Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Галатенко, Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 1, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/im622>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:59:38

УДК 517.518+517.982

В. В. Галатенко

Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов

Изучаются орторекурсивные разложения с ошибками в вычислении коэффициентов. Доказано, что если система элементов пространства со скалярным произведением удовлетворяет определенным требованиям, то орторекурсивное разложение по этой системе абсолютно устойчиво к широкому классу относительных и абсолютных вычислительных погрешностей (ошибок), а также абсолютно устойчиво к малым изменениям системы.

Библиография: 8 наименований.

§ 1. Введение

Орторекурсивные разложения, являющиеся обобщением классических ортогональных разложений, были впервые рассмотрены Т. П. Лукашенко (см. [1], [2]). Напомним определение и некоторые свойства орторекурсивных разложений.

Пусть $(H, (\cdot, \cdot))$ – пространство со скалярным произведением над полем действительных или комплексных чисел, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система ненулевых элементов H , f – некоторый элемент H . Индуктивно определим последовательность остатков разложения $\{r_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов разложения $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим

$$r_0 = f; \quad (1)$$

если уже определен остаток r_n , то положим

$$\hat{f}_{n+1} = \frac{(r_n, e_{n+1})}{(e_{n+1}, e_{n+1})}, \quad (2)$$

$$r_{n+1}(f) = r_n(f) - \hat{f}_{n+1}e_{n+1} = f - \sum_{k=1}^{n+1} \hat{f}_k e_k. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Формальный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ называется *орторекурсивным разложением элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$* .

ТЕОРЕМА 1 [2]. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система ненулевых элементов H , f – некоторый элемент H , $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ – орторекурсивное разложение f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Справедливы следующие утверждения:

(а) для любого натурального числа N выполнено равенство

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N \hat{f}_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2$$

(аналог тождества Бесселя);

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02-01-00420) и программы “Ведущие научные школы РФ” (проект НШ-1657.2003.1).

(b) имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2 \leq \|f\|^2$$

(аналог неравенства Бесселя);

(с) равенство $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2 = \|f\|^2$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо равенство $f = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ (эквивалентность равенства Парсеваля сходимости орторекурсивного разложения к разлагаемому элементу).

Отметим, что в силу формулы (3) равенство $f = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ эквивалентно условию $r_n(f) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна, то орторекурсивное разложение по ней совпадает с разложением в классический ряд Фурье по этой системе. Следовательно, если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ еще и замкнута (т.е. замыкание ее линейной оболочки совпадает с H), то для любого элемента $f \in H$ выполнено равенство $f = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$, или, эквивалентно, орторекурсивное разложение f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f . Однако для любой последовательности чисел $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, отличной от $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ либо расходится, либо сходится к элементу, отличному от f . Это утверждение означает отсутствие у разложения в ряд Фурье по замкнутой ортогональной системе (как и у орторекурсивного разложения по замкнутой ортогональной системе) абсолютной устойчивости к ошибкам в вычислении коэффициентов. Аналогично орторекурсивные разложения по замкнутым ортогональным системам не обладают абсолютной устойчивостью к малым изменениям системы (так, орторекурсивное разложение элемента e_1 по системе $\sqrt{1-|\varepsilon|^2} e_1 + \varepsilon e_2, e_2, e_3, e_4, \dots$, где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – замкнутая ортонормированная система, а ε – число, по модулю меньшее единицы, не сходится к e_1).

В настоящей работе формулируются требования к системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, достаточные для того, чтобы орторекурсивное разложение по этой системе было абсолютно устойчиво как к широкому классу ошибок в вычислении коэффициентов разложения, так и к малым изменениям системы.

§ 2. Абсолютная устойчивость к любому конечному числу ошибок

В орторекурсивном разложении наиболее подверженными вычислительным ошибкам являются действия, включающие вычисление скалярных произведений, т.е. действия, связанные с вычислением коэффициентов разложения. Процесс орторекурсивного разложения с ошибками в вычислении коэффициентов может быть описан следующим образом.

Пусть $(H, (\cdot, \cdot))$ – пространство со скалярным произведением над полем действительных или комплексных чисел, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система ненулевых элементов H , f – некоторый элемент H . Индуктивно определим последовательность остатков разложения $\{r_n^e\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов разложения $\{\hat{f}_n^e\}_{n=1}^{\infty}$ (верхний индекс указывает на то, что в вычислении коэффициентов разложения возможны ошибки). Положим

$$r_0^e(f) = f. \quad (4)$$

Если уже определен остаток $r_n^e(f)$, то коэффициент $\hat{f}_{n+1}^e$ запишем в виде

$$\hat{f}_{n+1}^e = \frac{(r_n^e, e_{n+1})}{(e_{n+1}, e_{n+1})} (1 + \varepsilon_{n+1}) + \xi_{n+1}, \quad (5)$$

где ε_{n+1} и ξ_{n+1} – некоторые числа. Положим

$$r_{n+1}^e(f) = r_n^e(f) - \hat{f}_{n+1}^e e_{n+1} = f - \sum_{k=1}^{n+1} \hat{f}_k^e e_k. \quad (6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формальный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n^e e_n$ будем называть *орторекурсивным разложением элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$* .

Отметим, что орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с нулевыми ошибками $E_{0,0}$ ($E_{0,0} = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$, где $\varepsilon_n = \xi_n = 0$ при $n = 1, 2, 3, \dots$) совпадает с обычным орторекурсивным разложением по этой системе.

Используемая форма записи ошибок допускает естественную интерпретацию: при малых по абсолютной величине значениях ε_n величину ξ_n можно трактовать как число, характеризующее абсолютную ошибку в вычислении коэффициента $\hat{f}_n^e$; при малых по абсолютной величине значениях ξ_n величину ε_n можно трактовать как число, характеризующее относительную ошибку в вычислении коэффициента $\hat{f}_n^e$.

Впервые определение, аналогичное определению 2, было предложено Р. Грибонвалем и М. Нилсеном в работе [3], посвященной изучению устойчивости к относительным вычислительным ошибкам (погрешностям) гриди-алгоритмов (*англ.* greedy algorithms – “жадные алгоритмы”; подробнее см. в [4]).

При практической реализации орторекурсивных разложений последовательность ошибок E неизвестна, но в ряде случаев эта последовательность может быть оценена.

Отметим, что различным парам (ε_n, ξ_n) может соответствовать одна и та же ошибка в вычислении коэффициента $\hat{f}_n^e$, при этом любая ошибка в вычислении коэффициента $\hat{f}_n^e$ может быть задана посредством лишь ξ_n , т.е. парой (ε_n, ξ_n) , где $\varepsilon_n = 0$. Однако используемая форма записи ошибок удобна как для теоретической работы с орторекурсивными разложениями (формулировка и доказательство теорем при используемой форме записи ошибок становятся более понятными), так и для прикладной работы (в некоторых случаях проще могут быть установлены оценки относительных ошибок, в некоторых – абсолютных).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{E}$ – некоторое непустое множество последовательностей числовых пар. Будем говорить, что орторекурсивное разложение по системе ненулевых элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *абсолютно устойчиво к ошибкам из множества $\mathcal{E}$* , если для любого элемента $f \in H$ и любой последовательности $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{E}$ орторекурсивное разложение элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками E сходится к f .

Через $\mathcal{E}_0$ обозначим множество последовательностей $\{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих следующему условию: существует такое целое неотрицательное число N , что для всех $n \in \{N+1, N+2, N+3, \dots\}$ справедливы равенства $\varepsilon_n = \xi_n = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что орторекурсивное разложение по системе ненулевых элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов*, если орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к ошибкам из множества $\mathcal{E}_0$.

Приведем другое, эквивалентное сформулированному выше, определение абсолютной устойчивости к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов. Будем говорить, что система $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ получена из системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ удалением первых N элементов, если для любого натурального числа n справедливо равенство $\tilde{e}_n = e_{N+n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4'. Будем говорить, что орторекурсивное разложение по системе ненулевых элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов, если для любого элемента $f \in H$ и любого целого неотрицательного числа N орторекурсивное разложение элемента f по системе $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$, полученной из системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ удалением первых N элементов, сходится к f .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Определения 4 и 4' эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в смысле определения 4. Зафиксируем произвольный элемент $f \in H$ и произвольное целое неотрицательное число N . Пусть $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система, получающаяся из системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ удалением первых N элементов. Положим $\varepsilon_n = -1$ при $n = 1, 2, \dots, N$; $\varepsilon_n = 0$ при $n = N+1, N+2, N+3, \dots$; $\xi_n = 0$ при $n = 1, 2, 3, \dots$. Последовательность ошибок $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит множеству $\mathcal{E}_0$, и, значит, остатки $r_n^e(f)$ орторекурсивного разложения элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками E стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Но остатки $\tilde{r}_n(f)$ орторекурсивного разложения элемента f по системе $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют равенству

$$\tilde{r}_n(f) = r_{N+n}^e(f), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, $\tilde{r}_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что влечет сходимость орторекурсивного разложения элемента f по системе $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ к разлагаемому элементу.

Теперь предположим, что орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в смысле определения 4'. Зафиксируем произвольный элемент $f \in H$ и произвольную последовательность ошибок $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{E}_0$. Пусть N – такое целое неотрицательное число, что $\varepsilon_n = \xi_n = 0$ при $n \in \{N+1, N+2, N+3, \dots\}$. Обозначим через $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ систему, получающуюся из системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ удалением первых N элементов, через $r_n^e(\cdot)$ – остатки орторекурсивного разложения по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками E , через $\tilde{r}_n(\cdot)$ – остатки орторекурсивного разложения по системе $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для всех целых неотрицательных n справедливо равенство

$$r_{N+n}^e(f) = \tilde{r}_n(r_N^e(f)).$$

Но для любого элемента $g \in H$ остатки $\tilde{r}_n(g)$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что остатки $r_n^e(f)$ также стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, и, значит, орторекурсивное разложение элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками E сходится к f .

Приведем примеры систем, орторекурсивное разложение по которым абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов.

ПРИМЕР 1. Пусть $(H, (\cdot, \cdot))$ – произвольное сепарабельное бесконечномерное пространство со скалярным произведением над полем действительных или комплексных чисел, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная замкнутая ортогональная система в H

и $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность натуральных чисел, стремящаяся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим систему

$$d_1, d_2, \dots, d_{k_1}, d_1, d_2, \dots, d_{k_2}, \dots, d_1, d_2, \dots, d_{k_n}, \dots$$

Орторекурсивное разложение по этой системе абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов.

Следующие два примера не столь тривиальны. Орторекурсивные разложения по системе, определенной в примере 2, изучаются в статье [2]. Орторекурсивные разложения по системе, определенной в примере 3, рассматриваются в тезисах [5], [6].

ПРИМЕР 2. Пусть I – произвольный невырожденный промежуток действительной оси. В качестве H рассмотрим пространство $L^2(I)$ классов эквивалентности измеримых действительных или комплекснозначных функций. Пусть $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система ограниченных невырожденных промежутков, удовлетворяющая следующим условиям:

- (α) для любого натурального числа n справедливо включение $\Delta_n \subset I$;
- (β) система промежутков $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ покрывает I в смысле Витали, т.е. для любой точки $x \in I$ и любого положительного числа ε существует такой номер n , что $x \in \Delta_n$ и $|\Delta_n| < \varepsilon$;
- (γ) для любой пары индексов i и j , $i < j$, либо пересечение $\Delta_i \cap \Delta_j$ пусто, либо имеет место включение $\Delta_i \supset \Delta_j$.

Обозначим через $e_n(x)$ характеристическую функцию промежутка Δ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. В [2] доказано, что для любой функции $f \in L^2(I)$ ее орторекурсивное разложение по системе $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f в метрике L^2 . Из этого утверждения и того факта, что при удалении любого конечного числа промежутков из системы, удовлетворяющей условиям (α)–(γ), получается система, также удовлетворяющая этим условиям, следует, что орторекурсивное разложение по системе $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим в качестве H пространство $L^2([0, 1])$ классов эквивалентности измеримых действительных или комплекснозначных функций. Пусть φ – такой элемент H , что

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \neq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \omega_2^2(\varphi, 2^{-n}) < \infty,$$

где

$$\omega_2(\varphi, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

– интегральный модуль непрерывности в пространстве $L^2([0, 1])$. Последнее условие выполняется, в частности, для всех элементов φ , принадлежащих для некоторого $\alpha > 0$ пространству $\text{Lip}_{\alpha}([0, 1])$.

На множестве $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ доопределим φ нулем. Для каждого натурального числа n положим

$$e_n(x) = \varphi(2^j x - k),$$

где $x \in [0, 1]$, $n = 2^j + k$, $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^j - 1\}$ (т.е. $e_n(x)$ получается из $\varphi(x)$ сжатием в 2^j раз и сдвигом на $\frac{k}{2^j}$). Система $\{e_n(x)\}_{n=1}^\infty$ называется *системой двоичных сжатий и сдвигов элемента φ* . Из [5, теорема 1] следует, что орторекурсивное разложение по системе $\{e_n(x)\}_{n=1}^\infty$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов.

§ 3. Абсолютная устойчивость к более широкому классу ошибок

Для упрощения формулировок далее будем полагать, что все рассматриваемые системы нормированы (т.е. нормы всех элементов системы равны единице). Нормированности системы можно добиться, перейдя от исходной системы $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ к системе $\{\frac{e_n}{\|e_n\|}\}_{n=1}^\infty$. В случае нормированных систем формулы для вычисления коэффициентов (2) и (5) принимают соответственно вид

$$\hat{f}_{n+1} = (r_n(f), e_{n+1}) \quad \text{и} \quad \hat{f}_{n+1}^e = (r_n(f), e_{n+1})(1 + \varepsilon_{n+1}) + \xi_{n+1}.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_{1-, l^2}$ множество последовательностей числовых пар $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^\infty$ таких, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\varepsilon_n| < 1$ и последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ принадлежит пространству l^2 . Очевидно, что условие абсолютной устойчивости орторекурсивного разложения по некоторой нормированной системе к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов является необходимым для того, чтобы орторекурсивное разложение по этой системе было абсолютно устойчиво к ошибкам из множества $\mathcal{E}_{1-, l^2}$. Оказывается, это условие является также и достаточным.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – некоторая нормированная система такая, что орторекурсивное разложение по ней абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов. Тогда орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ абсолютно устойчиво к ошибкам из множества $\mathcal{E}_{1-, l^2}$.

Для доказательства сформулированной теоремы докажем сначала некоторые леммы. Для упрощения формулировок введем еще одно обозначение: через $\mathcal{E}_{q, l^2}$, $q \geq 0$, обозначим множество последовательностей числовых пар $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^\infty$ таких, что для всех натуральных чисел n справедливо неравенство $|\varepsilon_n| \leq q$ и последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ принадлежит пространству l^2 .

ЛЕММА 1. Если орторекурсивное разложение по нормированной системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов, то орторекурсивное разложение по этой системе абсолютно устойчиво к ошибкам из множества $\mathcal{E}_{0, l^2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольные нормированную систему $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^\infty$, элемент $g \in H$ и последовательность числовых пар $\tilde{E} = \{(\tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\xi}_n)\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{E}_{0, l^2}$. Через $\tilde{r}_n(\cdot)$ обозначим остатки орторекурсивного разложения по системе $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^\infty$, через $\tilde{r}_n^e(\cdot)$ – остатки орторекурсивного разложения по системе $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками $\tilde{E}$. Докажем сначала, что для любого целого неотрицательного числа n справедлива оценка

$$\|\tilde{r}_n^e(g) - \tilde{r}_n(g)\|^2 \leq \sum_{k=1}^n |\tilde{\xi}_k|^2 \quad (7)$$

(сумму из нуля слагаемых считаем равной нулю).

Доказательство проведем индукцией по n . Для $n = 0$ оценка (7) справедлива в силу формул (1) и (4). Предположим, что оценка (7) справедлива для $n = m$, и докажем ее для $n = m + 1$. Обозначим разность $\tilde{r}_m^e(g) - \tilde{r}_m(g)$ через θ_m . Из формул (5) и (6) следует, что

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{m+1}^e(g) &= \tilde{r}_m^e(g) - (\tilde{r}_m^e(g), \tilde{e}_{m+1})\tilde{e}_{m+1} - \tilde{\xi}_{m+1}\tilde{e}_{m+1} \\ &= \tilde{r}_m(g) + \theta_m(g) - (\tilde{r}_m(g), \tilde{e}_{m+1})\tilde{e}_{m+1} - (\theta_m, \tilde{e}_{m+1})\tilde{e}_{m+1} - \tilde{\xi}_{m+1}\tilde{e}_{m+1}.\end{aligned}$$

Учитывая формулы (2) и (3), получаем

$$\tilde{r}_{m+1}^e(g) - \tilde{r}_{m+1}(g) = \theta_m - (\theta_m, \tilde{e}_{m+1})\tilde{e}_{m+1} - \tilde{\xi}_{m+1}\tilde{e}_{m+1},$$

откуда

$$\|\tilde{r}_{m+1}^e(g) - \tilde{r}_{m+1}(g)\|^2 = \|\theta_m\|^2 - |(\theta_m, \tilde{e}_{m+1})|^2 + |\tilde{\xi}_{m+1}|^2 \leq \|\theta_m\|^2 + |\tilde{\xi}_{m+1}|^2.$$

Для завершения доказательства оценки (7) остается лишь воспользоваться предположением индукции.

Перейдем непосредственно к доказательству леммы. Пусть E – произвольная последовательность, принадлежащая множеству $\mathcal{E}_{0, l^2}$. Остатки орторекурсивного разложения по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ будем обозначать через $r_n(\cdot)$, остатки орторекурсивного разложения по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками E будем обозначать через $r_n^e(\cdot)$.

Зафиксируем произвольный элемент $f \in H$ и произвольное число $\delta > 0$. Найдем такое целое неотрицательное число N_1 , что

$$\sum_{k=N_1+1}^\infty \xi_k^2 < \frac{\delta^2}{4}.$$

Пусть $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^\infty$ – система, получающаяся из системы $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ удалением первых N_1 элементов, $\tilde{E}$ – последовательность $\{(\tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\xi}_n)\}_{n=1}^\infty$, где $\tilde{\varepsilon}_n = 0$, $\tilde{\xi}_n = \xi_{N_1+n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. В силу определения 4' остатки $\tilde{r}_n(r_{N_1}^e(f))$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, существует такое целое неотрицательное число N_2 , что для всех натуральных $n > N_2$ выполнено неравенство $\|\tilde{r}_n(r_{N_1}^e(f))\| < \frac{\delta}{2}$.

Для любого натурального $n > N_1 + N_2$ справедливы соотношения

$$r_n^e(f) = \tilde{r}_{n-N_1}^e(r_{N_1}^e(f)) = \tilde{r}_{n-N_1}(r_{N_1}^e(f)) + (\tilde{r}_{n-N_1}^e(r_{N_1}^e(f)) - \tilde{r}_{n-N_1}(r_{N_1}^e(f))).$$

Отсюда, используя оценку (7) и неравенство треугольника, имеем

$$\|r_n^e(f)\| \leq \|\tilde{r}_{n-N_1}(r_{N_1}^e(f))\| + \left(\sum_{k=N_1+1}^n |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Полученное неравенство завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная нормированная система, $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность числовых пар, f – произвольный элемент H , $\{r_n^e(f)\}_{n=0}^{\infty}$ – остатки орторекурсивного разложения элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками E . Тогда для любого целого неотрицательного числа n справедливо равенство

$$\|r_{n+1}^e(f)\|^2 = \|r_n^e(f)\|^2 - |(r_n^e, e_{n+1})|^2(1 - |\varepsilon_{n+1}|^2) + \overline{(r_n^e, e_{n+1})\varepsilon_{n+1}} \xi_{n+1} + (r_n^e, e_{n+1})\overline{\varepsilon_{n+1}\xi_{n+1}} + |\xi_{n+1}|^2 \quad (8)$$

(черта обозначает комплексное сопряжение).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формул (5) и (6) справедливо тождество

$$r_{n+1}^e(f) = r_n^e(f) - ((r_n^e, e_{n+1})(1 + \varepsilon_{n+1}) + \xi_{n+1})e_{n+1}. \quad (9)$$

Истинность равенства (8) устанавливается непосредственным вычислением скалярных квадратов левой и правой частей тождества (9).

ЛЕММА 3. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная нормированная система, q – произвольное число из промежутка $[0, 1)$, $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность числовых пар, принадлежащая множеству $\mathcal{E}_{q, l^2}$, f – произвольный элемент H , $\{r_n^e(f)\}_{n=0}^{\infty}$ – остатки орторекурсивного разложения элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками E . Тогда числовая последовательность $\{(r_{n-1}^e(f), e_n)\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству l^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что для всех натуральных n справедливы неравенства

$$|\varepsilon_n| \leq q < 1, \quad (10)$$

равенство (8) можно переписать в следующей форме:

$$\|r_{n+1}^e(f)\|^2 = \|r_n^e(f)\|^2 - (1 - |\varepsilon_{n+1}|^2) \left| (r_n^e, e_{n+1}) - \frac{\overline{\varepsilon_{n+1}} \xi_{n+1}}{1 - |\varepsilon_{n+1}|^2} \right|^2 + \frac{|\xi_{n+1}|^2}{1 - |\varepsilon_{n+1}|^2}.$$

Отсюда следует, что для любого натурального числа N выполнено равенство

$$\|r_0^e(f)\|^2 - \|r_N^e(f)\|^2 = \sum_{n=1}^N \left((1 - |\varepsilon_n|^2) \left| (r_{n-1}^e, e_n) - \frac{\overline{\varepsilon_n} \xi_n}{1 - |\varepsilon_n|^2} \right|^2 - \frac{|\xi_n|^2}{1 - |\varepsilon_n|^2} \right).$$

Используя формулу (4), неотрицательность нормы, принадлежность последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространству l^2 и неравенства (10), получаем

$$\sum_{n=1}^N \left((1 - q^2) \left| (r_{n-1}^e, e_n) - \frac{\overline{\varepsilon_n} \xi_n}{1 - |\varepsilon_n|^2} \right|^2 \right) \leq \|f\|^2 + \frac{1}{1 - q^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty.$$

В силу произвольности N отсюда следует, что последовательность

$$\left\{ (r_{n-1}^e, e_n) - \frac{\overline{\varepsilon_n} \xi_n}{1 - |\varepsilon_n|^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

принадлежит пространству l^2 . Для завершения доказательства леммы остается заметить, что в силу неравенств (10) и принадлежности последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространству l^2 последовательность

$$\left\{ \frac{\overline{\varepsilon_n} \xi_n}{1 - |\varepsilon_n|^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

также принадлежит пространству l^2 .

ЛЕММА 4. Пусть q – некоторое число из промежутка $[0, 1)$, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – некоторая нормированная система такая, что орторекурсивное разложение по ней абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов. Тогда орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ абсолютно устойчиво к ошибкам из множества $\mathcal{E}_{q, l^2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольные элемент $f \in H$ и последовательность $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{E}_{q, l^2}$. Обозначим через $r_n^e(f)$ остатки орторекурсивного разложения элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками E .

Определим последовательность числовых пар $\tilde{E} = \{(\tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\xi}_n)\}_{n=1}^\infty$ следующим образом: для каждого натурального n положим $\tilde{\varepsilon}_n = 0$, $\tilde{\xi}_n = \xi_n + (r_{n-1}^e(f), e_n)\varepsilon_n$. Согласно лемме 3 последовательность $\tilde{E}$ принадлежит множеству $\mathcal{E}_{0, l^2}$, откуда, по лемме 1, следует сходимость орторекурсивного разложения элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками $\tilde{E}$ к разлагаемому элементу.

Обозначим через $\tilde{r}_n^e(f)$ остатки орторекурсивного разложения элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками $\tilde{E}$. Индукцией по n легко показать, что для всех целых неотрицательных чисел n справедливо равенство $r_n^e(f) = \tilde{r}_n^e(f)$. Из этих равенств и сходимости остатков $\tilde{r}_n^e(f)$ к нулю при $n \rightarrow \infty$ следует утверждение леммы.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – система, орторекурсивное разложение по которой абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов, $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^\infty$ – последовательность, принадлежащая множеству $\mathcal{E}_{1-, l^2}$, f – элемент H , $\{r_n^e(f)\}_{n=0}^\infty$ – остатки орторекурсивного разложения элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками E .

Выберем в качестве q произвольное число из интервала $(\limsup_{n \rightarrow \infty} |\varepsilon_n|, 1)$ и найдем такой номер N , что при всех значениях n , $n > N$, выполняется неравенство $|\varepsilon_n| \leq q$. Определим последовательность числовых пар $\tilde{E} = \{(\tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\xi}_n)\}_{n=1}^\infty$ следующим образом: при $n \leq N$ положим $\tilde{\varepsilon}_n = 0$, $\tilde{\xi}_n = \xi_n + (r_{n-1}^e(f), e_n)\varepsilon_n$; при $n > N$ положим $\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n$, $\tilde{\xi}_n = \xi_n$. Определенная таким образом последовательность $\tilde{E}$ принадлежит множеству $\mathcal{E}_{q, l^2}$, из чего согласно лемме 4 следует стремление к нулю при $n \rightarrow \infty$ остатков $\tilde{r}_n^e(f)$ орторекурсивного разложения элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками $\tilde{E}$. Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что для всех целых неотрицательных n выполнено равенство $r_n^e(f) = \tilde{r}_n^e(f)$.

Отметим, что теорема 2 неулучшаема в следующем смысле: для любой последовательности числовых пар $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^\infty$, не принадлежащей множеству $\mathcal{E}_{1-, l^2}$, найдутся такие пространство со скалярным произведением H , нормированная система $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset H$, элемент $f \in H$ и последовательность числовых пар $\tilde{E} = \{(\tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\xi}_n)\}_{n=1}^\infty$, что для каждого натурального числа n выполнены неравенства $|\tilde{\varepsilon}_n| \leq |\varepsilon_n|$, $|\tilde{\xi}_n| \leq |\xi_n|$, и орторекурсивное разложение элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками $\tilde{E}$ либо расходится, либо сходится к элементу, отличному от f .

Действительно, пусть $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^\infty$ – произвольная последовательность числовых пар, не принадлежащая множеству $\mathcal{E}_{1-, l^2}$. Тогда либо выполнено неравенство $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\varepsilon_n| \geq 1$, либо последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ не принадлежит пространству l^2 .

В первом случае последовательность $\tilde{E} = \{(\tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\xi}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ определим следующим образом: при всех натуральных n положим $\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n$, $\tilde{\xi}_n = 0$. Найдем такую монотонно возрастающую последовательность натуральных чисел $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (m_n - m_{n-1}) = \infty$ и для каждого натурального n выполнено неравенство $|\varepsilon_{m_n}| \geq 1 - \frac{1}{2n^2}$. В качестве H возьмем произвольное сепарабельное бесконечномерное пространство со скалярным произведением. Пусть $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная замкнутая ортонормированная система в H . В качестве $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ возьмем систему

$$d_2, d_3, \dots, d_{k_1-1}, d_1, d_2, d_3, \dots, d_{k_2-1}, d_1, \dots, d_2, d_3, \dots, d_{k_n-1}, d_1, \dots,$$

где $k_1 = m_1$, $k_n = m_n - m_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \dots$. Орторекурсивное разложение по этой системе абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов, однако остатки $\tilde{r}_n^e(d_1)$ орторекурсивного разложения элемента d_1 по этой системе с ошибками $\tilde{E}$ при каждом целом неотрицательном l удовлетворяют оценке

$$\|\tilde{r}_l^e(d_1)\| \geq |(\tilde{r}_l^e(d_1), d_1)| \geq \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) > 0.$$

Следовательно, орторекурсивное разложение элемента d_1 по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\tilde{E}$ не сходится к d_1 .

Во втором случае при всех натуральных n положим $\tilde{\varepsilon}_n = 0$, $\tilde{\xi}_n = \xi_n$. Найдем такую монотонно возрастающую последовательность целых неотрицательных чисел $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $m_0 = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (m_n - m_{n-1}) = \infty$ и для каждого натурального n выполнено неравенство $\sum_{j=m_{n-1}+1}^{m_n} |\xi_j|^2 \geq 1$. В качестве H вновь возьмем произвольное сепарабельное бесконечномерное пространство со скалярным произведением, в качестве $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — систему из примера 1, определяемую последовательностью $k_n = m_n - m_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда остатки $\tilde{r}_n^e(0)$ орторекурсивного разложения нулевого элемента по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\tilde{E}$ не стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, так как

$$\|\tilde{r}_{m_n}^e(0)\|^2 \geq \sum_{j=m_{n-1}+1}^{m_n} |\xi_j|^2 \geq 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, орторекурсивное разложение нулевого элемента по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\tilde{E}$ не сходится к разлагаемому элементу.

Отметим также, что результаты, получаемые применением теоремы 2 к системам из примеров 2 и 3, являются новыми. В частности, результат, получающийся применением теоремы 2 к системам из примера 3, обобщает приведенную в тезисах [6] теорему, утверждающую, что орторекурсивное разложение по системе сжатий и сдвигов функции, удовлетворяющей сформулированным в примере 3 требованиям, абсолютно устойчиво к ошибкам из множества $\mathcal{E}_{1-,0}$, где

$$\mathcal{E}_{1-,0} = \left\{ \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty} : \limsup_{n \rightarrow \infty} |\varepsilon_n| < 1, \xi_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

§ 4. Абсолютная устойчивость к малым изменениям системы

Придерживаясь терминологии, предложенной Н. К. Бари (см. [7]), будем говорить, что нормированные системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ квадратично близки, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{e}_n - e_n\|^2$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть нормированные системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ квадратично близки и орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов. Тогда орторекурсивное разложение по системе $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ также абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов.*

Таким образом, оказывается, что условие абсолютной устойчивости орторекурсивного разложения по некоторой нормированной системе к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов является достаточным не только для абсолютной устойчивости орторекурсивного разложения по этой системе к ошибкам из множества $\mathcal{E}_{1-, l^2}$, но и для абсолютной устойчивости орторекурсивного разложения по этой системе к малым изменениям системы.

Учитывая определение 4', для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что если системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ квадратично близки и орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов, то для любого элемента $f \in H$ орторекурсивное разложение f по системе $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f . (Отметим, что если пространство H не является одномерным, то для любой нормированной системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, орторекурсивное разложение по которой не является абсолютно устойчивым к любому конечному числу ошибок, существуют нормированная система $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$, квадратично близкая к $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, и элемент $f \in H$ такие, что орторекурсивное разложение f по системе $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ либо расходится, либо сходится к элементу, отличному от f .)

Доказательство сформулированного утверждения в целом аналогично доказательству леммы 1. Приведем сначала одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 5. *Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – две произвольные нормированные системы, g – произвольный элемент H , $r_n(g)$ и $\tilde{r}_n(g)$ – остатки орторекурсивного разложения элемента g по системам $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ соответственно. Тогда для любого целого неотрицательного числа n справедлива оценка*

$$\|\tilde{r}_n(g) - r_n(g)\|^2 \leq 8\|g\|^2 \left(\sum_{k=1}^n \|\tilde{e}_k - e_k\|^2 + \left(\sum_{k=1}^n \|\tilde{e}_k - e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\hat{g}_n$ коэффициенты орторекурсивного разложения элемента g по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для сокращения записи введем также следующие обозначения: через τ_n обозначим разность $\tilde{e}_n - e_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$; через ρ_n – норму этой разности; через θ_n обозначим разность $\tilde{r}_n(g) - r_n(g)$; через c_n – скалярное произведение $(\theta_n, \tilde{e}_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Докажем, что для любого целого неотрицательного n выполнено неравенство

$$\|\tilde{r}_n(g) - r_n(g)\|^2 \leq 8\|g\|^2 \sum_{k=1}^n \rho_k^2 + 8\|g\| \sum_{k=1}^n |\hat{g}_k| \rho_k. \quad (12)$$

Доказательство проведем индукцией по n . Для $n = 0$ неравенство (12) непосредственно следует из формулы (1). Предположим, что неравенство (12) верно для $n = m$, и докажем его для $n = m + 1$. Из формул (2) и (3) следует, что

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{m+1} &= \tilde{r}_m(g) - (\tilde{r}_m(g), \tilde{e}_{m+1})\tilde{e}_{m+1} \\ &= r_m(g) + \theta_m - (r_m(g) + \theta_m, e_{m+1} + \tau_{m+1})(e_{m+1} + \tau_{m+1}) \\ &= r_m(g) - (r_m(g), e_{m+1})e_{m+1} + \theta_m \\ &\quad - (r_m(g), e_{m+1})\tau_{m+1} - (r_m(g), \tau_{m+1})\tilde{e}_{m+1} - (\theta_m, \tilde{e}_{m+1})\tilde{e}_{m+1},\end{aligned}$$

откуда, учитывая формулу (2), получаем равенство

$$\tilde{r}_{m+1}(g) - r_{m+1}(g) = \theta_m - \hat{g}_{m+1}\tau_{m+1} - (r_m(g), \tau_{m+1})\tilde{e}_{m+1} - c_m\tilde{e}_{m+1}. \quad (13)$$

Из утверждения (а) теоремы 1 и формулы (3) следует, что

$$\|r_m(g)\| \leq \|g\|, \quad \|\tilde{r}_m(g)\| \leq \|g\|,$$

и, значит, выполняются также неравенства

$$|\hat{g}_{m+1}| \leq \|g\|, \quad \|\theta_m\| \leq 2\|g\|, \quad |c_m| \leq 2\|g\|.$$

Вычислив с учетом этого скалярные квадраты левой и правой частей равенства (13), имеем

$$\begin{aligned}\|\tilde{r}_{m+1}(g) - r_{m+1}(g)\|^2 \\ \leq \|\theta_m\|^2 + 4\|g\|^2\rho_{m+1}^2 + 8\|g\|\rho_{m+1}|\hat{g}_{m+1}| + 4\|g\||c_m|\rho_{m+1} - |c_m|^2.\end{aligned}$$

Для завершения доказательства неравенства (12) остается воспользоваться предположением индукции и соотношением

$$4\|g\||c_m|\rho_{m+1} - |c_m|^2 \leq 4\|g\|^2\rho_{m+1}^2.$$

Оценка (11) является простым следствием неравенства (12), утверждения (b) теоремы 1 и неравенства Коши–Буняковского–Шварца (см. [8, неравенство [133 (5a)]]).

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3. Пусть нормированные системы $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^\infty$ квадратично близки и орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов. Зафиксируем произвольный элемент $f \in H$ и произвольное положительное число δ . Найдем такое целое неотрицательное число N , что выполнено неравенство

$$8\|f\|^2 \left(\sum_{k=N+1}^\infty \|\tilde{e}_k - e_k\|^2 + \left(\sum_{k=N+1}^\infty \|\tilde{e}_k - e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) < \frac{\delta^2}{4}. \quad (14)$$

Пусть $\{e_n^{(N)}\}_{n=1}^\infty$ и $\{\tilde{e}_n^{(N)}\}_{n=1}^\infty$ – системы, получающиеся удалением первых N элементов из систем $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^\infty$ соответственно. Остатки разложений по системам $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^\infty$, $\{e_n^{(N)}\}_{n=1}^\infty$ и $\{\tilde{e}_n^{(N)}\}_{n=1}^\infty$ обозначим соответственно через $\tilde{r}_n(\cdot)$, $r_n^{(N)}(\cdot)$ и $\tilde{r}_n^{(N)}(\cdot)$.

Для любого целого неотрицательного числа n , $n \geq N$, справедливы равенства

$$\tilde{r}_n(f) = \tilde{r}_{n-N}^{(N)}(\tilde{r}_N(f)) = r_{n-N}^{(N)}(\tilde{r}_N(f)) + (\tilde{r}_{n-N}^{(N)}(\tilde{r}_N(f)) - r_{n-N}^{(N)}(\tilde{r}_N(f))).$$

Согласно определению 4' первое слагаемое правой части последнего равенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и, значит, при достаточно больших номерах n по норме не превосходит $\frac{\delta}{2}$. Второе слагаемое, в силу леммы 5, неравенства (14), утверждения (а) теоремы 1 и формулы (3), при всех целых неотрицательных n , $n \geq N$, удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & \|\tilde{r}_{n-N}^{(N)}(\tilde{r}_N(f)) - r_{n-N}^{(N)}(\tilde{r}_N(f))\|^2 \\ & \leq 8\|\tilde{r}_N(f)\|^2 \left(\sum_{k=1}^{N-n} \|\tilde{e}_k^{(N)} - e_k^{(N)}\|^2 + \left(\sum_{k=1}^{N-n} \|\tilde{e}_k^{(N)} - e_k^{(N)}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & \leq 8\|f\|^2 \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \|\tilde{e}_k - e_k\|^2 + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \|\tilde{e}_k - e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) < \frac{\delta^2}{4}. \end{aligned}$$

В результате имеем, что для всех достаточно больших номеров n остатки $\tilde{r}_n(f)$ удовлетворяют оценке $\|\tilde{r}_n(f)\| < \delta$, откуда в силу произвольности f и δ следует утверждение теоремы.

Покажем, что теорема 3 неулучшаема в следующем смысле: для любой последовательности неотрицательных чисел $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2$ расходится, существуют такие пространство со скалярным произведением H , нормированные системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$, принадлежащие H , и элемент $f \in H$, что для каждого натурального числа n выполнено неравенство $\|\tilde{e}_n - e_n\| \leq \rho_n$, орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов, но орторекурсивное разложение элемента f по системе $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к f .

В качестве H возьмем пространство $\mathbb{R}^2$ со стандартным скалярным произведением. Пусть $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная нормированная система в $\mathbb{R}^2$, g – произвольный ненулевой элемент $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $r_n^{(d)}(g)$ остатки орторекурсивного разложения элемента g по системе $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, через $\hat{x}y$ – угол между ненулевыми элементами x и y пространства $\mathbb{R}^2$. По индукции легко показать, что для каждого натурального числа n выполнено равенство

$$\|r_n^{(d)}(g)\| = \|g\| \sin(g \hat{d}_1) \prod_{k=1}^{n-1} \cos(d_k \hat{d}_{k+1}) \quad (15)$$

(произведение из нуля множителей считаем равным единице).

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2$ расходится, то расходится по крайней мере один из рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2k-1}^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2k}^2$. Определим числовую последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом: если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2k-1}^2$ расходится, положим $\alpha_{2k-1} = \min\{\rho_{2k-1}, \frac{\pi}{2}\}$, $\alpha_{2k} = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$; в противном случае положим $\alpha_{2k-1} = 0$, $\alpha_{2k} = \min\{\rho_{2k}, \frac{\pi}{2}\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Положим $e_n = (\cos \alpha_n, \sin \alpha_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Отметим, что система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e_n \hat{e}_{n+1})^2 = \infty. \quad (16)$$

Для каждого натурального числа n положим $\tilde{e}_n = (1, 0)$. Положим $f = (0, 1)$.

Заметим, что для всех чисел α из отрезка $[0, \frac{\pi}{2}]$ справедлива оценка $\cos \alpha \geq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Тогда для каждого натурального числа n выполнены соотношения

$$\|\tilde{e}_n - e_n\| = (2 - 2 \cos \alpha_n)^{\frac{1}{2}} \leq \alpha_n \leq \rho_n.$$

Абсолютная устойчивость орторекурсивного разложения по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов легко выводится из определения 4', равенства (15), условия (16) и оценки $\cos \alpha \leq 1 - \frac{\alpha^2}{\pi}$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Отсутствие сходимости орторекурсивного разложения элемента f по системе $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ к разлагаемому элементу следует из того, что все коэффициенты этого разложения равны нулю.

В заключение приведем теорему, являющуюся простым следствием теорем 2 и 3 и, в то же время, включающую в себя утверждения этих двух теорем.

ТЕОРЕМА 4. Пусть нормированные системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ квадратично близки и орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов. Тогда орторекурсивное разложение по системе $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к ошибкам из множества $\mathcal{E}_{1-, l^2}$.

Список литературы

1. Лукашенко Т. П. Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2000. С. 83.
2. Лукашенко Т. П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 6–10.
3. Gribonval R., Nielsen M. Approximate Weak Greedy Algorithms // Adv. Comput. Math. 2001. V. 14. № 4. P. 361–378.
4. Temlyakov V. N. Weak greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 2000. V. 12. № 2, 3. P. 213–227.
5. Кудрявцев А. Ю. Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 11-й Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 2002. С. 106–108.
6. Кудрявцев А. Ю. Орторекурсивные разложения по системам неортогональных всплесков // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы конференции. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2003. С. 137–138.
7. Барн Н. К. Об устойчивости свойства полноты системы функций // Докл. АН СССР. 1942. Т. 37. С. 99–103.
8. Фиттенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Изд. 7-е. М.: Наука, 1969.