Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Журавлев, Одномерные разбиения Фибоначчи
и индуцированные двухцветные повороты окружности,
Изв. РАН. Сер. матем., 2010, том 74, выпуск 2, 65–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/im621>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:38:23

УДК 511.218

В. Г. Журавлев

Одномерные разбиения Фибоначчи и индуцированные двухцветные повороты окружности

Исследуются двухцветные повороты $S_\varepsilon(a, b)$ единичной окружности, переводящие $x \in [0, 1)$ в точку $\langle x + a\tau \rangle$, если $x \in [0, \varepsilon)$, или в точку $\langle x + b\tau \rangle$, если $x \in [\varepsilon, 1)$. Повороты $S_\varepsilon(a, b)$ зависят от дискретных параметров $a, b \in \mathbb{Z}$ и непрерывного параметра $\varepsilon \in [0, 1)$, при этом в качестве иррациональности τ выбрано золотое сечение $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Доказано, что двухцветные повороты $S_\varepsilon(a, b)$ обладают свойством инвариантности: индуцированные отображения или отображения первого возвращения для $S_\varepsilon(a, b)$ снова являются двухцветными поворотами $S_{\varepsilon'}(a', b')$ с перенормированными параметрами $\varepsilon' \in [0, 1)$, $a', b' \in \mathbb{Z}$. Более того, найдены условия, при которых индуцированные отображения $S_{\varepsilon'}(a', b')$ имеют вид $S_{\varepsilon'}(a, b)$, т. е. двухцветные повороты $S_\varepsilon(a, b)$ изоморфны собственным индуцированным отображениям и, тем самым, обладают еще одним свойством, а именно свойством самоподобия. Описана структура аттрактора $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$ поворотов $S_\varepsilon(a, b)$ и доказано, что их ограничение на аттрактор изоморфно некоторому семейству интегральных изоморфизмов T_ε , получаемых подъемом простого поворота окружности $S(x) = \langle x + \tau \rangle$. Следствием является равномерная распределенность $S_\varepsilon(a, b)$ -орбит на аттракторе $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$. Выявлена связь между мерой аттрактора $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$ и функцией частотного распределения $\nu_\varepsilon(\theta_1, \theta_2)$ точек из $S_\varepsilon(a, b)$ -орбит по интервалам $[\theta_1, \theta_2] \subset [0, 1)$. В некоторых случаях получены явные формулы для частоты $\nu_\varepsilon(\theta_1, \theta_2)$.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: разбиения Фибоначчи, двойные повороты окружности, индуцированные и интегральные отображения, частотное распределение.

Введение

Настоящая статья посвящается моему учителю А. Н. Андрианову.

0.1. Определение двухцветного сдвига. Вместо поворотов единичной окружности $C \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ мы будем рассматривать соответствующие им сдвиги единичного полуинтервала $I = [0, 1)$ по mod 1. Зададим на единичном полуинтервале I двухцветный сдвиг $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$, зависящий от вещественных параметров $\alpha, \beta, \varepsilon$. Не уменьшая общности, будем полагать, что $\varepsilon \in I$. Двухцветный, или двойной, сдвиг $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ определяется следующим образом:

$$S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x) = \begin{cases} \langle x + \alpha \rangle, & \text{если } x \in I_\varepsilon^-, \\ \langle x + \beta \rangle, & \text{если } x \in I_\varepsilon^+, \end{cases} \quad (0.1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00326).

© В. Г. Журавлев, 2010

где единичный полуинтервал I разбит на два полуинтервала $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$, $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$:

$$I = I_\varepsilon^- \cup I_\varepsilon^+, \quad (0.2)$$

и $\langle x \rangle$ обозначает дробную часть числа x . В случае $\alpha = \beta$ параметр ε исключается из определения (0.1) двухцветного сдвига $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ и мы получаем обычный сдвиг полуинтервала I или поворот единичной окружности C на угол α .

В настоящей работе мы намерены подробно рассмотреть двухцветные сдвиги специального вида

$$S_\varepsilon(a, b)(x) = \begin{cases} \langle x + a\tau \rangle, & \text{если } x \in I_\varepsilon^-, \\ \langle x + b\tau \rangle, & \text{если } x \in I_\varepsilon^+, \end{cases} \quad (0.3)$$

имеющие параметры $\alpha = a\tau$, $\beta = b\tau$, где a, b – целые рациональные числа и

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

есть золотое сечение. Оно удовлетворяет квадратному уравнению

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0 \quad (0.4)$$

и является основной единицей вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\tau)$.

Целью настоящей работы является исследование геометрических и динамических свойств двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(a, b)$, обладающих богатой арифметической структурой, допускающей описание в терминах одномерных разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ [1].

0.2. Одномерные разбиения Фибоначчи. Существует несколько способов построения таких разбиений. Чтобы увидеть их связь с двухцветными сдвигами $S_\varepsilon(a, b)$, определим разбиения Фибоначчи с помощью простого сдвига

$$S(x) = \langle x + \tau \rangle. \quad (0.5)$$

Для этого рассмотрим индуцированные отображения $S|X_\varepsilon$ – отображения первого возвращения, определяемые как ограничения сдвига S на некоторые полуинтервалы $X_\varepsilon = [\varepsilon, 1) \subset I$. Поскольку сдвиг τ – иррациональное число, то любая точка $x \in X_\varepsilon$ под действием сдвига S через конечное число шагов отобразится в некоторую точку x' снова из множества X_ε , и тогда по определению полагаем $S|X_\varepsilon(x) = x'$. Потребуем, чтобы таким образом получающееся отображение $S|X_\varepsilon$ было изоморфно исходному сдвигу S или ему *обратному сдвигу* $S^{-1}(x) = \langle x - \tau \rangle$:

$$S|X_\varepsilon \sim S^{\pm 1}, \quad (0.6)$$

т.е. при аффинном отображении X_ε на единичный полуинтервал I индуцированное отображение $S|X_\varepsilon$ становится сдвигом $S^{\pm 1}$. В [1] доказано, что изоморфизм (0.6) возможен только для значений ε , равных одному из счетного множества чисел

$$\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m}, \quad (0.7)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$, при этом показатель степени в $S^{\pm 1}$ определяется четностью числа m .

Полуинтервалы X_ε вида $I^m = [\varepsilon_m, 1)$ называются *собственными*, а числа ε_m – *собственными значениями*. Каждый полуинтервал I^m разбивается на приложенные друг к другу полуинтервалы G_0^m, E_0^m с отношением длин, равным τ ,

$$I^m = G_0^m \oplus E_0^m.$$

Значение собственных полуинтервалов I^m состоит в том, что отвечающие им индуцированные отображения $S^{(m)} = S|I^m$ обладают следующим свойством:

$$S^{(m)} \sim S^{\pm 1}, \quad (0.8)$$

и действие отображения $S^{(m)}$ на собственный полуинтервал I^m сводится к перекладыванию

$$I^m \xrightarrow{S^{(m)}} I^m: G_0^m \oplus E_0^m \rightarrow E_0^m \oplus G_0^m \quad (0.9)$$

полуинтервалов G_0^m и E_0^m .

Разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ единичного полуинтервала I уровня m получаются с помощью сдвига S следующим образом [1]:

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = \bigsqcup_j S^j(G_0^m) \sqcup \bigsqcup_i S^i(E_0^m), \quad (0.10)$$

где $S^k = \underbrace{S \cdots S}_k$ – k -кратная композиция. В разбиении (0.10) имеем $0 \leq j < F_{m+1}$, $0 \leq i < F_{m+2}$, если уровень m четный, и $0 \leq j < F_{m+2}$, $0 \leq i < F_{m+1}$ в случае нечетного m . Здесь F_n – числа Фибоначчи, определяемые рекуррентным соотношением

$$F_{m+2} = F_{m+1} + F_m \quad (0.11)$$

с начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$. Свойство инвариантности разбиений Фибоначчи

$$S(\text{Til}(\varepsilon_m)) = \text{Til}^+(\varepsilon_m) \quad (0.12)$$

является основным. В правой части (0.12) выписано *двойственное разбиение* $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$, получающееся из разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ перекладыванием двух его крайних правых базисных полуинтервалов G_0^m и E_0^m . Равенство (0.12) означает, что каждый полуинтервал из разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ сдвигом S переводится снова в полуинтервал из $\text{Til}(\varepsilon_m)$, за исключением двух полуинтервалов G_j^m, E_i^m из разбиения (0.10) с максимальными индексами j, i . Из инвариантности (0.12) непосредственно вытекает изоморфизм (0.8) для индуцированных отображений $S^{(m)}$.

Исследовать динамику двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(a, b)$ по сути означает, что необходимо разобраться, как изменяются свойства инвариантности (0.12) разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$, если простой сдвиг S заменить двухцветным сдвигом $S_\varepsilon(a, b)$.

0.3. Индуцированные двухцветные сдвиги. Нас будут интересовать индуцированные отображения для двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$, представляющие собой двойные ограничения следующего вида:

$$S_\varepsilon(a, b)|X \times \mathcal{E}. \quad (0.13)$$

Здесь X – подмножество единичного полуинтервала $I = [0, 1]$, на котором действует индуцированное отображение (0.13), а $\mathcal{E} \subseteq I$ – допустимая область изменения его параметра ε . При этом выбор области $\mathcal{E}$ в дальнейшем будет согласован с выбором множества X . Таким образом, в более привычном обозначении индуцированные отображения (0.13) – это семейство индуцированных отображений

$$S_\varepsilon(a, b)|X: X \rightarrow X,$$

зависящих от непрерывного параметра $\varepsilon \in \mathcal{E}$.

В настоящей работе для двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(a, b)$ рассматриваются два вида индуцированных отображений (0.13):

- 1) граничные верхние и нижние индуцированные отображения;
- 2) внутренние индуцированные отображения.

Верхнее индуцированное отображение произвольного порядка $m = 0, 1, 2, \dots$ определяется как ограничение

$$S_\varepsilon(a, b)^{(m)} = S_\varepsilon(a, b)|I^m \times I^m \quad (0.14)$$

двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ по области определения x на полуинтервал $I^m = [\varepsilon_m, 1]$, при этом значения параметра ε выбираются также из I^m , где ε_m – собственные значения (0.7). В определение (0.3) сложного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ параметры a и b входят симметрично. Поэтому верхним (0.14) индуцированным отображениям $S_\varepsilon(a, b)^{(m)}$ можно сопоставить двойственные им *нижние индуцированные отображения*

$$S_\varepsilon(a, b)_{(m)} = S_\varepsilon(a, b)|I_m \times I_m,$$

где ограничивающие полуинтервалы $I_m = \text{inv}(I^m) = (0, 1 - \varepsilon_m]$ выбираются симметричными полуинтервалам I^m относительно *инволюции* $\text{inv}: x \mapsto 1 - x$ единичного полуинтервала $I = [0, 1]$.

Внутренние индуцированные отображения для двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ определяются двумя способами. *Локальное* отображение имеет вид

$$S_\varepsilon(a, b)|I^m(\delta) \times J^m, \quad (0.15)$$

где $I^m(\delta) = I^m + \delta \pmod{1}$, $\delta = |E_0^m|$, $J^m = [1 - |G_0^m| - |L^m|, 1 - |G_0^m|]$, если уровень m четный, и $\delta = \varepsilon - (1 - |E_0^m|)$, $J^m = [1 - |E_0^m| - |L^m|, 1 - |E_0^m|]$ в случае нечетного m . Здесь $|X|$ – длина полуинтервала X и L^m – *лакуна* орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$ полуинтервала $I^m(\delta)$ относительно действия сдвига $S_\varepsilon(a, b)$:

$$\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)) = \bigcup_{k=0}^{\infty} S_\varepsilon(a, b)^k(I^m(\delta))$$

(подробности см. в п. 4.1). Глобальное индуцированное отображение для сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ определяется как его двойное ограничение вида

$$S_\varepsilon(a, b)|\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)) \times J^m. \quad (0.16)$$

В теореме 3.1 для верхних индуцированных отображений (0.14) доказано следующее инвариантное свойство. Пусть выполняются условия: двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ имеет целые параметры a, b одного знака; для некоторого индекса $m = 0, 1, 2, \dots$ соседние числа Фибоначчи F_{m+1}, F_{m+2} удовлетворяют сравнениям

$$F_{m+1} \equiv F_{m+2} \equiv F \pmod{a},$$

где $1 \leq F \leq |a|$; пусть $|b| \leq s((|b|F^{-1})_a, m)$ для некоторой явно определяемой функции $s(k, m)$ из п. 3.2 и b' равно наименьшему положительному решению сравнения $xF \equiv |b| \pmod{a}$;

$$I^m \xrightarrow{h_m} I: \varepsilon \mapsto h_m(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_m} \quad (0.17)$$

– перенормировка параметра ε , являющаяся аффинным изоморфизмом полуинтервала I^m и единичного полуинтервала I . Тогда при этих условиях верхнее индуцированное отображение $S_\varepsilon(a, b)^{(m)}$ указанного порядка m снова является двухцветным сдвигом, изоморфным двухцветному сдвигу $S_{\varepsilon_1}(a_1, b_1)$:

$$S_\varepsilon(a, b)^{(m)} \sim S_{\varepsilon_1}(a_1, b_1), \quad (0.18)$$

с новыми параметрами

$$\varepsilon_1 = h_m(\varepsilon), \quad a_1 = (-1)^m a, \quad b_1 = (-1)^m b' \text{sign}(b).$$

Индуцированное отображение $S_\varepsilon(a, b)^{(m)}$ из левой части формулы (0.18) действует на полуинтервале $I^m \subseteq I$ и имеет параметр $\varepsilon \in I^m$, а двухцветный сдвиг $S_{\varepsilon_1}(a_1, b_1)$ действует на всем единичном полуинтервале I . При этом *изоморфизм* $\sim$ двухцветных сдвигов в (0.18) означает их сопряженность

$$S_\varepsilon(a, b)^{(m)} = h_m^{-1} \circ S_{\varepsilon_1}(a_1, b_1) \circ h_m$$

аффинным изоморфизмом (0.17).

Для нижних индуцированных отображений $S_\varepsilon(a, b)_{(m)}$ в теореме 3.2 доказано, что они также обладают инвариантным свойством, симметричным (0.18).

Внутренние индуцированные отображения (0.15), (0.16) для двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(a, b)$ устроены более сложным образом. С их помощью удастся выявить эргодическое ядро, порождающее сдвиги $S_\varepsilon(a, b)$ с параметрами $\varepsilon \in J^m$.

В предложении 4.1 получен следующий результат. Пусть $S_\varepsilon(a, b)$ – двухцветный сдвиг (0.3) с целыми взаимно простыми параметрами $1 \leq b < a$, удовлетворяющими сравнениям

$$F_{m+1} \equiv b \pmod{a}, \quad F_{m+2} \equiv 0 \pmod{a}.$$

Тогда в зависимости от четности уровня m имеет место изоморфизм (см. определение (0.13))

$$S_\varepsilon(a, b)|I^m(\delta) \times J^m \sim S^{\pm 1}, \quad (0.19)$$

где слева выписано индуцированное отображение (0.15), действующее на полуинтервале $I^m(\delta)$ с параметром $\varepsilon \in J^m$, а справа – простой сдвиг (0.5). Как следствие, из соотношения (0.19) вытекает, что индуцированные отображения $S_\varepsilon(a, b)|I^m(\delta) \times J^m$ имеют с точностью до изоморфизма одну и ту же структуру для всех значений параметра ε из полуинтервала J^m . При тех же условиях относительно индуцированного отображения (0.16) в предложении 4.1 доказан еще один изоморфизм

$$S_\varepsilon(a, b)|\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)) \times J^m \sim T_\varepsilon, \quad (0.20)$$

где справа записан интегральный изоморфизм $T_\varepsilon = T(S^{\pm 1}, d_\varepsilon)$, построенный по отображению простого сдвига $S^{\pm 1}$ и некоторой двузначной функции d_ε на единичном полуинтервале I .

0.4. Самоподобие двухцветных сдвигов. Основная причина выбора золотого сечения τ в качестве иррациональности, с помощью которой определяются (см. (0.3)) двухцветные сдвиги $S_\varepsilon(a, b)$, состоит в том, что оно имеет чисто периодическое разложение в цепную дробь:

$$\tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} = [1; \overline{1}]. \quad (0.21)$$

Длина периода этого разложения равна 1, и период состоит из 1, т.е. τ является простейшей квадратичной иррациональностью. Данное обстоятельство позволяет при изучении двухцветных сдвигов исключить, по крайней мере на начальном этапе, влияние на их поведение таких факторов, как предпериод, длина периода и его состав.

Из периодичности разложения τ в цепную дробь (0.21) и инвариантности (0.18) двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(a, b)$ вытекает такое структурное свойство двухцветных сдвигов, как их самоподобие. Поскольку верхние и нижние индуцированные отображения двойственны друг другу, приведем здесь свойства самоподобия только для верхних индуцированных отображений. Для них в следствии 3.1 получен следующий общий результат.

Любой двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ с целыми параметрами a, b одного знака и условием $1 \leq |b| \leq |a|$ обладает свойством *самоподобия*:

$$S_\varepsilon(a, b)^{(m)} \sim S_{\varepsilon'}(a, b). \quad (0.22)$$

Порядок m индуцированного отображения $S_\varepsilon(a, b)^{(m)}$ можно выбрать равным T или $2T$, если период $T = T(a)$ последовательности чисел Фибоначчи $F_n \bmod a$ четный или нечетный соответственно.

Для некоторых значений параметра a удается в явном виде вычислить период $T = T(a)$, и тогда для них представляется возможным конкретизировать только что сформулированное свойство самоподобия (0.22). Так, в следствии 3.2 доказано, что если в качестве параметра a выбрать простое число p с условием $1 \leq b \leq p$, то свойство самоподобия (0.22) принимает следующий вид:

$$S_\varepsilon(p, b)^{(p-1)} \sim S_{\varepsilon'}(p, b) \quad (0.23)$$

для простых чисел $p \equiv 1 \pmod{5}$ или $p \equiv 4 \pmod{5}$,

$$S_\varepsilon(p, b)^{(2(p+1))} \sim S_{\varepsilon'}(p, b)$$

для простых чисел $p \equiv 2 \pmod{5}$ или $p \equiv 3 \pmod{5}$ и

$$S_\varepsilon(p, b)^{(20)} \sim S_{\varepsilon'}(p, b)$$

для $p = 5$.

Особый интерес представляет случай, когда параметр a равен числам Фибоначчи F_m . Если $m \geq 4$, то в следствии 3.3 для верхних индуцированных отображений доказаны следующие свойства самоподобия двухцветных сдвигов:

$$S_\varepsilon(F_m, b)^{(2m)} \sim S_{\varepsilon'}(F_m, b), \quad (0.24)$$

если номер m четный, и

$$S_\varepsilon(F_m, b)^{(4m)} \sim S_{\varepsilon'}(F_m, b)$$

в случае нечетного m . Для $m = 2, 3$ имеем соответственно

$$S_\varepsilon(1, 1)^{(2)} \sim S_{\varepsilon'}(1, 1), \quad (0.25)$$

$$S_\varepsilon(2, 1)^{(6)} \sim S_{\varepsilon'}(2, 1). \quad (0.26)$$

Напомним, что слева в (0.24)–(0.26) выписаны индуцированные двухцветные повороты (0.14). Из (0.25) вытекает формула $S^{(2)} \sim S$ для простого сдвига S , а для $m = 3$ мы получаем первый нетривиальный случай самоподобия двухцветных сдвигов. Чтобы увидеть геометрический смысл самоподобия (0.26), воспользуемся фазовой диаграммой.

Рис. 1. Развертка аттрактора $\text{Att}(2, 1)$

Двухцветные сдвиги $S_\varepsilon(a, b)$ обладают следующим свойством [2]: для любого ε из I последовательность строгих включений

$$I \supset S_\varepsilon(a, b)(I) \supset \cdots \supset S_\varepsilon^k(a, b)(I) \supset \cdots \quad (0.27)$$

является конечной. Это означает существование такой степени $k(a, b, \varepsilon)$, что для всех $k \geq k(a, b, \varepsilon)$ выполняются равенства $S_\varepsilon^k(I) = S_\varepsilon^{k(\varepsilon)}(I)$. Единичный полуинтервал I разбивается на две области:

$$I = \text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) \sqcup \text{Spir}(S_\varepsilon(a, b)),$$

одну из которых $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) = S_\varepsilon^{k(a, b, \varepsilon)}(I)$ будем называть *аттрактором* двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$, а дополнение к нему $\text{Spir}(S_\varepsilon(a, b)) = I \setminus \text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$ – *областью притяжения* аттрактора. Из конечности последовательности включений (0.27) следует, что любая точка x из области притяжения $\text{Spir}(S_\varepsilon(a, b))$ попадает в аттрактор $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$ через конечное число шагов $k \leq k(a, b, \varepsilon)$.

На рис. 1 изображена фазовая диаграмма

$$I \times I = \text{Att}(2, 1) \sqcup \text{Spir}(2, 1) \quad (0.28)$$

двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$. На горизонтальной оси отложены координаты точек x из единичного полуинтервала I , а по вертикальной – значения параметра $\varepsilon \in I$, который определяет разбиение I на полуинтервалы I_ε^- и I_ε^+ . Если на фазовой диаграмме провести горизонтальный отрезок, то часть его, попавшая в темную область, будет состоять из точек аттрактора $\text{Att}(S_\varepsilon(2, 1))$, а другая часть, попавшая в светлую область, – из точек области притяжения аттрактора $\text{Spir}(S_\varepsilon(2, 1))$.

Геометрический смысл самоподобия (0.26) для сложного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$ состоит в том, что ограничение фазовой диаграммы (0.28) на верхний правый квадрат $I^6 \times I^6$ (на рис. 1 он выделен серым цветом) подобно полной фазовой диаграмме (0.28). Из самоподобия следует, что сама фазовая диаграмма (0.28) является фракталом.

Прежде чем перейти к изучению внутренних индуцированных отображений, необходимо заметить, что свойством самоподобия обладают только граничные индуцированные отображения. Причина такого явления состоит в том, что при внутреннем индуцировании двухцветные сдвиги $S_\varepsilon(a, b)$ редуцируются: получаются сдвиги $S_{\varepsilon_1}(a_1, b_1)$ с меньшими параметрами a_1, b_1 .

0.5. Внутренние индуцированные отображения и плато функции частотного распределения. Значение второй формулы из (0.19) проясняет следующее доказанное в теореме 4.1 равенство: $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)) = \text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$, справедливое для всех параметров $\varepsilon \in J^m$. Учитывая указанное равенство и формулу (0.19), получаем следующий изоморфизм:

$$S_\varepsilon(a, b)|_{\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))} \times J^m \sim T_\varepsilon, \quad (0.29)$$

где слева выписано индуцированное отображение, определенное для любого параметра $\varepsilon \in J^m$ и действующее на аттракторе $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) \subseteq I$, а справа – интегральный изоморфизм T_ε из формулы (0.20), действующий на том же пространстве $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$. Из изоморфизма (0.29) вытекают следующие свойства распределения точек $S_\varepsilon(a, b)$ -орбит.

Пусть двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ удовлетворяет условию (0.19) и его параметр ε принадлежит полуинтервалу J^m . В теореме 5.1 доказано, что для

любых x из $I = [0, 1)$ существует не зависящий от выбора начальной точки x предел

$$\nu_\varepsilon(\theta_1, \theta_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{k: \theta_1 \leq S_\varepsilon^k(a, b)(x) \leq \theta_2, k = 0, 1, \dots, n-1\}$$

– частота попадания точек $S_\varepsilon(a, b)$ -орбиты x в интервал $[\theta_1, \theta_2] \subset I$. Для $\nu_\varepsilon(\theta_1, \theta_2)$ имеет место явная формула

$$\nu_\varepsilon(\theta_1, \theta_2) = \frac{|\text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) \cap [\theta_1, \theta_2]|}{|\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))|}, \quad (0.30)$$

где $|\cdot|$ – мера Лебега на единичной окружности $C \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Для *диагональной частоты* $\nu_\varepsilon = \nu_\varepsilon(0, \varepsilon)$ формула (0.30) преобразуется к виду

$$\nu_\varepsilon = \frac{|\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))^-|}{|\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))|}, \quad (0.31)$$

где через $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))^-$ обозначено пересечение аттрактора $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$ с полуинтервалом $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$.

Из формулы (0.31) вытекает существование горизонтальных участков на графике функции ν_ε (рис. 2), означающее постоянство частоты ν_ε , когда параметр ε принимает значения из некоторых полуинтервалов.

Пусть $S_\varepsilon(F_n, F_{n-1})$ – сложный сдвиг (0.3) с параметром $\varepsilon \in J^m$, где

$$m \equiv n-1 \pmod{T(F_n)}, \quad n \geq 3,$$

и $T(F_n)$ – период последовательности чисел Фибоначчи

$$F_1, F_2, \dots, F_m, \dots \pmod{F_n}.$$

Тогда независимо от выбора начальной точки x из $I = [0, 1)$ частота попадания ν_ε точек ее $S_\varepsilon(F_n, F_{n-1})$ -орбиты в полуинтервал $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$ вычисляется по формуле (см. предложение 5.1)

$$\nu_\varepsilon = \frac{1 - F_{n-1}\tau^{-(m+2)}}{1 + F_{n-2}\tau^{-(m+2)}} \quad (0.32)$$

или по формуле

$$\nu_\varepsilon = 1 - \frac{\tau^{-(m+2)}}{|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))|}, \quad (0.33)$$

связывающей частоту ν_ε с мерой аттрактора $|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))|$.

Таким образом, если известна частота ν_ε , то с помощью формулы (0.33) можно найти меру аттрактора $|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))|$. Из формул (0.32) и (0.33) вытекают несколько следствий.

СЛЕДСТВИЕ 0.1. Если выполнены указанные выше условия, то мера аттрактора $|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))|$ вычисляется по формуле

$$|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))| = \frac{\tau^{-(m+2)}}{1 - \nu_\varepsilon}.$$

Рис. 2. График диагональной частоты ν_ε двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$

Следовательно,

$$|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))| \rightarrow \frac{1}{F_n}$$

для $\varepsilon \rightarrow 1$ при условии, что ε принадлежит объединению полуинтервалов J^m (см. (0.15)).

СЛЕДСТВИЕ 0.2. Если параметр ε двухцветного сдвига $S_\varepsilon(F_n, F_{n-1})$, $n \geq 3$, принадлежит полуинтервалу $J^{n-2} = [\tau^{-(n-1)}, 1 - \tau^{-n})$, то частота ν_ε не зависит от номера n серии сдвигов и определяется по формуле

$$\nu_\varepsilon = \tau^{-1} = 0.618 \dots$$

СЛЕДСТВИЕ 0.3. Если параметр ε двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$ принадлежит полуинтервалу $J^m = [1 - \tau^{-m}, 1 - \tau^{m+2})$ уровня $m \equiv 1 \pmod{3}$, $m \geq 1$, то для ν_ε имеет место явная формула (см. рис. 2)

$$\nu_\varepsilon = \frac{2}{1 + \tau^{-(m+2)}} - 1. \quad (0.34)$$

0.6. История вопроса. Первоначально двухцветные сдвиги $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ появились в работах [3], [4] и затем в общем виде (0.1) – в [2]. Двухцветные сдвиги представляют собою частный случай ИТ-отображений (interval translation mappings [3]).

Рангом вращения d двухцветного сдвига $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ называется размерность векторного пространства над полем $\mathbb{Q}$, порожденного числами α , β , 1. В [2] исследованы двойные сдвиги $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$, имеющие ранг вращения $d = 3$. Для них найдены некоторые отрезки постоянства функции частотного распределения ν_ε , т. е. некоторые участки плато на графике функции ν_ε (см. рис. 2). Для двухцветных сдвигов ранга $d \leq 2$ в [2] доказано, что для них последовательности строгих вложений (0.27) конечны, т. е. двухцветные сдвиги имеют конечный тип.

В настоящей работе для исследования мы выбрали трехпараметрическое семейство двухцветных сдвигов вида

$$S_\varepsilon(a, b)(x) = S_{(a\tau, b\tau, \varepsilon)}(x)$$

с дискретными параметрами $a, b \in \mathbb{Z}$ и непрерывным параметром $\varepsilon \in [0, 1)$. Такие сдвиги имеют ранг вращения $d = 2$. В отличие от сдвигов ранга $d = 3$, график функции частотного распределения ν_ε которых может состоять из одних плато (devil's staircase), для сдвигов $S_\varepsilon(a, b)(x)$ график функции ν_ε непрерывен на всем единичном полуинтервале I . Указанное различие объясняется тем, что в случае ранга $d = 3$ аттракторы $\text{Att}(S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)})$ двухцветных сдвигов $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$ являются канторовыми множествами. Если $d = 2$, то аттрактор всегда состоит из конечного числа полуинтервалов.

Сравнивая наш метод и метод из работы [2], можно сказать, что мы используем арифметический метод, а в [2] – геометрический. В том и другом подходах рассматриваются индуцированные отображения для двухцветных сдвигов $S_{(\alpha, \beta, \varepsilon)}(x)$. Однако в [2] выбор ограничивающей области $X \subset [0, 1)$ для x осуществляется в зависимости от попадания точки $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ в один из многогранников D , на которые разбит единичный куб $[0, 1) \times [0, 1) \times [0, 1)$. При нашем подходе выбор области X зависит от разложения иррациональности τ в цепную дробь (0.21), или, более точно, от распределения знаменателей подходящих дробей по $\text{mod } a$ или $\text{mod } b$. При этом необходимые нам в § 3 распределения получаются с помощью разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ полуинтервала $[0, 1)$, а сами разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ также в конечном счете получаются из разложения τ в цепную дробь. Таким образом, вся используемая конструкция держится на цепной дроби (0.21).

Для произвольных иррациональностей γ разбиения, аналогичные разбиениям Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$, построены в [5].

Настоящее исследование было частично выполнено во время пребывания автора в Математическом институте Макса Планка (Германия). Пользуясь случаем, автор поблагодарит Комитет института за любезное приглашение и весьма стимулирующую обстановку. Автор признателен А. Н. Андрианову и З. Бохереру за проявленный ими интерес к исследованию, а также – Н. Г. Мошечину, замечания которого позволили придать настоящей работе более четкую структуру.

§ 1. Разбиения Фибоначчи

В настоящем параграфе определяются разбиения Фибоначчи и приводится параметризация полуинтервалов, из которых состоят данные разбиения. Именно на эти разбиения мы будем в дальнейшем опираться при исследовании двухцветных сдвигов.

1.1. Подстановки. Существуют несколько способов определения разбиений Фибоначчи. Воспользуемся наиболее простым из них – методом подстановок.

Разбиения Фибоначчи Til_m уровня $m = 0, 1, 2, \dots$ единичного полуинтервала $I = [0, 1)$ определим индукцией по m (см. [1]). В качестве нулевого выбираем разбиение

$$\text{Til}_0 = Y_0 \oplus X_0, \quad Y_0 = [0, 2 - \tau), \quad X_0 = [2 - \tau, 1), \quad (1.1)$$

где $\oplus$ обозначает *некоммутативную операцию* прикладывания правого конца полуинтервала Y_0 к левому концу полуинтервала X_0 . В отличие от $Y_0 \oplus X_0$, через $Y_0 \sqcup X_0$ будем обозначать простое объединение двух непересекающихся множеств Y_0 и X_0 .

Переход от разбиения Til_m к разбиению Til_{m+1} осуществляется с помощью подстановки (инфляции)

$$\pi: \text{Til}_m \longrightarrow \text{Til}_{m+1}.$$

Разбиение Til_m состоит из полуинтервалов двух различных длин. Инфляция π сохраняет короткие полуинтервалы. Каждый из длинных полуинтервалов под действием инфляции π разбивается на два полуинтервала $X \oplus Y$ с отношением длин $|X|/|Y| = \tau$.

Рис. 3. Разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ уровней $0 \leq m \leq 4$

Удобно нумеровать разбиения Фибоначчи $\text{Til}_m = \text{Til}(\varepsilon_m)$ числами ε_m , удовлетворяющими следующим равенствам (рис. 3)

$$\varepsilon_m = \langle (-1)^m F_m \cdot \tau \rangle = 1 - \tau^{-m}, \quad \varepsilon_{m+n} = \varepsilon_m + \varepsilon_n - \varepsilon_m \varepsilon_n \quad (1.2)$$

и рекуррентному соотношению

$$\varepsilon_{m+2} = \varepsilon_m - \varepsilon_{m+1} + 1$$

для $m = 0, 1, 2, \dots$ с начальными условиями $\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_1 = 2 - \tau$. Здесь F_n – числа Фибоначчи, определяемые рекуррентным соотношением (0.11). Для произвольного уровня m разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m)$ состоит из полуинтервалов двух типов G_j^m и E_j^m . Здесь G и E – тип полуинтервала, верхний индекс m указывает на уровень разбиения, а нижний индекс j представляет собой номер интервала в некоторой естественной нумерации, объяснение которой будет приведено

в следующем пункте. Количества полуинтервалов каждого типа вычисляются по следующим формулам:

$$\sharp G^m = F_{2[(m+1)/2]+1}, \quad \sharp E^m = F_{2[m/2]+2}. \quad (1.3)$$

Полуинтервалы G_j^m, E_j^m имеют соответственно длины

$$g^m = \tau^{-(2[m/2]+2)}, \quad e^m = \tau^{-(2[(m+1)/2]+1)}. \quad (1.4)$$

1.2. Координаты полуинтервалов. Для любых целых j, i обозначим через $I[j, i)$ полуинтервал $[\langle j\tau \rangle, \langle i\tau \rangle)$ из $I = [0, 1)$. При этом предполагается, что $\langle j\tau \rangle < \langle i\tau \rangle$, где $\langle \cdot \rangle$ – дробная доля, и если $i = 0$, то полагаем $I[j, 0) = [\langle j\tau \rangle, 1)$.

Пусть m четное. Тогда в координатах разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ имеет представление [1]

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = \bigsqcup_{0 \leq k < F_{m+1}} (G_k^m \oplus E_k^m) \sqcup \bigsqcup_{F_{m+1} \leq k < F_{m+2}} E_k^m, \quad (1.5)$$

где полуинтервалы G_k^m и E_k^m определяются равенствами $G_k^m = I[k^+, k^-)$, $E_k^m = I[k^-, k)$, при этом использованы сокращения $k^+ = k + F_m$, $k^- = k - F_{m+1}$. Полуинтервалы G_k^m, E_k^m из разбиения (1.5) имеют длины (1.4) и получаются последовательными сдвигами

$$I \xrightarrow{S} I: x \mapsto S(x) \equiv x + \tau \pmod{1} \quad (1.6)$$

начальных полуинтервалов

$$G_{k+1}^m \equiv G_k^m + \tau \pmod{1}, \quad (1.7)$$

где $0 \leq k < F_{m+1}$ и $G_0^m = I[F_m, -F_{m+1}) = I[\langle F_m \rangle, \langle -F_{m+1} \rangle)$, и

$$E_{k+1}^m \equiv E_k^m + \tau \pmod{1}, \quad (1.8)$$

где $0 \leq k < F_{m+2}$ и $E_0^m = I[-F_{m+1}, 0) = [\langle -F_{m+1}\tau \rangle, 1)$.

Аналогично для нечетных уровней m разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ представляются в виде суммы:

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = \bigsqcup_{0 \leq k < F_{m+1}} (G_k^m \oplus E_k^m) \sqcup \bigsqcup_{F_{m+1} \leq k < F_{m+2}} G_k^m, \quad (1.9)$$

полуинтервалы G_k^m и E_k^m в этом случае задаются формулами $G_k^m = I[k^-, k^-)$, $E_k^m = I[k^-, k)$, где $k^- = k - F_m$, $k^+ = k - F_{m+2}$, и полуинтервалы связаны между собой S -сдвигами

$$G_{k+1}^m \equiv G_k^m + \tau \pmod{1}, \quad (1.10)$$

где $0 \leq k < F_{m+2}$, $G_0^m = I[-F_m, -F_{m+2}) = [\langle -F_m\tau \rangle, \langle -F_{m+2}\tau \rangle)$, и

$$E_{k+1}^m \equiv E_k^m + \tau \pmod{1}, \quad (1.11)$$

где $0 \leq k < F_{m+1}$ и $E_0^m = I[-F_{m+2}, 0) = [\langle -F_{m+2}\tau \rangle, 1)$.

§ 2. Числа Фибоначчи и золотое сечение

2.1. Периодичность чисел Фибоначчи $\bmod a$. Рассмотрим последовательность чисел Фибоначчи

$$F_1, F_2, \dots, F_m, \dots \pmod{a}, \quad (2.1)$$

где модуль a – некоторое натуральное число. Найдем в последовательности (2.1) первую повторяющуюся пару соседних чисел Фибоначчи

$$F_{m+T} \equiv F_m \pmod{a}, \quad F_{m+1+T} \equiv F_{m+1} \pmod{a}. \quad (2.2)$$

Пусть $T = T(a)$ – наименьшее число, для которого выполняются сравнения (2.2) с некоторым индексом m . Наименьшее такое m обозначим $m_1 = m_1(a)$. Поскольку количество всех целых пар чисел $\bmod a$ равно a^2 , то функция $T(a)$ определена корректно и для нее имеет место тривиальное неравенство

$$T(a) \leq a^2.$$

Вычитая в (2.2) из второго сравнения первое и используя рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи, получаем еще одну пару сравнений

$$F_{m-1+T} \equiv F_{m-1} \pmod{a}, \quad F_{m+T} \equiv F_m \pmod{a}.$$

Это означает, что в сравнениях (2.2) индекс m можно сдвинуть на один шаг влево, если $m \geq 2$. Аналогично, суммируя сравнения (2.2), убеждаемся в том, что индекс m также можно сдвинуть и вправо. Отсюда вытекает, что T – *период* последовательности (2.1) и $m_1 = 1$ для любого $a \geq 1$. Следовательно, в последовательности (2.1) первая повторяющаяся пара состоит из чисел Фибоначчи

$$F_{T+1} \equiv 1 \pmod{a}, \quad F_{T+2} \equiv 1 \pmod{a}. \quad (2.3)$$

Из (2.3) вытекает сравнение $F_T \equiv 0 \pmod{a}$. Обращая рассуждение, предположим, что для некоторого t выполнено сравнение

$$F_t \equiv 0 \pmod{a}.$$

Обозначим $t = t(a) > 0$ наименьший номер числа Фибоначчи F_t , делящегося на a . Если предположить $a > 1$, то в силу рекуррентного соотношения для чисел Фибоначчи (0.11) имеем сравнения

$$F_{t+1} \equiv f \pmod{a}, \quad F_{t+2} \equiv f \pmod{a} \quad (2.4)$$

для некоторого числа $f = f(a)$, где $f \equiv F_{t-1} \pmod{a}$, которое назовем *коэффициентом самоподобия* последовательности (2.1), а определенное выше число $t = t(a)$ – *периодом самоподобия*.

Отметим, что функции $t(a)$ и $T(a)$ обладают следующим мультипликативным свойством (см. [6, с. 88], [7])

$$t(a_1 a_2) = \text{НОК}(t(a_1), t(a_2)), \quad T(a_1 a_2) = \text{НОК}(T(a_1), T(a_2)), \quad (2.5)$$

если числа a_1 и a_2 являются взаимно простыми.

Поскольку сравнения (2.4) можно переписать в виде

$$F_{t+1} \equiv fF_1 \pmod{a}, \quad F_{t+2} \equiv fF_2 \pmod{a},$$

то, снова используя рекуррентное соотношение, выводим свойство самоподобия, которым обладает последовательность (2.1):

$$F_{m+t} \equiv fF_m \pmod{a}$$

для всех $m = 1, 2, 3, \dots$. Указанное свойство объясняет названия чисел t и f . Придавая индексу m в последнем сравнении значения $t+1$, $t+2$, затем $2t+1$, $2t+2$ и так далее, из (2.4) получаем следствие:

$$F_{it+1} \equiv f^i \pmod{a}, \quad F_{it+2} \equiv f^i \pmod{a}, \quad (2.6)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots$ и $f = f(a)$ – период самоподобия последовательности (2.1).

Пусть выполнено сравнение (2.4) с некоторым f . Покажем, что a и f – взаимно простые числа. Действительно, если наибольший общий делитель чисел a и f равен d , то из сравнения (2.4) следует

$$F_{t+2} \equiv 0 \pmod{d}, \quad F_{t+1} \equiv 0 \pmod{d}, \quad \dots, \quad F_1 \equiv 0 \pmod{d},$$

т. е. $d = 1$.

Поскольку, как мы только что убедились, числа a и f взаимно простые, то найдется такая степень $\delta > 0$, что

$$f^\delta \equiv 1 \pmod{a}.$$

Обозначим через $\delta = \delta(a)$ *показатель $f \pmod{a}$* . Нетрудно убедиться в том, что показатель δ может принимать только значения 1, 2 или 4. Действительно, из хорошо известной формулы

$$F_{t-1}^2 = F_{t-2}F_t + (-1)^t$$

и из условия, что a делит F_t , получаем сравнение

$$F_{t-1}^2 \equiv (-1)^t \pmod{a}. \quad (2.7)$$

Поскольку коэффициент самоподобия $f \equiv F_{t-1} \pmod{a}$, то из (2.7) для показателя δ вытекают следующие утверждения:

$$\delta = \begin{cases} 1 \text{ или } 2, & \text{если } t \text{ четное,} \\ 4, & \text{если } t \text{ нечетное и } a \geq 3. \end{cases} \quad (2.8)$$

Кроме того, $\delta = 1$ для $a = 1$ или $a = 2$.

Покажем, что периоды $T = T(a)$, $t = t(a)$ последовательности (2.1) и показатель $\delta = \delta(a)$ связаны соотношением

$$T(a) = t(a)\delta(a) \quad (2.9)$$

для всех $a = 1, 2, 3, \dots$. Прежде всего заметим, что по определению $t(a) \leq T(a)$. Пусть $T(a) = kt(a) + r$ с остатком $0 \leq r < t(a)$. Тогда в силу сравнений (2.6) и (2.5) можем записать

$$F_{kt+1} \equiv F_{kt+2} \pmod{a}, \quad F_{T+1} \equiv F_{T+2} \pmod{a}.$$

Из первого сравнения следует, что модуль a взаимно прост с числами Фибоначчи F_{kt+1} и F_{kt+2} . Поэтому

$$F_{r+1} \equiv F_{r+2} \equiv f \pmod{a}, \quad f \equiv F_{T+1} F_{kt+1}^{-1} \pmod{a}.$$

Следовательно, $F_r \equiv 0 \pmod{a}$, и так как $0 \leq r < t(a)$, то из определения периода $t(a)$ заключаем, что $r = 0$.

Известно (см. [6, с. 87]), что период $T(a)$ для простого модуля $a = p$ обладает следующими свойствами:

- 1°) $T(p)$ делит $p - 1$, если $p \equiv 1 \pmod{5}$ или $p \equiv 4 \pmod{5}$;
- 2°) $T(p)$ делит $2(p + 1)$, если $p \equiv 2 \pmod{5}$ или $p \equiv 3 \pmod{5}$.

2.2. Числа Фибоначчи и функция Эйлера. Рассмотрим вещественное квадратичное поле $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Его кольцо целых чисел $\mathbb{Z}[\tau]$ – кольцо Фибоначчи – имеет $\mathbb{Z}$ -базис $1, \tau = (1 + \sqrt{5})/2$, и является евклидовым, и τ – основная единица данного кольца. По теореме Эйлера в кольце $\mathbb{Z}[\tau]$ для любого $a = 1, 2, 3, \dots$ выполнено сравнение

$$\tau^{\Phi(a)} \equiv 1 \pmod{a\mathbb{Z}[\tau]}, \quad (2.10)$$

где Φ – функция Эйлера кольца $\mathbb{Z}[\tau]$ (см. определение в [8, с. 259]). Ограничение Φ на множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ представляет собой мультипликативную функцию со следующими значениями на степенях простых чисел p^α :

$$\Phi(p^\alpha) = p^{2\alpha-2}\Phi(p) \quad (2.11)$$

для простых чисел $p \in \mathbb{N}$ и $\alpha \geq 1$, при этом

$$\Phi(p) = \begin{cases} (p-1)^2, & \text{если } p \equiv 1, 4 \pmod{5}, \\ p^2 - 1, & \text{если } p \equiv 2, 3 \pmod{5}, \\ p(p-1), & \text{если } p = 5. \end{cases}$$

Пусть $\Delta = \Delta(a)$ – показатель τ в кольце $\mathbb{Z}[\tau]$, т. е. наименьший $\Delta > 0$, $\Delta \in \mathbb{Z}$, с условием

$$\tau^\Delta \equiv 1 \pmod{a\mathbb{Z}[\tau]}. \quad (2.12)$$

Воспользуемся известной формулой

$$\tau^\Delta = F_{\Delta-1} + F_\Delta \tau,$$

связывающей золотое сечение τ с числами Фибоначчи. Сопоставляя эту формулу с условием (2.12), получим сравнения

$$F_{\Delta-1} \equiv 1 \pmod{a}, \quad F_\Delta \equiv 0 \pmod{a}$$

в кольце $\mathbb{Z}$. Обратно, из последних сравнений вытекает сравнение (2.12), и ввиду рекуррентного соотношения для чисел Фибоначчи (0.11) из них вытекают еще два сравнения

$$F_{\Delta+1} \equiv 1 \pmod{a}, \quad F_{\Delta+2} \equiv 1 \pmod{a}.$$

Учитывая минимальность показателя $\Delta(a)$ в (2.12), получаем совпадение показателя $\Delta(a)$ и периода $T(a)$ последовательности чисел Фибоначчи (2.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. 1) Пусть a – произвольное натуральное число, $T(a)$ – период последовательности чисел Фибоначчи $F_1, F_2, \dots, F_m, \dots \pmod{a}$, и пусть $t(a)$ – ее период самоподобия, равный наименьшему номеру числа Фибоначчи, делящемуся на a . Тогда выполняется равенство

$$T(a) = \Delta(a),$$

где $\Delta(a)$ – показатель $\tau \pmod{a\mathbb{Z}[\tau]}$, периоды $T(a)$ и $t(a)$ делят $\Phi(a)$, где Φ – функция Эйлера кольца Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$, и как мультипликативная функция Φ определяется равенствами (2.11).

2) Для $m \geq 4$ имеют место следующие формулы:

$$T(F_m) = \begin{cases} 2m, & \text{если } m \text{ четное,} \\ 4m, & \text{если } m \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (2.13)$$

а для начальных индексов m – формулы

$$T(F_1) = T(F_2) = 1, \quad T(F_3) = 3.$$

Из (2.13), в частности, следует, что $2m$ или $4m$ делит $\Phi(F_m)$, если $m \geq 4$ и m четное или нечетное соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Равенство $T(a) = \Delta(a)$ уже было доказано, а делимость $\Phi(a)$ на $T(a)$ и $t(a)$ следует из (2.10), (2.13) и соотношения (2.9).

2) Выберем a , равное F_m . В этом случае, очевидно, период самоподобия t вычисляется по формуле

$$t(F_m) = m \quad (2.14)$$

для индексов $m \geq 3$ и $t(F_1) = t(F_2) = 1$, а коэффициент самоподобия f , (2.4), удовлетворяет сравнению

$$f \equiv F_{m-1} \pmod{F_m}.$$

Поскольку сравнение $F_{m-1} \equiv 1 \pmod{F_m}$ выполняется только для индексов $m = 1, 2, 3$, то формулы (2.8) для модуля $a = F_m$ примут вид

$$\delta(F_m) = \begin{cases} 2 & \text{для четных } m \geq 4, \\ 4 & \text{для нечетных } m \geq 4 \end{cases} \quad (2.15)$$

и $\delta(F_m) = 1$ для индексов $m = 1, 2, 3$. Теперь в силу равенства (2.14) и соотношений (2.15) формула (2.9) преобразуется в формулы (2.13).

Таблица 1

a	t	f	δ	T	Φ	a	t	f	δ	T	Φ
1	1	1	1	1	1	11	10	1	1	10	100
2	3	1	1	3	3	12	12	5	2	24	96
3	4	2	2	8	8	13	7	8	4	28	168
4	6	1	1	6	12	14	24	13	2	48	144
5	5	3	4	20	20	15	20	11	2	40	160
6	12	5	2	24	24	16	12	9	2	24	192
7	8	6	2	16	48	17	9	4	4	36	288
8	6	5	2	12	48	18	12	11	2	24	216
9	12	8	2	24	72	19	18	1	1	18	324
10	15	7	4	60	60	20	30	9	2	60	240
						21	8	13	2	16	384

В табл. 1 для последовательности (2.1) чисел Фибоначчи $\bmod a$, $1 \leq a \leq 21$, приведены значения периодов $T = T(a)$, периодов самоподобия $t = t(a)$ и показателей самоподобия

$$f = f(a) \equiv F_{t-1} \pmod{a}, \quad 0 < f \leq a,$$

а также приведены показатели $\delta = \delta(a)$ коэффициентов $f \bmod a$ и значения функции Эйлера Φ кольца Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$.

2.3. Распределение двух точек на окружности. отождествим единичный полуинтервал $I = [0, 1)$ с окружностью $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и зададим на нем *простой сдвиг*

$$S(x) \equiv x + \tau \pmod{1}.$$

Пусть единичный полуинтервал I разбит на два полуинтервала $G_0^0 = [0, \tau^{-2})$ и $E_0^0 = [\tau^{-2}, 1)$:

$$\text{Til}(\varepsilon_0) = G_0^0 \oplus E_0^0.$$

Знак $\oplus$ обозначает операцию прикладывания полуинтервалов. Для произвольной точки $x \in I$ рассмотрим ее траекторию $\{x_i\}_{i=0}^\infty$, где $x_i = S^i(x)$, и определим функцию $\varepsilon(x_i)$ – *индикатор* G_0^0 – условием

$$\varepsilon(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in G_0^0, \\ 0, & \text{если } x_i \in E_0^0. \end{cases}$$

Пусть

$$s_k(x) = \varepsilon(x_1) + \dots + \varepsilon(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots;$$

таким образом, $s_k(x)$ есть количество попаданий последовательности $\{x_i\}_{i=1}^k$ в полуинтервал G_0^0 . Пусть

$$s_k = \max_{x \in I} s_k(x). \quad (2.16)$$

Поскольку дробная доля $\langle \tau \rangle$ превосходит длину τ^{-2} полуинтервала G_0^0 , то в последовательности $\varepsilon(x_1), \dots, \varepsilon(x_k)$ не могут встретиться подряд две единицы. Отсюда для функции s_k вытекает тривиальная оценка сверху:

$$s_k \leq \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor,$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Поставим целью найти точную формулу для функции s_k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Максимум функции $s_k(x)$ достигается в точке $x = 0$, при этом имеет место явная формула*

$$s_k = s_k(0) = [k\tau^{-2}] + 1 \quad (2.17)$$

для всех $k = 1, 2, 3, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разбиение Фибоначчи нулевого уровня $\text{Til}(\varepsilon_0) = G_0^0 \oplus F_0^0$ подразобьем на более мелкое, второго уровня, разбиение:

$$\text{Til}(\varepsilon_2) = E_2^2 \oplus G_1^2 \oplus E_1^2 \oplus G_0^2 \oplus E_0^2,$$

где (см. рис. 3) $G_0^0 = E_2^2 \oplus G_1^2$ и полуинтервал $E_0^0 = E_1^2 \oplus G_0^2 \oplus E_0^2$ разбит центрально-симметричным образом. Всевозможные пары точек $(x, y) \in I \times I$ разобьем на подмножества M_i , $i = 1, \dots, 5$:

$$I \times I = M_1 \sqcup \dots \sqcup M_5,$$

состоящие из пар (x, y) , для которых дробная часть $\langle y - x \rangle$ принадлежит i -му полуинтервалу из разбиения $\text{Til}(\varepsilon_2)$. Счет полуинтервалов осуществляется слева направо. *Состоянием* пары (x, y) назовем $(\varepsilon(x), \varepsilon(y))$. Далее, если вместо $\varepsilon(x)$ и $\varepsilon(y)$ будут стоять конкретные значения, то ради краткости мы не будем их разделять запятой.

Графы, представленные на рис. 4, указывают, какие разрешены S -переходы

$$S: (\varepsilon(x), \varepsilon(y)) \mapsto (\varepsilon(S(x)), \varepsilon(S(y)))$$

пары (x, y) из одного состояния в другое согласно принадлежности (x, y) какому-либо из подмножеств M_i , $i = 1, \dots, 5$.

В графе (M_3) состояние (00) подразделено на состояния $(00)_0$ и $(00)_1$. Пара (x, y) находится в первом состоянии, если $x \in E_1^2$, и во втором состоянии, если $y \in E_1^2$.

Для произвольных $y \in I$ определим *разность*

$$\Delta_k(0, y) = s_k(0) - s_k(y),$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$. Предположим, что $(0, y) \in M_1$. Тогда ее начальным состоянием будет $(1\ 1)$. Подействуем на $(0, y)$ сдвигом S :

$$(0, y) \rightarrow (S(0), S(y)) \rightarrow \dots \rightarrow (S^k(0), S^k(y)).$$

Рис. 4. Графы (M_i) , $i = 1, \dots, 5$, разрешенных S -переходов из одного состояния в другое

При каждом сдвиге пара $(0, y)$ меняет свое состояние согласно графу (M_1) по следующей схеме:

$$(1\ 1)_{=} \rightarrow \dots_{=} \rightarrow (1\ 0)_{\nearrow} \rightarrow (0\ 1)_{=} \rightarrow \dots_{=},$$

где знаки $=$ и $\nearrow$ указывают, что на данном шаге разность равна 0 и 1 соответственно, т. е. $\Delta_k(0, y) = 1$ для k , отвечающих состоянию $(1\ 0)$, и $\Delta_k(0, y) = 0$ в остальных случаях. Таким образом, разность

$$\Delta_k(0, y) = 0, 1 \quad (2.18)$$

для всех $k = 1, 2, 3, \dots$, если $(0, y) \in M_1$. В случае, когда пара $(0, y)$ принадлежит другим подмножествам M_i , $i = 2, \dots, 5$, равенства (2.18) доказываются аналогично с помощью соответствующего графа S -переходов (M_i) .

Из определения (2.16) функции s_k и (2.18) вытекает равенство

$$s_k = s_k(0) \quad (2.19)$$

для любого $k = 1, 2, 3, \dots$; таким образом, максимум для функции $s_k(x)$ достигается в точке $x = 0$.

Найдем явную формулу для суммы $s_k(0)$. Обозначим через $R(k)$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, количество точек орбиты $\{0_i\}_{i=0}^\infty$ с номерами $1 \leq i \leq k$, попавших в полуинтервал E_0^0 . Нетрудно убедиться в справедливости следующей формулы:

$$R(k) = [k\tau^{-1}]. \quad (2.20)$$

Единичный полуинтервал I состоит из двух непересекающихся полуинтервалов G_0^0 и E_0^0 . Поэтому можем записать равенство $s_k(0) = k - R(k)$, и в силу (2.20) – еще одно равенство $s_k(0) = k - [k\tau^{-1}]$. Учитывая, что $[-k\tau^{-1}] = -[k\tau^{-1}] - 1$ и $1 - \tau^{-1} = \tau^{-2}$, получаем требуемую формулу:

$$s_k(0) = [k\tau^{-2}] + 1 \quad (2.21)$$

для $k = 1, 2, 3, \dots$. Теперь доказательство предложения вытекает из равенства (2.19) и формулы (2.21).

§ 3. Граничные индуцированные отображения и самоподобие двухцветных сдвигов

3.1. Индуцированные отображения для простого сдвига. Представим разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$, (1.5), (1.9), в виде суммы:

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = X \oplus G_0^m \oplus E_0^m, \quad (3.1)$$

т.е. выделим в разбиении $\text{Til}(\varepsilon_m)$ два его последних полуинтервала. Предположим, что разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m)$ имеет четный уровень m . Тогда простой сдвиг $S: x \mapsto x + \tau \pmod{1}$ единичного полуинтервала $I = [0, 1)$ переводит разбиение (3.1) в разбиение

$$S(\text{Til}(\varepsilon_m)) = X \oplus E_{F_{m+2}}^m \oplus G_{F_{m+1}}^m = X \oplus E_0^m \oplus G_0^m,$$

где однотипные полуинтервалы E_0^m , $E_{F_{m+2}}^m$ и G_0^m , $G_{F_{m+1}}^m$ имеют равные длины; таким образом, действие S на разбиение $\text{Til}(\varepsilon_m)$ сводится к перекладыванию двух его крайних правых полуинтервалов:

$$G_0^m \oplus E_0^m = E_{F_{m+2}}^m \oplus G_{F_{m+1}}^m = E_0^m \oplus G_0^m. \quad (3.2)$$

Пусть $I^m = G_0^m \oplus E_0^m$ и $e_m = |E_0^m|$ – длина полуинтервала E_0^m . Согласно формуле (1.4) имеем $e_m = \tau^{-(m+1)}$ и

$$|I^m| = \tau^{-m} \quad (3.3)$$

для любого уровня m . Отсюда получаем

$$\frac{e_m}{|I^m|} = \tau^{-1} = \tau - 1 \equiv \tau \pmod{1},$$

следовательно, для четного m индуцированное отображение $S|I^m$ подобно сдвигу S :

$$S|I^m \sim S. \quad (3.4)$$

Слева в (3.4) записано ограничение сдвига S на полуинтервал I^m .

Аналогично, если уровень m нечетный, то из формул (1.9) получаем

$$S(\text{Тil}(\varepsilon_m)) = X \oplus E_{F_{m+1}}^m \oplus G_{F_{m+2}}^m$$

и действие сдвига S согласно представлению (3.1) сводится к перекладыванию полуинтервалов:

$$G_0^m \oplus E_0^m = E_{F_{m+1}}^m \oplus G_{F_{m+2}}^m. \quad (3.5)$$

Поскольку для нечетных m в силу формул (1.4) и (3.3) имеем

$$\frac{e_m}{|I^m|} = \tau^{-2} = 2 - \tau \equiv -\tau \pmod{1},$$

то индуцированное отображение в этом случае подобно обратному сдвигу $S^{-1}: x \mapsto x - \tau \pmod{1}$ единичного полуинтервала I :

$$S|I^m \sim S^{-1}. \quad (3.6)$$

3.2. Верхние индуцированные отображения для двухцветного сдвига. Для произвольных a и b , $ab > 0$, из множества целых чисел $\mathbb{Z}$ *двухцветный*, или *двойной*, сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ единичного полуинтервала I определяется формулой (0.3). Здесь ε – непрерывный параметр, принимающий любое значение из I . Действие двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)(x)$ на точку $x \in I$ зависит от ее принадлежности одному из полуинтервалов $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$ или $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$, на которые разбит единичный полуинтервал: $I = I_\varepsilon^- \oplus I_\varepsilon^+$.

В настоящем пункте рассмотрим *верхние индуцированные отображения*

$$S_\varepsilon(a, b)^{(m)} = S_\varepsilon(a, b)|I^m \times I^m \quad (3.7)$$

уровня $m = 0, 1, 2, \dots$ для двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$, представляющие собой семейство индуцированных отображений $S_\varepsilon(a, b)|I^m: I^m \rightarrow I^m$, зависящих от непрерывного параметра ε из полуинтервала $I^m = [\varepsilon_m, 1)$, где $\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m}$ – собственные значения (1.2). Оказывается, что при специальном выборе уровня m индуцированные отображения $S_\varepsilon(a, b)^{(m)}$ изоморфны снова двухцветному сдвигу.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $S_\varepsilon(a, b)$ – двухцветный сдвиг (0.3) единичного полуинтервала $I = [0, 1)$ с целыми параметрами a, b одного знака, и пусть для некоторого индекса $m = 0, 1, 2, \dots$ числа Фибоначчи F_{m+1}, F_{m+2} удовлетворяют сравнениям

$$F_{m+1} \equiv F_{m+2} \equiv F \pmod{a}, \quad (3.8)$$

где $1 \leq F \leq |a|$. Кроме того, пусть выполняется условие

$$|b| \leq s(|b|F^{-1})_a, m \quad (3.9)$$

для функции

$$s(k, m) = kF_{m+2} - s_k F_m, \quad (3.10)$$

где s_k – функция (2.16) и $(bF^{-1})_a$ обозначает наименьшее решение $x \geq 1$ сравнения $xF \equiv b \pmod{a}$. Тогда для верхних индуцированных отображений $S_\varepsilon(a, b)^{(m)}$ двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ справедливы следующие утверждения:

1) для четного m имеем

$$S_\varepsilon(a, b)^{(m)} \sim S_{\varepsilon'}(a, b' \operatorname{sign}(b)), \quad (3.11)$$

где

$$b' = (|b|F^{-1})_a, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon - \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_m} \quad (3.12)$$

– перенормировка параметров b, ε , при этом $\operatorname{sign}(b) = \pm 1$ – знак числа b и $\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m}$ – собственные значения (1.2);

2) для нечетного m имеем

$$S_\varepsilon(a, b)^{(m)} \sim S_{\varepsilon'}(-a, -b' \operatorname{sign}(b)) \quad (3.13)$$

с теми же перенормировками b' и ε' , что и в (3.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть $F = 1$. Тогда в силу формулы (2.17) неравенство (3.9) вытекает из неравенства

$$|b| \leq b_1(F_{m+2} - \tau^{-2}F_m) - F_m, \quad (3.14)$$

где b_1 равно остатку, $1 \leq b_1 \leq a$, от деления $|b|$ на a . Тем более, (3.9) вытекает и из более сильного неравенства

$$|b| \leq F_{m+1} - \tau^{-2}F_m, \quad (3.15)$$

которое уже является достаточным для выполнения неравенства (3.9) в случае произвольного F , удовлетворяющего сравнениям (3.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Подобие семейств двухцветных сдвигов в (3.11) и (3.13) означает, что для каждого значения параметра $\varepsilon \in I^m$ они сопряжены:

$$S_\varepsilon(a, b)^{(m)} = h_m^{-1} \circ S_{\varepsilon'}((-1)^m a, (-1)^m b' \operatorname{sign}(b)) \circ h_m,$$

аффинным изоморфизмом $h_m(x) = (\varepsilon - \varepsilon_m)/(1 - \varepsilon_m)$ полуинтервала индуцирования $I^m = [\varepsilon_m, 1)$ и единичного полуинтервала I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Шаг 1. Сначала ограничимся рассмотрением двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ с параметрами a, b из множества *натуральных чисел* $\mathbb{N}$. Представим b в виде

$$b = qa + b_1, \quad (3.16)$$

где $1 \leq b_1 \leq a$.

Для любой точки $x \in I^m$ обозначим через $\operatorname{Orb}(x)$ ее S -орбиту из элементов $x_i = S^i(x) \equiv x + i\tau \pmod{1}$, где $i = 0, 1, 2, \dots$ – порядковый номер точек орбиты $\operatorname{Orb}(x)$, или, кратко, их S -номер. Для точки x можем аналогично рассмотреть $S_\varepsilon(a, b)$ -орбиту $\operatorname{Orb}_\varepsilon(x)$ из элементов $x' = S_\varepsilon^j(a, b)(x)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, каждый из которых имеет свой порядковый $S_\varepsilon(a, b)$ -номер j . Из определения двухцветного сдвига (0.3) вытекает, что любая точка x' орбиты $\operatorname{Orb}_\varepsilon(x)$ содержится в орбите $\operatorname{Orb}(x)$. Следовательно, точка x' имеет вид $x' = x_{j'} = S^{j'}(x)$, где j' – ее S -номер.

Если точка x принадлежит полуинтервалу $I_+^m = I^m \cap I_\varepsilon^+ = I_\varepsilon^+$, то согласно определению (0.3) ее орбита $\text{Orb}_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$, вплоть до первого возвращения точки x в полуинтервал I^m , состоит из элементов с S -номерами

$$b, b+a, \dots, b+ka, \dots, \quad (3.17)$$

образующими последовательные элементы прогрессии $i \equiv b_1 \pmod{a}$ начиная с номера $i = b$, ограниченные сверху некоторым числом. Далее на уровень m будут наложены дополнительные ограничения (3.20), (3.26), обеспечивающие возвращение x в I^m . Если точка x выбрана из дополнительного полуинтервала $I_-^m = I^m \cap I_\varepsilon^-$, то элементы ее орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$ имеют S -номера

$$a, 2a, \dots, ka, \dots, \quad (3.18)$$

образующие полную прогрессию $i \equiv 0 \pmod{a}$ начиная с $i = a$, также ограниченную сверху некоторым другим числом.

Согласно п. 1.2 и равенствам (3.2) и (3.3) для точки x из полуинтервала $I^m = G_0^m \oplus E_0^m$ минимальный S -номер $i > 0$ элементов x из $\text{Orb}(x) \cap I^m$, или номер первого элемента x_i , возвратившегося в полуинтервал I^m , есть

$$i = \begin{cases} F_{m+1}, & \text{если } x \in G_0^m, \\ F_{m+2}, & \text{если } x \in E_0^m, \end{cases} \quad (3.19)$$

для четных уровней m и, соответственно, есть

$$i = \begin{cases} F_{m+2}, & \text{если } x \in G_0^m, \\ F_{m+1}, & \text{если } x \in E_0^m, \end{cases}$$

для нечетных m .

Чтобы получить возможность продвигаться дальше, требуется как-то связать числа Фибоначчи F_{m+1} и F_{m+2} с выбором значения параметра сдвига a . Для начала предположим, что выполняются сравнения

$$F_{m+1} \equiv F_{m+2} \equiv 1 \pmod{a}. \quad (3.20)$$

При этом условии S -номера элементов x_{j_s} , последовательно возвращаемых сдвигом S в полуинтервал I^m , будут равны

$$j_1, j_2, \dots, j_k, \dots,$$

где $j_k = i_1 + i_2 + \dots + i_k$ — номер элемента $x_{j_k} \in I^m$ при k -м возвращении точки x в I^m и i_l определяются условиями (3.19).

Вычислим *наименьшие* номера k , для которых j_k попадает в прогрессию (3.17) и (3.18). Согласно (3.19) любой номер $i_l = i_l(x)$ сравним с $1 \pmod{a}$ независимо от выбора начальной точки $x \in I^m$. Таким образом, для любого $x \in I^m$ можем записать сравнения

$$j_k \equiv j_k(x) \equiv k \pmod{a}, \quad (3.21)$$

значит, первое возвращение двухцветным сдвигом $S_\varepsilon(a, b)$ точки $x \in I_+^m$ или $x \in I_-^m$ в исходный полуинтервал I^m равносильно первому попаданию S -номера j_k в прогрессию (3.17) или (3.18) соответственно.

Для того чтобы j_k попадало в соответствующие прогрессии, необходимо, чтобы j_k было не меньше, чем их первые члены. С этой целью оценим снизу значение j_k , используя функцию s_k из (2.16). Если уровень m четный, то в силу (3.4) и (3.19) получаем неравенство

$$j_k = i_1 + i_2 + \dots + i_k \geq s_k F_{m+1} + (k - s_k) F_{m+2} = s(k, m),$$

где $s(k, m)$ – функция (3.10), т. е.

$$j_k \geq s(k, m), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.22)$$

Для нечетных m согласно формуле (3.6) сдвиг S заменится на обратный ему сдвиг S^{-1} . С помощью S^{-1} по формуле (2.16) определим инверсную s_k^- к s_k функцию, при этом $\varepsilon(x)$ в (2.16) обозначает индикатор полуинтервала E_0^0 . Повторяя приведенное выше рассуждение, снова вернемся к неравенству (3.22). При этом для инверсной функции s_k^- формула (2.17) заменится неравенством

$$s_k^- \leq [k\tau^{-2}] + 1. \quad (3.23)$$

Выберем $k = b_1$. Тогда в силу (3.16) имеем $j_k \equiv b \pmod{a}$, поэтому условие принадлежности номера j_k прогрессии (3.17) равносильно выполнению неравенства $j_k \geq b$. Согласно (3.22) данное неравенство будет выполнено, если потребовать выполнимость условия $b \leq s(b_1, m)$. Поскольку для всех других $1 \leq k < b_1$ будем иметь $j_k \not\equiv b \pmod{a}$, то для любой точки $x \in I_+^m$ первый элемент $x_{j'}$ из $S_\varepsilon(a, b)$ -орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(x)$, возвращающийся в полуинтервал I^m , имеет S -номер

$$j' = j_{b_1}, \text{ если } b \leq s(b_1, m). \quad (3.24)$$

Выберем теперь $k = a$. Тогда номер j_k принадлежит прогрессии (3.18), поскольку $j_k \equiv 0 \pmod{a}$ согласно сравнению (3.21), при этом в силу (3.19) выполняется неравенство $j_k = i_1 + i_2 + \dots + i_k \geq a$. Отсюда следует, что если начальная точка x взята из полуинтервала I_-^m и $x_{j'}$ – первый элемент из орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(x)$, возвратившийся в полуинтервал I^m , то выполняется равенство

$$j' = j_a \quad (3.25)$$

без дополнительных ограничений на параметры a и b .

Шаг 2. Рассмотрим более общие ограничения для чисел Фибоначчи

$$F_{m+1} \equiv F_{m+2} \equiv F \pmod{a}, \quad (3.26)$$

где $1 \leq F \leq a$. Как уже было отмечено в п. 2.1, из приведенных сравнений вытекает, что числа F и a взаимно просты. Если окажется, что $F = a$, то имеем $a = 1$. Поскольку для $k = (bF^{-1})_a$ (см. определение (3.9) для $(bF^{-1})_a$) выполняется сравнение

$$j_k \equiv b_1 \pmod{a},$$

то S -номер j_k принадлежит прогрессии $b+a\mathbb{N}$ при условии, что $b \leq s((bF^{-1})_a, m)$. Поэтому для начальной точки $x \in I_+^m$ первый возвратившийся в полуинтервал I^m элемент $x_{j'}$ из $S_\varepsilon(a, b)$ -орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(x)$ имеет номер

$$j' = j_{(bF^{-1})_a}, \quad \text{если } b \leq s((bF^{-1})_a, m). \quad (3.27)$$

Если $F = 1$, то $(bF^{-1})_a$ равно остатку $1 \leq b_1 \leq a$ от деления b на a . Поэтому при условии $F = 1$ формула (3.27) преобразуется в формулу (3.24). Если выбрать начальную точку x из полуинтервала I_-^m , то S -номер j' первой возвратившейся в полуинтервал I^m точки $x_{j'}$ снова удовлетворяет равенству (3.25).

Шаг 3. Осталось рассмотреть поведение двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ с целыми отрицательными параметрами a, b . Для отрицательных параметров сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ можно интерпретировать как сложный сдвиг (0.3) с положительными параметрами $-a, -b$, заменив τ на $-\tau$. При этом в п. 3.1 нужно заменить простой сдвиг S на ему обратный сдвиг S^{-1} и поменять порядки перекладывания (3.2) и (3.5). После указанных изменений формула (3.27) примет вид

$$j' = j_{(|b|F^{-1})_a}, \quad \text{если } |b| \leq s((|b|F^{-1})_a, m), \quad (3.28)$$

где коэффициент F удовлетворяет двойному неравенству $1 \leq F \leq |a|$, а соотношение (3.25) преобразуется соответственно к виду

$$j' = j_{|a|}.$$

Шаг 4. Теперь, чтобы завершить доказательство теоремы, заметим, что согласно разбиениям (3.2) и (3.5) каждому возвращению в полуинтервал I^m начальной точки $x \in I^m$ отвечает перекладывание полуинтервалов G_0^m и E_0^m , что в масштабе единичного полуинтервала I означает простой сдвиг на $\tau \bmod 1$ или $-\tau \bmod 1$, если уровень m четный или нечетный соответственно.

Как мы уже выяснили, S -номера первых возвращений начальной точки x в полуинтервал I^m вычисляются по формулам (3.24)–(3.28). Отсюда и из определения двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ вытекают формулы подобия (3.11) и (3.13) вместе с перенормировками b' параметра b . Перенормировки ε' параметра ε из формулы (3.12) и вид аффинного изоморфизма h_m непосредственно следуют из выбора ограничивающего полуинтервала $I^m = [\varepsilon_m, 1)$ и равенства $\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m}$.

Теорема доказана.

3.3. Самоподобие двухцветного сдвига. Рассмотрим для двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ верхние индуцированные отображения $S_\varepsilon(a, b)^{(m)}$ порядка m , делящегося на период самоподобия $t = t(a)$ последовательности (2.1) чисел Фибоначчи $\bmod a$. Для $m = kt$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, по теореме 3.1 имеем

$$S_\varepsilon(a, b)^{(kt)} \sim S_{\varepsilon'}((-1)^{kt}a, (-1)^{kt}b^{(k)} \text{sign}(b))$$

с перенормированными параметрами ε' из формулы (3.12) и $b^{(k)} = (|b|f^{-1})_a$, где $f = f(a)$ – коэффициент самоподобия для последовательности чисел Фибоначчи из (2.4). В частности, для k , равного показателю $\delta = \delta(a)$ коэффициента f , получаем $b^{(\delta)} = (|b|)_a$. Если на параметр b наложить дополнительное ограничение $1 \leq |b| \leq |a|$, то можем записать $b^{(\delta)} \text{sign}(b) = b$, следовательно,

$$S_\varepsilon(a, b)^{(T)} \sim S_{\varepsilon'}((-1)^T a, (-1)^T b),$$

где $T = \delta t$ – период последовательности чисел Фибоначчи (2.1). В случае четного периода T отсюда вытекает свойство самоподобия

$$S_\varepsilon(a, b)^{(T)} \sim S_{\varepsilon'}(a, b)$$

двухцветного сдвига, а именно ограничение $S_\varepsilon(a, b)$ на квадрат $(x, \varepsilon) \in I^T \times I^T$ подобно самому сдвигу $S_\varepsilon(a, b)$. Если период T окажется нечетным, то выберем $k = 2\delta$ и снова получим свойство самоподобия

$$S_\varepsilon(a, b)^{(2T)} \sim S_{\varepsilon'}(a, b).$$

Итак, доказано следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ с целыми параметрами a, b одного знака, $1 \leq |b| \leq |a|$, обладает свойством самоподобия*

$$S_\varepsilon(a, b)^{(m)} \sim S_{\varepsilon'}(a, b), \quad (3.29)$$

где перенормировка ε' параметра ε вычисляется по формуле (3.12). Порядок m верхнего индуцированного отображения в (3.29) можно выбрать равным T или $2T$, если период $T = T(a)$ последовательности чисел Фибоначчи (2.1) четный или нечетный соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Геометрический смысл самоподобия (3.29) для двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ состоит в том, что ограничение

$$[\text{Att}(a, b) \sqcup \text{Spir}(a, b)]^{(m)} = [\text{Att}(a, b) \sqcup \text{Spir}(a, b)] \cap [I^m \times I^m]$$

фазовой диаграммы (см. п. 0.4)

$$I \times I = \text{Att}(a, b) \sqcup \text{Spir}(a, b) \quad (3.30)$$

на верхний правый квадрат $I^m \times I^m \subset I \times I$ (ср. с рис. 1) подобно полной фазовой диаграмме (3.30):

$$\text{Att}(a, b) \sqcup \text{Spir}(a, b) = h_m \times h_m [\text{Att}(a, b) \sqcup \text{Spir}(a, b)]^{(m)}, \quad (3.31)$$

где

$$h_m \times h_m(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1 - \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_m}, \frac{x_2 - \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_m} \right)$$

– гомотетия с коэффициентом $k = (1 - \varepsilon_m)^{-1}$ и центром в точке $(1, 1)$, отображающая $I^m \times I^m$ на единичный квадрат $I \times I$. Здесь h_m – изоморфизм (0.17). В частности, из самоподобия (3.31) следует, что фазовая диаграмма $\text{Att}(a, b) \sqcup \text{Spir}(a, b)$ двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ является фракталом.

Свойство самоподобия (3.29) допускает дальнейшую конкретизацию для случая, когда параметр $a = p$ является простым числом. Если $p \neq 5$, то для таких простых в п. 2.1 указана простая связь между p и периодом $T = T(p)$ последовательности (2.1) чисел Фибоначчи $\bmod p$. Для простого $p = 5$ значение периода $T(5)$ указано в табл. 1.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Верхние индуцированные отображения $S_\varepsilon(p, b)^{(p)}$ простого порядка p двухцветного сдвига $S_\varepsilon(p, b)$ с параметрами $1 \leq b \leq p$ обладают свойствами самоподобия $S_\varepsilon(p, b)^{(p-1)} \sim S_{\varepsilon'}(p, b)$ для простых чисел $p \equiv 1 \pmod{5}$ или $p \equiv 4 \pmod{5}$, $S_\varepsilon(p, b)^{(2(p+1))} \sim S_{\varepsilon'}(p, b)$ для простых чисел $p \equiv 2 \pmod{5}$ или $p \equiv 3 \pmod{5}$ и $S_\varepsilon(p, b)^{(20)} \sim S_{\varepsilon'}(p, b)$ для $p = 5$.*

Общую формулу для периода $T = T(a)$ последовательности (2.1) мы знаем только для $a = F_m$. Согласно формулам (3.24) для $m \geq 4$ период $T(F_m)$ равен $2m$, если m четное, и равен $4m$, если m нечетное. В остальных случаях период $T(F_m)$ равен 1 для $m = 1, 2$ и по табл. 1 равен 3 для $m = 3$. Отсюда и из формулы (3.29) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Если $m \geq 4$ и $1 \leq b \leq F_m$, то имеют место следующие самоподобия двухцветных сдвигов:*

$$S_\varepsilon(F_m, b)^{(2m)} \sim S_{\varepsilon'}(F_m, b)$$

для четных m и

$$S_\varepsilon(F_m, b)^{(4m)} \sim S_{\varepsilon'}(F_m, b)$$

для нечетных m . Для $m = 2$ выполняется формула самоподобия

$$S_\varepsilon(1, 1)^{(2)} \sim S_{\varepsilon'}(1, 1),$$

равносильная формуле $S|I^2 \sim S$ для простого сдвига S (см. (3.4)), а для $m = 3$ – формула (см. рис. 1)

$$S_\varepsilon(2, 1)^{(6)} \sim S_{\varepsilon'}(2, 1).$$

Сравнивая следствия 3.2 и 3.3, замечаем, что двухцветные сдвиги $S_\varepsilon(a, b)$ с параметром a , равным числам Фибоначчи F_m , имеют очень короткие периоды самоподобия. Кроме того, так как $\delta(F_m) = 2$ (см. (2.15)), $F = F_{m-1}$, $F_{m-1}^2 \equiv 1 \pmod{F_m}$ для четных $m \geq 4$ и $\delta(F_m) = 4$, $F_{m-1}^2 \equiv -1 \pmod{F_m}$ для нечетных m , то теорема 3.1 позволяет явно вычислить индуцированные отображения для сдвигов $S_\varepsilon(a, b)$ внутри периода самоподобия:

$$S_\varepsilon(F_m, F_{m-1})^{(2m)} \sim S_{\varepsilon'}(F_m, F_{m-2}), \quad S_\varepsilon(F_m, F_{m-2})^{(2m)} \sim S_{\varepsilon'}(F_m, F_{m-1}) \quad (3.32)$$

для четных $m \geq 4$ и

$$S_\varepsilon(F_m, F_{m-1})^{(m)} \sim S_{\varepsilon'}(F_m, 1), \quad S_\varepsilon(F_m, 1)^{(m)} \sim S_{\varepsilon'}(F_m, F_{m-1})$$

для нечетных $m \geq 4$.

Для любых целых параметров a, b одного знака двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ является сжимающим отображением [2]:

$$I \supset S_\varepsilon(a, b)(I) \supset \cdots \supset S_\varepsilon^k(a, b)(I) \supset \cdots$$

Данная цепь содержит лишь конечное число строгих включений. Аттрактор сложного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ определяется равенством

$$\text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_\varepsilon^k(a, b)(I), \quad (3.33)$$

где $S_\varepsilon^k(a, b)$ – k -кратная композиция сдвига $S_\varepsilon(a, b)$. Некоторую информацию о строении аттрактора $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$ можно получить из теоремы 3.1, если выбрать параметры $a, b \in \mathbb{Z}$, $ab > 0$, с условием, что a делит b . Если в формулах (3.11) и (3.13) порядок верхних производных m делится на период самоподобия $t = t(a)$ последовательности чисел Фибоначчи (2.1), то получим соотношение

$$S_\varepsilon(a, b)^{(m)} \sim S^a \quad (3.34)$$

для четных m и соотношение

$$S_\varepsilon(a, b)^{(m)} \sim S^{-a}$$

для нечетных m , где S – простой сдвиг. По определению аттрактора выполняется равенство $\text{Att}(S^a) = I$ для всех $a \neq 0$, и так как τ иррационально, то сдвиг

$$S^a: x \mapsto x + a\tau \pmod{1}$$

обладает свойством минимальности, т. е. орбита любой точки $x \in I$ плотная в I , или, иначе, сдвиг S^a не имеет собственных замкнутых инвариантных подмножеств в I . Согласно (3.7) верхнее индуцированное отображение двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)^{(m)}$ означает ограничение самого сдвига и его параметра ε на полуинтервал $I^m = [1 - \tau^{-m}, 1)$. Тогда для четных m из соотношений (3.34) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ имеет параметры a, b одного знака, при этом a делит b и m делится на порядок самоподобия $t = t(a)$ последовательности (2.1) чисел Фибоначчи $\text{mod } a$. Тогда выполняется включение

$$I^m \subset \text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) \quad (3.35)$$

для любого ε из полуинтервала $I^m = [1 - \tau^{-m}, 1)$. Кроме того, для каждой точки $x \in I^m$ справедливо равенство

$$(\text{Orb}_\varepsilon(x) \cap I^m)^c = I^m \quad (3.36)$$

для ее орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(x)$, состоящей из элементов $S_\varepsilon^j(a, b)(x)$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Индекс c в равенстве (3.36) обозначает операцию замыкания множества.

3.4. Нижние индуцированные отображения двухцветного сдвига. Как нетрудно заметить, согласно определению (0.3) двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ обладает следующей симметрией:

$$S_\varepsilon(a, b)(x) = S_{\text{inv}(\varepsilon)}(-a, -b)(\text{inv}(x)), \quad (3.37)$$

отвечающей центральной симметрии

$$(x_1, x_2) \mapsto (\text{inv}(x_1), \text{inv}(x_2))$$

единичного квадрата $I^c \times I^c$, где $\text{inv}(x) = 1 - x$ – инволюция единичного интервала $I^c = [0, 1]$. Определение (3.7) верхних индуцированных отображений

$S_\varepsilon(a, b)^{(m)}$ основано на последовательности вложенных друг в друга полуинтервалов $I^m = [\varepsilon_m, 1)$, где $\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m}$. Если в данной последовательности полуинтервалы I^m заменить их образами

$$I_m = \text{inv}(I^m) = (0, 1 - \varepsilon_m] = (0, \tau^{-m}],$$

то (3.7) преобразуется в определение *нижних индуцированных отображений*

$$S_\varepsilon(a, b)_{(m)} = S_\varepsilon(a, b)|_{I_m \times I_m} \quad (3.38)$$

уровня $m = 0, 1, 2, \dots$ для двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(a, b)$, представляющих собой семейство индуцированных отображений $S_\varepsilon(a, b)|_{I_m}: I_m \rightarrow I_m$, зависящих от непрерывного параметра ε из полуинтервала $I_m = (0, \tau^{-m}]$. Симметрия (3.37) связывает нижние (3.38) и верхние (3.7) индуцированные отображения соотношением

$$S_\varepsilon(a, b)_{(m)}(x) = S_{\text{inv}(\varepsilon)}(-a, -b)^{(m)}(\text{inv}(x)), \quad (3.39)$$

позволяющим с помощью теоремы 3.1 доказать для нижних индуцированных отображений $S_\varepsilon(a, b)_{(m)}$ следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ единичного полуинтервала I имеет целые параметры a, b одного знака, и пусть для индекса $m = 0, 1, 2, \dots$ выполняются условия

$$F_{m+1} \equiv F_{m+2} \equiv F \pmod{b}, \quad (3.40)$$

где F_{m+1}, F_{m+2} – числа Фибоначчи и $1 \leq F \leq |b|$. Кроме того, предположим, что $|a| \leq s(a', m)$ для $a' = (|a|F^{-1})_b$ и функции $s(a', m)$ (см. (3.12) и (3.22)). При этих условиях для нижних индуцированных отображений $S_\varepsilon(a, b)_{(m)}$ справедливы следующие утверждения:

1) для четного m имеем

$$S_\varepsilon(a, b)_{(m)} \sim S_{\varepsilon, (a' \text{sign}(a), b)} \quad (3.41)$$

с перенормировкой

$$\varepsilon, = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon_m}; \quad (3.42)$$

2) для нечетного m имеем

$$S_\varepsilon(a, b)_{(m)} \sim S_{\varepsilon, (-a' \text{sign}(a), -b)} \quad (3.43)$$

с той же самой перенормировкой ε , параметра ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим с помощью равенства (3.39) и теоремы 3.1 нижние индуцированные отображения $S_\varepsilon(a, b)_{(m)}$. В случае четного уровня m для верхнего индуцированного отображения из (3.39) по формуле (3.11) получаем соотношение подобия

$$S_{\text{inv}(\varepsilon)}(-a, -b)^{(m)}(\text{inv}(x)) \sim S_{\text{inv}(\varepsilon)'}(-b, a' \text{sign}(-a))(\text{inv}(x)) \quad (3.44)$$

с перенормировкой (3.12)

$$\text{inv}(\varepsilon)' = \frac{\text{inv}(\varepsilon) - \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_m} = 1 - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon_m},$$

из которой вытекает формула сопряжения

$$\text{inv}(\varepsilon)' = \text{inv}(\varepsilon,) \quad (3.45)$$

верхней (3.12) и нижней (3.42) перенормировок параметра $\varepsilon \in I$. Используя данную формулу и симметрию двухцветного сдвига (3.37), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} S_{\text{inv}(\varepsilon)'}(-b, a' \text{sign}(-a))(\text{inv}(x)) \\ = S_{\text{inv}(\varepsilon,)}(-b, a' \text{sign}(-a))(\text{inv}(x)) = S_{\varepsilon,}(a' \text{sign}(a), b). \end{aligned}$$

С другой стороны, по формуле (3.39) верхнее индуцированное отображение из (3.44) равно $S_{\varepsilon}(a, b)_{(m)}(x)$. Поэтому для четного m соотношение подобия (3.41) вытекает из (3.44) и последнего равенства.

В случае нечетного уровня m верхнее индуцированное отображение из равенства (3.39) вычисляется по формуле (3.13). Теорема доказана.

Аналогичными рассуждениями с помощью симметрий (3.37) и (3.39) свойства самоподобия из следствий 3.1–3.3 переносятся на нижние индуцированные отображения (3.38) для двухцветного сдвига $S_{\varepsilon}(a, b)_{(m)}$.

§ 4. Внутренние индуцированные отображения

Самоподобие (3.29) двухцветных сдвигов $S_{\varepsilon}(a, b)$ означает их масштабную периодичность: в малом масштабе они такие же, как и в большом. Это позволяет разбить фазовую диаграмму $\text{Att}(a, b) \sqcup \text{Spir}(a, b)$ (см. (3.30)) на горизонтальные полосы $D_k^m = I \times \mathcal{E}_k^m$, где $\mathcal{E}_k^m = [\varepsilon_{km}, \varepsilon_{(k+1)m})$ и $k = 0, 1, 2, \dots$, самоподобным образом заполняющие всю фазовую диаграмму $\text{Att}(a, b) \sqcup \text{Spir}(a, b)$. Поэтому естественно поставить вопрос о поведении двухцветных сдвигов $S_{\varepsilon}(a, b): I \rightarrow I$ с параметрами ε внутри полуинтервалов $\mathcal{E}_k^m$. Как мы увидим далее (теорема 4.1), для указанных параметров сдвиги $S_{\varepsilon}(a, b)$ эргодичны только на своем аттракторе $\text{Att}(S_{\varepsilon}(a, b)) \subset I$, но не на всем единичном полуинтервале I . Изложим последующий план исследования.

В п. 4.1 рассматривается $S_{\varepsilon}(a, b)$ -орбита $\text{Orb}_{\varepsilon}(I^m(\delta))$ полуинтервала $I^m(\delta) = I^m + \delta \pmod{1}$ и для нее находится не пересекающийся с орбитой $\text{Orb}_{\varepsilon}(I^m(\delta))$ максимально возможной длины полуинтервал $L^m \subset I$, который мы будем называть *лакуной*. Затем с помощью лакуны L^m мы выберем величину сдвига δ и определим для параметра ε полуинтервал J^m , внутри которого сохраняется структура орбиты $\text{Orb}_{\varepsilon}(I^m(\delta))$ и, как следствие, ее мера (лемма 4.1).

Используя указанное свойство, в предложении 4.1 будет доказано, что для всех $\varepsilon \in J^m$ ограничение двухцветного сдвига $S_{\varepsilon}(a, b)$ на орбиту $\text{Orb}_{\varepsilon}(I^m(\delta))$ изоморфно некоторому интегральному изоморфизму T_{ε} , зависящему от параметра ε . Далее, в лемме 4.2 будет показано, что любая точка x из единичного полуинтервала $I = [0, 1)$ за конечное число шагов под действием двухцветного сдвига $S_{\varepsilon}(a, b)$ попадает в орбиту $\text{Orb}_{\varepsilon}(I^m(\delta))$. Следовательно, орбита $\text{Orb}_{\varepsilon}(I^m(\delta))$ совпадает с аттрактором $\text{Att}(S_{\varepsilon}(a, b))$ двухцветного сдвига $S_{\varepsilon}(a, b)$, поэтому ограничение сдвига на аттрактор также изоморфно интегральному преобразованию T_{ε} и в силу этого сдвиг $S_{\varepsilon}(a, b)$ эргодичен на $\text{Att}(S_{\varepsilon}(a, b))$ (теорема 4.1).

4.1. Лакуны. Рассмотрим двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ с целыми параметрами $1 \leq b < a$, $(a, b) = 1$, и пусть для них выполняются сравнения

$$F_{m+1} \equiv b \pmod{a}, \quad F_{m+2} \equiv 0 \pmod{a}. \quad (4.1)$$

Из разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ четного уровня m (см. п. 1.2) выделим пока еще просто абстрактное подмножество $\text{Orb}(I^m) = \text{Orb}(G_0^m) \sqcup \text{Orb}(E_0^m)$, где

$$\text{Orb}(G_0^m) = \{G_0^m, G_b^m, G_{b+a}^m, \dots, G_{b+na}^m, \dots, G_{F_{m+1}-a}^m\} \quad (4.2)$$

– объединение полуинтервалов G_j^m с индексами $j = 0$ и $j = b + na$, $0 \leq n < \frac{F_{m+1}-b}{a}$, и

$$\text{Orb}(E_0^m) = \{E_0^m, E_a^m, \dots, E_{na}^m, \dots, E_{F_{m+2}-a}^m\} \quad (4.3)$$

– объединение полуинтервалов E_i^m с индексами $i = na$, $0 \leq n < \frac{F_{m+2}}{a}$.

Найдем для множества $\text{Orb}(I^m)$ лакуну L^m – максимально возможной длины полуинтервал $L^m \subset I$, примыкающий слева к полуинтервалу G_0^m и непересекающийся с множеством $\text{Orb}(I^m)$.

К решению данной задачи применим алгоритм построения разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$, использующий координаты для образующих их полуинтервалов [1].

АЛГОРИТМ. Справа налево строится последовательность полуинтервалов

$$\dots, G_{k^*}^m, E_{k^*}^m, G_k^m, E_k^m, \dots, G_0^m, E_0^m \quad (4.4)$$

с индексами $k = 0, 1, \dots, F_{m+2} - 1$ по следующему правилу:

1) для четного m переход имеет вид

$$k \mapsto k^* = k + F_m \pmod{F_{m+2}}$$

и из последовательности (4.4) вычеркиваются все полуинтервалы G_k^m с индексами $k \geq F_{m+1}$;

2) для нечетного m переход принимает вид

$$k \mapsto k^* = k + F_{m+1} \pmod{F_{m+2}}$$

и из последовательности (4.4) вычеркиваются полуинтервалы E_k^m с индексами $k \geq F_{m+1}$.

С помощью алгоритма (4.4) лакуну L^m для четного уровня m можно записать как сумму

$$L^m = E_{-(a-1)b}^m \oplus G_{-(a-2)b}^m \oplus E_{-(a-2)b}^m \oplus \dots \oplus G_{-2b}^m \oplus E_{-2b}^m \oplus G_{-b}^m \oplus E_{-b}^m \quad (4.5)$$

прилегающих друг к другу полуинтервалов. При этом полуинтервалы E_k^m имеют индексы

$$k \equiv sF_m \equiv -bs \pmod{F_{m+2}}, \quad (4.6)$$

где $1 \leq s \leq a - 1$. По условию (4.1) параметры a, b взаимно простые и a делит F_{m+2} , следовательно, $k \equiv -bs \not\equiv 0 \pmod{a}$. Согласно (4.4) короткие полуинтервалы G_k^m из разложения (4.5) имеют индексы

$$k \equiv tF_m \equiv -bt \pmod{F_{m+2}}, \quad k < F_{m+1}, \quad (4.7)$$

где $1 \leq t \leq a - 2$. В этом случае $k \equiv -bt \not\equiv b \pmod{a}$, так как по тем же причинам сравнение $-bt \equiv b \pmod{a}$ равносильно $t \equiv a - 1 \pmod{a}$.

Из алгоритма (4.4) вытекает, что полуинтервал L^m , (4.5), примыкает слева к G_0^m , не пересекается с множеством $\text{Orb}(I^m)$ и имеет максимально возможную длину с сохранением указанных свойств. Лакуна L^m содержит $a - 1$ полуинтервалов E_k^m , а также содержит

$$t(a, m) = \sharp \left\{ 1 \leq t \leq a - 2 : \left\{ \frac{tF_m}{F_{m+2}} \right\} < \frac{F_{m+1}}{F_{m+2}} \right\} \quad (4.8)$$

полуинтервалов вида G_k^m и, значит, имеет длину

$$|L^m| = (a - 1)|E_0^m| + t(a, m)|G_0^m|. \quad (4.9)$$

В случае нечетного уровня m рассмотрим множество $\text{Orb}(I^m) = \text{Orb}(E_0^m) \sqcup \text{Orb}(G_0^m)$, где

$$\begin{aligned} \text{Orb}(E_0^m) &= \{E_0^m, E_b^m, E_{b+a}^m, \dots, E_{b+na}^m, \dots, G_{F_{m+1}-a}^m\}, \\ \text{Orb}(G_0^m) &= \{G_0^m, G_a^m, \dots, G_{na}^m, \dots, G_{F_{m+2}-a}^m\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

– объединения полуинтервалов E_j^m и G_i^m с индексами (4.2) и (4.3) соответственно. Для нечетных m лакуны L^m будем искать справа от полуинтервала E_0^m . Тот же алгоритм (4.4) позволяет представить L^m как сумму:

$$L^m = G_{-b}^m \oplus E_{-b}^m \oplus G_{-2b}^m \oplus E_{-2b}^m \oplus \dots \oplus G_{-(a-2)b}^m \oplus E_{-(a-2)b}^m \oplus G_{-(a-1)b}^m, \quad (4.11)$$

состоящую из полуинтервалов G_0^m и E_0^m с индексами (4.6) и (4.7) соответственно. Поэтому L^m имеет длину

$$|L^m| = (a - 1)|G_0^m| + t(a, m)|E_0^m|. \quad (4.12)$$

Таким образом, из формул (4.9), (4.12) и (1.4) выводим, что для любого уровня m длина лакуны L^m вычисляется по формуле

$$|L^m| = (a - 1)\tau^{-(m+1)} + t(a, m)\tau^{-(m+2)}, \quad (4.13)$$

где $t(a, m)$ – функция (4.8).

Разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ не инвариантны [9] относительно действия на них двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$, так как параметр ε может принадлежать внутренности некоторого полуинтервала из $\text{Til}(\varepsilon_m)$. Чтобы согласовать $\text{Til}(\varepsilon_m)$ с действием сдвига $S_\varepsilon(a, b)$, определим зависящее от m и ε вложение разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ в единичный полуинтервал $I = [0, 1]$, полагая

$$\text{Til}(\varepsilon_m, \delta) = t_\delta(\text{Til}(\varepsilon_m)), \quad (4.14)$$

где

$$I \xrightarrow{t_\delta} I : x \mapsto x + \delta \pmod{1}$$

– простой сдвиг полуинтервала I . Если m четное, то выбираем

$$\delta = |E_0^m|, \quad \varepsilon \in J^m = [1 - |G_0^m| - |L^m|, 1 - |G_0^m|]. \quad (4.15)$$

В случае нечетного m на параметры δ и ε налагаем ограничения

$$\delta = \varepsilon - (1 - |E_0^m|), \quad \varepsilon \in J^m = [1 - |E_0^m| - |L^m|, 1 - |E_0^m|], \quad (4.16)$$

где длина лакуны $|L^m|$ вычисляется по формуле (4.13).

ЛЕММА 4.1. Пусть двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ имеет целые параметры $1 \leq b < a$, $(a, b) = 1$, с условием (4.1), и пусть $I^m(\delta) = t_\delta(I^m)$ – образ полуинтервала $I^m = [\varepsilon_m, 1)$ под действием простого сдвига (4.14). Тогда если параметры δ, ε удовлетворяют условиям (4.15), (4.16), то $S_\varepsilon(a, b)$ -орбита $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$ множества $I^m(\delta)$ состоит из t_δ -образов полуинтервалов (4.2), (4.3) и (4.10) для четных и нечетных m соответственно, т.е. орбита $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$ устроена так же, как и построенное в (4.2), (4.3) и (4.10) множество $\text{Orb}(I^m)$, при этом орбита $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$ сохраняет свою структуру для всех параметров $\varepsilon \in J^m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если у единичного полуинтервала I не склеивать концы, то множество $I^m(\delta)$ может быть как одним, так и двумя полуинтервалами. Однако по mod 1 это всегда один полуинтервал, и, как будет видно из доказательства, данный полуинтервал под действием двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ перемещается как единое целое. Таким образом, его орбита $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$ определена корректно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. По условиям леммы выполняются включения

$$\begin{aligned} G_0^m(\delta) \subset I_\varepsilon^+, G_j^m(\delta) \subset I_\varepsilon^- \quad \text{для } j > 0, \\ E_i^m(\delta) \subset I_\varepsilon^- \quad \forall i, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $G_j^m(\delta) = t_\delta(G_j^m)$, $E_i^m(\delta) = t_\delta(E_i^m)$, $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$ и $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$, для четных уровней m и включения

$$\begin{aligned} E_0^m(\delta) \subset I_\varepsilon^+, E_j^m(\delta) \subset I_\varepsilon^- \quad \text{для } j > 0, \\ G_i^m(\delta) \subset I_\varepsilon^- \quad \forall i \end{aligned} \quad (4.18)$$

для нечетных m . Утверждение леммы вытекает из (4.17), (4.18) и определения (0.3) двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$.

4.2. Индуцированные и интегральные преобразования. В этом пункте мы рассмотрим в условиях леммы 4.1 ограничения двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ на множество $I^m(\delta)$ и его $S_\varepsilon(a, b)$ -орбиту $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$. При этом уровень m и параметр ε будут выбираться в зависимости от параметров двухцветного сдвига a, b (см. определение (0.3)).

Для формулировки следующего результата нам потребуется понятие *интегрального изоморфизма* (см., например, [10, с. 27])

$$T_\varepsilon^\pm = T(S^\pm, d_\varepsilon), \quad (4.19)$$

действующего на пространстве $\hat{I}_\varepsilon = \{(x, i) : x \in I, 0 \leq i < d_\varepsilon(x)\}$ по правилу

$$T_\varepsilon^\pm = \begin{cases} (x, i+1), & \text{если } i+1 < d_\varepsilon, \\ (S^\pm(x), 0), & \text{если } i+1 = d_\varepsilon. \end{cases}$$

Здесь $S^{\pm 1}$ – простой сдвиг $x \mapsto x \pm \tau \pmod{1}$ единичного полуинтервала I и функция распределения $d_\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ для четного m задается условиями

$$d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \text{orb}(G_0^m(\delta)), & \text{если } x \in [0, \langle -\tau \rangle), \\ \text{orb}(E_0^m(\delta)), & \text{если } x \in [\langle -\tau \rangle, 1), \end{cases}$$

а для нечетного m – условиями

$$d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \text{orb}(G_0^m(\delta)), & \text{если } x \in [0, \langle \tau \rangle), \\ \text{orb}(E_0^m(\delta)), & \text{если } x \in [\langle \tau \rangle, 1). \end{cases}$$

Обозначим через $\text{orb}(G_0^m(\delta))$, $\text{orb}(E_0^m(\delta))$ количества различных полуинтервалов из $S_\varepsilon(a, b)$ -орбит $\text{Orb}_\varepsilon(G_0^m(\delta))$, $\text{Orb}_\varepsilon(E_0^m(\delta))$. Согласно (4.2), (4.3) и (4.10) имеем

$$\text{orb}(G_0^m(\delta)) = 1 + \frac{F_{m+1} - b}{a}, \quad \text{orb}(E_0^m(\delta)) = \frac{F_{m+2}}{a}$$

для четного уровня m и

$$\text{orb}(G_0^m(\delta)) = \frac{F_{m+2}}{a}, \quad \text{orb}(E_0^m(\delta)) = 1 + \frac{F_{m+1} - b}{a}$$

для нечетного m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $S_\varepsilon(a, b)$ – двухцветный сдвиг (0.3) с целыми взаимно простыми параметрами $1 \leq b < a$, удовлетворяющими сравнениям

$$F_{m+1} \equiv b \pmod{a}, \quad F_{m+2} \equiv 0 \pmod{a}.$$

Тогда имеют место следующие изоморфизмы для индуцированных отображений (см. общее определение (0.13)):

$$S_\varepsilon(a, b)|I^m(\delta) \times J^m \sim S^{\pm 1}, \quad (4.20)$$

где слева выписано семейство отображений, действующих на множестве $I^m(\delta)$ с параметрами ε из полуинтервала J^m (см. (4.15), (4.16)), а справа – простой сдвиг $S: x \mapsto x + \tau \pmod{1}$ или ему обратный сдвиг $S^{-1}: x \mapsto x - \tau \pmod{1}$ для четного или нечетного уровня m соответственно, и

$$S_\varepsilon(a, b)|\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)) \times J^m \sim T_\varepsilon^\pm, \quad (4.21)$$

при этом отображение слева действует на $S_\varepsilon(a, b)$ -орбиту $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$ множества $I^m(\delta)$, а $T_\varepsilon^\pm$ – семейство интегральных изоморфизмов (4.19) с теми же параметрами $\varepsilon \in J^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4.1 двухцветные сдвиги $S_\varepsilon(a, b)$ с параметрами ε из полуинтервала J^m порождают орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$, имеющие ту же самую структуру (4.2), (4.3) и (4.10), что и множество $\text{Orb}(I^m)$. Отсюда и из определения (4.19) интегральных изоморфизмов $T_\varepsilon^\pm$, а также из свойства подобия (3.4) и (3.6) для индуцированных отображений $S|I^m \sim S^{\pm 1}$ простого сдвига S вытекают изоморфизмы (4.20) и (4.21).

4.3. Области притяжения. Согласно предложению 4.1 мы уже знаем поведение на множестве $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$ двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ с параметрами $\varepsilon \in J^m$. Теперь если удастся доказать совпадение множества $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$ с аттрактором $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$, то отсюда и из изоморфизма (4.21) будет следовать эргодичность двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ на его аттракторе при тех же самых значениях параметра ε . Из этого факта можно вывести некоторые свойства распределения $S_\varepsilon(a, b)$ -орбит точек x из полуинтервала $I = [0, 1)$, если будет

известно, что любая точка $x \in I$ под действием сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ за конечное число шагов попадет в множество $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$. Для этого достаточно выбирать точки x из дополнительного множества

$$\text{Spir}_\varepsilon = I^m \setminus \text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)) \quad (4.22)$$

и, тем самым, убедиться, что Spir_ε является областью притяжения для $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$.

ЛЕММА 4.2. *Предположим, что двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ удовлетворяет условиям предложения 4.1 и его параметр ε принадлежит полуинтервалу J^m . Тогда для любой точки x из единичного полуинтервала I существует такой зависящий от параметров ε, a, b номер $k = k(\varepsilon, a, b) = 0, 1, 2, \dots$, что $S_\varepsilon^k(a, b)(x)$ содержится в $S_\varepsilon(a, b)$ -орбите $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$ множества $I^m(\delta)$.*

Из леммы 4.2 и предложения 4.1 вытекает следующий основной результат.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a, b)$ удовлетворяет условиям предложения 4.1 и его параметр ε принадлежит полуинтервалу J^m из (4.15), (4.16), и пусть $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$ – аттрактор (3.33) сдвига $S_\varepsilon(a, b)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) для аттрактора $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$ выполняется равенство

$$\text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) = \text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)) \quad (4.23)$$

при всех значениях параметра $\varepsilon \in J^m$, где δ определены равенствами (4.15), (4.16);

2) для индуцированных отображений имеет место изоморфизм

$$S_\varepsilon(a, b)|_{\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))} \times J^m \sim T_\varepsilon^\pm, \quad (4.24)$$

где слева выписано семейство отображений с параметрами $\varepsilon \in J^m$, действующих на множестве $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$, а справа – семейство интегральных изоморфизмов $T_\varepsilon^\pm$, (4.19), с теми же параметрами ε ;

3) для всех $\varepsilon \in J^m$ ограничение двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(a, b)$ на аттрактор

$$S_\varepsilon(a, b): \text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) \rightarrow \text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$$

эргодично относительно ограничения меры Лебега на $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) \subset I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению аттрактора (3.33) выполняется равенство

$$\text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) = S_\varepsilon^k(a, b)(\text{Att}(S_\varepsilon(a, b)))$$

для любого целого $k \geq 0$.

С другой стороны, по лемме 4.2 для любого $x \in I$ найдется $k \geq 0$ с условием $S_\varepsilon^k(a, b)(x) \in \text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$. Отсюда и из предыдущего равенства вытекает включение

$$\text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) \subset \text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)). \quad (4.25)$$

Чтобы доказать обратное включение, воспользуемся изоморфизмом (4.21). Поскольку $T_\varepsilon^\pm$ – изоморфизмы, то $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)) = S_\varepsilon^k(a, b)(\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)))$ для любого $k \geq 0$, значит, $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)) \subset S_\varepsilon^k(a, b)(I)$. Поэтому в силу (3.33) можем записать включение

$$\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)) \subset \bigcap_{k \geq 0} S_\varepsilon^k(a, b)(I) = \text{Att}(S_\varepsilon(a, b)),$$

из которого в силу (4.25) вытекает равенство (4.23). Используя данное равенство и (4.21), получаем изоморфизм (4.24). В (4.19) интегральные отображения $T_\varepsilon^\pm$ строятся на базе эргодичного простого сдвига $S: x \mapsto x + \tau \pmod{1}$, следовательно, отображения $T_\varepsilon^\pm$ являются эргодичными (см., например, [10]). Отсюда и из изоморфизма (4.21) вытекает эргодичность ограничения двухцветного сдвига на аттрактор $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$ в утверждении 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.2. Выпишем условия предложения 4.1, налагаемые на параметры a и b :

$$1 \leq b < a, \quad (a, b) = 1, \quad b \leq F_{m+1}, \quad a \leq F_{m+2}. \quad (4.26)$$

Поскольку $F_{m+1} \equiv b \pmod{a}$ и $F_{m+1} > 0$, то $F_{m+1} = b + ka$ для некоторого целого $k \geq 0$. Отсюда вытекает третье условие из (4.26). Четвертое условие следует из делимости числа Фибоначчи F_{m+2} на a .

Для четного и нечетного уровней m лакуны L^m из (4.5) и (4.11) симметричны, поэтому можем ограничиться рассмотрением случая *четного* m .

Используя разложение (4.5) и вложение t_δ , (4.14), можем представить лакуну $L^m(\delta)$ следующим образом:

$$L^m(\delta) = E_{k_{a-1}}^m(\delta) \oplus G_{k_{a-2}}^m(\delta) \oplus E_{k_{a-2}}^m(\delta) \oplus \cdots \oplus G_{k_1}^m(\delta) \oplus E_{k_1}^m(\delta), \quad (4.27)$$

где полуинтервалы $E_k^m(\delta)$ имеют в силу (4.6) индексы

$$k_s = sF_m \equiv -bs \pmod{F_{m+2}}, \quad 1 \leq s \leq a-1,$$

а на индексы полуинтервалов $E_k^m(\delta)$ ввиду (4.7) наложены дополнительные ограничения

$$k_s < F_{m+1}, \quad 1 \leq s \leq a-2.$$

Любое ε из полуинтервала J^m в силу (4.15) принадлежит одному из полуинтервалов $E_{k_s}^m(\delta)$ или $G_{k_s}^m(\delta)$ разложения (4.27). Доказательство будем проводить индукцией по $s = 1, 2, \dots, a-1$, полагая, что ε последовательно принадлежит полуинтервалам $E_{k_1}^m(\delta), G_{k_1}^m(\delta), \dots, E_{k_{a-1}}^m(\delta)$ в указанном порядке.

Примем следующее *соглашение*. Любая точка x из полуинтервала $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$ переводится сдвигом $S_\varepsilon(a, b)$ в точку $x' \equiv x + a\tau \pmod{1}$, где $a = 1, 2, \dots$ и $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ иррационально. Следовательно, через конечное число итераций точка x попадает в дополнительный к I_ε^- полуинтервал $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$, поэтому, не ограничивая общности, можем считать точку x в формулировке леммы 4.2 с самого начала принадлежащей множеству

$$\text{Spir}_\varepsilon \cap I_\varepsilon^+ = L^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+,$$

где Spir_ε – множество (4.22).

Случай 1. Пусть $s = 1$, $\varepsilon \in E_{k_1}^m(\delta)$ и начальная точка x принадлежит $E_{k_1}^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+$. Согласно (4.6) имеем $k_1 = F_m$, а по формуле (4.26) получаем $k_1 + b \leq F_{m+2}$. Поэтому возможны два подслучая: 1) $k_1 + b < F_{m+2}$ или 2) $k_1 + b = F_{m+2}$.

В подслучае 1) точка x переводится сдвигом $S_\varepsilon(a, b)$ в точку x' из полуинтервала $E_{k'_1}^m(\delta)$ с индексом $k'_1 = k_1 + b$, и так как $k'_1 \equiv 0 \pmod{a}$, то в силу (4.3) точка x' вошла в орбиту $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$.

В подслучае 2) из разбиения $G_0^m \oplus E_0^m = E_{F_{m+2}}^m \oplus G_{F_{m+1}}^m$ (см. (3.2)) следует, что x переводится в точку x' , принадлежащую полуинтервалу $I^m(\delta) = G_0^m \oplus E_0^m$ также из орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$.

Итак, в любом случае полуинтервалы, по которым точка x последовательно перемещается двухцветным сдвигом $S_\varepsilon(a, b)$, образуют цепи

$$E_{k_1}^m(\delta) \implies E_{k'_1}^m(\delta) \subset \text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)), \quad E_{k_1}^m(\delta) \implies I^m(\delta) \subset \text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)), \quad (4.28)$$

где двойные стрелки $\implies$ указывают на сдвиг из полуинтервала I_ε^+ .

Случай 2. Предположим, что $s = 1$, $\varepsilon \in G_{k_1}^m(\delta)$ и начальная точка x выбирается из множества $G_{k_1}^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+$. Заметим, что если бы точка x принадлежала предыдущему множеству $E_{k_1}^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+$, совпадающему в данном случае с полуинтервалом $E_{k_1}^m(\delta)$, то ее орбита (4.28) не изменилась бы.

Рассмотрим по отдельности подслучаи 1) $k_1 + b < F_{m+1}$ и 2) $k_1 + b \geq F_{m+1}$.

В подслучае 1) точка x отображается в точку x' из полуинтервала $G_{k'_1}^m(\delta)$ с индексом $k'_1 = k_1 + b < F_{m+1}$, $k'_1 \equiv 0 \pmod{a}$. Поскольку по условию леммы 4.2 $F_{m+1} \equiv b \pmod{a}$, то найдется наименьшее целое $t_{\min} \geq 0$, удовлетворяющее неравенствам $b + at_{\min} < F_{m+1}$ и $k_1 + b + at_{\min} \geq F_{m+1}$. Поэтому ввиду (3.2) точка x' сдвинется в точку x'' из полуинтервала $E_{k''_1}^m(\delta)$ с индексом

$$k''_1 = k'_1 + at_{\min} - F_{m+1} = k_1 + (b + at_{\min} - F_{m+1}) \leq k_1.$$

Поскольку $k''_1 \equiv k_1 \pmod{a}$, то точка x'' , в свою очередь, переводится в точку x''' из предыдущего полуинтервала $E_{k_1}^m(\delta)$.

В подслучае 2) ввиду (3.2) точка x' принадлежит полуинтервалу $E_{k'_1}^m(\delta)$ с индексом $k'_1 = k_1 + (b - F_{m+1}) \leq k_1$, следовательно, x' отображается в точку x'' снова из полуинтервала $E_{k_1}^m(\delta)$.

В рассматриваемом случае цепи полуинтервалов, по которым перемещается начальная точка x , имеют вид

$$G_{k_1}^m(\delta) \implies G_{k'_1}^m(\delta) \longrightarrow E_{k''_1}^m(\delta) \longrightarrow E_{k_1}^m(\delta), \quad G_{k_1}^m(\delta) \implies E_{k'_1}^m(\delta) \longrightarrow E_{k_1}^m(\delta), \quad (4.29)$$

где двойные и простые стрелки указывают на сдвиги из полуинтервалов I_ε^+ и I_ε^- соответственно.

Теперь рассмотрим *индукционный переход* $s \mapsto s + 1$ для $s = 1, 2, \dots, a - 2$. Лакуна $L^m(\delta)$ может иметь одно из следующих разложений:

$$E_{k_{s+1}}^m(\delta) \oplus G_{k_s}^m(\delta), \quad G_{k_{s+1}}^m(\delta) \oplus E_{k_{s+1}}^m(\delta) \oplus G_{k_s}^m(\delta), \quad (4.30)$$

$$E_{k_{s+1}}^m(\delta) \oplus E_{k_s}^m(\delta), \quad G_{k_{s+1}}^m(\delta) \oplus E_{k_{s+1}}^m(\delta) \oplus E_{k_s}^m(\delta). \quad (4.31)$$

Доказательство индукционного перехода $s \mapsto s + 1$ зависит от принадлежности полуинтервала $G_{k_s}^m(\delta)$ лакуне $L^m(\delta)$.

Далее рассмотрим случаи 3, 4, отвечающие разложениям (4.30), и случаи 5, 6, отвечающие разложениям (4.31).

Случай 3. Пусть параметр ε принадлежит полуинтервалу $E_{k_{s+1}}^m(\delta)$ и начальная точка выбирается из пересечения $E_{k_{s+1}}^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+$. Поскольку лакуна $L^m(\delta)$ содержит полуинтервал $G_{k_s}^m(\delta)$ из (4.30), то $k_s < F_{m+1}$, а следующий индекс k_{s+1} равен $k_s + F_m < F_{m+2}$. Рассмотрим два подслучая: 1) $k_{s+1} + b < F_{m+2}$ и 2) $k_{s+1} + b \geq F_{m+2}$.

В подслучае 1) точка x отображается в точку x' из полуинтервала $E_{k'_{s+1}}^m(\delta)$ с индексом $k'_{s+1} = k_{s+1} + b = k_s + F_m + b$. Поэтому существует $t_{\min} \geq 0$ такое, что $b + at_{\min} \leq F_{m+1}$ и $k_s + F_m + b + at_{\min} \geq F_{m+2}$. Отсюда и из (3.2) заключаем, что x' переводится сдвигом $S_\varepsilon(a, b)$ в точку x'' , принадлежащую сумме прилегающих друг к другу полуинтервалов $G_{k''_{s+1}}^m(\delta) \oplus E_{k''_{s+1}}^m(\delta)$ с индексом $k''_{s+1} = k_s + F_m + b + at_{\min} - F_{m+2}$. Поскольку индекс $k''_{s+1} = k_s + (b + at_{\min} - F_{m+1})$ согласно выбору $t_{\min}$ не превосходит k_s и при этом $k''_{s+1} \equiv k_s \pmod{a}$, то x'' отображается в x''' из суммы полуинтервалов $G_{k_s}^m(\delta) \oplus E_{k_s}^m(\delta)$.

В подслучае 2) точка x сразу попадает в множество $G_{k'_{s+1}}^m(\delta) \oplus E_{k'_{s+1}}^m(\delta)$, где индекс $k'_{s+1} = k_{s+1} + b - F_{m+2} = k_s + (b - F_{m+1})$ не превосходит k_s .

В любом случае начальная точка x перемещается вдоль следующих цепей:

$$\begin{aligned} E_{k_{s+1}}^m(\delta) &\Rightarrow E_{k'_{s+1}}^m(\delta) \longrightarrow G_{k''_{s+1}}^m(\delta) \oplus E_{k''_{s+1}}^m(\delta) \longrightarrow G_{k_s}^m(\delta) \oplus E_{k_s}^m(\delta), \\ E_{k_{s+1}}^m(\delta) &\Rightarrow G_{k'_{s+1}}^m(\delta) \oplus E_{k'_{s+1}}^m(\delta) \longrightarrow G_{k_s}^m(\delta) \oplus E_{k_s}^m(\delta). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Случай 4. Согласно схеме (4.30) имеем $\varepsilon \in G_{k_{s+1}}^m(\delta)$, x из множества $G_{k_{s+1}}^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+$ и $s \leq a-3$, поскольку ε принадлежит полуинтервалу J^m из (4.15). Так же, как и в случае 3, имеем $k_{s+1} = k_s + F_m$, но из существования в лакуне $L^m(\delta)$ полуинтервала $G_{k_{s+1}}^m(\delta)$ следует неравенство $k_{s+1} < F_{m+1}$. Действие сложного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$ обусловлено двумя условиями: 1) $k_{s+1} + b < F_{m+1}$ и 2) $k_{s+1} + b \geq F_{m+1}$.

В подслучае 1) точка x переводится в x' из полуинтервала $G_{k'_{s+1}}^m(\delta)$ с индексом $k'_{s+1} = k_{s+1} + b$. Далее, выбираем $t_{\min} \geq 0$ с условиями

$$b + at_{\min} \leq F_{m+1}, \quad k_{s+1} + b + at_{\min} \geq F_{m+1}.$$

Тогда точка x' сдвигается в точку x'' из полуинтервала $E_{k''_{s+1}}^m(\delta)$ с индексом $k''_{s+1} = k'_{s+1} + at_{\min} - F_{m+1}$, удовлетворяющим неравенству

$$k''_{s+1} = k_{s+1} + (b + at_{\min} - F_{m+1}) \leq k_{s+1}$$

и сравнению $k''_{s+1} \equiv k_{s+1} \pmod{a}$.

В подслучае 2) точка x' попадает в полуинтервал $E_{k'_{s+1}}^m(\delta)$, индекс которого $k'_{s+1} = k_{s+1} + b - F_{m+1}$ согласно соотношению (4.27) также удовлетворяет неравенству $k'_{s+1} \leq k_{s+1}$.

Пути перемещения начальной точки x теперь имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} G_{k_{s+1}}^m(\delta) &\Rightarrow G_{k'_{s+1}}^m(\delta) \longrightarrow E_{k''_{s+1}}^m(\delta) \longrightarrow E_{k_{s+1}}^m(\delta), \\ G_{k_{s+1}}^m(\delta) &\Rightarrow E_{k'_{s+1}}^m(\delta) \longrightarrow E_{k_{s+1}}^m(\delta). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Для полноты доказательства леммы осталось рассмотреть индукционный переход в двух случаях (4.31).

Случай 5. Согласно (4.31) параметр ε принадлежит полуинтервалу $E_{k_{s+1}}^m(\delta)$, а начальная точка x – множеству $E_{k_{s+1}}^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+$. Поскольку лакуна $L^m(\delta)$ не содержит полуинтервал $G_{k_s}^m(\delta)$, то $k_s \geq F_{m+1}$, и поэтому

$$k_{s+1} = k_s + F_m - F_{m+2} = k_s F_{m+1}.$$

Индекс k_{s+1} не превосходит F_{m+2} , значит, $k_{s+1} = k_s - F_{m+1} < F_m$. Отсюда и из (4.27) можем заключить, что начальная точка x сдвигается в точку x' из полуинтервала $E_{k'_{s+1}}^m(\delta)$ с индексом

$$k'_{s+1} = k_{s+1} + b = k_s + (b - F_{m+1}),$$

не превосходящим k_s , и $k'_{s+1} \equiv k_s \pmod{a}$. Таким образом, видим, что перемещение начальной точки x возможно лишь вдоль единственной цепи

$$E_{k_{s+1}}^m(\delta) \implies E_{k'_{s+1}}^m(\delta) \longrightarrow E_{k_s}^m(\delta). \quad (4.34)$$

Случай 6. Из (4.31) следует, что $\varepsilon \in G_{k_{s+1}}^m(\delta)$ и начальная точка x принадлежит пересечению $G_{k_{s+1}}^m(\delta) \cap I_\varepsilon^+$. По тем же причинам, что и в случае 5, индекс k_{s+1} меньше F_m . Это обстоятельство обеспечивает присутствие полуинтервала $G_{k_{s+1}}^m(\delta)$ в лакуне $L^m(\delta)$. Возможны два подслучая: 1) $k_{s+1} + b < F_{m+1}$ и 2) $k_{s+1} + b \geq F_{m+1}$.

В подслучае 1) точка x переводится в точку x' из полуинтервала $G_{k'_{s+1}}^m(\delta)$ с индексом $k'_{s+1} = k'_{s+1} + b$. Затем выбираем $t_{\min} \geq 0$ с условиями $b + at_{\min} \leq F_{m+1}$ и $k_{s+1} + b + at_{\min} \geq F_{m+1}$. Следующей точкой будет x'' из полуинтервала $E_{k''_{s+1}}^m(\delta)$ с индексом

$$k''_{s+1} = k'_{s+1} + at_{\min} - F_{m+1} = k_{s+1} + (b + at_{\min} - F_{m+1}) \leq k_{s+1},$$

сравнимым с индексом $k_{s+1} \pmod{a}$.

В подслучае 2) имеем $k'_{s+1} = k_{s+1} + (b - F_{m+1}) \leq k_{s+1}$. Следовательно, перемещение начальной точки x возможно лишь вдоль двух цепей:

$$\begin{aligned} G_{k_{s+1}}^m(\delta) &\implies G_{k'_{s+1}}^m(\delta) \longrightarrow E_{k''_{s+1}}^m(\delta) \longrightarrow E_{k_{s+1}}^m(\delta), \\ G_{k_{s+1}}^m(\delta) &\implies E_{k'_{s+1}}^m(\delta) \longrightarrow E_{k_{s+1}}^m(\delta). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Согласно (4.28)–(4.35) начало $S_\varepsilon(a, b)$ -орбиты

$$x \rightarrow x' \rightarrow x'' \rightarrow \dots$$

для любой точки x из множества $L^m(\delta) \cap I^+$ не зависит от выбора значения параметра ε из полуинтервала J^m , определенного в (4.15). Учитывая указанное свойство орбит, завершаем доказательство леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Скорость сжатия единичного полуинтервала $I = [0, 1)$ под действием двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$ для всех значений параметра $\varepsilon \in I$ исследована в [11]. В этой же работе вычислено точное значение для максимального числа шагов $k(\varepsilon, 2, 1)$ из леммы 4.2.

§ 5. Частотное распределение

Для всех значений параметра ε из полуинтервала J^m согласно (4.23) имеет место равенство $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta)) = \text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$. Здесь $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$ – аттрактор (3.33) двухцветного сдвига $S_\varepsilon(a, b)$, обладающий в силу леммы 4.2 свойством

$$\text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) = \bigcap_{0 \leq k \leq k(\varepsilon, a, b)} S_\varepsilon^k(a, b)(I) = S_\varepsilon^{k(\varepsilon, a, b)}(a, b)(I).$$

Из указанных равенств и теоремы 4.1 следует

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $S_\varepsilon(a, b)$ – двухцветный сдвиг (0.3) с целыми взаимно простыми параметрами $1 \leq b < a$, удовлетворяющими сравнениям

$$F_{m+1} \equiv b \pmod{a}, \quad F_{m+2} \equiv 0 \pmod{a},$$

и пусть его параметр ε принадлежит полуинтервалу J^m (см. (4.15), (4.16)). Тогда для любых x из $I = [0, 1)$ существует не зависящий от выбора начальной точки x предел

$$\nu_\varepsilon(\theta_1, \theta_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sharp \{k: \theta_1 \leq S_\varepsilon^k(a, b)(x) \leq \theta_2, k = 0, 1, \dots, n-1\}$$

– частота попадания точек $S_\varepsilon(a, b)$ -орбиты x в интервал $[\theta_1, \theta_2] \subset I$. Для $\nu_\varepsilon(\theta_1, \theta_2)$ имеет место явная формула

$$\nu_\varepsilon(\theta_1, \theta_2) = \frac{|\text{Att}(S_\varepsilon(a, b)) \cap [\theta_1, \theta_2]|}{|\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))|}, \quad (5.1)$$

где $|\cdot|$ – мера Лебега на единичной окружности $C \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Далее нас будет интересовать диагональная частота $\nu_\varepsilon = \nu_\varepsilon(0, \varepsilon)$, т.е. частота пребывания точек $S_\varepsilon(a, b)$ -орбиты произвольной точки $x \in I$ в полуинтервале $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$, где согласно (0.3) двухцветный сдвиг имеет вид $S_\varepsilon(a, b): x \mapsto x + a\tau \pmod{1}$. Для ν_ε формулу (5.1) можно переписать в следующем виде:

$$\nu_\varepsilon = \frac{|\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))^-|}{|\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))|}, \quad (5.2)$$

где через $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))^-$ обозначено пересечение аттрактора $\text{Att}(S_\varepsilon(a, b))$ с полуинтервалом I_ε^- .

Проверим содержательность теоремы 5.1 на примере бесконечной серии сложных сдвигов $S_\varepsilon(F_n, F_{n-1})$ для $n \geq 3$. Последовательность чисел Фибоначчи $F_1, F_2, \dots, F_m, \dots \pmod{F_n}$ имеет в силу формул (2.13) период

$$T(F_n) = \begin{cases} 3, & \text{если } n = 3, \\ 2k, & \text{если } n \geq 4, n \text{ четное}, \\ 4k, & \text{если } n \geq 4, n \text{ нечетное}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Поэтому сравнения

$$F_{m+1} \equiv F_{n-1} \pmod{F_n}, \quad F_{m+2} \equiv 0 \pmod{F_n}$$

выполняются тогда и только тогда, когда уровень m разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ принадлежит прогрессии

$$m \equiv n - 2 \pmod{T(F_n)}. \quad (5.4)$$

Орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$, лакуны $L^m(\delta)$ и внутренние индуцированные отображения для двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(F_n, F_{n-1})$ согласно формулам (4.20), (4.21) симметричны для четных и нечетных уровней m . Поэтому можем ограничиться рассмотрением четных m .

Длину лакуны $L^m(\delta)$ вычисляем по формуле (4.13):

$$|L^m(\delta)| = (F_n - 1)\tau^{-(m+1)} + t(F_n, m)\tau^{-(m+2)},$$

при этом согласно (4.8) имеем

$$t(F_n, m) = \# \left\{ 1 \leq t \leq F_n - 2 : \left\{ \frac{tF_m}{F_{m+2}} \right\} < \frac{F_{m+1}}{F_{m+2}} \right\}.$$

Покажем, что значение функции $t(F_n, m)$ не зависит от параметра m , удовлетворяющего условию (5.4). Для $m = n - 2$ последняя формула принимает вид

$$t(F_n, n - 2) = \# \left\{ 1 \leq t \leq F_n - 2 : \left\{ \frac{tF_{n-2}}{F_n} \right\} < \frac{F_{n-1}}{F_n} \right\}.$$

Вычислим $t(F_n, n - 2)$ с помощью алгоритма (см. п. 4.1) построения разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$. Так, если расширить интервал $0 \leq t \leq F_n - 1$, то правая часть в равенстве для $t(F_n, n - 2)$ станет равной F_{n-1} . Легко видеть, что неравенство для дробных долей выполняется, если $t = 0$, и не выполняется, если $t = F_n - 1$. Отсюда выводим равенство

$$t(F_n, n - 2) = F_{n-1} - 1$$

для $n \geq 3$.

Разбиение Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ состоит из F_{m+1} коротких и F_{m+2} длинных полуинтервалов. В работе [1] было доказано, что не только сами числа Фибоначчи F_m , но и разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ удовлетворяют аналогичному некоммутативному рекуррентному соотношению Фибоначчи

$$\text{Til}^+(\varepsilon_{m+2}) = \tau^{-1} \text{Til}^+(\varepsilon_{m+1}) \oplus \tau^{-2} \text{Til}^+(\varepsilon_m),$$

где $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ – сопряженное с $\text{Til}(\varepsilon_m)$ разбиение, получающееся перестановкой местами двух крайних правых полуинтервалов в разбиении $\text{Til}(\varepsilon_m)$, и знаком $\oplus$ обозначена операция прикладывания первого разбиения, сжатого в τ^{-1} раз, ко второму разбиению, сжатому в τ^{-2} раз.

Из конструкции лакун L^m , алгоритма из п. 4.1 и рекуррентного соотношения вытекает независимость функции $t(F_n, m)$ от параметра m из прогрессии (5.4). Учитывая указанную инвариантность и равенство для функции $t(F_n, n - 2)$, получаем следующую явную формулу:

$$t(F_n, m) = F_{n-1} - 1, \quad (5.5)$$

справедливую для всех $n \geq 3$ и $m \equiv n - 2 \pmod{T(F_n)}$. С помощью этой формулы находим длину лакуны:

$$|L^m(\delta)| = \tau^{-m}(\tau^{n-2} - 1). \quad (5.6)$$

Согласно определению (4.2), (4.3) и лемме 4.1 мера орбиты $\text{Orb}(I^m)$ совпадает с мерой орбит $\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))$. Поэтому можем записать

$$|\text{Orb}_\varepsilon(I^m(\delta))| = |G_0^m(\delta)| \text{orb}_\varepsilon(G_0^m(\delta)) + |E_0^m(\delta)| \text{orb}_\varepsilon(E_0^m(\delta)),$$

где

$$\text{orb}_\varepsilon(G_0^m(\delta)) = 1 + \frac{F_{m+1} - F_{n-1}}{F_n}, \quad \text{orb}_\varepsilon(E_0^m(\delta)) = \frac{F_{m+2}}{F_n}$$

– количества полуинтервалов, образующих орбиты $\text{Orb}_\varepsilon(G_0^m(\delta))$ и $\text{Orb}_\varepsilon(E_0^m(\delta))$ соответственно, и длины полуинтервалов $|G_0^m(\delta)| = |G_0^m|$, $|E_0^m(\delta)| = |E_0^m|$ вычисляются по формулам (1.4). Отсюда и из равенства (4.23) находим меру аттрактора:

$$|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))| = \frac{1}{F_n}(1 + F_{n-2}\tau^{-(m+2)}) \quad (5.7)$$

двухцветного сдвига $S_\varepsilon(F_n, F_{n-1})$, когда его параметр ε принадлежит полуинтервалу

$$J^m = [1 - \tau^{-(m+2)} - \tau^{-m}(\tau^{n-2} - 1), 1 - \tau^{-(m+2)}) \quad (5.8)$$

из (4.15). Поскольку

$$\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))^- = \text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1})) \setminus \{G_0^m(\delta)\},$$

мера данного множества в силу (5.7) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} |\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))^-| &= \frac{1}{F_n}(1 + F_{n-2}\tau^{-(m+2)}) - \tau^{-(m+2)} \\ &= \frac{1}{F_n}(1 - F_{n-1}\tau^{-(m+2)}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $S_\varepsilon(F_n, F_{n-1})$ – двухцветный сдвиг с параметром ε из полуинтервала J^m (см. (5.8)), где

$$m \equiv n - 2 \pmod{T(F_n)}, \quad n \geq 3,$$

и $T(F_n)$ – период (5.3). Тогда независимо от выбора начальной точки x из полуинтервала $I = [0, 1)$ частота попадания ν_ε точек ее $S_\varepsilon(F_n, F_{n-1})$ -орбиты в полуинтервал $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$ вычисляется по формуле

$$\nu_\varepsilon = \frac{1 - F_{n-1}\tau^{-(m+2)}}{1 + F_{n-2}\tau^{-(m+2)}} \quad (5.10)$$

или по формуле

$$\nu_\varepsilon = 1 - \frac{\tau^{-(m+2)}}{|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))|}, \quad (5.11)$$

связывающей частоту ν_ε с мерой аттрактора $|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))|$ (см. (5.7)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (5.10) получается подстановкой равенства (5.7) и второго равенства (5.9) в формулу (5.2) для диагональной частоты ν_ε . Если использовать (5.7) и первое равенство (5.9), то получим формулу связи (5.11).

Используя формулы (5.10) и (5.11), получаем следствия 0.1–0.3.

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, “Одномерные разбиения Фибоначчи”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:2 (2007), 89–122; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “One-dimensional Fibonacci tilings”, *Izv. Math.*, **71**:2 (2007), 307–340.
2. H. Suzuki, Sh. Ito, K. Aihara, “Double rotations”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **13**:2 (2005), 515–532.
3. M. Boshernitzan, I. Kornfeld, “Interval translation mappings”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **15**:5 (1995), 821–832.
4. H. Bruin, S. Troubetzkoy, “The Gauss map on a class of interval translation mappings”, *Israel J. Math.*, **137**:1 (2003), 125–148.
5. A. V. Shutov, “On the distribution of the two-color shift values modulo one”, *Abstracts of 5th International Algebraic Conference in Ukraine* (Odessa), 2005.
6. С. Б. Гашков, В. Н. Чубариков, *Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений*, Высшая школа, М., 2000.
7. D. D. Wall, “Fibonacci series modulo m ”, *Amer. Math. Monthly*, **67**:6 (1960), 525–532.
8. З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, 3-е изд., Наука, М., 1985; англ. пер. 2-го изд.: A. I. Borevich, I. R. Shafarevich, *Number theory*, Academic Press, New York–London, 1966.
9. V. G. Zhuravlev, *One-dimensional Fibonacci tilings and derivatives of two-colour rotations of a circle*, Preprint Max-Planck-Institut für Mathematik, 2004.
10. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980; англ. пер.: I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, Ya. G. Sinai, *Ergodic theory*, Grundlehren Math. Wiss., **245**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
11. В. Г. Журавлев, “Область притяжения для аттрактора двухцветного поворота окружности”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 22, Записки науч. сем. ПОМИ, **350**, ПОМИ, СПб., 2007, 89–138; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “Attraction domain for the attractor of a two-color circle rotation”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **150**:3 (2008), 2056–2083.

В. Г. ЖУРАВЛЕВ (V. G. ZHURAVLEV)
Владимирский государственный гуманитарный
университет
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило в редакцию
20.07.2004
03.06.2008