Til}^+(\varepsilon_2) = E^2 \oplus G^2 \oplus E^2 + E^2 \oplus G^2,$$

то можно заметить, что они связаны рекуррентным соотношением

$$\text{Til}^+(\varepsilon_2) = \tau^{-1} \text{Til}^+(\varepsilon_1) \oplus \tau^{-2} \text{Til}^+(\varepsilon_0). \quad (1.4)$$

Аналогичное рекуррентное соотношение имеет место и для произвольного уровня m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Для разбиений Фибоначчи $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ справедливо рекуррентное соотношение

$$\text{Til}^+(\varepsilon_{m+2}) = \tau^{-1} \text{Til}^+(\varepsilon_{m+1}) \oplus \tau^{-2} \text{Til}^+(\varepsilon_m) \quad (1.5)$$

для всех уровней $m = 0, 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство предложения опирается на следующие свойства B -оператора.

Свойство аддитивности. Пусть X и Y – разбиения из $\mathbb{T}$, причем наименьшие из длин полуинтервалов для этих разбиений одинаковы. Тогда

$$B(X \oplus Y) = B(X) \oplus B(Y). \quad (1.6)$$

Свойство коммутативности. Пусть X – разбиение из $\mathbb{T}$, kX – разбиение, полученное из X гомотетией с коэффициентом $k > 0$. Тогда

$$B(kX) = kB(X), \quad X \in \mathbb{T}. \quad (1.7)$$

Применяя отображение B к разбиениям из (1.4) и используя свойства (1.6), (1.7), получаем соотношение

$$\text{Til}^+(\varepsilon_3) = \tau^{-1} \text{Til}^+(\varepsilon_2) \oplus \tau^{-2} \text{Til}^+(\varepsilon_1)$$

для $m = 1$ из соотношения (1.4), в котором $m = 0$. Общее рекуррентное соотношение (1.5) получается индукцией по m .

§ 2. Координаты и локальный порядок

2.1. Координаты тайлов. Определим здесь в явном виде координаты полуинтервалов, из которых состоят разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$.

Для любых целых j, i обозначим $I[j, i]$ полуинтервал $[\langle j\tau \rangle, \langle i\tau \rangle)$ из $I = [0, 1)$. При этом предполагается, что $\langle j\tau \rangle < \langle i\tau \rangle$. Если $i = 0$, то полагаем $I[j, 0) = [\langle j\tau \rangle, 1)$.

Для четных m рассмотрим полуинтервалы

$$G_k^m = I[k + F_m, k - F_{m+1}), \quad E_k^m = I[k - F_{m+1}, k), \quad (2.1)$$

а для нечетных m – полуинтервалы

$$G_k^m = I[k - F_m, k - F_{m+2}), \quad E_k^m = I[k - F_{m+2}, k). \quad (2.2)$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\text{Til}(\varepsilon_m)$ – разбиения Фибоначчи (см. п. 1.1) единичного полуинтервала $I = [0, 1)$. Тогда они могут быть записаны в виде дизъюнктивного объединения:

1) для четных m

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = \coprod_{0 \leq k < F_{m+1}} (G_k^m \oplus E_k^m) \sqcup \coprod_{F_{m+1} \leq k < F_{m+2}} E_k^m, \quad (2.3)$$

где полуинтервалы G_k^m и E_k^m определяются равенствами (2.1) и получаются последовательными сдвигами начальных полуинтервалов:

$$\begin{aligned} G_{k+1}^m &\equiv G_k^m + \tau \pmod{1}, \\ 0 \leq k < F_{m+1}, \quad G_0^m &= I[F_m, -F_{m+1}) = [\langle F_m\tau \rangle, \langle -F_{m+1}\tau \rangle), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} E_{k+1}^m &\equiv E_k^m + \tau \pmod{1}, \\ 0 \leq k < F_{m+2}, \quad E_0^m &= I[-F_{m+1}, 0) = [\langle -F_{m+1}\tau \rangle, 1); \end{aligned} \quad (2.5)$$

2) для нечетных m

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = \coprod_{0 \leq k < F_{m+1}} (G_k^m \oplus E_k^m) \sqcup \coprod_{F_{m+1} \leq k < F_{m+2}} G_k^m, \quad (2.6)$$

где полуинтервалы G_k^m и E_k^m заданы формулами (2.2) и связаны между собой сдвигами:

$$\begin{aligned} G_{k+1}^m &\equiv G_k^m + \tau \pmod{1}, \\ 0 \leq k < F_{m+2}, \quad G_0^m &= I[-F_m, -F_{m+2}) = [\langle -F_m\tau \rangle, \langle -F_{m+2}\tau \rangle), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} E_{k+1}^m &\equiv E_k^m + \tau \pmod{1}, \\ 0 \leq k < F_{m+1}, \quad E_0^m &= I[-F_{m+2}, 0) = [\langle -F_{m+2}\tau \rangle, 1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Утверждение теоремы 2.1 показывает, что разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ уровня m представляет собой дизъюнктивное объединение или разбиение на непересекающиеся полуинтервалы G_k^m , E_k^m , определенные формулами (2.1), (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Для четных m введем объединения

$$T(m) = \bigcup_{0 \leq k < F_{m+1}} (G_k^m \oplus E_k^m) \cup \bigcup_{F_{m+1} \leq k < F_{m+2}} E_k^m, \quad (2.9)$$

а для нечетных m рассмотрим объединения

$$T(m) = \bigcup_{0 \leq k < F_{m+1}} (G_k^m \oplus E_k^m) \cup \bigcup_{F_{m+1} \leq k < F_{m+2}} G_k^m. \quad (2.10)$$

Априори может оказаться, что полуинтервалы, входящие в объединения (2.9), (2.10), пересекаются или же не покрывают единичного полуинтервала. На самом деле это не так.

Покажем, что объединения $T(m)$, (2.9) и (2.10), в реальности представляют собой разбиения единичного полуинтервала I и, более того, совпадают с разбиениями Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ из п. 1.1. Доказательство проведем индукцией по m .

Для $m = 0$ в силу (2.9) получаем разбиение $T(0) = G_0^0 + E_0^0$, где $G_0^0 = I[0^+, 0^-) = [0, \langle -\tau \rangle) = [0, \varepsilon_1)$ для $\varepsilon_1 = 2 - \tau$ и $E_0^0 = I[0^-, 0) = [\varepsilon_1, 1)$, следовательно, $T(0) = \text{Til}(\varepsilon_0)$.

Предположим, что $T(m)$ является разбиением единичного полуинтервала I и что оно совпадает с разбиением $\text{Til}(\varepsilon_m)$. Покажем, что это предположение остается справедливым для $m + 1$. Доказательство будет зависеть от четности уровня m .

В случае четного m доказательство опирается на равенство

$$G_k^m = G_{k+F_{m+2}}^{m+1}, \quad (2.11)$$

где $0 \leq k < F_{m+1}$, и на равенство

$$E_k^m = G_k^{m+1} \oplus E_k^{m+1}, \quad (2.12)$$

где $0 \leq k < F_{m+2}$. Из соотношения (2.9) следует

$$\begin{aligned} E_k^m &= I[k - F_{m+1}, k), \\ G_k^{m+1} &= I[k - F_{m+1}, k - F_{m+3}), \quad E_k^{m+1} = I[k - F_{m+3}, k). \end{aligned} \quad (2.13)$$

В полуинтервалах (2.13) можем считать $k = 0$, и необходимо показать, что соотношение

$$[\langle -F_{m+1}\tau \rangle, 1) = [\langle -F_{m+1}\tau \rangle, \langle -F_{m+3}\tau \rangle) \oplus [\langle -F_{m+3}\tau \rangle, 1) \quad (2.14)$$

есть разбиение полуинтервала, стоящего слева в (2.14). Произведем инверсию $x \mapsto -x \pmod{1}$ в этом соотношении и преобразуем его к виду

$$[0, \langle F_{m+1}\tau \rangle) = [0, \langle F_{m+3}\tau \rangle) \oplus [\langle F_{m+3}\tau \rangle, \langle F_{m+1}\tau \rangle). \quad (2.15)$$

По предположению индукции $m+1$ и $m+3$ нечетные, и пусть для начала будет $m \geq 2$. Из равенств $\langle F_{m+1}\tau \rangle = \|F_{m+1}\tau\| = \tau^{-(m+1)}$, $\langle F_{m+3}\tau \rangle = \|F_{m+3}\tau\| = \tau^{-(m+3)}$ следует, что (2.15), а следовательно, и (2.14) – разбиения и отношение длин образующих их полуинтервалов есть

$$\frac{|G_k^{m+1}|}{|E_k^{m+1}|} = \frac{\tau^{-(m+1)} - \tau^{-(m+3)}}{\tau^{-(m+3)}} = \tau^2 - 1 = \tau. \quad (2.16)$$

Для $m = 0$ равенство (2.15) действительно является разбиением $[0, \langle \tau \rangle) = [0, \langle 2\tau \rangle) \oplus [\langle 2\tau \rangle, \langle \tau \rangle)$ и отношение длин $\frac{\langle \tau \rangle - \langle 2\tau \rangle}{\langle 2\tau \rangle} = \frac{-\tau+2}{2\tau-3} = \tau$ снова равно τ , как в (2.16). Таким образом, для четных m мы показали, что из разбиения $T(m)$ подразбиением (2.12) его длинных полуинтервалов E_k^m в отношении τ , (2.16), получается разбиение $T(m+1)$.

В случае нечетного m необходимо воспользоваться равенством

$$G_k^m = E_{k+F_{m+1}}^{m+1} \oplus G_k^{m+1}, \quad (2.17)$$

где $0 \leq k < F_{m+2}$, и равенством

$$E_k^m = E_k^{m+1}, \quad (2.18)$$

где $0 \leq k < F_{m+1}$.

Однако разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ последовательно получаются друг из друга с помощью подстановки π , (1.1), эквивалентной подстановкам (2.11), (2.12) и (2.17), (2.18) для разбиений $T(m)$, (2.9), (2.10). Поэтому, учитывая соотношение $T(0) = \text{Til}(\varepsilon_0)$, приходим к равенству $T(m) = \text{Til}(\varepsilon_m)$ для всех $m = 0, 1, 2, \dots$.

Объясним теперь используемую нумерацию полуинтервалов G_k^m , E_k^m и покажем, как она естественно возникает. Из соотношений (2.4), (2.5) и (2.7), (2.8) вытекают формулы $G_k^m \equiv G_0^m + k\tau \pmod{1}$, $E_k^m \equiv E_0^m + k\tau \pmod{1}$, где $0 \leq k < F_{m+1}$ в первом сравнении и $0 \leq k < F_{m+2}$ во втором сравнении для четных m , и неравенства меняются порядком для нечетных m . Таким образом, при сдвиге на $\tau, 2\tau, \dots, k\tau, \dots$ по модулю 1 интервалы G_0^m и E_0^m переходят в интервалы обобщенных разбиений Фибоначчи, имеющие ту же длину. Индексы k у всех полуинтервалов G_k^m и E_k^m означают их *порядковый номер* относительно преобразования – сдвига единичного полуинтервала

$$I \xrightarrow{S} I: x \mapsto S(x) = x + \tau \pmod{1}, \quad (2.19)$$

т. е.

$$G_k^m = S^k(G_0^m), \quad E_k^m = S^k(E_0^m) \quad (2.20)$$

– S^k -образы начальных полуинтервалов G_0^m , (2.4), (2.7), и E_0^m , (2.5), (2.8), где S^k обозначает композицию отображения (2.19) кратности k .

Используя равенства (2.20), разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$, (2.3), (2.6), можно переписать в виде

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = \coprod_{0 \leq k < F_{m+1}} S^k(G_0^m) \sqcup \coprod_{0 \leq k < F_{m+2}} S^k(E_0^m), \quad (2.21)$$

для четных m и в виде

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = \coprod_{0 \leq k < F_{m+2}} S^k(G_0^m) \sqcup \coprod_{0 \leq k < F_{m+1}} S^k(E_0^m) \quad (2.22)$$

для нечетных m .

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\text{Til}(\varepsilon_m)$ и $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ – разбиения Фибоначчи, определенные в п. 2.1, и пусть S – отображение сдвига (2.19) единичного полуинтервала I . Тогда указанные разбиения связаны формулой

$$\text{Til}^+(\varepsilon_m) = S(\text{Til}(\varepsilon_m)) \quad (2.23)$$

для $m = 0, 1, 2, \dots$. Разбиения $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ могут быть записаны в виде дизъюнктивного объединения:

1) для четных m

$$\text{Til}^+(\varepsilon_m) = \coprod_{1 \leq k \leq F_{m+1}} (G_k^m + E_k^m) \sqcup \coprod_{F_{m+1} < k \leq F_{m+2}} E_k^m, \quad (2.24)$$

где полуинтервалы G_k^m и E_k^m определены равенствами (2.1);

2) для нечетных m

$$\text{Til}^+(\varepsilon_m) = \coprod_{1 \leq k \leq F_{m+1}} (G_k^m + E_k^m) \sqcup \coprod_{F_{m+1} < k \leq F_{m+2}} G_k^m, \quad (2.25)$$

где полуинтервалы G_k^m и E_k^m определены в (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m четное. По теореме 2.1 правая часть равенства (2.21) представляет собой разбиение единичного полуинтервала I . Поэтому, действуя на него сдвигом S , (2.19), приходим к еще одному разбиению

$$S(\text{Til}(\varepsilon_m)) = \text{Til}(\varepsilon_m) \setminus (G_0^m \oplus E_0^m) \oplus (E_{F_{m+2}}^m \oplus G_{F_{m+1}}^m), \quad (2.26)$$

где $E_{F_{m+2}}^m = S^{F_{m+2}}(E_0^m)$ и $G_{F_{m+1}}^m = S^{F_{m+1}}(G_0^m)$, причем все слагаемые справа в (2.26) записаны в своем истинном порядке. Чтобы в этом убедиться, необходимо доказать равенство

$$G_0^m \oplus E_0^m = E_{F_{m+2}}^m \oplus G_{F_{m+1}}^m \quad (2.27)$$

и проверить, что правые концы полуинтервалов E_0^m и $G_{F_{m+1}}^m$ находятся в точке 1. По формуле (2.1) записываем

$$E_{F_{m+2}}^m = I[F_m, F_{m+2}), \quad G_{F_{m+1}}^m = I[F_{m+2}, 0). \quad (2.28)$$

Из (2.28) и формул (2.4), (2.5) вытекают оба утверждения.

Аналогично, используя теорему 2.1 для нечетных m , получаем

$$S(\text{Til}(\varepsilon_m)) = \text{Til}(\varepsilon_m) \setminus (G_0^m \oplus E_0^m) \oplus (E_{F_{m+1}}^m \oplus G_{F_{m+2}}^m), \quad (2.29)$$

$$G_0^m \oplus E_0^m = E_{F_{m+1}}^m \oplus G_{F_{m+2}}^m. \quad (2.30)$$

При этом правые концы полуинтервалов E_0^m и $G_{F_{m+2}}^m$ снова находятся в точке 1, и по формулам (2.2) имеем

$$E_{F_{m+1}}^m = I[-F_m, F_{m+1}), \quad G_{F_{m+2}}^m = I[F_{m+1}, 0). \quad (2.31)$$

Равенства (2.26), (2.27) и (2.29), (2.30) показывают, что действие сдвига S , (2.19), на разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ сводится к перестановке местами двух крайних правых полуинтервалов $S(\text{Til}(\varepsilon_m)) = \text{Til}(\varepsilon_m)^+$. Отсюда с использованием теоремы 2.1 вытекает требуемое утверждение.

2.2. Локальный порядок. Теоремы 2.1, 2.2 объясняют, из каких полуинтервалов составлены рассматриваемые разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ и $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$, но явно не описывают, как именно эти полуинтервалы расположены. В настоящем пункте опишем порядок расположения полуинтервалов G_k^m и E_k^m разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$, (2.3), (2.6). Это описание лежит в основе исследования двухцветных поворотов окружности [13].

Пусть G_k^m – интервал разбиения Фибоначчи уровня m . Слева к нему примыкает либо интервал $G_{k^*}^m$, либо интервал $E_{k^*}^m$. Здесь $k^* = k^*(k)$ – номер примыкающего к G_k^m слева полуинтервала в нумерации, введенной в п. 2.1. Наша задача – определить тип примыкающего слева полуинтервала (G или E) и зависимость его номера $k^* = k^*(k)$ от k . Ниже мы вычисляем значение $k^*(k)$ в явном виде и приводим два алгоритма для построения последовательности интервалов разбиения Фибоначчи уровня m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Справедливо равенство*

$$k^*(k) = \begin{cases} k + F_m \pmod{F_{m+2}}, & \text{если } m \text{ четное,} \\ k + F_{m+1} \pmod{F_{m+2}}, & \text{если } m \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (2.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При четном m согласно (2.1) полуинтервалы G_k^m , E_k^m имеют вид

$$G_k^m = I[k + F_m, k - F_{m+1}), \quad 0 \leq k < F_{m+1}, \quad (2.33)$$

$$E_k^m = I[k - F_{m+1}, k), \quad 0 \leq k < F_{m+2}. \quad (2.34)$$

Для полуинтервалов G_k^m ограничение $0 \leq k < F_{m+1}$ равносильно неравенству

$$k - F_{m+1} < 0 \quad (2.35)$$

и для всех k с условием $0 \leq k < F_{m+2}$ выполняется неравенство

$$k + F_m \geq 0. \quad (2.36)$$

Из (2.33)–(2.36) следует, что допустимыми комбинациями смежных полуинтервалов являются $G_k^m \oplus E_k^m$ в случае $k < F_{m+1}$ и $E_{k-F_{m+1}}^m \oplus E_k^m$ в случае $k \geq F_{m+1}$. Если расширить эти комбинации, добавив к ним слева смежные полуинтервалы, то получим следующие допустимые комбинации:

$$G_{k+F_m}^m \oplus E_{k+F_m}^m \oplus G_k^m \oplus E_k^m \quad \text{для } k < F_{m+1}, \quad (2.37)$$

$$G_{k-F_{m+1}}^m \oplus E_{k-F_{m+1}}^m \oplus E_k^m \quad \text{для } k \geq F_{m+1}. \quad (2.38)$$

Таким образом, переход справа налево $k \mapsto k^*$, (2.37), (2.38), осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} k &\mapsto k + F_m, & \text{если } k < F_{m+1}, \\ k &\mapsto k - F_{m+1}, & \text{если } k \geq F_{m+1}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Покажем, что процесс (2.39), $0 \rightarrow \dots \rightarrow k \rightarrow k^* \rightarrow \dots$, циклический и эквивалентен сдвигу

$$k \mapsto k + F_m \pmod{F_{m+2}}, \quad (2.40)$$

где $\pmod{F_{m+2}}$ означает операцию взятия остатка от деления на F_{m+2} . Пусть $k < F_{m+2}$. По формулам (2.39) имеем $k^* = k + F_m$, и так как $k^* < F_{m+2}$,

то $k^* = k + F_m \pmod{F_{m+2}}$. Если $k \geq F_{m+1}$, то по второй формуле из (2.39) имеем $k^* = k - F_{m+1}$, а с другой стороны, в силу (2.40) $k + F_m \pmod{F_{m+2}} = (k + F_m) - F_{m+2} = k - F_{m+1}$. Эквивалентность (2.39) и (2.40) доказана.

В случае нечетного уровня m доказательство проводится аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 (алгоритм I). *Последовательность полуинтервалов, входящих в разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$, может быть построена по следующему алгоритму.*

1. Для четных уровней m :

(i) строится справа налево циклическая последовательность полуинтервалов

$$\cdots \oplus G_{k^*}^m \oplus E_{k^*}^m \oplus G_k^m \oplus E_k^m \oplus \cdots \oplus G_0^m \oplus E_0^m \quad (2.41)$$

по правилу (2.39), $k \mapsto k^*$, или эквивалентному правилу (2.40);

(ii) из последовательности (2.41) вычеркиваются все полуинтервалы G_k^m с индексами $k \geq F_{m+1}$.

2. Для нечетных уровней m :

(i) справа налево, $k \mapsto k^*$, строится циклическая последовательность

$$\cdots \oplus G_{k^*}^m \oplus E_{k^*}^m \oplus G_k^m \oplus E_k^m \oplus \cdots \oplus G_0^m \oplus E_0^m \quad (2.42)$$

по правилам

$$k \mapsto k + F_{m+1}, \quad \text{если} \quad k < 0, \quad (2.43)$$

$$k \mapsto k - F_m, \quad \text{если} \quad k \geq 0, \quad (2.44)$$

или, что эквивалентно, по правилу сдвига

$$k \mapsto k + F_{m+1} \pmod{F_{m+2}}; \quad (2.45)$$

(ii) из последовательности (2.42) вычеркиваются все полуинтервалы E_k^m с номерами $k \geq F_{m+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 2.1 и предложения 2.1.

В алгоритме I сначала строится максимальное количество полуинтервалов G_k^m и E_k^m и затем вычеркиваются лишние полуинтервалы с учетом вида допустимых комбинаций (2.38) для $k \geq F_{m+1}$. Возникает вопрос: как устроены множества оставшихся полуинтервалов G_k^m в последовательности (2.41) и множество оставшихся полуинтервалов E_k^m в последовательности (2.42)? Оказывается, что эти множества представляет собой некоторую прогрессию, аналогичную (2.40). В этом можно убедиться, если исходить из минимального алгоритма: построить сначала упорядоченную последовательность всех полуинтервалов G_k^m и затем лишь дополнить ее до последовательности (2.41) в алгоритме I недостающими полуинтервалами E_k^m в случае четного уровня m ; или построить изначально упорядоченную последовательность всех полуинтервалов E_k^m и затем дополнить ее до последовательности (2.42) в алгоритме I недостающими полуинтервалами G_k^m в случае нечетного уровня m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3 (алгоритм II). *Последовательность полуинтервалов, входящих в разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$, может быть построена по следующему алгоритму.*

1. Для четных уровней m :

(i) справа налево строим последовательность из одних только полуинтервалов G_k^m :

$$\dots, G_{k+}^m, G_k^m, \dots, G_0^m \quad (2.46)$$

по правилу $k \mapsto k + F_m \pmod{F_{m+1}}$;

(ii) расширяем последовательность (2.46) с помощью подстановок

$$G_k^m \rightarrow E_{k+F_m}^m \oplus G_k^m \oplus E_k^m, \quad G_k^m \rightarrow G_k^m \oplus E_k^m \quad (2.47)$$

для индексов $k \geq F_{m-1}$ и $0 \leq k < F_{m-1}$ соответственно, где порядок полуинтервалов существует.

2. Для нечетных уровней m :

(i) строится последовательность

$$\dots, E_{k^*}^m, E_k^m, \dots, E_0^m \quad (2.48)$$

по правилам

$$k \mapsto k^* = \begin{cases} (k + F_{m+1}) - F_m, & \text{если } k < F_m, \\ k - F_m, & \text{если } k \geq F_m, \end{cases} \quad (2.49)$$

или эквивалентному правилу

$$k \mapsto k + F_{m-1} \pmod{F_{m+1}}; \quad (2.50)$$

(ii) дополняем последовательность (2.48) полуинтервалами G_k^m с помощью подстановок

$$E_k^m \rightarrow G_k^m \oplus E_k^m \oplus G_{k+F_m}^m, \quad E_k^m \rightarrow G_k^m \oplus E_k^m \quad (2.51)$$

для индексов $k \geq F_{m-1}$ и $k < F_{m-1}$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим равносильность алгоритмов I и II. Пусть уровень m будет четным. Тогда если $k \geq F_{m-1}$, то $k + F_m \geq F_{m+1}$ и по формулам (2.39) перед номером $k + F_m$ будет находиться номер $(k + F_m) - F_{m+1} \geq 0$. Ввиду (2.38) переход $k + F_m \mapsto (k + F_m) - F_{m+1}$ означает отсутствие перед $E_{k+F_m}^m$ полуинтервала $G_{k+F_m}^m$, что и обеспечивается подстановками (2.47). Случай нечетного m рассматривается аналогично.

Таким образом, нами получены алгоритмы, позволяющие для каждого полуинтервала G_k^m разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ находить соседний с ним слева полуинтервал и, следовательно, выписывать всю последовательность полуинтервалов, составляющих разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m)$.

§ 3. Отображения первого возвращения и самоподобия последовательностей

Настоящий параграф посвящен вычислению отображений первого возвращения для сдвига $S: x \rightarrow x + \tau \pmod{1}$ на полуинтервалах вида $I_m = [1 - \tau^{-m}, 1)$. Необходимо показать, что соответствующее отображение первого возвращения изоморфно самому сдвигу S для четных уровней m и ему обратному сдвигу $S^{-1}: x \rightarrow x - \tau \pmod{1}$ для нечетных m . Под изоморфизмом отображений

понимается их сопряженность при помощи гомотетии h_m с центром в точке 1, переводящей полуинтервал $[0, 1)$ в полуинтервал I_m .

Сначала мы рассматриваем более простой случай четного уровня m . Далее, в лемме 3.1, доказывается интересующий нас изоморфизм в случае $m = 2$. После этого по индукции мы получаем общий результат для всех четных m (теорема 3.1). Затем, зная отображения первого возвращения в случае четных m , мы вычисляем их и в случае, когда m нечетно (теорема 3.2).

3.1. Случай четного уровня m . В этом пункте условимся, что m всегда обозначает четное неотрицательное число. Рассмотрим специальную последовательность вложенных полуинтервалов

$$I_0 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m \supset I_{m+2} \supset \dots, \quad (3.1)$$

определяемых с помощью разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$, (2.9), где

$$I_0 = [0, 1) = G_0^0 \oplus E_0^0, \quad \dots, \quad I_m = G_0^m \oplus E_0^m, \quad \dots \quad (3.2)$$

Полуинтервал I_m представляет собой объединение двух крайних правых полуинтервалов обобщенного разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$. Напомним, что

$$\begin{aligned} G_0^m &= [\langle F_m \tau \rangle, \langle -F_{m+1} \tau \rangle) = [1 - \tau^{-m}, 1 - \tau^{-(m+1)}), \\ E_0^m &= [\langle -F_{m+1} \tau \rangle, 1) = [1 - \tau^{-(m+1)}, 1), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $m = 0, 2, 4, \dots$.

Для произвольной точки $x \in [0, 1)$ и полуинтервала I_m обозначим $x \bmod I_m$ единственную точку x' , удовлетворяющую условиям $x' \in I_m$ и $\frac{x' - x}{|I_m|} \in \mathbb{Z}$.

Определим на полуинтервале I_m сдвиг

$$a_i \mapsto a_{i+1} = a_i + \alpha \pmod{I_m}. \quad (3.4)$$

Сначала под действием рассматриваемого отображения точка a_i сдвигается на α . При этом может получиться, что ее образ $a_i + \alpha$ уже не попадает в интервал I_m . В этом случае мы сдвигаем полученную точку влево на длину интервала I_m до тех пор, пока образ не попадет в этот интервал. Отображение (3.4) можно рассматривать как *поворот* на дугу α точек, лежащих на окружности длиной $|I_m|$. Далее рассмотрим последовательность $\text{Orb}(a_0, \alpha, I_m) \subset I_m$, представляющую собой *орбиту начальной точки* $a_0 \in I_m$ относительно отображения (3.4). Из определения следует, что все представители a_i орбиты $\text{Orb}(a_0, \alpha, I_m)$ для $i = 1, 2, 3, \dots$ вместе с начальной точкой a_0 принадлежат полуинтервалу I_m .

Отметим, что орбита

$$O_0 = \text{Orb}(0, \tau, I_0) \quad (3.5)$$

есть последовательность дробных долей $\langle n\tau \rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Нам понадобятся более общие последовательности

$$O_m = \text{Orb}(\langle F_m \tau \rangle, \langle F_{m+1} \tau \rangle, I_m) = \text{Orb}(1 - \tau^{-m}, \tau^{-(m+1)}, I_m) \quad (3.6)$$

для $m = 0, 2, 4, \dots$, частным случаем которых является O_0 . Согласно определениям (3.2) и (3.3) полуинтервалы I_m имеют вид $I_m = [1 - \tau^{-m}, 1)$ и их длины

равны $|I_m| = \tau^{-m}$. Поскольку для соседних полуинтервалов из (3.1) отношение длин $|I_{m+2}|/|I_m|$ равно τ^{-2} , то они связаны друг с другом по формуле

$$I_{m+2} = h_2(I_m) \quad (3.7)$$

аффинным отображением

$$I_0 \xrightarrow{h_2} I_0: \quad x \mapsto h_2(x) = \tau^{-2}x + 1 - \tau^{-2}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим также *дополнительные* к (3.6) последовательности

$$O_m^- = \text{Orb}(1, -\langle F_{m+1}\tau \rangle, I_m^-) = \text{Orb}(1, -\tau^{-(m+1)}, I_m^-) \quad (3.9)$$

из полуинтервалов $I_m^- = (1 - \tau^{-m}, 1]$ для $m = 0, 2, 4, \dots$. В частном случае нулевого уровня орбита

$$O_0^- = \text{Orb}(1, -\tau, I_0^-) \quad (3.10)$$

представляет собой последовательность $1, \langle -\tau \rangle, \langle -2\tau \rangle, \dots, \langle -n\tau \rangle, \dots$.

ЛЕММА 3.1. *Справедливы соотношения*

$$O_0 \cap I_2 = h_2 O_0 = O_2, \quad (3.11)$$

$$O_0^- \cap I_2^- = h_2 O_0^- = O_2^-. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся разбиением Фибоначчи

$$\text{Til}(\varepsilon_2) = E_2^2 \oplus G_1^2 \oplus E_1^2 \oplus G_0^2 \oplus E_0^2. \quad (3.13)$$

Поддействуем на разбиение (3.13) сдвигом S , (2.19), и получим по теореме 2.2 новое разбиение

$$\text{Til}^+(\varepsilon_2) = E_2^2 \oplus G_1^2 \oplus E_1^2 \oplus E_3^2 \oplus G_1^2 \quad (3.14)$$

единичного полуинтервала $I_0 = [0, 1)$. В суммах (3.13) и (3.14) знаком плюс соединены соприкасающиеся полуинтервалы. По теореме 2.1 сдвиг S согласуется с нумерацией элементарных полуинтервалов:

$$G_0^2 \rightarrow G_1^2 \rightarrow G_2^2, \quad E_0^2 \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^2 \rightarrow E_3^2. \quad (3.15)$$

Ввиду (3.2), (3.13) и (3.14) для полуинтервала I_2 выполняются два разбиения:

$$I_2 = G_0^2 \oplus E_0^2 = E_3^2 \oplus G_2^2. \quad (3.16)$$

Поскольку одноименные полуинтервалы G_k^2 и E_k^2 имеют равные длины, то из (3.15) и (3.16) следует, что ограничение S_2 сдвига S единичного полуинтервала I_0 на полуинтервал I_2 есть снова сдвиг, т. е.

$$I_2 \xrightarrow{S_2} I_2: \quad x \mapsto x + \tau_2 \pmod{I_2}, \quad (3.17)$$

где τ_2 равно длине полуинтервала E_0^2 и равно согласно (3.3) величине τ^{-3} . Длина всего полуинтервала I_2 в силу (3.2), (3.3) равна τ^{-2} и, следовательно,

$$\frac{\tau_2}{|I_2|} = \tau^{-1}. \quad (3.18)$$

Однако по теореме 2.2 сдвиг S переводит разбиение $\text{Til}(\varepsilon_0) = G_0^0 + E_0^0$ полуинтервала I_0 в разбиение $\text{Til}^+(\varepsilon_0) = E_1^0 + G_1^0$ и отношение величины сдвига $\langle \tau \rangle = \tau - 1 \equiv \tau \pmod{1}$ к длине полуинтервала I_0 также равно τ^{-1} , как в (3.18). Для завершения доказательства первого соотношения из (3.11) осталось заметить, что начальной точкой в последовательности $O_0 \cap I_2$ является $\langle \tau \rangle$ — это левый конец $\langle F_2 \tau \rangle$ полуинтервала I_2 , (3.2), (3.2), и коэффициент гомотетии h_2 , (3.8), равен τ^{-2} . Второе соотношение из (3.11) вытекает из явного вида последовательности O_2 , (3.6).

Приведенное доказательство остается в силе и для соотношений (3.12). Нужно лишь вместо сдвига S воспользоваться обратным сдвигом

$$I_0^- \xrightarrow{S^-} I_0^-: \quad x \mapsto S^-(x) = x - \tau \pmod{|I_0^-|}$$

и обратным переходом $S^-(\text{Til}^+(\varepsilon_2)) = \text{Til}(\varepsilon_2)$ от разбиения (3.14) к (3.13).

Из леммы 3.1 следует, что если мы возьмем множество O_0 всех дробных долей $\langle n\tau \rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и подействуем на него гомотетией h_2 , переводящей полуинтервал I_0 в I_2 , а также возьмем множество тех дробных долей из O_0 , которые попадают в полуинтервал I_2 , то указанные нами множества совпадут. Это и означает, что отображение первого возвращения для сдвига на τ по модулю 1 на полуинтервале I_2 изоморфно исходному сдвигу.

Аналогичная ситуация имеет место и для произвольного четного уровня m .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть для $m = 0, 2, 4, \dots$ даны последовательности $O_m = \text{Orb}(1 - \tau^{-m}, \tau^{-(m+1)}, I_m)$ в полуинтервалах $I_m = [1 - \tau^{-m}, 1)$ и последовательности $O_m^- = \text{Orb}(1, -\tau^{-(m+1)}, I_m^-)$ в полуинтервалах $I_m^- = (1 - \tau^{-m}, 1]$, и пусть h_2 — аффинное отображение (3.8) единичного отрезка $[0, 1]$ в себя. Тогда последовательности O_m и O_m^- обладают следующим свойством самоподобия:

$$O_0 \cap I_{2k} = h_{2k} O_0 = O_{2k}, \quad (3.19)$$

$$O_0^- \cap I_{2k}^- = h_{2k} O_0^- = O_{2k}^-, \quad (3.20)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ и $h_{2k} = \underbrace{h_2 \circ \dots \circ h_2}_k$ — аффинное отображение:

$$[0, 1] \xrightarrow{h_{2k}} [0, 1]: \quad x \mapsto h_{2k}(x) = 1 - \tau^{-2k}(1 - x). \quad (3.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что последовательности, о которых идет речь в формулировке теоремы, это последовательности (3.6) и (3.9). Докажем равенства (3.19) индукцией по $k = 1, 2, 3, \dots$. Для $k = 1$ эти равенства доказаны в лемме 3.1. Предположим, что выполнено равенство $O_0 \cap I_{2(k-1)} = h_{2(k-1)} O_0$. Тогда, используя лемму 3.1, получаем

$$O_0 \cap I_{2k} = (O_0 \cap I_{2(k-1)}) \cap I_{2k} = (h_{2(k-1)} O_0) \cap I_{2k} = h_{2(k-1)}(O_0 \cap I_2) = h_{2k} O_0.$$

Второе равенство $h_{2k} O_0 = O_{2k}$ вытекает из определений последовательностей O_m , (3.6), и формулы (3.21) для k -кратной композиции аффинного отображения h_2 , (3.8). Случай последовательностей O_m^- рассматривается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Равенства (3.19) и (3.20) допускают обобщение:

$$O_m^\pm \cap I_{m+2k}^\pm = h_{2k} O_m^\pm = O_{m+2k}^\pm \quad (3.22)$$

для любых $m = 0, 2, 4, \dots$. Доказательство (3.22) вытекает из (3.19), (3.20) и соотношений $O_m^\pm \cap I_{m+2k}^\pm = (O_0^\pm \cap I_m^\pm) \cap I_{m+2k}^\pm = O_0 \cap I_{m+2k}^\pm$.

3.2. Случай нечетного уровня m . В этом пункте m всегда обозначает нечетное положительное число. Будем полагать выполненными включения

$$I_0 \supset I_1^-, \quad I_0^- \supset I_1, \quad (3.23)$$

где $I_1^- = (1 - \tau^{-1}, 1]$ и $I_1 = [1 - \tau^{-1}, 1)$, считая, что левый конец единичного полуинтервала $I_0 = [0, 1]$ отождествлен с правым концом полуинтервала I_1^- . Вместо аффинного отображения h_2 , (3.8), выберем отображение

$$[0, 1] \xrightarrow{h_1} [0, 1]: \quad x \mapsto h_1(x) = \tau^{-1}x + 1 - \tau^{-1}. \quad (3.24)$$

С помощью инверсии $I(x) = 1 - x$ зададим новое аффинное отображение $h_1^- = h_1 \circ I$, имеющее в координатах вид

$$[0, 1] \xrightarrow{h_1^-} [0, 1]: \quad x \mapsto h_1^-(x) = 1 - \tau^{-1}x. \quad (3.25)$$

Кроме последовательностей O_0 , (3.5), и O_0^- , (3.10), определим еще пару дополняющих друг друга последовательностей $O_1 = \text{Orb}(1 - \tau^{-1}, \tau^{-2}, I_1)$ и $O_1^- = \text{Orb}(1, -\tau^{-2}, I_1^-)$. Тогда справедливы соотношения

$$O_0 \cap I_1^- = h_1^- O_0 = O_1^-, \quad (3.26)$$

$$O_0^- \cap I_1 = h_1^- O_0^- = O_1. \quad (3.27)$$

Рассмотрим последовательность полуинтервалов

$$I_0^- \supset I_1 \supset I_3 \supset \dots \supset I_m \supset I_{m+2} \supset \dots \quad (3.28)$$

для $m = 1, 3, 5, \dots$ вида

$$I_m = G_0^m \oplus E_0^m = [1 - \tau^{-m}, 1), \quad (3.29)$$

составленных согласно формулам (2.10) из двух полуинтервалов

$$\begin{aligned} G_0^m &= [\langle -F_m \tau \rangle, \langle -F_{m+2} \tau \rangle) = [1 - \tau^{-m}, 1 - \tau^{-(m+2)}), \\ E_0^m &= [\langle -F_{m+2} \tau \rangle, 1) = [1 - \tau^{-(m+2)}, 1). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Заметим, что выполняются следующие формулы коммутирования:

$$(h_1 O_0) \cap I_{2k} = h_1(O_0 \cap I_{2k}), \quad (3.31)$$

$$(h_1 O_0^-) \cap I_{2k} = h_1(O_0^- \cap I_{2k}). \quad (3.32)$$

Для формулировки следующего результата нам для нечетных $m = 1, 3, 5, \dots$ потребуются последовательности O_m и O_m^- , аналогичные последовательностям (3.6) и (3.9):

$$O_m = \text{Orb}(\langle -F_m \tau \rangle, \langle -F_{m+1} \tau \rangle, I_m) = \text{Orb}(1 - \tau^{-m}, \tau^{-(m+1)}, I_m), \quad (3.33)$$

$$O_m^- = \text{Orb}(1, -\langle -F_{m+1} \tau \rangle, I_m^-) = \text{Orb}(1, -\tau^{-(m+1)}, I_m^-). \quad (3.34)$$

Из теоремы 3.1 и соотношений (3.26), (3.27) и (3.31), (3.32) вытекает

ТЕОРЕМА 3.2. Последовательности O_0 , (3.5), O_0^- , (3.10), и O_m , (3.33), O_m^- , (3.34), $m = 1, 3, 5, \dots$, связаны между собой следующими соотношениями:

$$O_0 \cap I_{2k+1}^- = h_{2k+1}^- O_0 = O_{2k+1}^-, \quad (3.35)$$

$$O_0^- \cap I_{2k+1} = h_{2k+1}^- O_0^- = O_{2k+1}, \quad (3.36)$$

где $h_{2k+1}^- = h_{2k} \circ h_1^- = h_{2k+1} \circ I$ – композиция аффинных отображений h_{2k} и h_1^- , (3.21) и (3.25), имеющая в координатах вид

$$[0, 1] \xrightarrow{h_{2k+1}^-} [0, 1]: \quad x \mapsto h_{2k+1}^-(x) = 1 - \tau^{-(2k+1)}x. \quad (3.37)$$

§ 4. Перенормировки последовательностей

4.1. Случай четного уровня m . Рассмотрим последовательность (3.5):

$$O_0 = \text{Orb}(0, \tau, I_0) = \{a(0, i)\}_{i=0}^\infty = \{\langle i\tau \rangle\}_{i=0}^\infty, \quad (4.1)$$

состоящую из элементов $a(0, i) = i\tau \pmod{1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, и содержащее ее при четных $m = 0, 2, 4, \dots$ параметрическое семейство последовательностей (3.6):

$$\begin{aligned} O_m &= \text{Orb}(\langle F_m \tau \rangle, \langle F_{m+1} \tau \rangle, I_m) \\ &= \text{Orb}(1 - \tau^{-m}, \tau^{-(m+1)}, I_m) = \{a(m, i)\}_{i=0}^\infty, \end{aligned} \quad (4.2)$$

состоящих из элементов $a(m, i) = \langle F_m \tau \rangle + i \langle F_{m+1} \tau \rangle \pmod{|I_m|}$, где $I_m = [\langle F_m \tau \rangle, 1)$ и по определению (3.4) все элементы $a(m, i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, содержатся в полуинтервале I_m . По теореме 3.1 последовательности O_0 и O_m связаны равенствами $O_0 \cap I_m = O_m$, $m = 0, 2, 4, \dots$. Следовательно, каждая точка $a(m, i)$ последовательности O_m является одновременно и точкой последовательности O_0 и имеет в этой последовательности некоторый номер $R_m(i)$, т. е. можно записать

$$a(m, i) = a(0, R_m(i)). \quad (4.3)$$

Таким образом, мы получаем вложение R_m множества $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ в себя, называемое *перенормировкой степени m* .

По теореме 3.1, (3.19), последовательности (4.1) и (4.2) также связаны между собой: $h_m O_0 = O_m$ – аффинным отображением h_m , (3.21). По-другому это можно переписать в виде равенства

$$h_m a(0, i) = a(m, i) \quad (4.4)$$

для $i = 0, 1, 2, \dots$. Сопоставляя равенства (4.3) и (4.4), получаем

$$h_m a(0, i) = a(0, R_m(i)), \quad (4.5)$$

т. е. приходим к *свойству самоподобия* последовательности O_0 , (4.1), выраженному в координатах.

Перенормировка $R_m(i)$ имеет простую теоретико-числовую интерпретацию: $R_m(i)$ есть время i -го попадания точки 0 в интервал I_m под действием сдвига $S: x \mapsto x + \tau \pmod{1}$.

Для вычисления перенормировки $R_m(i)$ нам потребуется также аналогичная перенормировка для дополнительной к O_0 последовательности

$$O_0^- = \text{Orb}(1, -\tau, I_0^-) = \{a^-(0, i)\}_{i=0}^\infty, \quad (4.6)$$

состоящей из элементов $a^-(0, i) = -i\tau \pmod{I_0^-}$ из полуинтервала $I_0^- = (0, 1]$, и ее m -параметрического семейства

$$\begin{aligned} O_m^- &= \text{Orb}(1, -\langle F_{m+1}\tau \rangle, I_m^-) \\ &= \text{Orb}(1, -\tau^{-(m+1)}, I_m^-) = \{a^-(m, i)\}_{i=0}^\infty, \end{aligned} \quad (4.7)$$

содержащего элементы $a^-(m, i) = -i\langle F_{m+1}\tau \rangle \pmod{|I_m|}$ из полуинтервалов $I_m^- = (\langle F_m\tau \rangle, 1]$. По теореме 3.1 имеем $O_0^- \cap I_m^- = O_m^-$, и поэтому существует однозначно определенная перенормировка $R_m^-: \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ степени m с условием

$$a^-(m, i) = a^-(0, R_m^-(i)). \quad (4.8)$$

Однако поскольку по теореме 3.1, (3.20), выполнено соотношение $h_m O_0^- = O_m^-$, то можно записать

$$h_m a^-(0, i) = a^-(m, i). \quad (4.9)$$

Свойство самоподобия для последовательности O_0^- теперь принимает вид

$$h_m a^-(0, i) = a^-(0, R_m^-(i)) \quad (4.10)$$

для $i = 0, 1, 2, \dots$.

Перенормировка $R_m^-(i)$ есть не что иное, как время i -го попадания точки 0 в полуинтервал I_m под действием обратного сдвига $S^{-1}: x \mapsto x - \tau \pmod{1}$.

Найдем явные формулы для перенормировок $R_m(i)$ с четными уровнями m . Сначала рассмотрим случай $m = 2$.

ЛЕММА 4.1. Для перенормировки $R_2(i)$, (4.3), имеет место явная формула

$$R_2(i) = T_2(i) \quad (4.11)$$

при $i = 0, 1, 2, \dots$, где $T_2(i) = [i\tau^2] + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию $T_2(i) = [i\tau^2] + 1$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ и рассмотрим ее разностную функцию

$$\Delta T_2(i) = T_2(i+1) - T_2(i). \quad (4.12)$$

Поскольку $\tau^2 = \tau + 1 = \tau_1 + 2$, где $\tau_1 = \langle \tau \rangle = 0,618\dots$, то функцию $T_2(i)$ можно представить в виде $T_2(i) = [i\tau_1] + 2i + 1$, и тогда разностная функция перепишется как $\Delta T_2(i) = [i\tau_1 + \tau_1] - [i\tau_1] + 2$. Отсюда видно, что поведение $\Delta T_2(i)$ определяется функцией

$$\Delta T_2(i) = \begin{cases} 2, & \text{если } \langle i\tau \rangle < \langle -\tau \rangle, \\ 3, & \text{если } \langle i\tau \rangle \geq \langle -\tau \rangle. \end{cases} \quad (4.13)$$

Единичный полуинтервал $I_0 = [0, 1)$ имеет согласно (2.3) разбиение

$$\text{Til}(\varepsilon_0) = G_0^0 \oplus E_0^0, \quad \text{где } G_0^0 = [0, \langle -\tau \rangle), \quad E_0^0 = [\langle -\tau \rangle, 1). \quad (4.14)$$

Поэтому формулу (4.13) можно переписать также в виде

$$\Delta T_2(i) = \begin{cases} 2, & \text{если } a(0, i) \in G_0^0, \\ 3, & \text{если } a(0, i) \in E_0^0, \end{cases} \quad (4.15)$$

где $a(0, i) = i\tau \pmod{1}$ – элементы последовательности O_0 , (4.1).

Рассмотрим последовательность O_2 , (4.2), из элементов $a(2, i)$, содержащихся в полуинтервале $I_2 = [\langle \tau \rangle, 1)$. Полуинтервал

$$I_2 = G_0^2 \oplus E_0^2 \quad (4.16)$$

является подразбиением в разбиении Фибоначчи (3.13):

$$\text{Til}(\varepsilon_2) = E_2^2 \oplus G_1^2 \oplus E_1^2 \oplus G_0^2 \oplus E_0^2. \quad (4.17)$$

Сдвиг $S: x \mapsto x + \tau \pmod{1}$ действует на полуинтервалы разбиения (4.17) по правилу (3.15), т. е.

$$S: G_0^2 \rightarrow G_1^2 \rightarrow G_2^2, \quad E_0^2 \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^2 \rightarrow E_3^2, \quad (4.18)$$

и переводит разбиение (4.16) в новое разбиение

$$I_2 = E_3^2 \oplus G_2^2. \quad (4.19)$$

Обозначим $w_2(i)$ число шагов, через которое точка $a(2, i)$ из полуинтервала I_2 вновь возвращается в I_2 . Из (4.16)–(4.19) выводим для функции $w_2(i)$ формулу

$$w_2(i) = \begin{cases} 2, & \text{если } a(2, i) \in G_0^2, \\ 3, & \text{если } a(2, i) \in E_0^2, \end{cases} \quad (4.20)$$

аналогичную формуле (4.15). Покажем, что на самом деле выполняется равенство

$$w_2(i) = \Delta T_2(i). \quad (4.21)$$

Воспользуемся коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} O_0 & \ni & a(0, i) & \xrightarrow{S} & a(0, i+1) & \in & O_0 \\ \downarrow h_2 & & & & & & \downarrow h_2 \\ O_2 & \ni & a(2, i) & \xrightarrow{S_2} & a(2, i+1) & \in & O_2 \end{array} \quad (4.22)$$

Здесь S_2 обозначает ограничение (3.17) сдвига S на полуинтервал I_2 . В силу равенства (4.4) между элементами последовательностей O_0 и O_2 существует соответствие

$$\begin{aligned} a(0, i) \in G_0^0 &\iff a(2, i) \in G_0^2, \\ a(0, i) \in E_0^0 &\iff a(2, i) \in E_0^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Заметим, что $w_2(0) = 2$, так как элемент $a(2, 0) = \langle \tau \rangle$, (4.2), принадлежит полуинтервалу G_0^2 , и согласно (4.15) $\Delta T_2(0) = 2$, поскольку элемент $a(0, 0) = 0$ из G_0^0 . Из совпадения функций (4.15) и (4.20) для $i = 0$ и из (4.22), (4.23) вытекает равенство (4.21).

С помощью функции $w_2(i)$ можно явно вычислить перенормировку $R_2(i)$. Применяя (4.3) и (4.20), получаем

$$R_2(i) = R_2(0) + \sum_{0 \leq j \leq i-1} w_2(j),$$

а ввиду равенства (4.21) и определения (4.12) разностной функции $\Delta T_2(i)$ продолжаем:

$$R_2(i) = R_2(0) + \sum_{0 \leq j \leq i-1} \Delta T_2(i) = R_2(0) + T_2(i) - T_2(0). \quad (4.24)$$

Согласно (4.3) и (4.17) имеем $R_2(0) = 1$ и $T_2(0) = 1$, поэтому из (4.24) следует утверждение леммы.

Рассмотрим перенормировку $a(4, i) = a(0, R_4(i))$, (4.3), следующей степени $m = 4$. Согласно формуле (4.5) и определению аффинного отображения h_m из теоремы 3.1 имеем

$$\begin{aligned} a(0, R_4(i)) &= h_4 a(0, i) = h_2(h_2 a(0, i)) \\ &= h_2 a(0, R_2(i)) = a(0, R_2(R_2(i))). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Отсюда и из однозначности определения перенормировки R_4 приходим к равенству $R_4(i) = R_2(R_2(i))$. Аналогично индукцией по $m = 0, 2, 4, \dots$ доказывается, что любая перенормировка R_m четной степени m равна композиции $m/2$ перенормировок R_2 . Теперь применяя к R_2 лемму 4.1, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $O_0 = \text{Orb}(0, \tau, I_0)$ – последовательность из элементов $a(0, i) = i\tau \pmod{1}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$, и пусть последовательность $O_m = O_0 \cap I_m$ с четным m состоит из элементов $a(m, i)$, пронумерованных в порядке их попадания в полуинтервал $I_m = [1 - \tau^{-m}, 1)$. Тогда для перенормировки R_m , однозначно определяемой из равенства $a(m, i) = a(0, R_m(i))$, выполняется формула

$$R_m(i) = R_2^{(m/2)}(i), \quad (4.26)$$

где справа стоит $(m/2)$ -кратная композиция $R_2(R_2 \dots (R_2(i)))$ перенормировки $R_2(i) = [i\tau^2] + 1$ степени два.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Для четных m обозначим $T_m(i) = T_2^{(m/2)}(i)$ $(m/2)$ -кратную композицию функции $T_2(i) = [i\tau^2] + 1$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Тогда значения ее разностной функции $\Delta T_m(i) = T_m(i+1) - T_m(i)$ вычисляются по формуле

$$\Delta T_m(i) = \begin{cases} F_{m+1}, & \text{если } \langle i\tau \rangle < \langle -\tau \rangle, \\ F_{m+2}, & \text{если } \langle i\tau \rangle \geq \langle -\tau \rangle. \end{cases} \quad (4.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.1 полуинтервал $I_m = G_0^m \oplus E_0^m$ содержится в правой части разбиения

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = \dots \oplus G_k^m \oplus E_k^m \oplus \dots \oplus G_0^m \oplus E_0^m. \quad (4.28)$$

В разбиении (4.28) различных полуинтервалов G_k^m и E_k^m содержится F_{m+1} и F_{m+2} соответственно. Согласно теореме 2.2 сдвиг S переводит $\text{Til}(\varepsilon_m)$ в разбиение

$$\text{Til}^+(\varepsilon_m) = \cdots \oplus G_k^m \oplus E_k^m \oplus \cdots \oplus E_{F_{m+2}}^m \oplus G_{F_{m+1}}^m, \quad (4.29)$$

при этом полуинтервал I_m меняет тип разбиения: $I_m = E_{F_{m+2}}^m \oplus G_{F_{m+1}}^m$, т.е. полуинтервалы G_0^m и E_0^m меняются местами. Поэтому из (4.28), (4.29) следует, что если точка $a(0, R_m(i)) = a(m, i)$ из последовательности O_0 попала в полуинтервал I_m и содержится в G_0^m или E_0^m , то следующая точка $a(0, R_m(i+1)) = a(m, i+1)$ из O_0 вернется в I_m через F_{m+1} или F_{m+2} шагов соответственно, т.е. $R_m(i+1) - R_m(i)$ равно F_{m+1} или F_{m+2} . Согласно формуле (4.4) между элементами последовательностей O_0 и O_m существует соответствие:

$$\begin{aligned} a(0, i) \in G_0^0 &\iff a(m, i) \in G_0^m, \\ a(0, i) \in E_0^0 &\iff a(m, i) \in E_0^m, \end{aligned} \quad (4.30)$$

где $a(0, i) = i\tau \pmod{1}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$. Поскольку в разбиении единичного полуинтервала $I_0 = G_0^0 \oplus E_0^0$ его составляющие имеют вид $G_0^0 = [0, \langle -\tau \rangle)$, $E_0^0 = [\langle -\tau \rangle, 1)$ и по теореме 4.1 выполняется равенство $R_m(i) = T_m(i)$, то из (4.28)–(4.30) вытекает формула (4.27).

Следствие 4.1 позволяет нам вычислять время первого возвращения точки в полуинтервал I_m под действием сдвига S : $x \rightarrow x + \tau \pmod{1}$.

Приступим к перенормировкам последовательностей $O_0^- = \text{Orb}(1, -\tau, I_0^-)$, (4.6). С этой целью модифицируем функцию $T_2(i)$, полагая $T_2^-(i) = [i\tau^2]$. Тогда, очевидно, для их разностных функций $\Delta T_2(i)$, (4.12), и $\Delta T_2^-(i)$ выполняется равенство $\Delta T_2^-(i) = \Delta T_2(i)$. Далее нам потребуется следующее простое соотношение между дробными долями вещественных чисел α и β :

$$\langle \alpha \rangle < \langle \beta \rangle \iff \langle -\alpha \rangle > \langle -\beta \rangle. \quad (4.31)$$

Используя (4.31), преобразуем формулу (4.13) к виду

$$\Delta T_2^-(i) = \begin{cases} 3, & \text{если } \langle -i\tau \rangle \leq \langle \tau \rangle, \\ 2, & \text{если } \langle -i\tau \rangle > \langle \tau \rangle. \end{cases} \quad (4.32)$$

Чтобы получить аналог формулы (4.15), воспользуемся разбиением

$$\text{Til}^+(\varepsilon_0) = E_1^0 \oplus G_1^0, \quad \text{где } E_1^0 = [0, \langle \tau \rangle), \quad G_1^0 = [\langle \tau \rangle, 1). \quad (4.33)$$

Тогда в терминах элементов $a^-(0, i) = -i\tau \pmod{1}$ последовательности O_0^- формулу (4.32) можно переписать в следующем виде:

$$\Delta T_2^-(i) = \begin{cases} 3, & \text{если } a^-(0, i) \in E_1^0, \\ 2, & \text{если } a^-(0, i) \in G_1^0. \end{cases}$$

Используя эту формулу и проводя в обратную сторону рассуждения из доказательства леммы 4.1, получаем для перенормировок $R_2^-(i)$, (4.8), явную формулу

$$R_2^-(i) = T_2^-(i). \quad (4.34)$$

Если теперь перестроить доказательство теоремы 4.1 на основе равенств (4.8)–(4.10), то придем к следующему результату.

ТЕОРЕМА 4.2. Для перенормировок $R_m^-(i)$, (4.8), четной степени m имеет место формула

$$R_m^-(i) = R_2^{-(m/2)}(i), \quad (4.35)$$

где $R_2^{-(m/2)}(i)$ обозначает $(m/2)$ -кратную композицию перенормировки $R_2^-(i) = [i\tau^2]$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если $T_m^-(i)$ для четного m равно $(m/2)$ -кратной композиции $T_2^{-(m/2)}(i)$ для функции $T_2^- = [i\tau^2]$, то для разностной функции $\Delta T_m^-(i) = T_m^-(i+1) - T_m^-(i)$ выполняется формула

$$\Delta T_m^-(i) = \begin{cases} F_{m+2}, & \text{если } \langle -i\tau \rangle \leq \langle \tau \rangle, \\ F_{m+1}, & \text{если } \langle -i\tau \rangle > \langle \tau \rangle. \end{cases}$$

Следствие 4.2 позволяет нам вычислять время первого возвращения точки в полуинтервал I_m под действием сдвига $S: x \rightarrow x + \tau \pmod{1}$.

4.2. Случай нечетного уровня m . В теоремах 4.1 и 4.2 вычислены перенормировки $R_m(i)$ и $R_m^-(i)$ четных степеней m . Для нечетных m перенормировки устроены более сложно и требуют отдельного рассмотрения. В нечетном случае последовательности

$$O_0 = \text{Orb}(0, \tau, I_0) = \{a(0, i)\}_{i=0}^\infty, \quad O_0^- = \text{Orb}(1, -\tau, I_0^-) = \{a^-(0, i)\}_{i=0}^\infty,$$

(4.1) и (4.6), подобны последовательностям (3.33)

$$O_m = \text{Orb}(\langle -F_m\tau \rangle, \langle -F_{m+1}\tau \rangle, I_m) = \text{Orb}(1 - \tau^{-m}, -\tau^{-(m+1)}, I_m) \quad (4.36)$$

из полуинтервалов $I_m = [\langle -F_m\tau \rangle, 1)$ и дополнительным к ним последовательностям (3.34)

$$O_m^- = \text{Orb}(1, -\langle -F_{m+1}\tau \rangle, I_m^-) = \text{Orb}(1, -\tau^{-(m+1)}, I_m^-) \quad (4.37)$$

соответственно из полуинтервалов $I_m^- = (\langle -F_m\tau \rangle, 1]$. Более точная формулировка этого утверждения содержится в теореме 3.2 для $m = 1, 3, 5, \dots$. Поэтому для нечетных степеней m также существуют однозначно определенные перенормировки $R_m, R_m^-: \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ такие, что выполняются равенства

$$a^-(m, i) = a(0, R_m(i)), \quad a(m, i) = a^-(0, R_m^-(i)). \quad (4.38)$$

Если h_m^- – аффинное отображение (3.35), то по теореме 3.2 можем записать $h_m^- a(0, i) = a^-(m, i)$, $h_m^- a^-(0, i) = a(m, i)$, а значит, принимая во внимание равенства (4.38), перенормировки $R_m(i)$, $R_m^-(i)$ и аффинные отображения h_m^- для нечетных m связаны соотношениями

$$h_m^- a(0, i) = a(0, R_m(i)), \quad h_m^- a^-(0, i) = a^-(0, R_m^-(i)). \quad (4.39)$$

Поскольку согласно определению (3.35) аффинные отображения h_m^- имеют отрицательные коэффициенты сжатия, то соотношения (4.39) указывают на еще один новый класс свойств самоподобия последовательностей O_0 и O_0^- в дополнение к отмеченным в (4.5) и (4.10) свойствам.

Сначала рассмотрим случай $m = 1$.

ЛЕММА 4.2. Для перенормировки R_1 , (4.38), определяемой из соотношения $a^-(1, i) = a(0, R_1(i))$ для $i = 0, 1, 2, \dots$, между элементами последовательностей O_0 и O_1^- , (4.36) и (4.37), выполняется формула $R_1(i) = T_1(i)$, где $T_1(i) = [i\tau]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим для функции $T_1(i) = [i\tau] = [i\tau_1] + i$, где $\tau_1 = \langle \tau \rangle$, ее разностную функцию $\Delta T_1(i) = T_1(i+1) - T_1(i) = [i\tau_1 + \tau_1] - [i\tau_1] + 1$. Из этого равенства для $\Delta T_1(i)$ вытекает представление

$$\Delta T_1(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle i\tau \rangle < \langle \tau \rangle, \\ 2, & \text{если } \langle i\tau \rangle \geq \langle \tau \rangle, \end{cases} \quad (4.40)$$

и в силу (4.31) получается еще одно представление

$$\Delta T_1(i) = \begin{cases} 2, & \text{если } \langle -i\tau \rangle \leq \langle \tau \rangle, \\ 1, & \text{если } \langle -i\tau \rangle > \langle \tau \rangle, \end{cases} \quad (4.41)$$

необходимое нам для доказательства. По определению (4.6) элементы $a^-(0, i)$ из последовательности O_0^- имеют вид $a^-(0, i) = -i\tau \pmod{|I_0^-|}$, поэтому из (4.41) и разбиения $\text{Til}^+(\varepsilon_0)$, (4.33), выводим

$$\Delta T_1(i) = \begin{cases} 2, & \text{если } a^-(0, i) \in E_0^1, \\ 1, & \text{если } a^-(0, i) \in G_0^1. \end{cases} \quad (4.42)$$

Теперь, чтобы доказать аналогичную формулу для элементов $a^-(1, i)$ последовательности O_1^- , (4.37), воспользуемся разбиением Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_1) = G_1^1 \oplus G_0^1 \oplus E_0^1$, получаемым с помощью предложения 2.2. Сдвиг S переставляет полуинтервалы из $\text{Til}(\varepsilon_1)$ следующим образом:

$$S: \quad G_0^1 \rightarrow G_1^1 \rightarrow G_2^1, \quad E_0^1 \rightarrow E_1^1, \quad (4.43)$$

и, тем самым, переводит разбиение $I_1 = G_0^1 \oplus E_0^1$ в разбиение $I_1 = E_1^1 \oplus G_1^1$. Обозначим $w_1(i)$ число шагов, через которое точка $a^-(1, i)$ из O_1^- , попавшая в полуинтервал I_1^- , вновь в него возвращается. Используя цепочки (4.43), приходим к формуле

$$w_1(i) = \begin{cases} 2, & \text{если } a^-(1, i) \in G_0^1, \\ 1, & \text{если } a^-(1, i) \in E_0^1. \end{cases} \quad (4.44)$$

Связь между последовательностями O_0^- и O_1^- устанавливается с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} O_0^- & \ni & a^-(0, i) \xrightarrow{S^-} a^-(0, i+1) \in O_0^- \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_1 \\ O_1^- & \ni & a^-(1, i) \xrightarrow{S_1} a^-(1, i+1) \in O_1^- \end{array} \quad (4.45)$$

Здесь S^- – сдвиг $x \mapsto x - \tau \pmod{|I_0^-|}$ единичного полуинтервала $I_0^- = (0, 1]$, S_1 – ограничение сдвига S на полуинтервал I_1^- и h_1 – аффинное отображение (3.24), задающее соотношения

$$\begin{aligned} a^-(0, i) \in E_1^0 &\iff a^-(1, i) \in G_0^1, \\ a^-(0, i) \in G_1^0 &\iff a^-(1, i) \in E_0^1. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Сопоставляя формулы (4.42) и (4.44), из (4.45) и (4.46) выводим равенство $w_1(i) = \Delta T_1(i)$. С помощью этого равенства по схеме, примененной при доказательстве леммы 4.1, получаем требуемый результат.

Переходим к перенормировке $a^-(3, i) = a(0, R_3(i))$ степени $m = 3$. Следуя рассуждению (4.25), получаем последовательно равенства

$$\begin{aligned} a(0, R_3(i)) &= h_3^- a(0, i) = h_2(h_1^- a(0, i)) \\ &= h_1^- a(0, R_2^-(i)) = a(0, R_1(R_2^-(i))). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Из (4.47) и однозначности определения перенормировки $R_3(i)$ вытекает формула

$$R_3(i) = R_1(R_2^-(i)) \quad (4.48)$$

с композиционным порядком $i = i^{-(3)} \xrightarrow{R_2^-} i^{-(1)} \xrightarrow{R_1} i^{(0)}$. Из (4.48) индукцией по $m = 1, 3, 5, \dots$ доказывается следующая

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть дана последовательность $O_0 = \text{Orb}(0, \tau, I_0)$ из элементов $a(0, i) = i\tau \pmod{1}$, а также последовательность $O_m^- = O_0 \cap I_m^-$ с нечетным m , состоящая из элементов $a^-(m, i) \in O_0$, попадающих в полуинтервал $I_m^- = (1 - \tau^{-m}, 1]$ и пронумерованных в порядке их возвращения в I_m^- . Тогда существует перенормировка R_m , обладающая свойством $a^-(m, i) = a(0, R_m(i))$ для $i = 0, 1, 2, \dots$, и для нее выполняется формула

$$R_m(i) = R_1(R_{m-1}^-(i)), \quad (4.49)$$

где $R_1(i) = [i\tau]$ и $R_{m-1}^-(i) = R_2^{-(m-1)/2}(i)$ обозначает $((m-1)/2)$ -кратную композицию перенормировки $R_2^-(i) = [i\tau^2]$. При этом в формуле (4.49) сначала действует перенормировка R_{m-1} , а затем R_1 .

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $T_m(i) = T_1(T_{m-1}^-(i)) = T_1(T_2^{-(m-1)/2}(i))$ – абстрактная функция, отвечающая перенормировке $R_m(i)$, (4.49). Тогда ее разностная функция $\Delta T_m(i) = T_m(i+1) - T_m(i)$ удовлетворяет равенствам

$$\Delta T_m(i) = \begin{cases} F_{m+2}, & \text{если } \langle -i\tau \rangle \leq \langle -\tau \rangle, \\ F_{m+1}, & \text{если } \langle -i\tau \rangle > \langle -\tau \rangle. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству следствия 4.1, в котором использованы теоремы 2.1 и 2.2 для нечетных m .

Осталось рассмотреть перенормировки нечетной степени m для последовательности $O_0^- = \text{Orb}(1, -\tau, I_0^-)$. В данном случае выбираем функцию $T_1^- = [i\tau] + 1$. Поскольку для ее разностной функции выполняется равенство $\Delta T_1^-(i) = \Delta T_1(i)$, то в силу формулы (4.40) записываем

$$\Delta T_1^-(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle i\tau \rangle < \langle -\tau \rangle, \\ 2, & \text{если } \langle i\tau \rangle \geq \langle -\tau \rangle. \end{cases}$$

Сдвиг S переводит разбиение $\text{Til}(\varepsilon_0) = G_0^0 \oplus E_0^0$, (4.14), в разбиение $\text{Til}^+(\varepsilon_0) = E_1^0 \oplus G_1^0$. Поэтому в терминах элементов $a(0, i)$ последовательности O_0 равенства принимают вид

$$\Delta T_1^-(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } a(0, i) \in G_0^0, \\ 2, & \text{если } a(0, i) \in E_0^0. \end{cases} \quad (4.50)$$

Используя (4.50), аналогично лемме 4.2 для перенормировки $a(1, i) = a^-(0, R_1^-(i))$ получаем явную формулу $R_1^-(i) = T_1^-(i)$. Переход к последующей перенормировке $a(3, i) = a^-(0, R_3^-(i))$ производится по схеме из п. 4.2, что приводит к следующим утверждениям.

ТЕОРЕМА 4.4. *Для последовательности $O_0^- = \text{Orb}(1, -\tau, I_0^-)$, (4.6), перенормировка $a(m, i) = a^-(0, R_m^-(i))$, (4.38), нечетной степени m осуществляется по формуле*

$$R_m^-(i) = R_1^-(R_{m-1}(i)) = R_1^-(R_2^{(m-1)/2}(i)), \quad (4.51)$$

где $R_1^-(i) = [i\tau] + 1$, $R_2(i) = [i\tau^2] + 1$ и первой действует перенормировка R_{m-1} , а второй – перенормировка R_1^- .

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Если $T_m^-(i) = T_1^-(T_{m-1}(i)) = T_1^-(T_2^{(m-1)/2}(i))$ – абстрактная функция, отвечающая перенормировке $R_m^-(i)$, (4.51), то ее разностная функция вычисляется по формуле*

$$\Delta T_m^-(i) = \begin{cases} F_{m+1}, & \text{если } \langle i\tau \rangle < \langle -\tau \rangle, \\ F_{m+2}, & \text{если } \langle i\tau \rangle \geq \langle -\tau \rangle. \end{cases}$$

§ 5. Обратные перенормировки

Для теории чисел очень важной является функция

$$N_m(i) = \#\{n: 0 \leq n \leq i, \langle n\tau \rangle \in I_m\}$$

– число членов последовательности дробных долей $\langle n\tau \rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots, i$, попавших в полуинтервал I_m . Эта функция тесно связана с перенормировкой $R_m(i)$ соотношением

$$N_m(R_m(i)) = i + 1.$$

Представляет интерес задача получения явной формулы для функции $N_m(i)$. Технически более удобно использовать функцию $R_{-m}(i)$, которая связана с числом попаданий точек в интервал следующим образом:

$$R_{-m}(i) = \begin{cases} \text{не определена,} & \text{если } N_m(i) = 0, \\ N_m(i) - 1, & \text{если } N_m(i) > 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Для функций $R_{-m}(i)$ справедливо соотношение

$$R_{-m}(R_m(i)) = i. \quad (5.2)$$

Функции $R_{-m}(i)$ мы будем называть *обратными перенормировками степени m* . Удобство использования функций $R_{-m}(i)$ по сравнению с $N_m(i)$ связано с тем, что для них справедливы соотношения композиции, связывающие обратные перенормировки для различных степеней m (теорема 5.1).

В п. 5.1 дается общее определение обратных перенормировок, а также находятся явные формулы для обратных перенормировок в некоторых простейших случаях. В пп. 5.2, 5.3 находятся явные формулы для обратных перенормировок $R_{-1}(i)$ и $R_{-2}(i)$ степеней 1 и 2. В п. 5.4 доказывается явная формула для перенормировки $R_{-m}(i)$ с произвольным i .

5.1. Определение обратных перенормировок. Пусть дана некоторая последовательность $O = \{a(i)\}_{i=0}^{\infty}$ из полуинтервала $I_0 = [0, 1]$ или $I_0^- = (0, 1]$, состоящая из элементов $a(i) \neq a(j)$ для $i \neq j$. Фиксируем некоторый полуинтервал I из $[0, 1]$ и определим последовательность $O_I = O \cap I = \{a'(i)\}_{i=0}^{\infty}$ – ограничение последовательности O на полуинтервал I . Последовательность O_I состоит из тех и только тех элементов последовательности O , которые попадают в интервал I . Нумерация элементов последовательности O индуцирует нумерацию последовательности O_I . Точнее, $a'(k) = a(i_k)$, где $i_0 = \min\{i: a_i \in I\}$ и $i_{k+1} = \min\{i > i_k: a_i \in I\}$. Назовем *обратной перенормировкой* для производной по I сюръективное отображение, или эпиморфизм,

$$R_- : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

где $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, обладающее свойством: если $i' = R_-(i)$ для какого-то i из $\mathbb{N}$, то $a'(i') = a(j)$ для некоторого $0 \leq j \leq i$, $a'(i' + 1) \neq a(j)$, $0 \leq j \leq i$. Из определения R_- вытекает, что среди элементов $a(0), a(1), \dots, a(i)$ последовательности O ровно $R_-(i) + 1$ элементов попали в полуинтервал I .

ЛЕММА 5.1. Для обратной перенормировки R_- , (5.3), справедливы следующие явные формулы.

1. Если для некоторого α из интервала $0 < \alpha < 1$ последовательность O имеет вид $\text{Orb}(0, \alpha, I_0)$, (3.4), и $I = [0, \alpha)$, то справедлива формула

$$R_-(i) = [i\alpha] \quad \text{для} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

2. Если $O = \text{Orb}(1, \alpha, I_0^-)$ и $I = (0, \alpha]$, то

$$R_-(i) = \begin{cases} \text{не существует} & \text{для} \quad i = 0, \\ [i\alpha] & \text{для} \quad i \geq 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

3. Если $O = \text{Orb}(1, \alpha, I_0^-)$ и $I = (1 - \alpha, 1]$, то

$$R_-(i) = [(i + 1)\alpha] \quad \text{для} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (3.4) $O = \text{Orb}(0, \alpha, I_0)$ состоит из элементов $a(i) = i\alpha \pmod{1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, и для доказательства формулы (5.4) достаточно рассмотреть в (i, j) -плоскости график функции $j = \alpha i$, $i \geq 0$.

Во втором случае последовательность $O = \text{Orb}(1, \alpha, I_0^-)$ состоит из элементов $a(i) = 1 + i\alpha \pmod{I_0^-}$ и, таким образом, $a(0) = 1$. Данная последовательность O отличается от предыдущей только нулевым элементом: в первом случае $a(0) = 0$, что и учтено в формуле (5.5).

Третий случай сводится ко второму, если рассмотреть расширенную последовательность $O' = O \cup \{a(-1)\}$, где $a(-1) = 1 - \alpha$, и в формуле (5.6) учесть сдвиг на $-\alpha$.

5.2. Случай $m = 2$. Вычислим обратные перенормировки для $R_2(i)$, (4.11), и $R_2^-(i)$, (4.34). Исходными здесь являются последовательности (4.1) и (4.6):

$$O_0 = \text{Orb}(0, \tau, I_0), \quad O_0^- = \text{Orb}(1, -\tau, I_0^-), \quad (5.7)$$

а также их ограничения $O_2 = \text{Orb}(1 - \tau^{-2}, \tau^{-3}, I_2)$, $O_2^- = \text{Orb}(1, -\tau^{-3}, I_2^-)$ на полуинтервалы $I_2 = [1 - \tau^{-2}, 1)$ и $I_2^- = (1 - \tau^{-2}, 1]$. Обратные перенормировки (5.3) удобно обозначить $R_{-2}(i)$ для последовательностей O_0 , $O_2 = O_0 \cap I_2$, (3.11), и $R_{-2}^-(i)$ – для последовательностей O_0^- , $O_2^- = O_0^- \cap I_2^-$, (3.12).

ЛЕММА 5.2. *Справедливы равенства*

$$R_{-2}(i) = \begin{cases} \text{не существует} & \text{для } i = 0, \\ [i\tau^{-2}] & \text{для } i \geq 1, \end{cases} \quad (5.8)$$

$$R_{-2}^-(i) = [(i+1)\tau^{-2}] \quad \text{для } i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $O_0 \Rightarrow O_2$ сводится ко второму случаю леммы 5.1, если воспользоваться инверсией $I(x) = 1 - x$ единичного отрезка $[0, 1]$, рассмотреть последовательности $O = I(O_0)$, $O_I = I(O_2)$, полуинтервал $I = I(I_2) = (0, \tau^{-2}]$ и выбрать $\alpha = 1 - \tau = \tau^{-2}$.

В случае $O_0^- \Rightarrow O_2^-$ выбираем $\alpha = \langle -\tau \rangle = \tau^{-2}$ и применяем формулу (5.6).

5.3. Случай $m = 1$. Согласно (3.26), (3.27) последовательности O_0 , O_0^- , (5.7), также порождают последовательности первого порядка $O_0 \cap I_1^- = O_1^-$ и $O_0^- \cap I_1 = O_1$, равные последовательностям (4.36) и (4.37):

$$O_1 = \text{Orb}(1 - \tau^{-1}, \tau^{-2}, I_1), \quad O_1^- = \text{Orb}(1, -\tau^{-2}, I_1^-), \quad (5.10)$$

где $I_1 = [1 - \tau^{-1}, 1]$ и $I_1^- = (1 - \tau^{-1}, 1]$. По аналогии с п. 5.2 обозначим $R_{-1}(i)$ и $R_{-1}^-(i)$ обратные перенормировки для последовательностей O_0 , O_1^- и O_0^- , O_1 соответственно.

ЛЕММА 5.3. *Справедливы равенства*

$$R_{-1}(i) = [(i+1)\tau^{-1}] \quad \text{для } i = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.11)$$

$$R_{-1}^-(i) = \begin{cases} \text{не существует} & \text{для } i = 0, \\ [i\tau^{-1}] & \text{для } i \geq 1. \end{cases} \quad (5.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $O_0 \Rightarrow O_1^-$ сводится к третьему случаю леммы 5.1 с $\alpha = \langle \tau \rangle = \tau^{-1}$. В случае $O_0^- \Rightarrow O_1$ нужно снова воспользоваться инверсией $I(x)$ и выбрать $\alpha = \tau^{-1}$.

5.4. Явные формулы для обратных перенормировок произвольной степени. Используя самоподобия из теорем 3.1 и 3.2, можно для последовательностей O_m , O_m^- произвольного порядка m их обратные перенормировки разложить в композицию перенормировок R_{-1} , R_{-1}^- , (5.11), (5.12), первой степени и перенормировок R_{-2} , R_{-2}^- , (5.8), (5.9), второй степени.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть O_0 , O_0^- – последовательности (5.7) и O_m , O_m^- – последовательности, определяемые равенствами (4.2), (4.7) для четных m и равенствами (4.36), (4.37) для нечетных m . Тогда обратные перенормировки R_{-m} , R_{-m}^- вычисляются по следующим формулам.

1. Случай $O_0 \Rightarrow O_m$ для четных m :

$$R_{-m}(i) = \begin{cases} \text{не существует} & \text{для } i < F_m, \\ R_{-2}^{(m/2)}(i) & \text{для } i \geq F_m, \end{cases} \quad (5.13)$$

где $R_{-2}^{(m/2)} = R_{-2}(R_{-2} \cdots (R_{-2}(i)))$ – композиция обратных перенормировок R_{-2} , (5.8), кратности $m/2$. Кроме того, выполняются равенства

$$R_{-m}(i) = 0, \quad 0 \leq i < F_{m+2}. \quad (5.14)$$

2. Случай $O_0^- \Rightarrow O_m^-$ для четных m :

$$R_{-m}^-(i) = R_{-2}^{-(m/2)}(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.15)$$

где $R_{-2}^{-(m/2)}(i)$ обозначает композицию обратных перенормировок R_{-2}^- , (5.9), кратности $m/2$, и при этом

$$R_{-m}^-(i) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq i < F_{m+1}, \\ 1 & \text{для } i = F_{m+1}. \end{cases} \quad (5.16)$$

3. Случай $O_0 \Rightarrow O_m^-$ для нечетных m :

$$R_{-m}(i) = R_{-2}^{-(m-1)/2}(R_{-1}(i)), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.17)$$

при этом первой выполняется обратная перенормировка R_{-1} , (5.11), а затем $R_{-2}^{-(m-1)/2}$ – композиция обратных перенормировок R_{-2}^- , (5.9), кратности $(m-1)/2$, и

$$R_{-m}(i) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq i < F_{m+1}, \\ 1 & \text{для } i = F_{m+1}. \end{cases} \quad (5.18)$$

4. Случай $O_0^- \Rightarrow O_m$ для нечетных m :

$$R_{-m}^-(i) = \begin{cases} \text{не существует} & \text{для } 0 \leq i < F_m, \\ R_{-2}^{-(m-1)/2}(R_{-1}^-(i)) & \text{для } i \geq F_m, \end{cases} \quad (5.19)$$

при этом первой выполняется обратная перенормировка R_{-1}^- , (5.12), а второй $R_{-2}^{-(m-1)/2}$ – композиция обратных перенормировок R_{-2}^- , (5.8), кратности $(m-1)/2$, и

$$R_{-m}^-(i) = 0, \quad 0 \leq i < F_{m+2}. \quad (5.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном контексте появление в формулах (5.13), (5.15), (5.17) и (5.19) композиций обратных перенормировок равнозначно согласно теоремам 3.1 и 3.2 существованию подобия между последовательностями O_0 , O_0^- и O_m , O_m^- . Подобия были использованы в п. 4.2 при вычислении прямых перенормировок R_m , R_m^- . Рассуждения, приведенные в п. 4.2, остаются в силе и в рассматриваемом случае. Необходимое изменение состоит в изменении на обратный порядок композиций перенормировок различных степеней m . В нашем случае порядок выбирается возрастающим:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow m && \text{для четных } m, \\ 0 &\rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow m && \text{для нечетных } m. \end{aligned}$$

После того, как установлен общий вид обратной перенормировки R_{-m} или R_{-m}^- , можно перейти к рассмотрению вопроса о первом попадании элементов $a(0, i)$ из последовательности O_0 или $a^-(0, i)$ из O_0^- в соответствующий полуинтервал I_m или I_m^- . Данная задача решается с помощью теорем 2.1 и 2.2.

Остановимся на случае $O_0 \Rightarrow O_m$ для четных m . Согласно (3.2) полуинтервал $I_m = G_0^m \oplus E_0^m$ есть сумма полуинтервалов $G_0^m = [\langle F_m \tau \rangle, \langle -F_{m+1} \tau \rangle)$, $E_0^m = [\langle -F_{m-1} \tau \rangle, 1)$. По теореме 2.1 среди полуинтервалов G_k^m , E_k^m , $k = 0, 1, 2, \dots$, первым коснется I_m полуинтервал $E_{F_m}^m = [\langle -F_{m-1} \tau \rangle, \langle F_m \tau \rangle)$, (2.9).

Отсюда вытекает первое равенство (5.13). Следующим будет номер $k = F_{m+2}$, когда полуинтервал I_m перестроится на разбиение $I_m = E_{F_{m+2}}^m \oplus G_{F_{m+1}}^m$. Таким образом, начальными элементами производной $O_m = d^m O_0$ будут элементы $a(m, 0) = a(0, F_m)$, $a(m, 1) = a(0, F_{m+2})$, и, следовательно, выполняется формула (5.14).

§ 6. Приложения к теории чисел

6.1. Число попаданий точек в интервал. Обратные перенормировки, рассмотренные в § 5, для случая, скажем, $O_0 \Rightarrow O_m$, когда степень m четная, можно применить к решению задачи о числе

$$N_m(i) = \#\{j: \langle j\tau \rangle \in I_m, j = 0, 1, 2, \dots, i\} \quad (6.1)$$

попаданий точек последовательности $\langle j\tau \rangle$, (3.5), в полуинтервалы I_m вида $[\langle F_m \tau \rangle, 1) = [1 - \tau^{-m}, 1)$, (3.6), для $m = 2, 4, 6, \dots$. Вычисление $N_m(i)$ основано на формуле

$$N_m(i) = R_{-m}(i) + 1, \quad (6.2)$$

где $R_{-m}(i)$ – обратная перенормировка (5.13). В следующем предложении, непосредственно вытекающем из теоремы 5.1 и формул вида (6.2), вместо абстрактных описаний (6.1) воспользуемся для числа попаданий $N_m(i)$ более явным описанием в терминах дробных долей и обычных неравенств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Выполняются следующие точные формулы для числа попаданий $N_m(i)$ точек последовательности O_0 , (3.5), в полуинтервалы I_m и точек из O_0^- , (3.10), в полуинтервалы I_m^- .*

1. Для четного m

$$N_m(i) = \#\{j: \langle j\tau \rangle \geq 1 - \tau^{-m}, j = 0, 1, \dots, i\} = \begin{cases} 0, & \text{если } i < F_m, \\ R_{-m}(i) + 1, & \text{если } i \geq F_m, \end{cases} \quad (6.3)$$

где обратная перенормировка $R_{-m}(i)$ вычисляется по формуле (5.13);

$$N_m^-(i) = \#\{j: \langle -j\tau \rangle = 0 \text{ или } \langle -j\tau \rangle > 1 - \tau^{-m}, j = 0, 1, 2, \dots, i\} = R_{-m}^-(i) + 1, \quad (6.4)$$

при этом $R_{-m}^-(i)$ – обратная перенормировка (5.15).

2. Для нечетного m

$$N_m(i) = \#\{j: \langle j\tau \rangle = 0 \text{ или } \langle j\tau \rangle > 1 - \tau^{-m}, j = 0, 1, 2, \dots, i\} = R_{-m}(i) + 1, \quad (6.5)$$

где $R_{-m}(i)$ определена формулой (5.17);

$$N_m^-(i) = \#\{j: \langle -j\tau \rangle \geq 1 - \tau^{-m}, j = 0, 1, \dots, i\} = \begin{cases} 0, & \text{если } i < F_m, \\ R_{-m}^-(i) + 1, & \text{если } i \geq F_m, \end{cases} \quad (6.6)$$

при этом $R_{-m}^-(i)$ – обратная перенормировка (5.19).

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Для четных m справедлива формула*

$$N_m(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i < F_m, \\ [\dots [i\tau^{-2}]\tau^{-2}] \dots \tau^{-2} + 1, & \text{если } i \geq F_m. \end{cases} \quad (6.7)$$

В правой части записана $(m/2)$ -кратная композиция функции $i \mapsto [i\tau^{-2}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение получается подстановкой в (6.3) явных формул для обратных перенормировок (5.9) и (5.13).

Если поставить задачу поиска простой аппроксимации для числа попаданий $N_m(i)$ или $N_m^-(i)$, то главным членом естественно выбрать $i\tau^{-m}$. Поскольку $N_m(i)$ и $N_m^-(i)$ суть целые числа, то $i\tau^{-m}$ заменится на целую часть $[i\tau^{-m}]$, и возникает вопрос об остаточных членах $r_m(i)$ и $r_m^-(i)$ в формулах

$$N_m(i) = [i\tau^{-m}] + r_m(i), \quad N_m^-(i) = [i\tau^{-m}] + r_m^-(i). \quad (6.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. При четных m остатки $r_m(i)$ и $r_m^-(i)$ могут принимать только значения 0 или 1 при всех $i = 0, 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из целочисленности всех членов в (6.8), формулы (6.7) и из элементарных неравенств $\alpha - 1 \leq [\alpha] < \alpha$.

6.2. Явные формулы перенормировок. В § 4 для функций $R_m^\pm(i)$ были доказаны формулы представления их в виде композиций перенормировок уровней $m = 1, 2$. Теперь покажем, как функции $R_m^\pm(i)$ можно записать, используя числа Фибоначчи F_m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть $R_m(i)$ и $R_m^-(i)$ – перенормировки (4.26) и (4.35) для четных степеней m и перенормировки (4.49) и (4.51) для нечетных степеней m . Тогда для этих перенормировок имеют место следующие явные формулы:

1) для четных m

$$R_m(i) = iF_{m+1} + ([i\tau^{-1}] + 1)F_m, \quad (6.9)$$

$$R_m^-(i) = iF_{m+1} + [i\tau^{-1}]F_m; \quad (6.10)$$

2) для нечетных m

$$R_m(i) = iF_{m+1} + [i\tau^{-1}]F_m, \quad (6.11)$$

$$R_m^-(i) = iF_{m+1} + ([i\tau^{-1}] + 1)F_m. \quad (6.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Просуммируем разностную функцию $\Delta R_m(i) = \Delta T_m(i)$ из п. 4.1 четной степени m . В силу формулы (4.27) получаем равенство

$$\sum_{0 \leq j \leq i-1} \Delta R_m(j) = (i - N_1^+(i-1))F_m + N_1^+(i-1)F_{m+2}, \quad (6.13)$$

где $N_1^+(i) = \#\{j: \langle j\tau \rangle > \langle -\tau \rangle, j = 0, 1, \dots, i\}$. Поскольку левая часть в (6.13) равна $R_m(i) - R_m(0)$ и при этом согласно теореме 2.1 имеем $R_m(0) = F_m$ и $N_1^+(i) = N_1(i) - 1$, где $N_1(i)$ – функция (6.5), то равенство (6.13) можно переписать в следующем виде:

$$R_m(i) = iF_{m+1} + N_1(i-1)F_m. \quad (6.14)$$

Данная формула выполняется для всех $m = 0, 2, 4, \dots$ и $i = 0, 1, 2, \dots$, из нее для перенормировок $R_m(i)$, (4.26), в частности, вытекает сравнение

$$R_m(i) \equiv iF_{m-1} \pmod{F_m}. \quad (6.15)$$

Для функции $N_1(i)$ в предложении 6.1 была доказана формула $N_1(i) = R_{-1}(i) + 1 = [(i+1)\tau^{-1}] + 1$, где $R_{-1}(i)$ – обратная перенормировка (5.11). Подставляя $N_1(i-1)$ в равенство (6.14), приходим к явной формуле для перенормировок $R_m(i)$ четной степени m . Оставшиеся перенормировки рассматриваются аналогично.

6.3. Последовательность Штурма. Во всех перенормировках $R_m(i)$, $R_m^-(i)$ важную роль играет неравенство $\langle i\tau \rangle < \langle -\tau \rangle$. Рассмотрим последовательность Штурма $T = \{\varepsilon(i)\}_{i=1}^\infty$, состоящую из элементов

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle i\tau \rangle < 2 - \tau, \\ 1, & \text{если } \langle i\tau \rangle \geq 2 - \tau. \end{cases} \quad (6.16)$$

В п. 4.2 последовательность T появлялась как разностная функция $\Delta T_2(i)$ для функции $T_2(i) = [i\tau^2] + 1$. Учитывая уравнение (4.13), приходим к еще одному эквивалентному определению элементов (6.16):

$$\varepsilon(i) = [(i+1)\tau_1] - [i\tau_1]. \quad (6.17)$$

Здесь τ_1 обозначает дробную долю $\langle \tau \rangle$. Определения (6.16), (6.17) можно найти, например, в [8].

Определим конечные последовательности $T(-1) = \{1\}$, $T^+(0) = \{1, 0\}$,

$$T(m) = T(m-1) \oplus T(m-2), \quad (6.18)$$

где сложение последовательностей $X = \{\varepsilon'(1), \dots, \varepsilon'(k')\}$, $Y = \{\varepsilon''(1), \dots, \varepsilon''(k'')\}$ осуществляется по правилу прикладывания:

$$X \oplus Y = \{\varepsilon'(1), \dots, \varepsilon'(k'), \varepsilon''(1), \dots, \varepsilon''(k'')\},$$

т.е. $X \oplus Y$ есть последовательность, в которой сначала записаны элементы последовательности X с сохранением порядка, а затем элементы последовательности Y также с сохранением их порядка. Последовательности $T(m)$ при малых m имеют вид

$$\begin{aligned} T(1) &= \{1, 0, 1\}, \\ T(2) &= \{1, 0, 1, 1, 0\}, \\ T(3) &= \{1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1\} \end{aligned}$$

и т.д. Длина последовательности $T(m)$ равна F_{m+3} .

В работе [8] доказана следующая

ЛЕММА 6.1. *Для любого $m = -1, 0, 1, 2, \dots$ последовательность первых F_{m+3} членов последовательности T совпадают с последовательностью $T(m)$.*

Приведем новое доказательство этого результата, основанное на использовании разбиений Фибоначчи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начальных $m = -1, 0, 1, 2$ утверждение леммы проверяется непосредственно. Докажем при $m \geq 3$, что утверждение леммы верно для последовательности $T(m) = T(m-1) \oplus T(m-2)$, если оно верно для $T(m-1)$ и $T(m-2)$. Воспользуемся разбиением единичного полуинтервала

$I_0 = [0, 1) = G_0^0 \oplus E_0^0$, где $G_0^0 = [0, \langle -\tau \rangle)$, $E_0^0 = [\langle -\tau \rangle, 1)$. Согласно формуле (6.16) значения элементов $\varepsilon(i)$, равные 0 или 1, из последовательности $T(m-2)$ определяются включениями

$$i\tau \pmod{1} \in G_0^0 \quad \text{или} \quad i\tau \pmod{1} \in E_0^0, \quad 1 \leq i \leq F_{m+1}. \quad (6.19)$$

Далее нам потребуются два факта о поведении функции расстояний до ближайших целых $\|j\tau\|$:

$$\|F_m\tau\| > \|F_{m+1}\tau\|, \quad m \geq 2, \quad (6.20)$$

$$\min_{1 \leq j \leq F_{m+1}} \{\|j\tau\|\} = \|F_m\tau\|, \quad m \geq 4, \quad (6.21)$$

где последнее неравенство вытекает из теорем 2.1 и 2.2.

Поскольку последовательность $T(m-1)$ содержит F_{m+2} элементов, то в последовательности T следующими за $T(m-1) \subset T$ элементами, количество которых равно F_{m+1} , будут $\varepsilon(i + F_{m+2})$. Их значения определяются полуинтервалами G_0^0 и E_0^0 , в которые попадают соответствующие элементы $(i + F_{m+2})\tau \pmod{1}$, $1 \leq i \leq F_{m+1}$. Проверим, что имеют место следующие соответствия:

$$\begin{aligned} \langle i\tau \rangle \in G_0^0 &\iff \langle (i + F_{m+2})\tau \rangle \in G_0^0, \\ \langle i\tau \rangle \in E_0^0 &\iff \langle (i + F_{m+2})\tau \rangle \in E_0^0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Для этого вычислим минимальное расстояние точек (6.19) до 0 и $\langle -\tau \rangle$:

$$M = \min_{1 \leq j \leq F_{m+1}} \{\|i\tau\|, \|i\tau - \langle -\tau \rangle\|\} = \min_{1 \leq j \leq F_{m+1}+1} \{\|i\tau\|\}.$$

По формуле (6.21) можем записать $M = \|F_{m+1}\tau\|$, где по предположению $m \geq 3$. Тогда из (6.20) получаем неравенство $M > \|F_{m+2}\tau\|$, из которого вытекают соответствия (6.22), а следовательно, и утверждение леммы.

Каждому элементу $\varepsilon(i)$, $i = 1, \dots, F_{m+3}$, последовательности $T(m)$ поставим в соответствие один из двух полуинтервалов по следующему правилу. Для m четных: $t(\varepsilon(i)) = G^m$ или E^m , если $\varepsilon(i) = 0$ или 1, где $G^m = [0, \tau^{-(m+2)})$ и $E^m = [0, \tau^{-(m+1)})$; для m нечетных: $t(\varepsilon(i)) = E^m$ или G^m , если $\varepsilon(i) = 0$ или 1, где $E^m = [0, \tau^{-(m+2)})$ и $G^m = [0, \tau^{-(m+1)})$. Составим из элементарных полуинтервалов G^m и E^m разбиение

$$\text{Til}(T(m)) = t(\varepsilon(1)) \oplus t(\varepsilon(2)) \oplus \dots \oplus t(\varepsilon(F_{m+3})).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Если $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ – разбиение Фибоначчи из теоремы 2.2, то его можно получить, используя формулу $\text{Til}(T(m)) = \text{Til}^+(\varepsilon_m)$ для $m = 1, 2, 3, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из совпадения правил (6.18) и (1.5) образования последовательностей $T(m)$ и разбиений Фибоначчи $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$.

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, “Разбиения Розы и множества ограниченного остатка”, *Записки науч. сем. ПОМИ*, 2005, № 322, 83–106.
2. Н. Н. Мануйлов, “Число попаданий точек последовательности $\{n\tau_g\}$ в полуинтервал”, *Чебышевский сб.*, 5:3 (2004), 72–81.

3. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980; англ. пер.: I. P. Kornfel'd, Ya. G. Sinai, S. V. Fomin, *Ergodic theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **245**, Springer-Verlag, New York, 1982.
4. А. В. Шutow, "О распределении дробных долей", *Чебышевский сб.*, **5:3** (2004), 112–121.
5. P. Arnoux, V. Berthé, H. Ei, S. Ito, "Tilings, quasicrystals, discrete planes, generalized substitutions, and multidimensional continued fractions", *Discrete models: combinatorics, computation, and geometry*, Proceedings of the 1st international conference (DM-CCG) (Paris, 2001), Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AA, Maison Inform. Math. Discrèt. (MIMD), Paris, 2001, 059–078.
6. N. G. de Bruijn, "Sequences of zeros and ones generated by special production rules", *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **43:1** (1981), 27–37.
7. N. G. de Bruijn, "Updown generation of Beatty sequences", *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **51:4** (1989), 385–407.
8. N. P. Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatirics*, Lecture Notes in Math., **1794**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
9. E. Hecke, "Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins", *Hamb. Abh.*, **1** (1921), 54–76.
10. M. Morse, G. A. Hedlund, "Symbolic dynamics. II. Sturmian trajectories", *Amer. J. Math.*, **62:1/4** (1940), 1–42.
11. G. Rauzy, "Des mots en arithmétique", *Avignon conference on language theory and algorithmic complexity* (Avignon, 1983), Publ. Dep. Math. Nouvelle Ser. B, **84-6**, Univ. Claude-Bernard, Lyon, 1984, 103–113.
12. G. Rauzy, "Nombres algébriques et substitutions", *Bull. Soc. Math. France*, **110:2** (1982), 147–178.
13. V. G. Zhuravlev, "One-dimensional Fibonacci tilings and derivatives of two-colour rotations of a circle", *Max-Planck-Institut für Mathematik. Preprint Series*, **59** (2004), 1–43; <http://www.mpim-bonn.mpg.de/preprints/send?bid=2359>.
14. A. V. Shutov, V. G. Zhuravlev, "Derivatives of circle rotations and similarity of orbits", *Max-Planck-Institut für mathematik. Preprint Series*, **62** (2004), 1–11; <http://www.mpim-bonn.mpg.de/preprints/send?bid=2367>.
15. V. G. Zhuravlev, "On parametrization of the infinite Rauzy tiling", *Abstracts of Communications of the International conference "Analytical Methods in Number Theory, Probability Theory and Mathematical Statistics"* (St. Petersburg, Russia, 2005), POMI, St. Petersburg, 2005, 10–11.

В. Г. ЖУРАВЛЕВ (V. G. ZHURAVLEV)
 Владимирский государственный
 педагогический университет
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило в редакцию
 19.11.2002
 10.08.2006