Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, Регулярные ядра Миттаг-Леффлера и спектральное разложение одного класса несамосопряженных операторов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 1, 17–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/im623>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 10:17:39

УДК 517.43+513.88

Г. М. Губреев

**Регулярные ядра Миттаг-Леффлера
и спектральное разложение одного
класса несамосопряженных операторов**

Дано определение абстрактного ядра Миттаг-Леффлера со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ядро Миттаг-Леффлера называется s -регулярным, если оно порождает интегральное преобразование типа Фурье–Джрбашяна, и d -регулярным, если из его значений можно составить безусловный базис пространства. Приведено полное описание d -регулярных и s -регулярных ядер, которое позволяет ответить на один вопрос М. Г. Крейна. Дано приложение понятия регулярных ядер Миттаг-Леффлера к построению спектрального разложения одномерных возмущений дробных степеней диссипативных вольтеровых операторов.

Библиография: 23 наименования.

Введение

Несмотря на фундаментальные достижения последних 50-ти лет в исследовании несамосопряженных операторов в гильбертовых пространствах существуют классы операторов, в некотором смысле близкие к самосопряженным, о спектральной структуре которых практически ничего не известно. В первую очередь, это относится к таким ограниченным операторам K , для которых мнимые части $\operatorname{Im} K := \frac{1}{2i}(K - K^*)$ принадлежат идеалам Неймана–Шаттена $\mathfrak{S}_p$ при $p > 1$ и формы $(\operatorname{Im} K h, h)$, $h \in \mathfrak{H}$, меняют свой знак. Важным представителем класса операторов K с дискретным спектром является конечномерное возмущение вольтеррова оператора из идеала $\mathfrak{S}_p$. В настоящей статье излагается новый подход к исследованию спектральных свойств конечномерных возмущений дробных степеней вольтеровых диссипативных операторов, фредгольмова резольвента которых имеет конечный экспоненциальный тип. Этот подход основан на введенном понятии регулярного ядра Миттаг-Леффлера со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве. Таким образом, статья состоит из двух частей. В первой части излагается аналитическая основа всего исследования, которая заключается в описании всех регулярных ядер Миттаг-Леффлера. Во второй части (§ 3, 4) дается приложение полученных ранее результатов к построению спектрального разложения конечномерных возмущений дробных степеней вольтеровых диссипативных операторов.

В первой части статьи исследуется класс целых функций $\mathcal{E}_\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{H}$ порядка ρ и нормального типа со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, который вводится следующим определением.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда CRDF (грант № UM-1-2567-0D-03).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Целую функцию $\mathcal{E}_\rho$, $\rho \geq 1$, назовем *ядром Миттаг-Леффлера*, если выполнены условия:

1) для каждого $z \in \mathbb{C}$ существует такой вектор $h(z) \in \mathfrak{H}$, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено равенство

$$(\tilde{\mathcal{E}}_\rho(\lambda), \mathcal{E}_\rho(z)) = (\mathcal{E}_\rho(\lambda), h(z)), \quad \tilde{\mathcal{E}}_\rho(\lambda) := \lambda^{-1}(\mathcal{E}_\rho(\lambda) - \mathcal{E}_\rho(0));$$

2) для любых конечных наборов $\{c_k\}_1^n, \{\lambda_k\}_1^n$, $n \geq 1$, комплексных чисел значения форм $(\sum_{k=1}^n c_k \tilde{\mathcal{E}}_\rho(\lambda_k), \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k))$ принадлежат углу $0 \leq \arg z \leq \pi/\rho$.

Через $\Lambda^{(\text{exp})}$ обозначено (см. [1, с. 70]) множество ограниченных операторов B в пространстве $\mathfrak{H}$ таких, что:

1) $\sigma(B) = \{0\}$, $\text{Ker } B = \{0\}$;

2) $\frac{1}{2i}(B - B^*) \geq 0$;

3) оператор-функция $(I - zB)^{-1}$ имеет первый порядок роста и нормальный тип.

Пусть $B^{1/\rho} - (\pi/\rho)$ -секториальная дробная степень диссипативного оператора B (см. [2, с. 195]), т.е. $\arg(B^{1/\rho}h, h) \in [0, \pi/\rho]$, $h \in \mathfrak{H}$. Тогда каждая целая функция

$$\mathcal{E}_\rho(z) := (I - zB^{1/\rho})^{-1}g, \quad g \in \mathfrak{H}, \quad B \in \Lambda^{(\text{exp})}, \quad (0.1)$$

имеет нормальный тип при порядке ρ и является ядром Миттаг-Леффлера, поскольку

$$\tilde{\mathcal{E}}_\rho(z) = B^{1/\rho}(I - zB^{1/\rho})^{-1}g, \quad \left(\sum_{k=1}^n c_k \tilde{\mathcal{E}}_\rho(\lambda_k), \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k) \right) = (B^{1/\rho}h, h),$$

где $h = \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k)$. Отметим, что определение 0.1 имеет смысл лишь при $\rho \geq 1$. Поэтому для значений $\rho \in (0, 1)$ *ядром Миттаг-Леффлера* $\mathcal{E}_\rho$ будем называть произвольную вектор-функцию вида (0.1). В настоящей работе для значений параметра $\rho > 1/2$ дается полное описание ядер Миттаг-Леффлера, которые обладают определенными свойствами регулярности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. Ядро $\mathcal{E}_\rho$, $\rho > 1/2$, со значениями в пространстве $\mathfrak{H}$ называется *непрерывно регулярным* (в дальнейшем – *c-регулярным*), если существуют такие константы m, M , $0 < m < M < \infty$, что для всех $h \in \mathfrak{H}$ справедливы оценки

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{\rho-1} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^{-2} |(\mathcal{E}_\rho(z), h)|^2 |dz| \leq M\|h\|^2, \quad \omega_\rho := \exp\left\{-i\frac{\pi}{2\rho}\right\}, \quad (0.2)$$

где γ_ρ – угол с вершиной $z = 0$ и сторонами $\arg z = 0$, $\arg z = -\pi/\rho$.

Обозначим через γ_ρ^- область внутри γ_ρ , т.е. $\gamma_\rho^- := \{z \in \mathbb{C} : -\pi/\rho < \arg z < 0\}$. Пусть λ^ρ – ветвь многозначной функции, которая отображает γ_ρ^- на нижнюю полуплоскость $\mathbb{C}_-$. Присоединим к γ_ρ^- прилегающие углы $0 \leq \arg z < \varepsilon$ и $-\pi/\rho - \varepsilon < \arg z \leq -\pi/\rho$, выбрав при этом ε так, чтобы аналитическое продолжение ветви λ^ρ отображало эти углы в верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$ и выполнялось неравенство $\pi/\rho + 2\varepsilon < 2\pi$. Объединение области γ_ρ^- с указанными углами раствора ε обозначим через γ_ρ^ε . Последовательность $\Lambda := \{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\lambda_k \in \gamma_\rho^\varepsilon$, сгущающуюся к бесконечности, назовем *последовательностью без пропусков*, если для любого $x \in \mathbb{R}$ существует такой элемент $\lambda(x) \in \Lambda$, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\lambda^\rho(x) - x| < \infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.3. Ядро Миттаг-Леффлера $\mathcal{E}_\rho$, $\rho > 1/2$, со значениями в пространстве $\mathfrak{H}$ называется *дискретно регулярным* (в дальнейшем – *d-регулярным*), если существует хотя бы одна последовательность без пропусков Λ , лежащая в некоторой криволинейной полосе $-\Delta < \operatorname{Im} \lambda^\rho < -\delta$, $\delta, \Delta > 0$, для которой семейство $\{\mathcal{E}_\rho(\lambda_k), \lambda_k \in \Lambda\}$ образует безусловный базис $\mathfrak{H}$.

Отметим, что из определений ветви λ^ρ следует, что указанные криволинейные полосы целиком лежат в области γ_ρ^- . Общее определение последовательности без пропусков будет использовано в §3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.4. Ядро $\mathcal{E}_\rho$ называется *регулярным*, если оно одновременно *c-регулярно* и *d-регулярно*.

Следуя работам [3], [4], приведем теперь одну конструкцию регулярных ядер со значениями в каждом из пространств $L_2(0, \sigma)$, $\sigma > 0$. Пусть на контуре γ_ρ , $\rho > 1/2$, который фигурирует в определении 0.2, задан $A_{\gamma_\rho}^2$ -вес Макенхаупта w^2 , т.е. выполнено условие ($A_{\gamma_\rho}^2$):

$$\sup_{z \in \gamma_\rho} \sup_{r > 0} \left\{ r^{-1} \int_{B(z, r) \cap \gamma_\rho} w^2(\lambda) |d\lambda| r^{-1} \int_{B(z, r) \cap \gamma_\rho} w^{-2}(\lambda) |d\lambda| \right\} < \infty,$$

где $B(z, r)$ – круг с центром z и радиусом r . Тогда существует аналитическая в угле γ_ρ^- функция w_- , удовлетворяющая условиям:

- а) почти при всех $z \in \gamma_\rho$ существуют некасательные предельные значения $w_-(z) := \lim_{\lambda \rightarrow z} w_-(\lambda)$, $\lambda \in \gamma_\rho^-$, причем $w^2(z) \stackrel{\text{п.в.}}{=} |w_-(z)|^2$, $z \in \gamma_\rho$;
- б) функция $w_-(u^{1/\rho})$ – внешняя в нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$ (определение см. в [5, с. 73]).

Этими условиями w_- определяется с точностью до унимодулярного постоянного множителя. Имеет место интегральное представление

$$w_-(u^{1/\rho}) = u^{1/2\rho} \int_0^\infty e^{-itu} y_w(t) dt, \quad u \in \mathbb{C}_-,$$

с некоторой функцией $y_w \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Через y_w^σ обозначим сужение y_w на отрезок $[0, \sigma]$. Итак, каждый $A_{\gamma_\rho}^2$ -вес w^2 в соответствии с формулой (0.1) при $B = J_\sigma \in \Lambda^{(\text{exp})}$, $g = y_w^\sigma$, $\mathfrak{H} = L_2(0, \sigma)$ порождает ядро

$$\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t) := (I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1} y_w^\sigma, \quad (J_\sigma^{1/\rho} h)(t) = e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\right) \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} h(s) ds \quad (0.3)$$

со значениями в пространстве $L_2(0, \sigma)$. Далее ядра $\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t)$ будем называть *w-ядрами Миттаг-Леффлера*.

ТЕОРЕМА 0.1. Для произвольного $A_{\gamma_\rho}^2$ -веса w^2 ядро $\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t)$, $\rho > 1/2$, со значениями в каждом из пространств $L_2(0, \sigma)$, $\sigma > 0$, является регулярным.

Для каждого $A_{\gamma_\rho}^2$ -веса w^2 наряду с функцией w_- в γ_ρ^- существует аналитическая в области $\gamma_\rho^+ := \{z \in \mathbb{C}: 0 < \arg z < \pi/\alpha\}$, $\rho^{-1} + \alpha^{-1} = 2$, функция w_+ со

свойствами, аналогичными свойствам а), б). *Классом Харди* $H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$ называется гильбертово пространство аналитических в γ_ρ^+ функций F с нормой

$$\|F\|^2 := \sup_{0 < \varphi < \pi/\alpha} \int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 |w_+(re^{i\varphi})|^{-2} dr < \infty$$

(см. [3]). Аналогично вводятся классы $H^2(\gamma_\rho^-, w^{-2})$. Если $w^2(z) \equiv 1$, $z \in \gamma_\rho$, то для введенных пространств используются обозначения $H^2(\gamma_\rho^\pm)$. Следующий результат немедленно влечет d -регулярность произвольного w -ядра.

ТЕОРЕМА А [3], [4]. Пусть последовательность Λ лежит в некоторой криволинейной полосе $-\Delta < \operatorname{Im} \lambda_k^\rho < -\delta$, $\lambda_k \in \Lambda$, $\Delta, \delta > 0$. Семейство функций $\{\mathcal{E}_{\rho, w}(\lambda_k, t) : \lambda_k \in \Lambda\}$, $\rho > 1/2$, образует безусловный базис пространства $L_2(0, \sigma)$ тогда и только тогда, когда Λ совпадает с множеством корней (простых) целой функции Φ порядка ρ и нормального типа, которая удовлетворяет условиям:

- 1) $z^{-1}(\Phi(z) - \Phi(0)) \in H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$;
- 2) $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log |\Phi(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}})| = \sigma$, $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\alpha} \log |\Phi(re^{i\frac{\pi}{2\alpha}})| = 0$, $\alpha^{-1} + \rho^{-1} = 2$;
- 3) вес $W(z) := w^{-2}(z)|\Phi(z)|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$;
- 4) $\inf_{k \neq j} |\lambda_k^\rho - \lambda_j^\rho| > 0$.

Действительно, в качестве Φ возьмем функцию $\Phi(z) := a - E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \sigma^{\frac{1}{\rho}} z; 1)$, $|a| > 2\rho$, где функция Миттаг-Леффлера определяется разложением:

$$E_\rho(z; \mu) := \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^{-1}(\mu + k\rho^{-1}) z^k, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}. \quad (0.4)$$

Из асимптотических формул для $E_\rho(z; \mu)$, содержащихся в [6, с. 134], следует, что Φ удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы А. Поскольку $E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \sigma^{\frac{1}{\rho}} z; 1) = \rho e^{i\sigma z^\rho} + O(z^{-1})$ при $-\pi/\rho \leq \arg z \leq 0$, все достаточно большие по модулю корни Φ являются простыми, попадают в некоторую криволинейную полосу $-\Delta < \operatorname{Im} \lambda^\rho < -\delta$, образуют последовательность без пропусков и удовлетворяют условию 4) теоремы А. Теперь, если все корни функции Φ простые и находятся в указанной полосе, d -регулярность w -ядра следует из теоремы А. Если это не так, то используя функцию Φ , легко построить новую функцию Φ_1 , которая уже удовлетворяет всем условиям теоремы А.

Важным является то, что w -ядра $\mathcal{E}_{\rho, w}$, $\rho > 1/2$, порождают интегральные преобразования, обладающие рядом интересных свойств.

ТЕОРЕМА В [3], [4]. Существуют константы m , M , $0 < m < M < \infty$, не зависящие от σ и такие, что для всех $h \in L_2(0, \sigma)$ справедливы оценки

$$m \|h\|_{L_2(0, \sigma)}^2 \leq \int_{\gamma_\rho} w^{-2}(z) |(\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t), h)_{L_2(0, \sigma)}|^2 |dz| \leq M \|h\|_{L_2(0, \sigma)}^2. \quad (0.5)$$

Доказательство s -регулярности произвольного w -ядра опирается на теорему В. Проведем доказательство в § 2 (лемма 2.4).

Если в формулах (0.3) исходить из того, что $w^2(z) = |z|^\omega$, $-1 < \omega < 1$, то нетрудно проверить [3], что соответствующее w -ядро выражается через функцию Миттаг-Леффлера (0.4) по формуле

$$\mathcal{E}_{\rho,w}(z,t) = t^{\mu-1} E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} z t^{\frac{1}{\rho}}; \mu), \quad \mu = (2\rho)^{-1}(1 + \rho - \omega). \quad (0.6)$$

Этим объясняется то, что абстрактные классы функций $\mathcal{E}_\rho$, которые задаются определением 0.1, были названы ядрами Миттаг-Леффлера. Функция Миттаг-Леффлера и ее обобщения часто применяются в современном анализе [7]–[11] (в число этих работ включены только статьи последних лет). Свойства интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера вида (0.6) составляют одну из основных тем монографии [6]. М. Г. Крейн неоднократно указывал на необходимость переосмыслить ряд результатов этой книги, полученных М. М. Джрбашяном классическими методами, с позиций бурно развивающейся теории несамосопряженных операторов. В частности, в беседе с автором (1986 г.) он предложил выяснить, насколько существенна роль операторов дробного интегрирования в построениях Джрбашяна и не порождают ли другие вольтерровы операторы интегральные преобразования с аналогичными свойствами. В принятой здесь терминологии эту задачу можно сформулировать как задачу об описании всех s -регулярных ядер Миттаг-Леффлера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.5. Ядра $\mathcal{E}_\rho^{(k)}$ со значениями в гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_k$, $k = 1, 2$, называются *изоморфными*, если существует непрерывный и непрерывно обратимый оператор S из $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$ такой, что $S\mathcal{E}_\rho^{(1)}(z) = \mathcal{E}_\rho^{(2)}(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Очевидно, что изоморфные ядра лишь одновременно могут обладать свойством какой-нибудь регулярности. В §2 доказано, что ядро $\mathcal{E}_\rho$, $\rho > 1/2$, d -регулярно тогда и только тогда, когда оно s -регулярно. Далее, из теоремы 0.1 следует, что регулярными будут все изоморфные образы w -ядер, построенных с помощью изложенной канонической процедуры по произвольному $A_{\gamma_\rho}^2$ -весу w^2 . Основной результат первой части статьи (теоремы 2.2, 2.3) состоит в том, что других регулярных ядер Миттаг-Леффлера не существует. Этот факт имеет ряд важных приложений, некоторые из которых приведены в §3, 4.

Построения этой статьи неприменимы для значений параметра $\rho \in (0, 1/2)$, что объясняется, в основном, неограниченным ростом резольвенты $(I - zB^{1/\rho})^{-1}$, $B \in \Lambda^{(\exp)}$, вдоль любого луча $\arg z = \varphi$. Поэтому при $0 < \rho < 1/2$ постановки задач должны быть другими. В пограничном случае $\rho = 1/2$ имеют место аналогичные утверждения о ядрах Миттаг-Леффлера, но с несколько другими формулировками. Эти результаты опубликованы в [21].

Вторая часть статьи посвящена изучению несамосопряженных операторов K вида

$$Kh := B^{1/\rho}h + (h, f)g, \quad \rho > \frac{1}{2}, \quad f, g \in \mathfrak{H}, \quad (0.7)$$

действующих в пространстве $\mathfrak{H}$. Оказалось, что такие операторы имеют обзиримую спектральную структуру лишь в том случае, когда соответствующее ядро Миттаг-Леффлера $\mathcal{E}_\rho(z) = (I - zB^{1/\rho})^{-1}g$ регулярно. В §3 получены необходимые и достаточные условия, при которых оператор K подобен ортогональной

сумме дробных степеней простейших диссипативного и антидиссипативного операторов, которые определяются своими спектрами с точностью до унитарной эквивалентности. На основании этих результатов получен критерий подобия K нормальному оператору, описаны безусловные базисы из значений регулярных ядер (§ 4). В настоящей работе рассматриваются только одномерные возмущения операторов $B^{1/\rho}$. Однако с помощью усовершенствования процедуры, изложенной в [22] для случая $\rho = 1$, метод статьи распространяется на конечномерные возмущения дробных степеней операторов класса $\Lambda^{(\text{exp})}$. Этому будет посвящена отдельная публикация.

Для наиболее простого частного случая $\rho = 1$ часть результатов (с меньшей степенью общности) с приложениями была опубликована в [12], [13].

Все введенные здесь понятия и определения используются на протяжении всей работы без дополнительных объяснений.

§ 1. B -представимость регулярных ядер Миттаг-Леффлера и некоторые вспомогательные утверждения

Если ядро $\mathcal{E}_\rho$ имеет нормальный тип σ при порядке ρ , то будем говорить, что *его рост равен (ρ, σ)* . Далее, произвольное ядро вида (0.1) назовем *B -представимым*. Таким образом, при $\rho < 1$ ядро Миттаг-Леффлера B -представимо по определению.

ТЕОРЕМА 1.1. *Каждое s -регулярное или d -регулярное ядро Миттаг-Леффлера $\mathcal{E}_\rho$ роста (ρ, σ) , $\rho \geq 1$, со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ B -представимо, т. е. допускает единственное представление*

$$\mathcal{E}_\rho(z) = (I - zB^{1/\rho})^{-1}g, \quad g \in \mathfrak{H}, \quad B \in \Lambda^{(\text{exp})}, \quad (1.1)$$

причем экспоненциальный тип резольвенты $(I - zB)^{-1}$ равен σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E}_\rho$ d -регулярно, т. е. существует хотя бы один безусловный базис $\{\mathcal{E}_\rho(\lambda_k): \lambda_k \in \Lambda\}$ пространства $\mathfrak{H}$, где Λ – последовательность без пропусков. На элементах этого базиса зададим оператор

$$B\mathcal{E}_\rho(\lambda_k) = \lambda_k^{-1}(\mathcal{E}_\rho(\lambda_k) - \mathcal{E}_\rho(0)), \quad \lambda_k \in \Lambda,$$

и покажем, что он по линейности и непрерывности расширяется до ограниченного оператора в $\mathfrak{H}$. Заметим, что $\mathcal{E}_\rho(0) \neq 0$, иначе значения формы $(\tilde{\mathcal{E}}_\rho(z), \mathcal{E}_\rho(z)) = -z^{-1}\|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$ не всегда лежат в угле $0 \leq \arg z \leq \pi/\rho$ (см. определение 0.1). Полагая в условии 1) из определения 0.1 $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$, $z = 0$, получим

$$\lambda_k^{-1}((\mathcal{E}_\rho(\lambda_k), g) - \|g\|^2)\|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^{-1} = (\mathcal{E}_\rho(\lambda_k), h(0))\|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^{-1}, \quad g := \mathcal{E}_\rho(0).$$

Поскольку нормированный базис $u_k := \mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^{-1}$ есть базис Рисса [14, с. 381], отсюда вытекает сходимость ряда $\sum_{\lambda_k} |\lambda_k|^{-2}\|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^{-2}$. Поэтому для

любой линейной комбинации $h = \sum c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k)$ найдем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}h\|^2 &= \left\| \sum c_k \lambda_k^{-1} (\mathcal{E}_\rho(\lambda_k) - g) \right\|^2 \\ &\leq 2 \sum |c_k|^2 |\lambda_k|^{-2} \|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^2 + 2 \left| \sum c_k \lambda_k^{-1} \right|^2 \|g\|^2 \\ &\leq 2M \|h\|^2 + 2\|g\|^2 \left(\sum |c_k|^2 \|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^2 \right) \\ &\quad \times \left(\sum |\lambda_k|^{-2} \|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^{-2} \right) \leq M_1 \|h\|^2. \end{aligned}$$

Из определения оператора $\mathcal{B}$ и условия 1) определения 0.1 при $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$, $z \in \mathbb{C}$ следует, что $h(z) = \mathcal{B}^* \mathcal{E}_\rho(z)$. Поэтому $\mathcal{B} \mathcal{E}_\rho(\lambda) = \tilde{\mathcal{E}}_\rho(\lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и, значит,

$$\mathcal{E}_\rho(z) = (I - z\mathcal{B})^{-1}g, \quad z^{-1} \notin \sigma(\mathcal{B}). \quad (1.2)$$

Разлагая каждый вектор $h \in \mathfrak{H}$ в ряд: $h = \sum_k c_k u_k$, $\{c_k\} \in l_2$, получим оценку

$$\|\mathcal{B}h\|^2 \leq 2 \sum |c_k|^2 |\lambda_k|^{-2} + 2\|g\|^2 \left| \sum c_k \lambda_k^{-1} \|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^{-1} \right|^2,$$

и поскольку $\lambda_k \rightarrow \infty$, из нее следует полная непрерывность оператора $\mathcal{B}$. Поэтому $\sigma(\mathcal{B}) = \{0\}$. Действительно, из (1.2) вытекает, что $\mathcal{P}(\mathcal{B})\mathcal{E}_\rho(z) = (I - z\mathcal{B})^{-1}\mathcal{P}(\mathcal{B})g$ для любого полинома $\mathcal{P}$. Следовательно, для риссовского проектора P на предполагаемое корневое подпространство, отвечающее ненулевой точке спектра, получим $P\mathcal{P}(\mathcal{B})g = 0$, т.е. $P = 0$ в силу цикличности g для оператора $\mathcal{B}$. Теперь условие 2) определения 0.1 означает, что значения форм $(\mathcal{B}h, h)$ попадают в угол $0 \leq \arg z \leq \pi/\rho$. Отсюда следует, что $\text{Ker } \mathcal{B}$ приводит оператор $\mathcal{B}$ [1, с. 59], и поэтому $\text{Ker } \mathcal{B} = \{0\}$ в силу d -регулярности $\mathcal{E}_\rho$. Поскольку оператор $\mathcal{B}$ (π/ρ) -секториален, то функция $\mathcal{B}(I - z\mathcal{B})^{-1}$ ограничена на сторонах и вне угла $\Gamma_\rho := \gamma_\rho - \omega_\rho := \{z - \omega_\rho, z \in \gamma_\rho\}$, $\omega_\rho = \exp\{-i\frac{\pi}{2\rho}\}$ [14, с. 302]. К каждой функции $(\mathcal{B}(I - (z - \omega_\rho)\mathcal{B})^{-1}\mathcal{P}(\mathcal{B})g, f)$, где $f \in \mathfrak{H}$, $\mathcal{P}$ — произвольный полином, применим принцип Фрагмена–Линделефа в угле γ_ρ . Получим, что рост фредгольмовой резольвенты $\mathcal{B}(I - z\mathcal{B})^{-1}$ не выше (ρ, σ) , а в силу (1.2) он не ниже (ρ, σ) . Поэтому [15], [16] существует оператор $B \in \Lambda^{(\text{exp})}$ такой, что $\mathcal{B} = B^{1/\rho}$, причем экспоненциальный тип резольвенты $(I - zB)^{-1}$ равен σ . Поскольку вектор g циклический также для оператора B [16], то представление (1.1) единственно.

Пусть теперь ядро $\mathcal{E}_\rho$ является s -регулярным. Из левого неравенства (0.2) следует, что $\mathfrak{H} = \text{clos span}\{\mathcal{E}_\rho(z) : z \in \mathbb{C}\}$, и поэтому из условия 1) определения 0.1 выводим, что линейное отображение L , определяемое формулой

$$h = \sum c_k \mathcal{E}_\rho(z_k), \quad Lh = \sum c_k h(z_k), \quad c_k, z_k \in \mathbb{C},$$

корректно определено на линеале $\mathcal{L} := \text{span}\{\mathcal{E}_\rho(z) : z \in \mathbb{C}\}$. Подставляя в (0.2) вектор $h(0)$ из условия 1) определения 0.1 при $z = 0$, получим

$$\int_{\gamma_\rho} w^{-2}(z)(1 + |z|^2)^{-1} |dz| < \infty, \quad w^2(z) := |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2, \quad z \in \gamma_\rho. \quad (1.3)$$

С помощью левого неравенства (0.2) для любого $h \in \mathcal{L}$ получим оценку

$$\begin{aligned} \|Lh\|^2 &\leq m^{-1} \int_{\gamma_\rho} w^{-2}(z) |(\mathcal{E}_\rho(z), Lh)|^2 |dz| = m^{-1} \int_{\gamma_\rho} w^{-2}(z) |(\tilde{\mathcal{E}}_\rho(z), h)|^2 |dz| \\ &\leq m^{-1} \int_{|z| \leq 1} w^{-2}(z) \|\tilde{\mathcal{E}}_\rho(z)\|^2 |dz| \|h\|^2 \\ &\quad + 2m^{-1} \int_{|z| \geq 1} w^{-2}(z) |z|^{-2} |(\mathcal{E}_\rho(z), h)|^2 |dz| \\ &\quad + 2m^{-1} \int_{|z| \geq 1} w^{-2}(z) |z|^{-2} |dz| \|\mathcal{E}_\rho(0)\|^2 \|h\|^2. \end{aligned}$$

Поэтому из правого неравенства (0.2) следует оценка $\|Lh\| \leq C\|h\|$, т.е. оператор L ограничен. Далее, ввиду аналогичной оценки

$$\begin{aligned} \|Lh\|^2 &\leq m^{-1} \int_{|z| \leq R} w^{-2}(z) |(\tilde{\mathcal{E}}_\rho(z), h)|^2 |dz| + \frac{2M\|h\|^2}{mR^2} \\ &\quad + 2m^{-1} \int_{|z| \geq R} w^{-2}(z) |z|^{-2} |dz| |(\tilde{\mathcal{E}}_\rho(0), h)|^2 \end{aligned}$$

имеем, что из слабой сходимости последовательности $\{h_n\}$ следует сильная сходимость $\{Lh_n\}$, т.е. L вполне непрерывен. Полагая $\mathcal{B} := L^*$, доказательство заканчиваем так же, как в случае d -регулярности ядра.

Нам понадобятся оценки фредгольмовой резольвенты (π/ρ) -секториальной дробной степени операторов класса $\Lambda^{(\text{exp})}$. Для упрощения записи далее будем использовать обозначение $B_\rho := B^{1/\rho}$, $B \in \Lambda^{(\text{exp})}$.

ЛЕММА 1.1. *Для произвольного оператора $B \in \Lambda^{(\text{exp})}$ имеют место следующие оценки:*

$$\int_{\gamma_\rho} \|B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}h\|^2 |z - \omega_\rho|^{1-\rho} |dz| \leq M\|h\|^2, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad (1.4)$$

$$\int_{\bar{\gamma}_\rho} \|B_\rho^*(I - zB_\rho^*)^{-1}h\|^2 |z - \bar{\omega}_\rho|^{1-\rho} |dz| \leq M\|h\|^2, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad (1.5)$$

где $\bar{\gamma}_\rho := \{\bar{z} : z \in \gamma_\rho\}$, M – некоторая константа, $\rho > 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть экспоненциальный тип резольвенты $(I - zB)^{-1}$ равен σ . В силу теоремы об универсальном операторе [1, с. 72] B унитарно эквивалентен сужению на некоторое инвариантное подпространство $\mathcal{L}$ относительно оператора

$$\tilde{J}_\sigma := J_\sigma \otimes I, \quad (J_\sigma h)(t) = i \int_0^t h(s) ds, \quad h \in L_2(0, \sigma),$$

в пространстве $L_2(0, \sigma) \otimes l_2$, где l_2 – пространство односторонних последовательностей. Поскольку оператор $B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}$ унитарно эквивалентен оператору $\tilde{J}_\sigma^{1/\rho}(I - z\tilde{J}_\sigma^{1/\rho})^{-1} \mid \mathcal{L}$, то оценку (1.4) достаточно доказать для оператора $J_\sigma^{1/\rho}$ в пространстве $L_2(0, \sigma)$. В этом частном случае оценка (1.4) доказана в [3], [4]. Доказательство (1.5) с помощью аналогичных рассуждений также сводится к случаю $B = J_\sigma$.

Напомним, что $\gamma_\rho^+ = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \pi/\alpha\}$. Для $0 < \varepsilon < \min\{\frac{\pi}{3\alpha}, \frac{\pi}{3\rho}\}$ угол $\varepsilon < \arg z < \pi/\alpha - \varepsilon$ назовем ε -центральный углом области γ_ρ^+ , а углы $0 < \arg z \leq \varepsilon$, $\pi/\alpha - \varepsilon \leq \arg z < \pi/\alpha$ — ε -прилегающими к углу γ_ρ . Далее z^ρ — аналитическое продолжение в ε -прилегающие углы той ветви z^ρ , которая отображает область γ_ρ^- на $\mathbb{C}_-$.

ЛЕММА 1.2. Пусть $B \in \Lambda^{(\exp)}$, $0 < \varepsilon < \min\{\frac{\pi}{3\alpha}, \frac{\pi}{3\rho}\}$, $|z| \geq 1$, $\rho > 1/2$. Тогда:

- 1) $\|B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}\| \leq c_1(\varepsilon, \delta)(\operatorname{Im} z^\rho)^{-1}|z|^{\rho-1}$, если z принадлежит ε -прилегающим углам и $\operatorname{Im} z^\rho > \delta$;
- 2) $\|B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}\| \leq c_2(\varepsilon, \delta)|z|^{\rho-1}$, если z принадлежит ε -прилегающим углам и $\operatorname{Im} z^\rho \leq \delta$;
- 3) $\|B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}\| \leq c_3(\varepsilon)|z|^{-1}$ в ε -центральной области;
- 4) $\|B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}\| \leq c_4(\Delta)|z|^{\rho-1}$, если $z \in \gamma_\rho^-$ и $|\operatorname{Im} z^\rho| < \Delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова из теоремы об универсальном операторе [1] следует, что лемму достаточно доказать для частного случая $B = J_\sigma$. Поскольку

$$(J_\sigma^{1/\rho}(I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1}h)(t) = e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} z(t-s)^{1/\rho}; 1/\rho) h(s) ds,$$

$$h \in L_2(0, \sigma),$$

из неравенства Юнга следует оценка

$$\|J_\sigma^{1/\rho}(I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1}\| \leq \int_0^\sigma s^{\frac{1}{\rho}-1} |E_\rho((is)^{1/\rho} z; 1/\rho)| ds.$$

Теперь неравенства 1)–4) являются простыми следствиями асимптотических формул для функций Миттаг-Леффлера, которые содержатся в [6, с. 134].

Нам понадобится еще одна техническая лемма, доказательство которой мы не приводим.

ЛЕММА 1.3. Для каждого $\rho > 1/2$ существуют такие константы $M_1(\rho)$, $M_2(\rho)$, что имеют место оценки

$$\int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{1-\rho} |z - \lambda|^{-2} |dz| \leq M_1(\rho) |\lambda - \omega_\rho|^{1-\rho} |\lambda|^{\alpha-1} (\operatorname{Im} \lambda^\alpha)^{-1}, \quad \lambda \in \gamma_\rho^+,$$

$$\int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{1-\rho} |z - \lambda|^{-2} |dz| \leq M_2(\rho) |\lambda + \omega_\rho|^{1-\rho} |\lambda|^{\rho-1} |\operatorname{Im} \lambda^\rho|^{-1}, \quad \lambda \in \gamma_\rho^-,$$

где λ^α отображает γ_ρ^+ на полуплоскость $\mathbb{C}_+$, а λ^ρ отображает γ_ρ^- на $\mathbb{C}_-$.

§ 2. Описание регулярных ядер Миттаг-Леффлера

Ядро Миттаг-Леффлера $\mathcal{E}_\rho$ назовем s -праворегулярным, если существует такая константа M , что для всех $h \in \mathfrak{H}$ имеет место правое неравенство (0.2).

ТЕОРЕМА 2.1. Для произвольного B -представимого s -праворегулярного ядра $\mathcal{E}_\rho$ вес $w^2(z) := |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$.

Предварительно докажем две леммы. Заметим, что

$$\int_{\gamma_\rho} w^{\pm 2}(z)(1 + |z|^2)^{-1} |dz| < \infty. \quad (2.1)$$

Действительно, сходимость интеграла от веса w^{-2} уже была установлена (см. (1.3)). Поскольку имеет место представление (1.1) с вектором g , сходимость интеграла от веса w^2 есть следствие оценки (1.4) при $h = g$. С помощью стандартных рассуждений (см. [3], [4]) из (2.1) выводится существование аналитической в γ_ρ^+ функции w_+ со свойствами:

- а) $w_+(z^{1/\alpha})$ внешняя в $\mathbb{C}_+$;
- б) почти всюду на γ_ρ существуют некасательные предельные значения $w_+(z) := \lim_{\lambda \rightarrow z} w_+(\lambda)$, $\lambda \in \gamma_\rho^+$, такие, что $|w_+(z)|^2 \stackrel{\text{п.в.}}{=} w^2(z)$, $z \in \gamma_\rho$.

ЛЕММА 2.1. Если $\mathcal{E}_\rho$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, то выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 &\leq |w_+(z)|^2 |z - \omega_\rho|^{\rho-1}, \\ \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 &\leq C |w_+(z)|^2 (\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1} |z|^{\alpha-1}, \quad z \in \gamma_\rho^+, \end{aligned}$$

где z^α отображает γ_ρ^+ на $\mathbb{C}_+$, C – некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $h \in \mathfrak{H}$ рассмотрим аналитическую в области γ_ρ^+ функцию $F_h(z) := (B_\rho \mathcal{E}_\rho(z), h)(z - \omega_\rho)^{\frac{1-\rho}{2}}$, где B_ρ взята из представления (1.1). Покажем, что

$$\sup_{0 \leq \varphi \leq \pi/\alpha} \int_0^\infty |F_h(re^{i\varphi})|^2 dr < \infty. \quad (2.2)$$

Из (1.1), (1.4) и оценки 3) леммы 1.2 следует, что

$$\int_{\gamma_\rho} |F_h(z)|^2 |dz| < \infty, \quad \int_l |F_h(z)|^2 |dz| < \infty,$$

где l – произвольный луч, лежащий в ε -центральной угле области γ_ρ^+ . Поэтому из леммы Левина–Любарского [17] вытекает справедливость (2.2). Легко видеть, что (2.2) справедливо также для любой функции $G_h(z) := (\mathcal{E}_\rho(z), h)(z - \omega_\rho)^{-\frac{1+\rho}{2}}$, $h \in \mathfrak{H}$. Другими словами, функции $G_h(z^{1/\alpha})z^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}$ принадлежат классу Харди H_+^2 . Учитывая определение веса w^2 , заключаем, что на вещественной оси $\mathbb{R}$ верна оценка

$$|G_h(x^{1/\alpha})x^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}| \leq |w_+(x^{1/\alpha})x^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}(x^{1/\alpha} - \omega_\rho)^{-1}| \|h\|, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Поскольку справа стоит модуль граничных значений внешней в $\mathbb{C}_+$ функции, эта оценка остается в силе для всех $z \in \mathbb{C}_+$ [5, с. 74], т. е.

$$|(\mathcal{E}_\rho(z^{1/\alpha}), h)| \leq |w_+(z^{1/\alpha})| |z^{1/\alpha} - \omega_\rho|^{\frac{\rho-1}{2}} \|h\|, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Ввиду произвольности $h \in \mathfrak{H}$ отсюда вытекает первое неравенство для $\|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$. Теперь каждая функция $Q_h(z) := (\mathcal{E}_\rho(z^{1/\alpha}), h)w_+^{-1}(z^{1/\alpha})(z^{1/\alpha} - \omega_\rho)^{(1-\alpha)/2}$, $h \in \mathfrak{H}$, является функцией класса Смирнова в $\mathbb{C}_+$ [5, с. 77], и так как ядро $\mathcal{E}_\rho$ s -праворегулярно, то

$$\int_{\mathbb{R}} |Q_h(x)|^2 dx = \alpha \int_{\gamma_\rho} |(\mathcal{E}_\rho(z), h)|^2 w^{-2}(z) |z - \omega_\rho|^{1-\alpha} |z|^{\alpha-1} |dz| \leq M_1 \|h\|^2.$$

Поэтому $Q_h \in H_+^2$ [5, с. 81] и, значит, для любого $u \in \mathbb{C}_+$ имеем

$$\left| Q_h(u) \right|^2 \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} |Q_h(x)|^2 dx (\operatorname{Im} u)^{-1} \leq M_2 (\operatorname{Im} u)^{-1} \|h\|^2, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Полагая $u = z^\alpha$, $z \in \gamma_\rho^+$, получим

$$\|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 \leq M_2 (\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1} |z - \omega_\rho|^{\alpha-1} |w_+(z)|^2 \leq C (\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1} |z|^{\alpha-1} |w_+(z)|^2,$$

если $\alpha \leq 1$, т.е. в случае $\rho \geq 1$. Если $1/2 < \rho < 1$, то мы получим аналогичную оценку, применив изложенные рассуждения к функциям ограниченного вида

$$Q_h(z) := (\mathcal{E}_\rho(z^{1/\alpha}), h)w_+^{-1}(z^{1/\alpha})z^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При доказательстве леммы было установлено, что $Q_h \in H_+^2$. Это означает, что для любого $h \in \mathfrak{H}$ выполнено

$$(\mathcal{E}_\rho(z), h)w_+^{-1}(z) \in H^2(\gamma_\rho^+). \quad (2.3)$$

ЛЕММА 2.2. Если ядро $\mathcal{E}_\rho$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, то существует такая константа C , что для всех $z \in \gamma_\rho^+$ имеют место оценки

$$\int_{\gamma_\rho} w^{\pm 2}(\lambda) |\lambda - z|^{-2} |d\lambda| \leq C |w_+(z)|^{\pm 2} (\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1} |z|^{\alpha-1}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения записи предположим, что если в интеграле не будет указан контур интегрирования, то интегрирование ведется по контуру γ_ρ .

Поскольку имеет место представление (1.1), из соотношения Гильберта для резольвент получим

$$\mathcal{E}_\rho(\lambda)(\lambda - z)^{-1} = \mathcal{E}_\rho(z)(\lambda - z)^{-1} + B_\rho(I - \lambda B_\rho)^{-1} \mathcal{E}_\rho(z), \quad z \in \gamma_\rho^+, \quad \lambda \in \gamma_\rho.$$

Умножим его на $(\lambda - \omega_\rho)^{\frac{1-\rho}{2}}$ и, учитывая определение веса $w^2(\lambda)$, интегральную оценку (1.4) и лемму 1.3, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{w^2(\lambda) |d\lambda|}{|\lambda - z|^2} &\leq 2 \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 \int \frac{|\lambda - \omega_\rho|^{1-\rho}}{|\lambda - z|^2} |d\lambda| \\ &\quad + 2 \int |\lambda - \omega_\rho|^{1-\rho} \|B_\rho(I - \lambda B_\rho)^{-1} \mathcal{E}_\rho(z)\|^2 |d\lambda| \\ &\leq 2 \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 \left\{ \int \frac{|\lambda - \omega_\rho|^{1-\rho}}{|\lambda - z|^2} |d\lambda| + M \right\} \\ &\leq \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 \left\{ M + L |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \frac{|z|^{\alpha-1}}{\operatorname{Im} z^\alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где M, L – некоторые константы. Теперь оценка (2.4) для веса w^2 следует из леммы 2.1.

Вторая оценка (2.4) доказывается значительно труднее. Из тривиального равенства

$$w_+(\lambda)(\lambda - z)^{-1} = w_+(z)(\lambda - z)^{-1} + (w_+(\lambda) - w_+(z))(\lambda - z)^{-1}, \quad \lambda \in \gamma_\rho, \quad z \in \gamma_\rho^+,$$

прямого разложения $L_2(\gamma_\rho, |d\lambda|) = H^2(\gamma_\rho^-) \dot{+} H^2(\gamma_\rho^+)$ [3], [4] и неравенств (2.5) имеем

$$\begin{aligned} |w_+(z)|^2 \int |\lambda - z|^{-2} |d\lambda| &\leq q \int |w_+(\lambda)|^2 |\lambda - z|^{-2} |d\lambda| \\ &\leq \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 \{K_1 + L_1 |z - \omega_\rho|^{1-\rho} |z|^{\alpha-1} (\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1}\}. \end{aligned}$$

Поскольку [3], [4]

$$\int |\lambda - z|^{-2} |d\lambda| \asymp |z|^{\alpha-1} (\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1}, \quad z \in \gamma_\rho^+, \quad (2.6)$$

из последнего неравенства следует, что

$$\|\mathcal{E}_\rho(z)\|^{-2} \leq |w_+(z)|^{-2} \{K_2 + L_2 |z - \omega_\rho|^{1-\rho} |z|^{\alpha-1} (\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1}\} (\operatorname{Im} z^\alpha) |z|^{1-\alpha}. \quad (2.7)$$

Учитывая (1.1) и ϵ -праворегулярность ядра $\mathcal{E}_\rho$, получим

$$\begin{aligned} &\int w^{-2}(\lambda) |(\mathcal{E}_\rho(\lambda) - \mathcal{E}_\rho(z), h)|^2 |\lambda - z|^{-2} |d\lambda| \\ &= \int w^{-2}(\lambda) |(\mathcal{E}_\rho(\lambda), B_\rho^*(I - \bar{z}B_\rho^*)^{-1}h)|^2 |d\lambda| \\ &\leq M \|B_\rho^*(I - \bar{z}B_\rho^*)^{-1}h\|^2 \leq M \|B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}\|^2 \|h\|^2, \quad z \in \gamma_\rho^+. \end{aligned}$$

Поэтому для любого $z \in \gamma_\rho^+$ и любого $h \in \mathfrak{H}$

$$\begin{aligned} |(\mathcal{E}_\rho(z), h)|^2 \int \frac{w^{-2}(\lambda) |d\lambda|}{|\lambda - z|^2} &\leq 2M \|B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}\|^2 \|h\|^2 \\ &+ 2 \int w^{-2}(\lambda) \frac{|(\mathcal{E}_\rho(\lambda), h)|^2}{|\lambda - z|^2} |d\lambda|. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если z лежит в ϵ -центральной угле области γ_ρ^+ и $|z| \geq 1$, то

$$\int w^{-2}(\lambda) \frac{|(\mathcal{E}_\rho(\lambda), h)|^2}{|\lambda - z|^2} |d\lambda| \leq (\operatorname{dist}(z, \gamma_\rho))^{-2} \int \frac{|(\mathcal{E}_\rho(\lambda), h)|^2}{w^2(\lambda)} |d\lambda| \leq \frac{M(\epsilon) \|h\|^2}{|z|^2}. \quad (2.9)$$

Учитывая, что внутри каждого ϵ -центрального угла $|z|^{\alpha-1} (\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1} \asymp |z|^{-1}$, из (2.7)–(2.9) и леммы 1.2 получим оценку

$$\int \frac{w^{-2}(\lambda) |d\lambda|}{|\lambda - z|^2} \leq M(\epsilon) \frac{\|\mathcal{E}_\rho(z)\|^{-2}}{|z|^2} \leq M_1(\epsilon) \frac{|w_+(z)|^{-2}}{|z|} \leq M_2(\epsilon) \frac{|z|^{\alpha-1}}{\operatorname{Im} z^\alpha} |w_+(z)|^{-2},$$

при выводе которой использовалось то, что в рассматриваемой области неравенство (2.7) равносильно оценке

$$\|\mathcal{E}_\rho(z)\|^{-2} \leq K(\varepsilon)|w_+(z)|^{-2}|z|.$$

Пусть снова $|z| \geq 1$, z лежит в ε -прилегающих углах и $\operatorname{Im} z^\rho \geq \delta > 0$, где z^ρ — та же ветвь, что и в лемме 1.2. Тогда из (2.8), (2.7) и леммы 1.2 имеем

$$\begin{aligned} \int w^{-2}(\lambda)|\lambda - z|^{-2}|d\lambda| &\leq \left(R(\varepsilon) \left(\frac{|z|^{\rho-1}}{\operatorname{Im} z^\rho} \right)^2 + R_1(\operatorname{dist}(z, \gamma_\rho))^{-2} \right) \\ &\quad \times \left(K_2 + L_2 \frac{|z - \omega_\rho|^{1-\rho}|z|^{1-\alpha}}{\operatorname{Im} z^\alpha} \right) \frac{\operatorname{Im} z^\alpha}{|z|^{\alpha-1}} |w_+(z)|^{-2}. \end{aligned}$$

При достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{dist}(z, \gamma_\rho) \asymp (\operatorname{Im} z^\alpha)|z|^{1-\alpha} \asymp (\operatorname{Im} z^\rho)|z|^{1-\rho}, \quad |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \asymp |z|^{1-\rho}, \quad (2.10)$$

если $|z| \geq 1$ и z принадлежит ε -прилегающим углам. Поэтому из предыдущего неравенства вытекает оценка

$$\begin{aligned} \int \frac{w^{-2}(\lambda) d\lambda}{|\lambda - z|^2} &\leq L_1(\varepsilon) \frac{|z|^{\alpha-1}}{\operatorname{Im} z^\alpha} (K_2 + L_1(\varepsilon)(\operatorname{Im} z^\rho)^{-1}) |w_+(z)|^{-2} \\ &\leq L_3(\varepsilon) \frac{|z|^{\alpha-1}}{\operatorname{Im} z^\alpha} |w_+(z)|^{-2}. \end{aligned}$$

Получим теперь аналогичную оценку, считая, что $|z| \geq 1$, z лежит в ε -прилегающих углах и $0 < \operatorname{Im} z^\rho \leq \delta$. Для этого снова рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int w^{-2}(\lambda) \frac{|(\mathcal{E}_\rho(\lambda), h)|^2}{|\lambda - z|^2} |d\lambda| &\leq q_1 \int_{\gamma_\rho} \frac{|\lambda|^{\rho-1}}{|\lambda - z|^2} \frac{|(\mathcal{E}_\rho(\lambda), h)|^2}{\|\mathcal{E}_\rho(\lambda)\|^2} |d\lambda| + q_2 \|h\|^2 \\ &\leq q_1 \int_{|\lambda| \leq 2|z|} |\lambda|^{\rho-1} |\lambda - z|^{-2} |d\lambda| \|h\|^2 + q_2 \|h\|^2 \\ &\quad + q_1 \int_{|\lambda| > 2|z|} w^{-2}(\lambda) |z - \lambda|^{-2} |(\mathcal{E}_\rho(\lambda), h)|^2 |d\lambda|. \end{aligned}$$

Поскольку ядро $\mathcal{E}_\rho$ s -праворегулярно, последнее слагаемое не превосходит $q_3 \times |z|^{-2} \|h\|^2$. Элементарная выкладка, которую мы опускаем, показывает, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ первое слагаемое в ε -прилегающих углах оценивается величиной $q(\varepsilon)|z|^{\rho-1}|z|^{\alpha-1}(\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1}$. Поэтому, с учетом (2.10), имеем

$$\int w^{-2}(\lambda) \frac{|(\mathcal{E}_\rho(\lambda), h)|^2}{|\lambda - z|^2} |d\lambda| \leq q(\varepsilon) \frac{|z|^{\rho-1}|z|^{\alpha-1}}{\operatorname{Im} z^\alpha} (1 + q_2 \operatorname{Im} z^\rho + q_3 (\operatorname{Im} z^\rho)|z|^{-2}) \|h\|^2.$$

Напомним, что $|z| \geq 1$, z лежит в ε -прилегающих углах и $0 < \operatorname{Im} z^\rho \leq \delta$. Тогда из (2.8) и последнего неравенства получим

$$\int \frac{w^{-2}(\lambda)}{|\lambda - z|^2} |d\lambda| \leq \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^{-2} \left(2M \|B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}\|^2 + q_1(\varepsilon) \frac{|z|^{\rho-1}|z|^{\alpha-1}}{\operatorname{Im} z^\alpha} \right).$$

Из соотношений (2.10) вытекает, что в указанной области $|z - \omega_\rho|^{1-\rho}|z|^{\alpha-1} \times (\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1} \geq \delta_1 > 0$. Поэтому из (2.7) следует, что $\|\mathcal{E}_\rho(z)\|^{-2} \leq C(\varepsilon)|w_+(z)|^{-2} \times |z|^{1-\rho}$. И наконец, из второго неравенства леммы 1.2 выводим оценку

$$\begin{aligned} \|B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}\| &\leq c_2|z|^{2(\rho-1)} \leq \delta^{-1}c_2|z|^{2(\rho-1)}(\operatorname{Im} z^\rho)^{-1} \\ &\leq c_3|z|^{\rho-1}|z|^{\alpha-1}(\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1}. \end{aligned}$$

Теперь вторая оценка (2.4) в указанной области есть следствие трех последних неравенств.

Осталось доказать справедливость (2.4) в области $|z| < 1$, $z \in \gamma_\rho^+$. Для этого снова рассмотрим оценку интеграла

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\rho} w^{-2}(\lambda) \frac{|\mathcal{E}_\rho(\lambda), h|^2}{|\lambda - z|^2} |d\lambda| &\leq K \int_{|\lambda| \leq 2} |\lambda - z|^{-2} |d\lambda| \\ &\quad + \int_{|\lambda| \geq 2} w^{-2}(\lambda) |\mathcal{E}_\rho(\lambda), h|^2 |d\lambda| \\ &\leq (K_1|z|^{\alpha-1}(\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1} + M)\|h\|^2, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad |z| \leq 1, \end{aligned}$$

при выводе которой было учтено (2.6) и s -праворегулярность $\mathcal{E}_\rho$. Учитывая, что $|z|^{\alpha-1}(\operatorname{Im} z^\alpha)^{-1} \geq 1$, если $|z| \leq 1$, из (2.8), (2.7) и последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{w^{-2}(\lambda)}{|\lambda - z|^2} |dz| &\leq |w_+(\lambda)|^{-2} \left(K_2 \left(\frac{|z|^{\alpha-1}}{\operatorname{Im} z^\alpha} \right)^{-1} + L_3 \right) \left(K_1 \frac{|z|^{\alpha-1}}{\operatorname{Im} z^\alpha} + M_1 \right) \\ &\leq C|w_+(z)|^{-2} \frac{|z|^{\alpha-1}}{\operatorname{Im} z^\alpha}, \end{aligned}$$

т. е. второе неравенство (2.4) доказано для всех $z \in \gamma_\rho^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Рассмотрим на $\mathbb{R}$ вес $W^2(x) := w^2(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, и $W^2(x) := w^2(e^{i\frac{\pi}{\alpha}}|x|)$, $x \in \mathbb{R}_-$, и с помощью леммы 2.2 докажем конечность величины

$$\mathcal{P} := \sup_{z \in \mathbb{C}_+} \left\{ y^2 \int_{\mathbb{R}} W^2(x) |x - z|^{-2} dx \int_{\mathbb{R}} W^{-2}(x) |x - z|^{-2} dx \right\}, \quad z = x + iy.$$

Если $\rho = 1$, то из (2.4) следует, что $\mathcal{P} < \infty$. Пусть $\rho > 1$, $\gamma := \pi/\alpha - \pi$. Поскольку в угле $0 < \arg z \leq \gamma/2$ справедливо неравенство $|x + z|^2 \geq |-xe^{i\gamma} - z|^2$, $x \in \mathbb{R}_+$, то

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} W^{\pm 2}(x) |x - z|^{-2} dx &= \int_0^\infty w^{\pm 2}(x) |x - z|^{-2} dx + \int_0^\infty w^{\pm 2}(e^{i\frac{\pi}{\alpha}}|x|) |x + z|^{-2} dx \\ &\leq 2 \int_{\gamma_\rho} w^{\pm 2}(\lambda) |\lambda - z|^{-2} |d\lambda|, \end{aligned}$$

и поэтому из (2.4) следует оценка

$$\mathcal{P} \leq \sup_{z \in \mathbb{C}_+} \{4y^2 C^2 |z|^{-2} (\sin \alpha \varphi)^{-2}\} = 4C^2 \sup_{\varphi} \{\sin^2 \varphi (\sin \alpha \varphi)^{-2}\} < \infty, \quad \varphi = \arg z.$$

В угле $\gamma/2 \leq \arg z < \pi - \gamma/2$ имеет место неравенство

$$K|x+z|^2 \geq |-xe^{i\gamma} - z|^2, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

с некоторой константой K . Поэтому снова приходим к выводу, что $\mathcal{P} < \infty$. И наконец, в угле $\pi - \gamma/2 \leq \arg z < \pi$ имеем $|x-z|^2 \geq |x-e^{i\gamma}z|^2$, $x \in \mathbb{R}_+$. Следовательно,

$$\mathcal{P} \leq \sup_{z \in \mathbb{C}_+} \left\{ 4y^2 \int_{\gamma_\rho} \frac{w^2(\lambda) |d\lambda|}{|\lambda - e^{i\gamma}z|^2} \int_{\gamma_\rho} \frac{w^{-2}(\lambda) |d\lambda|}{|\lambda - e^{i\gamma}z|^2} \right\} \leq \sup_{\varphi} \left\{ \frac{4C^2 \sin^2 \varphi}{\sin^2 \alpha(\varphi + \gamma)} \right\} < \infty,$$

если φ изменяется в указанных пределах. Применяя аналогичные рассуждения, получим, что в случае $1/2 < \rho < 1$ величина $\mathcal{P}$ также конечна. Поэтому вес W^2 удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$ [18] и, следовательно, исходный вес w^2 удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$.

Обратимся теперь к свойству d -регулярности ядер Миттаг-Леффлера. При доказательстве следующей леммы впервые проявляется связь между регулярными ядрами Миттаг-Леффлера и операторами вида (0.7).

ЛЕММА 2.3. *Если ядро $\mathcal{E}_\rho$, $\rho > 1/2$, d -регулярно, то оно c -праворегулярно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы существует безусловный базис $\{\mathcal{E}_\rho(\lambda_k): \lambda_k \in \Lambda\}$ пространства $\mathfrak{H}$. Оператор K , действующий на элементы базиса по формуле $K\mathcal{E}_\rho(\lambda_k) = \lambda_k^{-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)$, продолжается по линейности и непрерывности до ограниченного оператора в $\mathfrak{H}$. В силу теоремы 1.1 $\mathcal{E}_\rho(z) = (I - zB_\rho)^{-1}g$. Если искать оператор K в виде $K = B_\rho + \mathcal{D}$, то для любой линейной комбинации $h = \sum c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k)$ получим

$$\begin{aligned} Kh &= \sum c_k B_\rho \mathcal{E}_\rho(\lambda_k) + \mathcal{D}h = \sum c_k \lambda_k^{-1} \mathcal{E}_\rho(\lambda_k) - \sum c_k \lambda_k^{-1} g + \mathcal{D}h \\ &= \sum c_k \lambda_k^{-1} \mathcal{E}_\rho(\lambda_k), \end{aligned}$$

т. е. образ $\mathcal{D}$ натягивается на вектор g . Поэтому существует вектор $f \in \mathfrak{H}$ такой, что

$$Kh = B_\rho h + (h, f)g.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} K(I - zK)^{-1}h &= B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}h + \Phi^{-1}(z)((I - zB_\rho)^{-1}h, f)\mathcal{E}_\rho(z), \\ \Phi(z) &:= 1 - z(\mathcal{E}_\rho(z), f). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Поэтому последовательность Λ совпадает с множеством корней функции Φ , которые простые. Из того, что

$$\begin{aligned} K^*(I - zK^*)^{-1}h &= B_\rho^*(I - zB_\rho^*)^{-1}h + \Phi_*^{-1}(z)((I - zB_\rho^*)^{-1}h, g)(I - zB_\rho^*)^{-1}f, \\ \Phi_*(z) &:= 1 - z((I - zB_\rho^*)^{-1}f, g), \end{aligned} \quad (2.12)$$

следует, что векторы $u_k := (I - \bar{\lambda}_k B_\rho^*)^{-1}f$, $\lambda_k \in \Lambda$, являются собственными для оператора K^* . Поскольку это семейство также образует безусловный базис

пространства $\mathfrak{H}$, каждый вектор $h \in \mathfrak{H}$ представим рядом $h = \sum c_k u_k$, $\|h\|^2 \asymp \sum |c_k|^2 \|u_k\|^2$. В силу леммы 1.3 на элементах базиса получим

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\gamma}_\rho} |z - \bar{\omega}_\rho|^{1-\rho} \|K^*(I - zK^*)^{-1} u_k\|^2 |dz| \\ &= \int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{1-\rho} |z - \lambda_k|^{-2} |dz| \|u_k\|^2 \leq C \|u_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

так как Λ лежит в криволинейной полосе $-\Delta < \operatorname{Im} \lambda_k^\rho < -\delta$. Поэтому (2.13) имеет место для всех $h \in \mathfrak{H}$. Если теперь учесть (2.12) и (1.5), то получим оценку

$$\int_{\bar{\gamma}_\rho} |z - \bar{\omega}_\rho|^{1-\rho} |\Phi_*(z)|^{-2} |(I - \bar{z}B_\rho^*)^{-1} h, g|^2 \|(I - zB_\rho^*)^{-1} f\|^2 |dz| \leq C_2 \|h\|^2,$$

которую можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{\rho-1} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^{-2} |(\mathcal{E}_\rho(z), h)|^2 \delta(z) |dz| \leq C_2 \|h\|^2, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad (2.14) \\ & \delta(z) := |z - \omega_\rho|^{2(1-\rho)} \|(I - zB_\rho)^{-1} g\|^2 \|(I - \bar{z}B_\rho^*)^{-1} f\|^2 |\Phi(z)|^{-2}, \quad \lambda \in \gamma_\rho. \end{aligned}$$

Если теперь докажем, что $\delta(z) \geq \varepsilon > 0$, $z \in \gamma_\rho$, то s -праворегулярность $\mathcal{E}_\rho$ будет следовать из (2.14). Из соотношений (2.11) находим

$$\delta(z) = |z - \omega_\rho|^{2(1-\rho)} \|K(I - zK)^{-1} - B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}\|^2, \quad z \in \gamma_\rho.$$

Учитывая представление (1.1), получим равенство

$$(K(I - zK)^{-1} - B_\rho(I - zB_\rho)^{-1})\mathcal{E}_\rho(\lambda_k) = (\lambda_k - z)^{-1}\mathcal{E}_\rho(z), \quad \lambda_k \in \Lambda,$$

из которого следует оценка снизу:

$$\sup_{\lambda_k \in \Lambda} \{|z - \omega_\rho|^{2(1-\rho)} |\lambda_k - z|^{-2} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 \|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^{-2}\} \leq \delta(z), \quad z \in \gamma_\rho.$$

Поскольку по условию $|\operatorname{Im} \lambda_k^\rho| \leq \Delta$, из леммы 1.2 выводим, что

$$\|\mathcal{E}_\rho(z) - \mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\| \leq |z - \lambda_k| \|B_\rho(I - \lambda_k B_\rho)^{-1}\| \|\mathcal{E}_\rho(z)\| \leq C_4 |z - \lambda_k| |\lambda_k|^{\rho-1} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|,$$

т. е. $\|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 \|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^{-2} \geq (C_4 |z - \lambda_k| |\lambda_k|^{\rho-1} + 1)^{-2}$. Поэтому

$$\sup_{\lambda_k \in \Lambda} \{|z - \omega_\rho|^{2(1-\rho)} |z - \lambda_k|^{-2} (C_4 |z - \lambda_k| |\lambda_k|^{\rho-1} + 1)^{-2}\} \leq \delta(z), \quad z \in \gamma_\rho. \quad (2.15)$$

Из определения последовательности без пропусков Λ легко следует, что для каждого $z \in \gamma_\rho$ существует такой элемент $\lambda(z) \in \Lambda$, что

$$|z - \lambda(z)| \leq C_0 |\lambda(z)|^{1-\rho}, \quad |z - \lambda(z)| \leq C_0 |z|^{1-\rho},$$

где C_0 не зависит от z . Заменяя в (2.15) супремум значением выражения в фигурных скобках при $\lambda_k = \lambda(z)$, получаем необходимую оценку снизу.

Теперь можно перейти к теоремам, описывающим d -регулярные и s -регулярные ядра Миттаг-Леффлера.

ТЕОРЕМА 2.2. *Произвольное ядро $\mathcal{E}_\rho$ роста (ρ, σ) , $\rho > 1/2$, d -регулярно тогда и только тогда, когда вес $w^2(z) = |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$, а $\mathcal{E}_\rho$ изоморфно w -ядру $\mathcal{E}_{\rho,w}$ со значениями в пространстве $L_2(0, \sigma)$, построенному по весу w^2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ядро d -регулярно. Из теоремы 1.1 и леммы 2.3 следует, что оно B -представимо и s -праворегулярно. В силу теоремы 2.1 вес w^2 удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$, т.е. первое утверждение теоремы доказано. Далее, для некоторой последовательности без пропусков Λ из криволинейной полосы семейство

$$\{\mathcal{E}_\rho(\lambda_k) : \lambda_k \in \Lambda\} \quad (2.16)$$

образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$. Доказывая лемму 2.3, мы установили, что Λ совпадает с множеством корней целой функции Φ (см. (2.11)), которые являются простыми. Оказывается, что Φ удовлетворяет всем условиям теоремы А для $A_{\gamma_\rho}^2$ -веса w^2 .

Действительно, из (2.11) следует, что $z^{-1}(\Phi(z) - \Phi(0)) = (\mathcal{E}_\rho(z), f)$. С другой стороны, после того, как доказано, что вес w^2 удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$, включение (2.3) означает, что эта функция принадлежит $H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$, т.е. условие 1) выполнено.

Выполняется также и условие 2). В самом деле, при доказательстве леммы 2.3 мы каждый вектор $h \in \mathfrak{H}$ разлагали в ряд: $h = \sum c_k u_k$, $u_k = (I - \bar{\lambda}_k B_\rho^*)^{-1} f$, $\lambda_k \in \Lambda$. Учитывая (1.1) и (2.11), нетрудно получить

$$(\mathcal{E}_\rho(z), h) = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} c_k ((I - z B_\rho^*)^{-1} g, (I - \bar{\lambda}_k B_\rho^*)^{-1} f) = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} c_k (\lambda_k - z)^{-1} \Phi(z), \quad (2.17)$$

причем, в силу s -праворегулярности $\mathcal{E}_\rho$, этот ряд сходится по норме класса $H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$. Если предположить, что $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log |\Phi(re^{-\frac{\pi}{2\rho}})| = \sigma_1 < \sigma$, то все члены ряда (2.17) имеют тип σ_1 при порядке ρ и, значит [3], при любом $h \in \mathfrak{H}$ его сумма обладает тем же свойством, что невозможно. Аналогично доказывается справедливость второго равенства из условия 2) теоремы А.

Рассмотрим снова оператор K , который был введен при доказательстве леммы 2.3. Собственные векторы этого оператора совпадают с элементами безусловного базиса (2.16). Разлагая каждый вектор по этому базису и учитывая, что Λ лежит в криволинейной полосе, для любого $h \in \mathfrak{H}$ получим

$$\int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|K(I - zK)^{-1}h\|^2 dz \leq M \|h\|^2.$$

Поэтому из формулы (2.11), определения веса w^2 и (1.4) следует, что

$$\int_{\gamma_\rho} w^2(z) |\Phi^{-1}(z) ((I - zB_\rho)^{-1}h, f)|^2 |dz| \leq L \|h\|^2, \quad h \in \mathfrak{H}. \quad (2.18)$$

Для любой непрерывной финитной функции φ рассмотрим интеграл

$$h = \int_{\gamma_\rho} \mathcal{E}_\rho(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda, \quad h \in \mathfrak{H}. \quad (2.19)$$

В силу уже доказанной s -праворегулярности ядра $\mathcal{E}_\rho$ (лемма 2.3), для любого $f \in \mathfrak{H}$ имеем оценку

$$|(h, f)|^2 = \left| \int_{\gamma_\rho} w^{-1}(z) (\mathcal{E}_\rho(z), f) w(z) \varphi(z) dz \right|^2 \leq M \int_{\gamma_\rho} w^2(z) |\varphi(z)|^2 |dz| \|f\|^2, \quad (2.20)$$

которая позволяет придать смысл интегралу (2.19) для любой функции φ из пространства $L_2(\gamma_\rho)$ с мерой $w^2(z) |dz|$. Для векторов h вида (2.19) легко получим

$$\begin{aligned} ((I - zB_\rho)^{-1}h, f) &= \int_{\gamma_\rho} ((I - zB_\rho)^{-1}(I - \lambda B_\rho)^{-1}g, f) \varphi(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\gamma_\rho} (\Phi(z) - \Phi(\lambda))(\lambda - z)^{-1} \varphi(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Поэтому, если рассмотреть (2.18) на векторе (2.19), то с учетом (2.20) приходим к оценке

$$\int_{\gamma_\rho} w^2(z) \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{\lambda - z} - \Phi^{-1}(z) \int_{\gamma_\rho} \frac{\Phi(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda}{\lambda - z} \right|^2 |d\lambda| \leq M_1 \int_{\gamma_\rho} |\varphi(z)|^2 w^2(z) |dz|.$$

Поскольку w^2 удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$ (теорема 2.1), первый сингулярный интеграл является ограниченным оператором в $L_2(\gamma_\rho)$ с мерой $w^2(z) |dz|$ [19]. Поэтому ограничен второй интеграл и, следовательно [19], вес $W^2(z) := w^{-2}(z) |\Phi(z)|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$.

Осталось проверить выполнение условия 4) теоремы А. Из включения (2.3) следует, что $(\mathcal{E}_\rho(z), h) \in H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$ для любого $h \in \mathfrak{H}$. Поэтому $e^{-iz^\rho \sigma}(\mathcal{E}_\rho(z), h) \in H^2(\gamma_\rho^-, w^{-2})$, $h \in \mathfrak{H}$, значит [3], [4], для любой конечной суммы получаем

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum c_k e^{-i\lambda_k^\rho \sigma} \mathcal{E}_\rho(\lambda_k), h \right) \right|^2 &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int \sum c_k (z - \lambda_k)^{-1} e^{-iz^\rho \sigma} (\mathcal{E}_\rho(z), h) d\lambda \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int \left| \sum c_k (z - \lambda_k)^{-1} \right|^2 w^2(z) |dz| \int \frac{|(\mathcal{E}_\rho(z), h)|^2}{w^2(z)} |dz| \\ &\leq M_2 \int \left| \sum c_k (z - \lambda_k)^{-1} \right|^2 w^2(z) |dz| \|h\|^2, \end{aligned}$$

где интегрирование ведется по γ_ρ . Учитывая расположение Λ и базисность (2.16), из этой оценки имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k) \right\|^2 &\asymp \left\| \sum c_k e^{-i\lambda_k^\rho \sigma} \mathcal{E}_\rho(\lambda_k) \right\|^2 \\ &\leq M_2 \int_{\gamma_\rho} \left| \sum c_k (z - \lambda_k)^{-1} \right|^2 w^2(z) |dz|. \end{aligned}$$

Мы получим противоположные неравенства, если в (2.18) подставим $h = \sum c_k \times \mathcal{E}_\rho(\lambda_k)$. Действительно, поскольку

$$\Phi^{-1}(z) ((I - zB_\rho)^{-1} \mathcal{E}_\rho(\lambda_k), f) = \Phi^{-1}(z) (\Phi(z) - \Phi(\lambda_k)) (\lambda_k - z)^{-1} = (\lambda_k - z)^{-1},$$

то соотношение (2.18) для вектора h имеет вид

$$\int_{\gamma_\rho} w^2(z) \left| \sum c_k (z - \lambda_k)^{-1} \right|^2 |dz| \leq L \left\| \sum c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k) \right\|_{\mathfrak{H}}^2.$$

Таким образом, для произвольной линейной комбинации векторов $\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)$ имеем

$$\left\| \sum c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k) \right\|_{\mathfrak{H}}^2 \asymp \int_{\gamma_\rho} \left| \sum c_k (z - \lambda_k)^{-1} \right|^2 w^2(z) |dz|, \quad (2.21)$$

и, следовательно, семейство $\{(z - \lambda_k)^{-1} : \lambda_k \in \Lambda\}$ образует базис замыкания своей линейной оболочки в $L_2(\gamma_\rho)$ с мерой $w^2(z) |dz|$. Поэтому последовательность $\{\lambda_k^\rho\}$ удовлетворяет условию 4) теоремы А [3].

По $A_{\gamma_\rho}^2$ -весу w^2 с помощью формул (0.3) построим w -ядро $\mathcal{E}_{\rho,w}$ со значениями в пространстве $L_2(0, \sigma)$. В силу теоремы А семейство $\{\mathcal{E}_{\rho,w}(\lambda_k, t) : \lambda_k \in \Lambda\}$ образует безусловный базис пространства $L_2(0, \sigma)$. При доказательстве теоремы А [3], [4] устанавливается аналог двусторонних оценок (2.21) для линейных комбинаций $\sum c_k \mathcal{E}_{\rho,w}(\lambda_k, t)$. Поэтому для любой финитной последовательности $\{c_k\}$ получим

$$\left\| \sum c_k \mathcal{E}_{\rho,w}(\lambda_k, t) \right\|_{L_2(0, \sigma)}^2 \asymp \left\| \sum c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k) \right\|_{\mathfrak{H}}^2,$$

следовательно, существует изоморфизм S из $L_2(0, \sigma)$ на $\mathfrak{H}$ такой, что

$$S \left(\sum c_k \mathcal{E}_{\rho,w}(\lambda_k, t) \right) = \sum c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k).$$

Заметим также, что g из соотношения (1.1) и y_w^σ из (0.3) имеют одинаковые коэффициенты разложения в ряды:

$$g = - \sum (\lambda_k \Phi'(\lambda_k))^{-1} \mathcal{E}_\rho(\lambda_k), \quad y_w^\sigma = - \sum (\lambda_k \Phi'(\lambda_k))^{-1} \mathcal{E}_{\rho,w}(\lambda_k, t).$$

Поэтому $S \mathcal{E}_{\rho,w}(z, t) = \mathcal{E}_\rho(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Обратное утверждение вытекает из теоремы 0.1.

Прежде чем переходить к описанию s -регулярных ядер, закончим доказательство теоремы 0.1.

ЛЕММА 2.4. *Каждое w -ядро $\mathcal{E}_{\rho,w}$ со значениями в $L_2(0, \sigma)$, $\sigma > 0$, s -регулярно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку d -регулярность ядра $\mathcal{E}_{\rho,w}$ со значениями в $L_2(0, \sigma)$ уже доказана во введении, а его рост равен (ρ, σ) , в силу теоремы 2.2 имеем

$$S \mathcal{E}_{\rho,v}(z, t) = \mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), \quad v^2(z) := |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t)\|_{L_2(0, \sigma)}^2, \quad (2.22)$$

где S – автоморфизм пространства $L_2(0, \sigma)$. В силу теоремы В для $\mathcal{E}_{\rho,v}$ верна двусторонняя оценка (0.5). Остается подставить в нее формулы (2.22).

Для описания s -регулярных ядер $\mathcal{E}_\rho$ нам понадобится следующая теорема [3], [4].

ТЕОРЕМА С. Пусть w^2 – произвольный вес Макенхаупта на контуре γ_ρ , $\rho > 1/2$, $\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t)$ – соответствующее w -ядро со значениями в пространстве $L_2(0, \sigma)$. Для того чтобы функция F допускала интегральное представление

$$F(z) = \int_0^\sigma \mathcal{E}_{\rho,w}(z, t) h(t) dt, \quad h \in L_2(0, \sigma),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) F – целая функция порядка ρ и нормального типа;
- 2) $F \in H_2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$;
- 3) $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log |F(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}})| \leq \sigma$.

Таким образом, теорема С обобщает классическую теорему Винера–Пэли и совпадает с ней в случае $\rho = 1$, $w^2(z) \equiv 1$.

ТЕОРЕМА 2.3. Произвольное ядро Миттаг-Леффлера $\mathcal{E}_\rho$, $\rho > 1/2$, роста (ρ, σ) c -регулярно тогда и только тогда, когда вес $w^2(z) := |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$, а $\mathcal{E}_\rho$ изоморфно w -ядру $\mathcal{E}_{\rho,w}$ со значениями в $L_2(0, \sigma)$, построенному по весу w^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ядро $\mathcal{E}_\rho$ c -регулярно. В силу теоремы 1.1 оно B -представимо, а в силу теоремы 2.1 вес w^2 удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$. Включение (2.3) означает, что $(\mathcal{E}_\rho(z), h) \in H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$ при каждом $h \in \mathfrak{H}$. Каждая такая функция имеет порядок роста ρ и нормальный тип $\sigma_1 \leq \sigma$. В силу теоремы С имеют место интегральные представления

$$(\mathcal{E}_\rho(z), h)_{\mathfrak{H}} = (\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), \mathcal{F}h)_{L_2(0, \sigma)}, \quad (2.23)$$

где $\mathcal{F}$ – линейный оператор из $\mathfrak{H}$ в $L_2(0, \sigma)$. Из c -регулярности $\mathcal{E}_\rho$ и теоремы В следует, что

$$\begin{aligned} \|h\|_{\mathfrak{H}}^2 &\asymp \int_{\gamma_\rho} w^{-2}(z) |(\mathcal{E}_\rho(z), h)|^2 |dz| \\ &= \int_{\gamma_\rho} w^{-2}(z) |(\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), \mathcal{F}h)|^2 |dz| \asymp \|\mathcal{F}h\|_{L_2(0, \sigma)}^2, \end{aligned}$$

т. е. $\mathcal{F}$ – изоморфизм на свой образ $\mathcal{L} := \mathcal{F}\mathfrak{H}$. Из B -представимости $\mathcal{E}_\rho$, соотношений (0.3) и (2.23) вытекают равенства

$$(\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), (J_\sigma^{1/\rho})^* \mathcal{F}h) = (\mathcal{E}_\rho(z), B^* h), \quad h \in \mathfrak{H},$$

из которых заключаем, что $\mathcal{L}$ инвариантно относительно $(J_\sigma^{1/\rho})^*$. Поэтому $\mathcal{L} = L_2(0, \sigma)$, так как в противном случае $\mathcal{L} = L_2(0, \sigma_1)$, $\sigma_1 < \sigma$ [20, с. 476], и из (2.23) следовало бы, что рост $\mathcal{E}_\rho$ равен (ρ, σ_1) . Учитывая представление (2.23), получим $\mathcal{E}_\rho(z) = S\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t)$, $S := \mathcal{F}^*$. Обратное утверждение вытекает из леммы 2.4.

Итак, из теорем 2.2, 2.3 следует, что ядро $\mathcal{E}_\rho(z) = (I - zB_\rho)^{-1}g$ регулярно тогда и только тогда, когда оно изоморфно w -ядру $\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t)$ со значениями в $L_2(0, \sigma)$,

построенному по $A_{\gamma_\rho}^2$ -весу $w^2(z) = |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$. Нетрудно видеть, что изоморфизм этих ядер равносильно наличию непрерывного и непрерывно обратимого оператора S из $L_2(0, \sigma)$ на $\mathfrak{H}$, который удовлетворяет условиям

$$SJ_\sigma^{1/\rho} = B^{1/\rho}S, \quad Sy_w^\sigma = g, \quad \rho > 1/2,$$

где y_w^σ строится по весу w^2 (см. введение). Можно доказать, что первое равенство имеет место тогда и только тогда, когда $SJ_\sigma = BS$. Таким образом, задача об описании регулярных ядер $\mathcal{E}_\rho$ содержит в себе задачу о подобию оператора $B \in \Lambda^{(\text{exp})}$ простейшему оператору интегрирования J_σ .

Для конкретных приложений необходимо иметь простые признаки регулярности ядер Миттаг-Леффлера. Сформулируем здесь один из таких результатов. Пусть $B \in \Lambda^{(\text{exp})}$, причем $\text{Im } B$ является ядерным оператором. Пусть также выполняются условия:

а) существуют векторы $f, f_1 \in B\mathfrak{H} + B^*\mathfrak{H}$ и число $a \in \mathbb{C}$ такие, что корни целой функции экспоненциального типа

$$F(z) := a - z((I - zB)^{-1}f, f_1)$$

лежат над некоторой прямой $\mathbb{R} + i\delta := \{x + \delta i : x \in \mathbb{R}\}$ и $0 < m \leq |F(x + i\delta)| \leq M$, $x \in \mathbb{R}$;

б) имеют место равенства

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log |F(iy)| = 0, \quad \limsup_{y \rightarrow -\infty} |y|^{-1} \log |F(iy)| = 2 \text{Sp Im } B.$$

Доказывается, что при наличии этих условий вектор f лежит в области определения оператора $B^{\mu-1}$, $\mu > 1/2$. Отметим, что B^α при $\alpha < 0$ мы понимаем как неограниченный оператор $(B^{-1})^{|\alpha|}$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $B \in \Lambda^{(\text{exp})}$ и оператор $\text{Im } B$ является ядерным. Пусть также векторы $f, f_1 \in B\mathfrak{H} + B^*\mathfrak{H}$ удовлетворяют условиям а), б). Ядро Миттаг-Леффлера $\mathcal{E}_{\rho, \mu}(z) := (I - zB_\rho)^{-1}g_\mu$, $g_\mu := B^{\mu-1}f$, $\mu > 1/2$, является регулярным тогда и только тогда, когда $\mu < 1/2 + 1/\rho$. Более того, регулярное ядро $\mathcal{E}_{\rho, \mu}$ изоморфно ядру (0.6) со значениями в пространстве $L_2(0, \sigma)$, $\sigma := 2 \text{Sp Im } B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на одном критерии подобия оператора B оператору J_σ , который доказан в [12, теорема 6.1]. В силу [12, теорема 6.1] из условий а), б) вытекает существование изоморфизма S из $L_2(0, \sigma)$, $\sigma := 2 \text{Sp Im } B$, на $\mathfrak{H}$, который удовлетворяет условиям

$$SJ_\sigma = BS, \quad S\mathbf{1} = f, \quad (2.24)$$

где $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная единице. Поэтому $SJ_\sigma^{\mu-1} = B^{\mu-1}S$ и, следовательно,

$$g_\mu = B^{\mu-1}f = B^{\mu-1}Sf = SJ_\sigma^{\mu-1}\mathbf{1} = Sy_\mu, \quad y_\mu(t) := \Gamma^{-1}(\mu)t^{\mu-1}.$$

Значит, из (2.24) выводим равенства

$$\mathcal{E}_{\rho, \mu}(z) = (I - zB_\rho)^{-1}g_\mu = S(I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1}y_\mu = S(t^{\mu-1}E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}zt^{1/\rho}; \mu)). \quad (2.25)$$

Если $1/2 < \mu < 1/2 + 1/\rho$, то $\omega := 1 + \rho - 2\mu\rho$ удовлетворяет неравенствам $-1 < \omega < 1$. Из соотношений (2.25) и (0.6) следует, что в этом случае $\mathcal{E}_{\rho,\mu}(z)$ изоморфно заведомо регулярному w -ядру, которое порождается $A_{\gamma_\rho}^2$ -весом $w^2(z) = |z|^\omega$, $z \in \gamma_\rho$.

Из асимптотических формул для $E_\rho(z, \mu)$ [6] и (2.25) нетрудно получить при достаточно больших $|z|$ двусторонние оценки:

$$\|\mathcal{E}_{\rho,\mu}(z)\|_{\mathfrak{H}}^2 \asymp \|(I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1}y_\mu\|_{L_2(0,\sigma)}^2 \asymp |z|^{2\rho(1-\mu)}, \quad z \in \gamma_\rho,$$

из которых вытекает, что при $\mu \geq 1/2 + 1/\rho$ ядро $\mathcal{E}_{\rho,\mu}(z)$ нерегулярно, поскольку вес

$$w^2(z) = |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_{\rho,\mu}(z)\|^2 \asymp |z|^\omega, \quad \omega = 1 + \rho - 2\mu\rho,$$

при таких значениях параметра μ не удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$.

Отметим, что, основываясь на результатах работы [12], можно получить и другие признаки регулярности ядер Миттаг-Леффлера.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий теорему 2.4. Ядро Миттаг-Леффлера

$$\mathcal{E}_\rho(z) := (I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1}g, \quad \rho > \frac{1}{2}, \quad (2.26)$$

со значениями в пространстве $L_2(0, \sigma)$, где g принадлежит пространству Соболева $W_2^1(0, \sigma)$ и $g(0) \neq 0$ регулярно тогда и только тогда, когда $\rho < 2$. Действительно, легко подобрать $a \in \mathbb{C}$ так, чтобы условия а), б) выполнялись для $f = g$, $f_1(t) \equiv 1$. В силу (2.26) $\mu = 1$, и поэтому регулярность рассматриваемого ядра равносильна неравенству $1 < 1/2 + 1/\rho$, т.е. $\rho < 2$. Кроме того, в силу изложенного выше вытекает также, что для ядра (2.26) справедливы оценки $\|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 \asymp 1$, $z \in \gamma_\rho$. Этот пример будет использован в §3.

§3. Спектральное разложение одного класса неограниченных несамосопряженных операторов

В настоящем параграфе будем рассматривать операторы, обратные к которым задаются формулами (0.7). Другими словами, через $\mathcal{K}_\rho$ обозначим класс неограниченных плотно заданных в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ операторов A таких, что

$$A^{-1}h = B_\rho h + (h, f)g, \quad B \in \Lambda^{(\exp)}, \quad f, g \in \mathfrak{H}, \quad \rho > \frac{1}{2}. \quad (3.1)$$

Спектр A совпадает с множеством корней $\Lambda = \{\lambda_k\}$ целой функции Φ порядка ρ :

$$\Phi(z) := 1 - z(\mathcal{E}_\rho(z), f), \quad \mathcal{E}_\rho(z) = (I - zB_\rho)^{-1}g. \quad (3.2)$$

Корневое подпространство $\mathfrak{N}_{\lambda_k}$, отвечающее точке $\lambda_k \in \sigma(A)$, натягивается на векторы $\mathcal{E}_\rho^{(j)}(\lambda_k)$, $0 \leq j < m_k$, где m_k – кратность корня λ_k функции Φ , причем $\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)$ – единственный собственный вектор, т.е. $A\mathcal{E}_\rho(\lambda_k) = \lambda_k\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)$.

Предположим, что $\sigma(A) \cap \gamma_\rho = \emptyset$, и построим простейший оператор A_m со спектром таким же, как спектр оператора A . Полагая

$$\sigma_\pm(A) := \gamma_\rho^\pm \cap \sigma(A), \quad (3.3)$$

рассмотрим две последовательности комплексных чисел $U := \{u_k\}$ и $V = \{v_k\}$ из верхней $\mathbb{C}_+$ и нижней $\mathbb{C}_-$ полуплоскости соответственно:

$$u_k := \lambda_k^\alpha, \quad \lambda_k \in \sigma_+(A), \quad v_k = \lambda_k^\rho, \quad \lambda_k \in \sigma_-(A), \quad (3.4)$$

где ветвь z^α отображает угол γ_ρ^+ на $\mathbb{C}_+$, z^ρ отображает угол γ_ρ^- на $\mathbb{C}_-$, $\pi/\alpha + \pi/\rho = 2\pi$. Условимся, что элемент $u_k(v_k)$ имеет ту же кратность, что и прообраз $\lambda_k \in \sigma_\pm(A)$ при отображениях (3.4).

По последовательности U (предполагается, что $U \neq \emptyset$) построим простейший диссипативный оператор A_+ такой, что $\sigma(A_+) = U$. Для этого заметим, что последовательность удовлетворяет условию Бляшке, т. е.

$$\sum m_k \operatorname{Im} u_k |u_k + i|^{-2} < \infty,$$

где m_k – кратность $u_k \in U$. В самом деле, при доказательстве леммы 2.1 было получено, что каждая функция

$$G_h(z) := (\mathcal{E}_\rho(z), h)(z - \omega_\rho)^{-\frac{1+\rho}{2}}, \quad h \in \mathfrak{H},$$

удовлетворяет условию (2.2), т. е. принадлежит классу Харди $H^2(\gamma_\rho^+)$. Полагая $h = (I - \bar{\lambda}_0 B_\rho^*)^{-1} f$, $\lambda_0 \in \gamma_\rho^-$, отсюда выводим, что

$$G_{\lambda_0}(z) := \Phi(z)(z - \lambda_0)^{-1}(z - \omega_\rho)^{-\frac{1+\rho}{2}} \in H^2(\gamma_\rho^+),$$

т. е. $G_{\lambda_0}(z^{\frac{1}{\alpha}})z^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \in H_+^2$. Поэтому последовательность U корней этой функции удовлетворяет условию Бляшке [5]. На подпространстве

$$\mathcal{L}_+ := \operatorname{clos span}_{H_-^2} \{j!(z - u_k)^{-(j+1)} : u_k \in U, 0 \leq j < m_k\}$$

класса Харди H_-^2 рассмотрим неограниченный оператор

$$(A_+ \varphi)(z) := z\varphi(z) - \lim_{y \rightarrow -\infty} iy\varphi(iy) \quad (3.5)$$

с максимальной областью определения $\mathcal{D}_{A_+}$, т. е. $\varphi \in \mathcal{D}_{A_+}$ тогда и только тогда, когда правая часть (3.5) существует и принадлежит $\mathcal{L}_+$. Оператор A_+ обладает следующими свойствами:

- 1) $\operatorname{Im}(A_+ \varphi, \varphi) \geq 0$, $\varphi \in \mathcal{D}_{A_+}$;
- 2) $\sigma(A_+) = U$, причем корневое подпространство $\mathcal{L}_k$, отвечающее собственному числу u_k , натягивается на функции $j!(z - u_k)^{-(j+1)}$, $0 \leq j < m_k$;
- 3) оператор $A_+^{-1} - (A_+^{-1})^*$ одномерный.

Все перечисленные факты легко выводятся из свойств преобразований Кели операторов A_+ , которые подробно изучались в [2], [23]. Операторы вида (3.5) служат функциональными моделями простейших диссипативных операторов. Это означает, что любой непрерывно обратимый диссипативный оператор A в абстрактном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ со спектром U и полной системой корневых подпространств L_k , $\dim L_k = m_k$, и такой, что $\dim(A^{-1} - (A^{-1})^*)\mathfrak{H} = 1$, унитарно эквивалентен оператору A_+ [23].

Поскольку A_+ – диссипативный оператор, корректно определена его дробная степень $A^{1/\alpha}$, $0 < 1/\alpha < 2$, причем $\sigma(A_+^{1/\alpha}) = \{u_k^{1/\alpha} : u_k \in U\} = \sigma_+(A)$ [2].

Аналогично доказывается, что последовательность $V = \{v_k\}$ удовлетворяет условию Бляшке в нижней полуплоскости, и поэтому в подпространстве

$$\mathcal{L}_- =: \text{clos span}_{H_+^2} \{j!(z - v_k)^{-(j+1)} : v_k \in V, 0 \leq j < m_k\}$$

класса Харди H_+^2 она порождает максимальный оператор

$$(A_-)(z) := z\varphi(z) - \lim_{y \rightarrow +\infty} iy\varphi(iy). \quad (3.6)$$

Этот оператор обладает аналогичным свойством с тем только отличием, что он антидиссипативен, т. е. $\text{Im}(A_- \varphi, \varphi) \leq 0$, $\varphi \in \mathcal{D}_{A_-}$.

В силу (3.4) имеем $\sigma(A_-^{1/\rho}) = \sigma_-(A)$. Итак, произвольный оператор A класса $\mathcal{K}_\rho$ и оператор $A_m := A_+^{1/\alpha} \oplus A_-^{1/\rho}$, который однозначно строится по множествам $\sigma_\pm(A)$, имеют одинаковые спектры.

Основная задача настоящего параграфа формулируется следующим образом: определить, при каких условиях существует изоморфизм S из $\mathfrak{H}$ на $\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-$ такой, что имеет место равенство

$$SAS^{-1} = A_+^{1/\alpha} \oplus A_-^{1/\rho}, \quad (3.7)$$

т. е. когда операторы A и A_m подобны. Ясно, что в этом разложении одно из слагаемых может быть оператором в конечномерном пространстве либо отсутствовать вовсе. Заметим, что наличие спектрального разложения (3.7) свидетельствует о том, что оператор A класса $\mathcal{K}_\rho$ имеет простую структуру и определяется своим спектром с точностью до подобия.

Основной результат второй части статьи состоит в том, что оператор $A \in \mathcal{K}_\rho$ может допускать спектральное разложение (3.7) лишь в случае регулярности ядра $\mathcal{E}_\rho$. Сформулируем первый результат в этом направлении.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть A – произвольный оператор вида (3.1), σ – тип ядра Миттаг-Леффлера $\mathcal{E}_\rho(z) = (I - zB_\rho)^{-1}g$ при порядке ρ , $\sigma(A) \cap \gamma_\rho = \emptyset$, функция Φ определяется формулой (3.2). Если выполняются условия:

- 1) $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log |\Phi(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}})| = \sigma$, $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\alpha} \log |\Phi(re^{i\frac{\pi}{2\alpha}})| = 0$,
 $\alpha^{-1} + \rho^{-1} = 2$,
- 2) вес $W(z) := |z - \omega_\rho|^{\rho-1} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^{-2} |\Phi(z)|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$,
- 3) ядро $\mathcal{E}_\rho$ регулярно,

то имеет место спектральное представление (3.7).

Отметим, что поскольку порядок Φ равен ρ , то второе равенство условия 1) при $1/2 < \rho < 1$ выполняется автоматически.

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобится реализация дробных степеней $A_\pm$ в виде операторов, действующих в угловых классах Харди с весом. Пусть w^2 – произвольный $A_{\gamma_\rho}^2$ -вес на контуре γ_ρ , $H^2(\gamma_\rho^\pm, w^2)$ – соответствующие весовые классы Харди (см. введение). Рассмотрим подпространства

$$\mathcal{L}_+^{(\alpha)} := \text{clos span} \{j!(z - \lambda_k)^{-(j+1)} : \lambda_k \in \sigma_+(A), 0 \leq j < m_k\}, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L}_-^{(\rho)} := \text{clos span} \{j!(z - \lambda_k)^{-(j+1)} : \lambda_k \in \sigma_-(A), 0 \leq j < m_k\}, \quad (3.9)$$

где в первом случае замыкание берется в метрике $H^2(\gamma_\rho^-, w^2)$, а во втором – в метрике $H^2(\gamma_\rho^+, w^2)$. В этих подпространствах рассмотрим максимальные операторы

$$(A_\alpha^+ \varphi)(z) := z\varphi(z) - \lim_{r \rightarrow +\infty} r e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} \varphi(r e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}), \quad (3.10)$$

$$(A_\rho^- \psi)(z) := z\psi(z) - \lim_{r \rightarrow \infty} r e^{i\frac{\pi}{2\alpha}} \psi(r e^{i\frac{\pi}{2\alpha}}), \quad (3.11)$$

области определения которых задаются по аналогии с заданием операторов $A_\pm$.

Имеет место

ЛЕММА 3.1. *Для произвольного $A_{\gamma_\rho}^2$ -веса w^2 на контуре γ_ρ существуют изоморфизмы L_+ из пространства $\mathcal{L}_+^{(\alpha)}$ на $\mathcal{L}_+$ и L_- из пространства $\mathcal{L}_-^{(\rho)}$ на $\mathcal{L}_-$ такие, что*

$$A_+^{1/\alpha} = L_+ A_\alpha^+ L_+^{-1}, \quad A_-^{1/\rho} = L_- A_\rho^- L_-^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, например, что операторы $A_+^{1/\alpha}$ и A_α^+ подобны. Докажем сначала, что существует изоморфизм L из класса $H^2(\gamma_\rho^-, w^2)$ на класс Харди H_-^2 такой, что

$$L((z - \gamma)^{-1}) = \gamma^{\frac{\alpha-1}{2}} w_+(\gamma) (x - \gamma^\alpha)^{-1}, \quad \gamma \in \gamma_\rho^+, \quad (3.12)$$

где w_+ – внешняя в области γ_ρ^+ функция, отвечающая весу w^2 (см. введение).

Пусть $\mathbb{P}_-$ – стандартный проектор из $L_2(\gamma_\rho)$ на безвесовой класс Харди $H^2(\gamma_\rho^-)$. Тогда для любой конечной совокупности $\{\gamma_k\} \subset \gamma_\rho^+$ имеем

$$\mathbb{P}_- \left(\sum c_k w_+(z) (z - \gamma_k)^{-1} \right) = \sum c_k w_+(\gamma_k) (z - \gamma_k)^{-1}. \quad (3.13)$$

С другой стороны, из формул

$$\mathbb{P}_- f = \frac{1}{2}(f - Sf), \quad (Sf)(z) = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\lambda) d\lambda}{\lambda - z}, \quad z \in \gamma_\rho,$$

находим

$$\begin{aligned} & w_+(z) S \left(w_+^{-1}(\lambda) \sum c_k (\lambda - \gamma_k)^{-1} \right) \\ &= \sum c_k (z - \gamma_k)^{-1} - 2 \sum c_k w_+(z) w_+^{-1}(\gamma_k) (z - \gamma_k)^{-1}, \quad z \in \gamma_\rho. \end{aligned}$$

Поскольку операторы $\mathbb{P}_-$ и $w_+ S w_+^{-1}$ ограничены в пространстве $L_2(\gamma_\rho)$ [19], из (3.13) и последних равенств следуют двусторонние оценки

$$\int_{\gamma_\rho} \left| \sum c_k (z - \gamma_k)^{-1} \right|^2 w^2(z) |dz| \asymp \int_{\gamma_\rho} \left| \sum c_k w_+(\gamma_k) (z - \gamma_k)^{-1} \right|^2 |dz|. \quad (3.14)$$

После замены переменной $z = x^{1/\alpha}$ получим

$$\int_{\gamma_\rho} \left| \sum c_k w_+(\gamma_k) (z - \gamma_k)^{-1} \right|^2 |dz| = \alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum c_k w_+(\gamma_k) (x^{1/\alpha} - \gamma_k)^{-1} x^\beta \right|^2 dx,$$

$$\beta = \frac{1 - \alpha}{2\alpha}.$$

Из формул теории вычетов следуют равенства

$$\mathcal{P}_-(x^\beta (x^{1/\alpha} - \gamma_k)^{-1}) = \alpha \gamma_k^{\frac{\alpha-1}{2}} (x - \gamma_k^\alpha)^{-1}, \quad \gamma_k \in \gamma_\rho^+,$$

где $\mathcal{P}_-$ – ортопроектор из $L_2(\mathbb{R})$ на H_-^2 . Кроме того, простые вычисления показывают, что

$$\frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{\gamma_\rho} \frac{\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}}}{\lambda^\alpha - \gamma_k^\alpha} \frac{d\lambda}{\lambda - z} = \frac{z^{\frac{\alpha-1}{2}}}{z^\alpha - \gamma_k^\alpha} - \frac{\alpha^{-1} \gamma_k^{\frac{1-\alpha}{2}}}{z - \gamma_k}, \quad z \in \gamma_\rho.$$

Поэтому из двух последних равенств вытекают двусторонние оценки

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \sum a_k x^\beta (x^{1/\alpha} - \gamma_k)^{-1} \right|^2 dx \asymp \int_{\mathbb{R}} \left| \sum a_k \gamma_k^{\frac{\alpha-1}{2}} (x - \gamma_k^\alpha)^{-1} \right|^2 dx,$$

которые с учетом (3.14) означают, что

$$\int_{\gamma_\rho} \left| \sum c_k (z - \gamma_k)^{-1} \right|^2 w^2(z) |dz| \asymp \int_{\mathbb{R}} \left| \sum c_k w_+(\gamma_k) \gamma_k^{\frac{\alpha-1}{2}} (x - \gamma_k^\alpha)^{-1} \right|^2 dx$$

для любой конечной совокупности $\{\gamma_k\} \subset \gamma_\rho^+$. Поскольку линейная оболочка дробей $(z - \gamma)^{-1}$, $\gamma \in \gamma_\rho^+$, всюду плотна в классе $H^2(\gamma_\rho^-, w^2)$, существует изоморфизм L , обладающий свойством (3.12).

В силу того, что последовательность $\{\lambda_k^\alpha\}$ удовлетворяет условию Бляшке, подпространство (3.8) есть правильная часть $H^2(\gamma_\rho^-, w^2)$ [3]. Полагая

$$L_+ := L | \mathcal{L}_+^{(\alpha)},$$

покажем, что L_+ осуществляет подобие операторов $A_+^{1/\alpha}$ и A_α^+ .

Из (3.12) вытекают равенства

$$L_+((j-1)!(z - \lambda_k)^{-j}) = \frac{\partial^{j-1}}{\partial \gamma^{j-1}} \frac{\gamma^{\frac{j-1}{2}} w_+(\gamma)}{x - \gamma^\alpha} \Big|_{\gamma=\lambda_k}, \quad 1 \leq j \leq m_k, \quad \lambda_k \in \sigma_+(A),$$

$$(3.15)$$

из которых легко следует, что L_+ отображает $\mathcal{L}_+^{(\alpha)}$ на подпространство $\mathcal{L}_+$ класса Харди H_-^2 .

Вычислим теперь действие оператора $A_+^{1/\alpha}$ на корневом подпространстве

$$\mathcal{L}_k = \text{span}\{(j-1)!(x - u_k)^{-j} : 1 \leq j \leq m_k\}$$

оператора A_+ , отвечающем точке $u_k \in \sigma(A_+)$. Нетрудно проверить, что

$$(A_+ - zI)^{-1}\varphi = (\varphi(\lambda) - \varphi(z))(\lambda - z)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad \varphi \in \mathcal{L}_+.$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}_k$ имеет полюс порядка j в точке $z = u_k$. Поскольку $\mathcal{L}_k$ конечномерно, можно воспользоваться формулой Рисса:

$$\begin{aligned} (A^{1/\alpha}\varphi)(\lambda) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-u_k|=\varepsilon} z^{1/\alpha} (A - zI)^{-1}\varphi dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-u_k|=\varepsilon} z^{1/\alpha} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(z)}{\lambda - z} dz \\ &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{\partial^{j-1}}{\partial z^{j-1}} \left. \frac{z^{1/\alpha} (z - u_k)^j \varphi(z)}{\lambda - z} \right|_{z=u_k}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$A_+^{1/\alpha} \left(\frac{(j-1)!}{(x - u_k)^j} \right) = \frac{\partial^{j-1}}{\partial z^{j-1}} \left. \frac{z^{1/\alpha}}{x - z} \right|_{z=u_k}, \quad 1 \leq j \leq m_k, \quad u_k \in U. \quad (3.16)$$

Вводя обозначения

$$r_{k,j}(z) = (j-1)! (z - \lambda_k)^{-j}, \quad 1 \leq j \leq m_k, \quad \lambda_k \in \sigma_+(A),$$

и учитывая формулы (3.15), получим

$$\begin{aligned} (L_+ A_\alpha^+ r_{k,j})(x) &= L_+ ((j-1)r_{k,j-1} + \lambda_k r_{k,j}) = (j-1) \frac{\partial^{j-2}}{\partial \gamma^{j-2}} \left. \frac{\gamma^{\frac{\alpha-1}{2}} w_+(\gamma)}{x - \gamma^\alpha} \right|_{\gamma=\lambda_k} \\ &\quad + \lambda_k \frac{\partial^{j-1}}{\partial \gamma^{j-1}} \left. \frac{\gamma^{\frac{\alpha-1}{2}} w_+(\gamma)}{x - \gamma^\alpha} \right|_{\gamma=\lambda_k}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Полагая $p(\gamma) = \gamma^{\frac{\alpha-1}{2}} w_+(\gamma)$, $v = \gamma^\alpha$, из (3.15) найдем

$$(L_+ r_{k,j})(x) = \sum_{i=0}^{j-1} C_{j-1}^i p^{(i-j+1)}(\lambda_k) \sum_{s=1}^i U_s(\lambda_k) \frac{\partial^s}{\partial v^s} (x - v)^{-1} \Big|_{v=\lambda_k^\alpha},$$

где $U_s(\gamma)$ – некоторые функции, возникающие при вычислении производной

$$\frac{\partial^i}{\partial \gamma^i} (x - v)^{-1}, \quad v = \gamma^\alpha,$$

сложной функции. Из соотношений (3.16), (3.17) следует, что

$$\begin{aligned} (A_+^{1/\alpha} L_+ r_{k,j})(x) &= \sum_{i=0}^{j-1} C_{j-1}^i p^{(i-j+1)}(\lambda_k) \sum_{s=1}^i U_s(\lambda_k) \frac{\partial^s}{\partial v^s} \frac{v^{1/\alpha}}{x - v} \Big|_{v=\lambda_k^\alpha} \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} C_{j-1}^i p^{(i-j+1)}(\lambda_k) \frac{\partial^i}{\partial \gamma^i} \frac{\gamma}{x - \gamma^\alpha} \Big|_{\gamma=\lambda_k} \\ &= \frac{\partial^{j-1}}{\partial \gamma^{j-1}} \left. \frac{\gamma \cdot \gamma^{\frac{\alpha-1}{2}} w_+(\gamma)}{x - \gamma^\alpha} \right|_{\gamma=\lambda_k} \\ &= \lambda_k \frac{\partial^{j-1}}{\partial \gamma^{j-1}} \left. \frac{\gamma^{\frac{\alpha-1}{2}} w_+(\gamma)}{x - \gamma^\alpha} \right|_{\gamma=\lambda_k} + (j-1) \frac{\partial^{j-2}}{\partial \gamma^{j-2}} \left. \frac{\gamma^{\frac{\alpha-1}{2}} w_+(\gamma)}{x - \gamma^\alpha} \right|_{\gamma=\lambda_k} \\ &= (L_+ A_\alpha^+ r_{k,j})(x), \end{aligned}$$

т. е. на каждом корневом подпространстве справедливо равенство $A_+^{1/\alpha} L_+ = L_+ A_+^+$. Поскольку семейства корневых подпространств операторов $A_+^{1/\alpha}$, A_+^+ полны, подобие этих операторов доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Пусть выполняются условия 1), 2) теоремы 3.1. Из результатов § 2 следует, что вес

$$w^2(z) = |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$$

удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$ и существует изоморфизм S_1 из $\mathfrak{H}$ на $L_2(0, \sigma)$ такой, что

$$S_1 B^{1/\rho} = J_\sigma^{1/\rho} S_1, \quad S_1 g = y_w^\sigma,$$

где функция y_w строится по весу Макенхаупта w^2 (см. введение). Поэтому абстрактный оператор A вида (3.1) подобен оператору A_1 в пространстве $L_2(0, \sigma)$, который задается формулой

$$A_1^{-1} = J_\sigma^{1/\rho} h + (h, x) y_w^\sigma, \quad x := S_1^* f. \quad (3.18)$$

Теперь функция Φ , которая определяется равенством (3.2), представима в виде

$$\Phi(z) = 1 - z(\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t), x)_{L_2(0, \sigma)}, \quad \mathcal{E}_{\rho, w}(z, t) = (I - z J_\sigma^{1/\rho})^{-1} y_w^\sigma.$$

Легко вычисляется резольвента оператора A :

$$(A_1 - zI)^{-1} h = J_\sigma^{1/\rho} (I - z J_\sigma^{1/\rho})^{-1} h + \Phi^{-1}(z) ((I - z J_\sigma^{1/\rho})^{-1} h, x) \mathcal{E}_{\rho, w}(z, t). \quad (3.19)$$

Корневые векторы оператора A_1 натягиваются на функции $\mathcal{E}_{\rho, w}^{(j)}(\lambda_k, t)$, $0 \leq j < m_k$, где m_k – кратность корня λ_k функции Φ .

Операторы вида (3.18) подробно изучались в работах [3], [4]. В частности, в них доказано, что оценка

$$\int_{\gamma_\rho} w^2(z) |\Phi^{-1}(z) ((I - z J_\sigma^{1/\rho})^{-1} h, x)|^2 |dz| \leq M \|h\|^2, \quad h \in L_2(0, \sigma), \quad (3.20)$$

равносильно тому, что вес $W(z) := w^{-2}(z) |\Phi(z)|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$, т. е. в точности условию 2) теоремы 3.1. Кроме того, доказано, что условия 1), 2) теоремы 3.1 обеспечивают полноту в $L_2(0, a)$ семейства корневых подпространств оператора A_1 .

Обозначим через $\mathfrak{M}_\pm$ замыкание линейной оболочки корневых векторов оператора A_1 , отвечающих частям спектра $\sigma_\pm(A_1)$:

$$\mathfrak{M}_\pm = \text{clos span} \{ \mathcal{E}_{\rho, w}^{(j)}(\lambda_k, t), \lambda_k \in \sigma_\pm(A_1), 0 \leq j < m_k \}.$$

Как уже отмечалось, $\text{clos span} \{ \mathfrak{M}_+, \mathfrak{M}_- \} = L_2(0, \sigma)$. Докажем, что имеет место прямое разложение:

$$L_2(0, \sigma) = \mathfrak{M}_+ \dot{+} \mathfrak{M}_-. \quad (3.21)$$

К регулярному ядру $\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t)$ со значениями в пространстве $L_2(0, \sigma)$ применимы рассуждения из доказательства теоремы 2.2. В частности, интеграл (2.19)

имеет смысл для любой функции φ из пространства $L_2(\gamma_\rho)$ с мерой $w^2(x)|dz|$, и справедлива оценка

$$\left\| \int_{\gamma_\rho} \mathcal{E}_{\rho,w}(z,t)\varphi(z) dz \right\|_{L_2(0,\sigma)}^2 \leq M_1 \int_{\gamma_\rho} |\varphi(z)|^2 w^2(z) |dz|.$$

Рассмотрим теперь в пространстве $L_2(0,\sigma)$ оператор

$$(P_+h)(t) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \mathcal{E}_{\rho,w}(z,t) \Phi^{-1}(z) ((I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1}h, x) dz, \quad 0 \leq t \leq \sigma,$$

где контур γ_ρ проходит так, что область γ_ρ^+ остается слева. Из предыдущей оценки и (3.20) следует, что оператор P_+ ограничен в пространстве $L_2(0,\sigma)$. Докажем теперь, что P_+ есть проектор на $\mathfrak{M}_+$ параллельно $\mathfrak{M}_-$. Для этого вычислим действие оператора P_+ на корневую функцию $h = \mathcal{E}_{\rho,w}^{(j)}(\lambda_k, t)$, $\lambda_k \in \sigma(A_1)$. Учитывая представление для целой функции Φ , получим

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(z) ((I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1}h, x) &= \Phi^{-1}(z) \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} ((I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1} (I - \lambda J_\sigma^{1/\rho})^{-1} y_w^\sigma, x) \Big|_{\lambda=\lambda_k} \\ &= \Phi^{-1}(z) \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \frac{\Phi(\lambda) - \Phi(z)}{z - \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k} = -\frac{j!}{(z - \lambda_k)^{j+1}}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

поскольку $j < m_k$. Из формулы для P_+ , равенств (3.22) и теоремы С для любой функции $h \in L_2(0,\sigma)$ имеем

$$(P_+ \mathcal{E}_{\rho,w}^{(j)}(\lambda_k, t), h) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} (\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), h) (z - \lambda_k)^{-(j+1)} dz = (\mathcal{E}_{\rho,w}^{(j)}(\lambda_k, t), h),$$

если $\lambda_k \in \sigma_+(A_1)$, и $(P_+ \mathcal{E}_{\rho,w}^{(j)}(\lambda_k, t), h) = 0$, если $\lambda_k \in \sigma_-(A_1)$. Таким образом, разложение (3.21) доказано.

Далее, из формул (3.8), (3.22) следует, что оператор

$$(S_2h)(z) = \Phi^{-1}(z) ((I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1}h, x), \quad h \in \mathfrak{M}_+, \quad (3.23)$$

отображает $\mathfrak{M}_+$ в подпространство $\mathcal{L}_+^{(\alpha)}$, причем в силу оценки (3.20) оператор S_2 действует непрерывно. Докажем, что S_2 – изоморфизм $\mathfrak{M}_+$ на $\mathcal{L}_+^{(\alpha)}$. Действительно, для любой линейной комбинации $l(t) = \sum a_{kj} \mathcal{E}_{\rho,w}^{(j)}(\lambda_k, t)$, $\lambda_k \in \sigma_+(A_1)$, и любой функции $h \in L_2(0,\sigma)$ с помощью теоремы В получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum a_{kj} \mathcal{E}_{\rho,w}^{(j)}(\lambda_k, t), h \right) \right|^2 &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \sum a_{kj} j! (z - \lambda_k)^{-(j+1)} (\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), h) dz \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_\rho} w^2(z) \left| \sum a_{kj} j! (z - \lambda_k)^{-(j+1)} \right|^2 |dz| \int_{\gamma_\rho} w^{-2}(z) |(\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), h)|^2 |dz| \\ &\leq M_2 \int_{\gamma_\rho} w^2(z) \left| \sum a_{kj} j! (z - \lambda_k)^{-(j+1)} \right|^2 |dz| \|h\|_{L_2(0,\sigma)}^2, \end{aligned}$$

из которой вытекает, что

$$\|\varphi\|_{L_2(0,\sigma)}^2 \leq M_2 \|S_2 \varphi\|_{H^2(\gamma_\rho^-, w^2)}^2, \quad \varphi \in \mathfrak{M}_+,$$

т. е. S_2 – изоморфизм.

Подпространства $\mathfrak{M}_\pm$ из разложения (3.21) инвариантны относительно оператора A_1 , а потому порождают разложение

$$A_1 = A_1^+ + A_1^-, \quad A_1^\pm := A_1 | (\mathcal{D}_{A_1} \cap \mathfrak{M}_\pm). \quad (3.24)$$

Докажем теперь, что оператор S_2 вида (3.23) осуществляет подобие оператора A_1^+ и оператора A_α^+ , который определяется формулой (3.10). Из (3.18) следует, что если φ принадлежит области определения A_1^+ , то φ представима в виде

$$\varphi = J_\sigma^{1/\rho} h + (h, x) y_w^\sigma, \quad h \in \mathfrak{M}_+,$$

причем $A_1^+ \varphi = h$. Поэтому из определения целой функции Φ и (3.23) вытекает, что для $\varphi \in \mathcal{D}_{A_1^+}$ получим

$$\begin{aligned} (S_2 \varphi)(z) &= (S_2 J_\sigma^{1/\rho} h)(z) + (h, x) (S_2 y_w^\sigma)(z) \\ &= (z \Phi(z))^{-1} \{ (z J_\sigma^{1/\rho} (I - z J_\sigma^{1/\rho})^{-1} h, x) + (h, x) ((I - z J_\sigma^{1/\rho})^{-1} y_w^\sigma, x) \} \\ &= (z \Phi(z))^{-1} \{ ((I - z J_\sigma^{1/\rho})^{-1} h, x) - \Phi(z) (h, x) \}. \end{aligned}$$

Поскольку $(S_2 \varphi)(z) \in H^2(\gamma_\rho^-, w^2)$, то

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (S_2 \varphi)(z) = 0, \quad z = r e^{-i \frac{\pi}{2\rho}},$$

поэтому имеем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi^{-1}(z) ((I - z J_\sigma^{1/\rho})^{-1} h, x) = 0,$$

где $z \rightarrow \infty$, при этом z остается на луче $\arg z = -\frac{\pi}{2\rho}$. С другой стороны, из формулы (3.10) следует, что

$$\begin{aligned} (A_\alpha^+ S_2 \varphi)(z) &= z (S_2 \varphi)(z) - \lim_{r \rightarrow \infty} z (S_2 \varphi)(z) \\ &= \Phi^{-1}(z) ((I - z J_\sigma^{1/\rho})^{-1} h, x) - \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi^{-1}(z) ((I - z J_\sigma^{1/\rho})^{-1} h, x) \\ &= (S_2 h)(z) = (S_2 A_1^+ \varphi)(z), \end{aligned}$$

т. е. подобие операторов A_1^+ и A_α^+ доказано.

Докажем теперь подобие оператора A_1^- (см. формулу (3.24)) оператору A_ρ^- , который определяется формулой (3.11). Для построения оператора преобразования заметим, что из формулы [6]

$$E_\rho(e^{i \frac{\pi}{2\rho}} \sigma^{1/\rho} z; 1) = \rho e^{i \sigma z^\rho} + O(z^{-1}), \quad -\frac{\pi}{\rho} \leq \arg z \leq 0,$$

следует, что в замыкании угла γ_ρ^- функция $E_\rho(e^{i \frac{\pi}{2\rho}} \sigma^{1/\rho} z; 1)$ может иметь только конечное число нулей. Переместим их в область γ_ρ^+ , умножая функцию на $(z - \lambda) \times (z - \mu)^{-1}$, $\lambda \in \gamma_\rho^+$, столько раз, какова суммарная кратность корней μ , попавших

в замыкание γ_ρ^- . Полученную функцию обозначим через $e_\rho(z)$ и нормируем ее условием $e_\rho(0) = 1$.

Из асимптотических формул для функций Миттаг-Леффлера [6] следует, что $z^{-1}(1 - e_\rho(z)) \in H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$ для произвольного $A_{\gamma_\rho}^2$ -веса w^2 . Поэтому из теоремы С вытекает представление

$$z^{-1}(1 - e_\rho(z)) = (\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), x_w)_{L_2(0, \sigma)}, \quad x_w \in L_2(0, \sigma), \quad (3.25)$$

с весом $w^2(z) = |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$. Поскольку $|e_\rho(z)| \asymp 1$, $z \in \gamma_\rho$, то вес $W^2(z) := w^{-2}(z)|e_\rho(z)|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$ и, следовательно [3], [4], имеет место аналог оценки (3.20):

$$\int_{\gamma_\rho} w^2(z) |e_\rho^{-1}(z) ((I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1} h, x_w)|^2 |dz| \leq M \|h\|^2, \quad h \in L_2(0, \sigma). \quad (3.26)$$

Зададим теперь оператор преобразования формулой

$$(S_3 h)(z) = ((I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1} h, x_w) - \Phi^{-1}(z) e_\rho(z) ((I - zJ_\sigma)^{1/\rho} h, x) \quad (3.27)$$

и докажем, что S_3 – изоморфизм из $\mathfrak{M}_-$ на пространство $\mathcal{L}_-^{(\rho)}$ (см. формулу (3.9)). Действительно, для функции $h = \mathcal{E}_{\rho,w}^{(j)}(\lambda_k, t)$, $\lambda_k \in \sigma_-(A_1)$, с учетом равенств (3.22), (3.25), получим

$$\begin{aligned} (S_3 h)(z) &= \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} ((I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1} (I - \lambda J_\sigma^{1/\rho})^{-1} y_w^\sigma, x_w) \Big|_{\lambda=\lambda_k} + j! (z - \lambda_k)^{-(j+1)} e_\rho(z) \\ &= \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \frac{e_\rho(\lambda) - e_\rho(z)}{z - \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k} + j! (z - \lambda_k)^{-(j+1)} e_\rho(z) = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \frac{e_\rho(\lambda)}{z - \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k}. \end{aligned}$$

Кроме того, из оценок (3.20) и (3.26) следует, что

$$\int_{\gamma_\rho} w^2(z) |(S_3 h)(z)|^2 |dz| \leq M_2 \|h\|^2, \quad h \in L_2(0, \sigma). \quad (3.28)$$

Поэтому оператор S_3 непрерывно отображает подпространство $\mathfrak{M}_-$ в подпространство $\mathcal{L}_-^{(\rho)}$ класса Харди $H^2(\gamma_\rho^+, w^2)$. Чтобы доказать непрерывную обратимость S_3 , заметим, что при каждом $h \in L_2(0, \sigma)$ функция $e^{-iz^\rho \sigma}(\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), h)$ принадлежит $H^2(\gamma_\rho^-, w^{-2})$ [3]. Поэтому из определения $e_\rho(z)$ вытекает, что $e_\rho^{-1}(z)(\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), g) \in H^2(\gamma_\rho^-, w^{-2})$. Следовательно, для любой конечной совокупности $\{\gamma_k\}$, $\gamma_k \in \gamma_\rho^-$, из теоремы А и свойства $|e_\rho(z)|^2 \asymp 1$, $z \in \gamma_\rho$, выводим оценки

$$\begin{aligned} \left| \sum c_k e_\rho^{-1}(\gamma_k) (\mathcal{E}_{\rho,w}(\gamma_k, t), h) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \sum c_k \frac{(\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), h)}{e_\rho(z)(z - \gamma_k)} dz \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_\rho} w^2(z) \left| \sum c_k (z - \gamma_k)^{-1} \right|^2 |dz| \int_{\gamma_\rho} w^{-2}(z) |e_\rho^{-2}(z)| |(\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), h)|^2 |dz| \\ &\leq L \int_{\gamma_\rho} w^2(z) \left| \sum c_k (z - \gamma_k)^{-1} \right|^2 |dz| \|h\|_{L_2(0, \sigma)}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, существует ограниченный оператор T из $H^2(\gamma_\rho^+, w^2)$ в пространство $L_2(0, \sigma)$ такой, что

$$T(e_\rho(\gamma)(z - \gamma)^{-1}) = \mathcal{E}_{\rho, w}(\gamma, t), \quad \gamma \in \gamma_\rho^-.$$

Поэтому верны равенства

$$T\left(\frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \frac{e_\rho(\gamma)}{(z - \gamma)} \Big|_{\gamma=\lambda_k}\right) = \mathcal{E}_{\rho, w}^{(j)}(\lambda_k, t), \quad \lambda_k \in \sigma_-(A_1).$$

С учетом (3.28) они означают, что S_3 изоморфно отображает $\mathfrak{M}_-$ на подпространство $\mathcal{L}_-^{(\rho)}$.

Напомним, что имеет место прямое разложение (3.24). Мы докажем, что оператор S_3 осуществляет подобие операторов A_1^- и A_ρ^- (см. формулу (3.11)), если проверим справедливость на $\mathfrak{M}_-$ равенства

$$S_3(A_1^-)^{-1} = (A_\rho^-)^{-1}S_3. \quad (3.29)$$

Для этого заметим, что, учитывая соотношение (3.19), формулу для S_3 можно переписать в виде

$$(S_3 h)(z) = ((I - z(A_1)^{-1})^{-1}h, x_w) - \Phi^{-1}(z)((I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1}h, x).$$

Поскольку $(A_1^-)^{-1} = A_1^{-1} \mid \mathfrak{M}_-$, с учетом (3.18) получим

$$\begin{aligned} S_3(A_1^-)^{-1}h &= S_3 A_1^{-1}h = ((I - z(A_1)^{-1})^{-1}h, x_w) \\ &\quad - \Phi^{-1}(z)((I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1}h, x) - \Phi^{-1}(z)(h, x)(\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t), x) \\ &= \frac{1}{z}(((I - z(A_1)^{-1})^{-1}h, x_w) - (h, x_w)) \\ &\quad - \frac{1}{z\Phi(z)}(((I - zJ_\sigma)^{1/\rho}h, x) - (h, x)) - \frac{1}{z\Phi(z)}(h, x)(1 - \Phi(z)) \\ &= \frac{1}{z}((S_3 h)(z) - (S_3 h)(0)). \end{aligned}$$

Заметим, что по крайней мере на линейной оболочке корневых векторов оператора A_ρ^- имеет место формула

$$(A_\rho^-)^{-1}h(z) = \frac{1}{z}(h(z) - h(0)),$$

т. е. равенство (3.29) доказано.

Итак, мы получили прямое разложение (3.24), в котором A_1^+ подобен A_α^+ , а оператор A_1^- подобен оператору A_ρ^- . Поскольку подпространства $\mathcal{L}_+^{(\alpha)}$, $\mathcal{L}_-^{(\rho)}$ расположены под ненулевым углом, то оператор $S_0 := S_2 \dot{+} S_3$ осуществляет подобие операторов A_1 и $A_\alpha^+ \dot{+} A_\rho^-$. Поэтому A_1 подобен ортогональной сумме $A_\alpha^+ \oplus A_\rho^-$. Напомним, что оператор A вида (3.1) подобен оператору A_1 . Теперь спектральное разложение (3.7) вытекает из леммы 3.1.

Перейдем теперь к обращению теоремы 3.1. Для этого покажем, что в условиях теоремы 3.1 имеет место дополнительная информация о слагаемых разложения (3.7).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть оператор $A \in \mathcal{K}_\rho$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Тогда для слагаемых в спектральном разложении (3.7) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|(A_+^{1/\alpha} - zI)^{-1}\varphi\|^2 |dz| &\leq K\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in \mathcal{L}_+, \\ \int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|(A_-^{1/\rho} - zI)^{-1}\psi\|^2 |dz| &\leq K\|\psi\|^2, \quad \psi \in \mathcal{L}_-. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Действительно, из регулярности ядра $\mathcal{E}_\rho$ вытекает двусторонняя оценка (см. §2):

$$|z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t)\|^2 \asymp |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 = w^2(z), \quad z \in \gamma_\rho.$$

Теперь из леммы 1.1, формулы (3.19) и оценки (3.20) следует, что

$$\int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|(A_1 - zI)^{-1}h\|^2 \leq K_1\|h\|^2, \quad h \in L_2(0, \sigma).$$

Поскольку оператор A подобен A_1 , аналогичная оценка верна для резольвенты оператора A , а значит, верна для слагаемых в (3.7).

В силу того, что операторы $A_\pm$ определяются своими спектрами U, V (вместе с кратностями) с точностью до унитарной эквивалентности, то условия (3.30) – это только условия поведения $\sigma(A)$ вблизи контура γ_ρ . Сформулируем теперь один из возможных вариантов обращения теоремы 3.1. (Напомним, что определение последовательности без пропусков содержится во введении.)

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть A – произвольный оператор вида (3.1), Φ определяется формулой (3.2), σ – тип ядра $\mathcal{E}_\rho(z) = (I - zB^{1/\rho})^{-1}g$ при порядке ρ , $\sigma(A) \cap \gamma_\rho = \emptyset$, причем $\sigma(A)$ содержит в себе некоторую последовательность без пропусков. Если имеет место спектральное разложение (3.7), слагаемые которого удовлетворяют условиям (3.30), то тогда:

1) справедливы равенства

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log |\Phi(r^{-i\frac{\pi}{2\rho}})| = \sigma, \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\alpha} \log |\Phi(r^{i\frac{\pi}{2\alpha}})| = 0, \quad \alpha^{-1} + \rho^{-1} = 2;$$

2) вес $W(z) = |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^{-2} |\Phi(z)|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$;

3) ядро $\mathcal{E}_\rho$ s -праворегулярно.

Если, кроме того, часть спектра $\sigma_-(A)$ имеет ограниченные в совокупности кратности m_k , а последовательность $\{v_k\}$, определяемая формулой (3.4), такова, что $\sup_k |\operatorname{Im} v_k| < \infty$, и удовлетворяет условию Карлесона [5]

$$\inf_k \prod_{j \neq k} (|v_k - v_j| |v_k - \bar{v}_j|^{-1}) > 0, \quad (3.31)$$

то ядро Миттаг-Леффлера $\mathcal{E}_\rho$ регулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $A \in \mathcal{K}_\rho$ допускает спектральное разложение (3.7) со свойством (3.30). Тогда для всех $h \in \mathfrak{H}$ имеем

$$\int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|(A - zI)^{-1}h\|^2 |dz| \leq M \|h\|^2. \quad (3.32)$$

Убедимся в том, что справедлива также оценка

$$\int_{\bar{\gamma}_\rho} |z - \bar{\omega}_\rho|^{1-\rho} \|(A^* - zI)^{-1}h\|^2 |dz| \leq M \|h\|^2, \quad h \in \mathfrak{H}. \quad (3.33)$$

Из равенства (3.7) следует, что достаточно проверить справедливость оценок (3.32), (3.33) для резольвент операторов $(A_+^{1/\alpha})^*$, $(A_-^{1/\rho})^*$. В силу леммы 3.1 оператор $A_-^{1/\rho}$ подобен оператору A_ρ^- в подпространстве $\mathcal{L}_-^{(\rho)}$ (см. формулы (3.9), (3.11)) безвесового класса $H^2(\gamma_\rho^+)$. Поскольку

$$(A_\rho^- - zI)^{-1}\varphi = (\varphi(z) - \varphi(\lambda))(z - \lambda)^{-1}, \quad \varphi \in \mathcal{L}_-^{(\rho)},$$

вторая интегральная оценка (3.30) равносильна неравенству

$$\int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \int_{\gamma_\rho} \|(\varphi(z) - \varphi(\lambda))(z - \lambda)^{-1}\|^2 |d\lambda| |dz| \leq K \int_{\gamma_\rho} |\varphi(\lambda)|^2 |d\lambda|,$$

которое можно переписать в виде

$$\int_{\bar{\gamma}_\rho} |z - \bar{\omega}_\rho|^{1-\rho} \int_{\bar{\gamma}_\rho} \|(\psi(u) - \psi(v))(u - v)^{-1}\|^2 |dv| |du| \leq K \int_{\bar{\gamma}_\rho} |\psi(v)|^2 |dv|, \quad (3.34)$$

где $\psi(u) := \overline{\varphi(\bar{u})}$. Функция ψ принадлежит линейной замкнутой оболочке в метрике $L_2(\bar{\gamma}_\rho)$ семейства дробей $(u - \bar{\lambda}_k)^{-j}$, $0 \leq j < m_k$, $\lambda_k \in \sigma_-(A)$, причем точки $\bar{\lambda}_k$ лежат в угле, образованном лучами $\arg z = 0$, $\arg z = \pi/\rho$. В силу леммы 3.1, примененной к этому углу, оператор

$$(\mathcal{R}\psi)(v) = (\psi(u) - \psi(v))(u - v)^{-1}$$

подобен резольвенте $((A_-^*)^{1/\rho} - uI)^{-1}$ в пространстве $\mathcal{L}_-$. Таким образом, неравенство (3.34) равносильно оценке

$$\int_{\bar{\gamma}_\rho} |u - \bar{\omega}_\rho|^{1-\rho} \|((A_-^*)^{1/\rho} - uI)^{-1}\varphi\|^2 |du| \leq K \|\varphi\|^2, \quad \varphi \in \mathcal{L}_-.$$

Аналогично доказывается, что и в первом интегральном неравенстве (3.30) также возможен переход от $A_+^{1/\alpha}$ к $(A_+^{1/\alpha})^*$. Другими словами, оценка (3.32) доказана.

Далее рассуждаем так же, как при доказательстве леммы 2.3. Из формулы для резольвенты

$$(A^* - zI)^{-1}h = B_\rho^*(I - zB_\rho^*)^{-1}h + \Phi_*^{-1}(z)((I - zB_\rho^*)^{-1}h, g)(I - zB_\rho^*)^{-1}f, \\ \Phi_*(z) := \overline{\Phi(\bar{z})}, \quad \Phi(z) = 1 - z(\mathcal{E}_\rho(z), f),$$

и леммы 1.1 снова выводится оценка (2.14), в которой

$$\delta(z) = |z - \omega_\rho|^{2(1-\rho)} \|(I - zB_\rho)^{-1}g\|^2 \|(I - \bar{z}B_\rho^*)^{-1}f\|^2 |\Phi(z)|^{-2}, \quad z \in \gamma_\rho.$$

Пусть Λ – последовательность без пропусков, содержащаяся в $\sigma(A)$. Обозначим через Λ_0 объединение всех $\lambda(x) \in \Lambda$ таких, что $\sup_x |\lambda^\rho(x) - x| < \infty$. Поскольку $|\operatorname{Im} \lambda_k^\rho| \leq \Delta$, $\lambda_k \in \Lambda_0$, то из леммы 1.2 (оценки 2), 4)) следует неравенство (2.15) с заменой Λ на Λ_0 . Поэтому $\delta(z) \geq \varepsilon > 0$, $z \in \gamma_\rho$, и из (2.14) вытекает s -правая регулярность ядра $\mathcal{E}(z) = (I - zB_\rho)^{-1}g$. Из теоремы 2.1 следует, что вес $w^2(z) = |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$.

Далее, из разложения (3.7) выводим, что система корневых подпространств оператора A^* полна в пространстве $\mathfrak{H}$. Отсюда вытекает, что выполняется условие 1) теоремы 3.2. Докажем, например, справедливость второго равенства из условия 1). Предположим, что это не так, т.е.

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log |\Phi((iy)^{1/\alpha})| < 0. \quad (3.35)$$

После того как доказано, что вес w^2 удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$, включение (2.3) означает, что для любого $h \in \mathfrak{H}$ функции $(\mathcal{E}_\rho(z), h)$ принадлежат классу Харди $H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$. В частности, при любом $\mu \in \gamma_\rho^-$ функция $\Phi_\mu(z) := \Phi(z) \times (z - \mu)^{-1}$ также принадлежит $H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$. Другими словами, функция

$$Q(u) := \frac{\Phi_\mu(u^{1/\alpha})u^\beta}{w_+(u^{1/\alpha})}, \quad \beta := \frac{1-\alpha}{2\alpha}, \quad u \in \mathbb{C}_+,$$

принадлежит классу Харди H_+^2 . Из (3.35) следует, что при некотором $\varepsilon > 0$ функция $e^{-i\varepsilon u}Q \in H_+^2$. Возвращаясь снова к угловой области γ_ρ^+ , последнее включение запишем в виде

$$e^{-i\varepsilon z^\alpha} \Phi(z)(z - \mu)^{-1} \in H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2}), \quad \mu \in \gamma_\rho^-. \quad (3.36)$$

Легко видеть, что корневые подпространства оператора A^* натягиваются на векторы

$$f_\rho^{(j)}(\bar{\lambda}_k) := \frac{d^j}{d\lambda^j} \left((I - \lambda B_\rho^*)^{-1} f \right) \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}_k}, \quad \lambda_k \in \sigma(A), \quad 0 \leq j < m_k.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_\rho(z), f_\rho^{(j)}(\bar{\lambda}_k)) &= \frac{\partial^j}{\partial \bar{\lambda}^j} \left(\mathcal{E}_\rho(z), (I - \lambda B_\rho^*)^{-1} f \right) \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}_k} \\ &= \frac{\partial^j}{\partial u^j} \frac{\Phi(u) - \Phi(z)}{z - u} \Big|_{u=\lambda_k} = -\frac{j! \Phi(z)}{(z - \lambda_k)^{j+1}}. \end{aligned}$$

Поскольку семейство $\{f_\rho^{(j)}(\bar{\lambda}_k)\}$ полно в пространстве $\mathfrak{H}$, любая функция

$$F(z) = (\mathcal{E}_\rho(z), h), \quad h \in \mathfrak{H},$$

представима в виде предела:

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathcal{E}_\rho(z), \sum a_{ks}^{(n)} f_\rho^{(s)}(\bar{\lambda}_k) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \overline{a_{ks}^{(n)}} \frac{-s! \Phi(z)}{(z - \lambda_k)^{s+1}},$$

причем в силу уже доказанной s -правой регулярности эта последовательность функций сходится в метрике класса $H_2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$. Поэтому из (3.36) следует, что $e^{-i\varepsilon z^\alpha} F(z) \in H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$ при любом $h \in \mathfrak{H}$. Полагая $h = (I - \bar{\mu} B_\rho^*)^{-1} f$, $\mu \in \gamma_\rho^-$, получаем

$$(\Phi(z) - \Phi(\mu))(\mu - z)^{-1} e^{-i\varepsilon z^\alpha} \in H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2}),$$

что с учетом (3.36) приводит к очевидному противоречию.

Докажем теперь, что выполнено условие 2) теоремы 3.2, т.е. вес $W^2(z) = w^{-2}(z)|\Phi(z)|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$. Действительно, из леммы 1.1, оценки (3.32) и формулы

$$(A - zI)^{-1}h = B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}h + \Phi^{-1}(z)((I - zB_\rho)^{-1}h, f)\mathcal{E}_\rho(z)$$

следует оценка (2.18). Поскольку s -правая регулярность ядра $\mathcal{E}_\rho$ уже доказана, то если определить вектор h формулой (2.19) и повторить соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 2.2, снова получим, что вес W^2 удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$.

Осталось доказать регулярность ядра $\mathcal{E}_\rho$ при сформулированных условиях для части спектра $\sigma_-(A)$. Как уже отмечалось, для оператора A справедлива оценка (2.18). Точно так же, как и при выводе (3.22), получаем равенства

$$\Phi^{-1}(z)((I - zB_\rho)\mathcal{E}_\rho^{(j)}(\lambda_k), f) = -j!(z - \lambda_k)^{-(j+1)}, \quad \lambda_k \in \sigma(A), \quad 0 \leq j < m_k.$$

Если рассмотреть (2.18) на линейных комбинациях $h = \sum c_{kj}\mathcal{E}_\rho^{(j)}(\lambda_k)$, то приходим к оценке

$$\int_{\gamma_\rho} w^2(z) \left| \sum c_{kj} j! (z - \lambda_k)^{-(j+1)} \right|^2 |dz| \leq M \left\| \sum c_{kj} \mathcal{E}_\rho^{(j)}(\lambda_k) \right\|_{\mathfrak{H}}^2. \quad (3.37)$$

Далее, поскольку функции $(\mathcal{E}_\rho(z), h)$, $h \in \mathfrak{H}$, принадлежат классу Харди $H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$, из теоремы С следуют представления

$$(\mathcal{E}_\rho(z), h)_{\mathfrak{H}} = (\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t), Lh)_{L_2(0, \sigma)}, \quad (3.38)$$

где $\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t)$ — w -ядро Миттаг-Леффлера, построенное по весу $w^2(z) = |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$ (см. введение), L — линейный оператор. Поскольку $\mathcal{E}_\rho$ s -праворегулярно, из теоремы В вытекает оценка

$$\begin{aligned} m \|Lh\|^2 &\leq \int_{\gamma_\rho} w^{-2}(z) |(\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t), Lh)|^2 |dz| \\ &= \int_{\gamma_\rho} w^{-2}(z) |(\mathcal{E}_\rho(z), h)|^2 |dz| \leq M \|h\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\mathcal{E}_\rho(z) = S\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), \quad S := L^*, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.39)$$

Поэтому если докажем непрерывную обратимость S , то отсюда будет вытекать регулярность $\mathcal{E}_\rho$ (см. введение). Полагая в (3.38) $h = f$, представим функцию Φ (см. (3.2)) в виде

$$\Phi(z) = 1 - z(\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t), f_1)_{L_2(0, \sigma)}, \quad f_1 := Lf,$$

и рассмотрим в пространстве $L_2(0, \sigma)$ оператор A_1 класса $\mathcal{K}_\rho$:

$$A_1^{-1}h = J_\sigma^{1/\rho}h + (h, f_1)y_w^\sigma, \quad y_w^\sigma := \mathcal{E}_{\rho,w}(0, t).$$

Поскольку w -ядро $\mathcal{E}_{\rho,w}(z, t)$ регулярно (см. введение), то оператор A_1 удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1 и поэтому допускает спектральное разложение (3.7). При доказательстве (3.7) были построены преобразующие операторы S_2, S_3 (см. формулы (3.23), (3.27)). Из свойств этих операторов вытекают двусторонние оценки:

$$\left\| \sum c_{kj} \mathcal{E}_{\rho,w}^{(j)}(\lambda_k, t) \right\|^2 \asymp \int_{\gamma_\rho} w^2(z) \left| \sum c_{kj} j! (z - \lambda_k)^{-(j+1)} \right|^2 |dz|, \quad (3.40)$$

если $\lambda_k \in \sigma_+(A)$, и

$$\left\| \sum c_{kj} \mathcal{E}_{\rho,w}^{(j)}(\lambda_k, t) \right\|^2 \asymp \int_{\gamma_\rho} w^2(z) \left| \sum c_{kj} j! \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \frac{e_\rho(\lambda)}{z - \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k} \right|^2 |dz|, \quad (3.41)$$

если $\lambda_k \in \sigma_-(A)$. Рассмотрим в пространстве $L_2(\gamma_\rho, w^2)$ семейство функций

$$x_k^{(j)}(z) = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \frac{e_\rho(\lambda)}{z - \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k}, \quad 0 \leq j < m_k, \quad \lambda_k \in \sigma_-(A).$$

Если все $m_k = 1$ и, следовательно, $j = 0$, то это семейство образует безусловный базис замыкания своей линейной оболочки. Действительно, поскольку последовательность $\{v_k\}$ удовлетворяет условию Карлесона, то собственные функции модельного оператора A_- образуют безусловный базис [23], а значит, в силу леммы 3.1 базис образует и рассматриваемое семейство функций. С помощью индукции по $m := \sup\{m_k : \lambda_k \in \sigma_-(A)\}$ нетрудно убедиться в том, что этот результат сохраняется и в случае ограниченных в совокупности кратностей m_k . Далее, простые вычисления показывают, что условие $\sup_k |\operatorname{Im} v_k| < \infty$ вместе с условием (3.31) гарантирует наличие двусторонних оценок

$$\int_{\gamma_\rho} w^2(z) |x_k^{(j)}(z)|^2 |dz| \asymp \int_{\gamma_\rho} w^2(z) |j! (z - \lambda_k)^{-(j+1)}|^2 |dz|,$$

где $\lambda_k \in \sigma_-(A)$, $0 \leq j < m_k$, $\sup_k m_k < \infty$. Из того, что $\{v_k\}$ удовлетворяет условию Карлесона и $\sup_k m_k < \infty$, следует безусловная базисность системы

$\{j!(z - \lambda_k)^{-(j+1)} : \lambda_k \in \sigma_-(A)\}$ в замыкании своей линейной оболочки в метрике $H_2(\gamma_\rho^+, w^2)$ [3], [4]. Это можно также вывести из леммы 3.1.

Приведенные рассуждения показывают, что соотношение (3.41) равносильно оценке

$$\left\| \sum c_{kj} \mathcal{E}_{\rho, w}^{(j)}(\lambda_k, t) \right\|^2 \asymp \int_{\gamma_\rho} w^2(z) \left| \sum c_{kj} j! (z - \lambda_k)^{-(j+1)} \right|^2 |dz|, \quad \lambda_k \in \sigma_-(A).$$

В силу (3.21) подпространства $\mathfrak{M}_+$, $\mathfrak{M}_-$ расположены под ненулевым углом. Классы $H_2(\gamma_\rho^+, w^2)$, $H_2(\gamma_\rho^-, w^2)$ также обладают этим свойством. Поэтому (3.40) и последнюю двустороннюю оценку можно объединить в одну:

$$\left\| \sum c_{kj} \mathcal{E}_{\rho, w}^{(j)}(\lambda_k, t) \right\|^2 \asymp \int_{\gamma_\rho} w^2(z) \left| \sum c_{kj} j! (z - \lambda_k)^{-(j+1)} \right|^2 |dz|, \quad \lambda_k \in \sigma(A).$$

Таким образом, из (3.37) вытекают оценки

$$\left\| \sum c_{kj} \mathcal{E}_{\rho, w}^{(j)}(\lambda_k, t) \right\|_{L_2(0, \sigma)}^2 \leq M_1 \left\| \sum c_{kj} \mathcal{E}_{\rho, w}^{(j)}(\lambda_k, t) \right\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \lambda_k \in \sigma(A).$$

Теперь из (3.39) и полноты семейства $\{\mathcal{E}_{\rho, w}^{(j)}(\lambda_k, t) : \lambda_k \in \sigma(A), 0 \leq j < m_k\}$ в пространстве $L_2(0, \sigma)$ следует непрерывная обратимость оператора S , а также регулярность $\mathcal{E}_\rho$.

Анализируя приведенное доказательство, получим, что вторая часть теоремы 3.2 (о регулярности $\mathcal{E}_\rho$) остается в силе и в случае $\sigma_-(A) = \emptyset$.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий теоремы этого параграфа. В пространстве $L_2(0, \sigma)$ рассмотрим оператор A класса $\mathcal{K}_\rho$, который в полном соответствии с (3.1) задается формулой

$$A^{-1}h = J_\sigma^{1/\rho}h + (h, f)g, \quad f(t) = \Gamma^{-1}(1/\rho)(\sigma - t)^{\frac{1}{\rho}-1}, \quad \frac{1}{2} < \rho < 2, \quad (3.42)$$

где $g \in W_2^1(0, \sigma)$, причем $g(0) \neq 0$. Покажем, что даже для относительно простого оператора (3.42) теоремы 3.1, 3.2 приводят к весьма нетривиальным выводам. Простые вычисления показывают, что функция Φ (см. (3.2)) представима в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 1 - z((I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1}g, f) \\ &= 1 + \omega_\rho g(\sigma) - \omega_\rho g(0)E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}z\sigma^{1/\rho}; 1) + \int_0^\sigma E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}zt^{1/\rho}; 1)\varphi(t)dt, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где $\omega_\rho = \exp\{-i\frac{\pi}{2\rho}\}$, φ — некоторая функция из $L_2(0, \sigma)$. Из асимптотических формул для функций Миттаг-Леффлера [6] вытекает, что весь спектр оператора, за исключением, быть может, конечного числа точек, лежит в области γ_ρ^ε (см. введение) при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$. В таких углах γ_ρ^ε имеет место представление

$$E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}z\sigma^{1/\rho}; 1) = \rho e^{iz^\rho\sigma} + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Следовательно, корни Φ асимптотически приближаются к корням уравнения

$$D - e^{iz^\rho \sigma} = 0, \quad D := \frac{1 + \omega_\rho g(\sigma)}{\rho \omega_\rho g(0)}, \quad (3.44)$$

и поэтому в случае $|D| \neq 1$ множество $\sigma(A) \cap \gamma_\rho$ конечно либо пусто. Любую точку множества $\sigma(A) \cap \gamma_\rho$ можно сдвинуть в область $\gamma_\rho^\pm$ с помощью замены в (3.42) f на функцию f_1 , причем существуют явные формулы перехода от f к f_1 . Поэтому в дальнейшем можно предполагать, что $\sigma(A) \cap \gamma_\rho = \emptyset$.

Заметим, что спектр оператора A всегда содержит последовательность без пропусков. Можно доказать, что если $|D| \neq 1$ и оператор A допускает спектральное разложение (3.7), то условия (3.30) выполняются автоматически. Кроме того, часть спектра $\sigma_-(A)$ либо является пустым множеством, либо удовлетворяет условиям теоремы 3.2, в силу которой разложение (3.7) возможно лишь в случае регулярности ядра $\mathcal{E}_\rho(z) = (I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1}g$. В §2 было доказано, что при $\rho < 2$ это ядро регулярно.

Применим теперь теорему 3.1. Из (3.43) следует, что условие 1) теоремы 3.1 выполнено. Поскольку $\|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 \asymp 1$ (см. §2), получим

$$W(z) = |z - \omega_\rho|^{\rho-1} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 |\Phi(z)|^2 \asymp |z - \omega_\rho|^{\rho-1}, \quad z \in \gamma_\rho,$$

т. е. условие 2) также выполнено.

Итак, если $|D| \neq 1$, то из теоремы 3.1 следует, что оператор A вида (3.42) подобен оператору $A_+^{1/\alpha} \oplus A_-^{1/\rho}$, причем если $|D| > 1$, то первое слагаемое $A_+^{1/\alpha}$ конечномерно, а если $|D| < 1$, то конечномерен оператор $A_-^{1/\rho}$.

§4. Некоторые приложения

В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим произвольный оператор вида

$$Kh = B_\rho h + (h, f)g, \quad B \in \Lambda^{(\exp)}, \quad f, g \in \mathfrak{H}, \quad \rho > \frac{1}{2}. \quad (4.1)$$

В качестве приложения результатов §3 получим критерий подобия K нормальному оператору. Фредгольмов спектр оператора K обозначим через $F(K)$, т. е.

$$F(K) := \{\lambda_k^{-1} : \lambda_k \in \sigma(K), \lambda_k \neq 0\}.$$

Предположим, что $\text{Ker } K = \text{Ker } K^* = \{0\}$, и поэтому существует оператор $A \in \mathcal{K}_\rho$ такой, что $K = A^{-1}$. Фредгольмов спектр $F(K)$ совпадает с множеством корней целой функции

$$\Phi(z) := 1 - z((I - zB_\rho)^{-1}g, f). \quad (4.2)$$

Скажем, что последовательность $F(K)$ *расположена правильно относительно контура* γ_ρ , если те ее части, которые при некотором $\varepsilon > 0$ лежат в углах $|\arg z| < \varepsilon$, $|\frac{\pi}{\rho} + \arg z| < \varepsilon$, удовлетворяют условию

$$|\text{Im } \lambda_k^\rho| \geq \delta > 0, \quad (4.3)$$

где λ^ρ – аналитическое продолжение в указанные углы той ветви, которая отображает γ_ρ^- на $\mathbb{C}_-$. Если $F(K)$ расположен правильно относительно γ_ρ , то

$$F(K) = F_+(K) \cup F_-(K), \quad F_\pm(K) = F(K) \cap \gamma_\rho^\pm.$$

Как и в § 3, свяжем со спектром $F(K)$ две последовательности комплексных чисел $U := \{u_k\}$, $V := \{v_k\}$:

$$u_k := \lambda_k^\alpha, \quad \lambda_k \in F_+(K), \quad v_k := \lambda_k^\rho, \quad \lambda_k \in F_-(K), \quad (4.4)$$

из $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$ соответственно.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть K – оператор вида (4.1), Φ определяется формулой (4.2), σ – тип ядра $\mathcal{E}_\rho(z) := (I - zB_\rho)^{-1}g$ при порядке ρ . Пусть также $F(K)$ расположен правильно относительно угла γ_ρ и содержит в себе некоторую последовательность без пропусков. Если K подобен нормальному оператору, то выполняются условия:

- 1) $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log |\Phi(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}})| = \sigma$, $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\alpha} \log |\Phi(re^{i\frac{\pi}{2\alpha}})| = 0$, $\alpha^{-1} + \rho^{-1} = 2$;
- 2) вес $W(z) := |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^{-2} |\Phi(z)|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$;
- 3) функция Φ имеет только простые корни;
- 4) ядро $\mathcal{E}_\rho$ s -праворегулярно.

Если часть спектра $F_-(K)$ такова, что последовательность $\{v_k\}$ удовлетворяет условию Карлесона и $\sup_k |\operatorname{Im} v_k| < \infty$, то ядро $\mathcal{E}_\rho$ регулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если K подобен нормальному оператору, то он не имеет корневых векторов, т. е. условие 3) выполнено, а его собственные векторы $\{\mathcal{E}_\rho(\lambda_k) : \lambda_k \in F(K)\}$ образуют безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$. Для любого вектора $h \in \mathfrak{H}$ имеем разложения

$$h = \sum_{\lambda_k} c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k), \quad \|h\|^2 \asymp \sum_{\lambda_k} |c_k|^2 \|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^2.$$

Поэтому, учитывая лемму 1.3 и неравенства (4.3), получим

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|K(I - zK)^{-1}h\|^2 |dz| \\ &= \int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \left\| \sum_k (z - \lambda_k)^{-1} c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k) \right\|^2 |dz| \\ &\leq M_1 \sum_k |c_k|^2 \int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{1-\rho} |z - \lambda_k|^{-2} dz \|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^2 \\ &\leq M_2 \sum_k |c_k|^2 \|\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)\|^2 \leq M_3 \|h\|^2. \end{aligned}$$

Поскольку собственные векторы оператора K^* также образуют безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$, справедлива аналогичная оценка для оператора K^* :

$$\int_{\bar{\gamma}_\rho} |z - \bar{\omega}_\rho|^{1-\rho} \|K^*(I - zK^*)^{-1}h\|^2 |dz| \leq L \|h\|^2, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

В терминах оператора $A := K^{-1}$ класса $\mathcal{K}_\rho$ эти оценки представляются в виде (3.32), (3.33). После этого для доказательства теоремы 4.1 необходимо повторить рассуждения из доказательства теоремы 3.2.

Из теоремы 4.1 вытекает, что при установлении критериев подобия операторов вида (4.1) нормальным операторам естественно ограничиться рассмотрением того случая, когда ядро Миттаг-Леффлера $\mathcal{E}_\rho$ регулярно. Напомним, что предполагается выполненным условие $\text{Ker } K = \text{Ker } K^* = \{0\}$, последовательности U, V определяются формулой (4.4), а условие Карлесона (3.31) [5] было приведено в формулировке теоремы 3.2.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть K – оператор вида (4.1), Φ определяется формулой (4.2), σ – тип ядра $\mathcal{E}_\rho(z) := (I - zB_\rho)^{-1}g$ при порядке ρ . Пусть также $\mathcal{E}_\rho$ регулярно и фредгольмов спектр $F(K)$ расположен правильно относительно угла γ_ρ . Тогда для подобия K нормальному оператору необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1)–3) теоремы 4.1, а также следующее условие:

4) последовательности U, V удовлетворяют условию Карлесона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть K подобен нормальному оператору и $F(K)$ правильно расположен относительно угла γ_ρ . Снова для оператора $A = K^{-1}$ получим оценки (3.32), (3.33). Далее рассуждаем по схеме доказательства теоремы 3.2, с тем только отличием, что необходимо опустить рассуждения, доказывающие s -правую регулярность $\mathcal{E}_\rho$. Именно поэтому в формулировке этой теоремы нет необходимости предполагать, что $F(K)$ содержит последовательность без пропусков. Мы снова придем к выводу, что условия 1)–3) необходимы для подобия нормальному оператору.

Теперь к оператору A вида (3.1) применим теорему 3.1, в силу которой имеет место разложение (3.7). Поскольку собственные векторы A образуют безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$ и все $m_k = 1$, $\lambda_k \in \sigma(A)$, то собственные функции модельных операторов $A_\pm$ также образуют безусловные базисы пространств $\mathcal{L}_\pm$. Поэтому выполняется условие 4).

Достаточность. В силу теоремы 3.1, примененной к оператору $A = K^{-1}$ класса $\mathcal{K}_\rho$, имеет место разложение (3.7), причем из условия 4) следует базисность собственных векторов операторов $A_\pm$. Поэтому семейство собственных векторов $\{\mathcal{E}_\rho(\lambda_k) : \lambda_k \in \sigma(A)\}$ оператора A образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$, а значит, оператор K подобен нормальному оператору.

К рассмотренной задаче о подобии нормальному оператору примыкает задача об описании всех безусловных базисов, состоящих из значений ядра Миттаг-Леффлера. В силу изложенного выше становится понятно, что при изучении таких базисов естественно предполагать регулярность ядра $\mathcal{E}_\rho$. Сформулируем основной результат для случая регулярных ядер Миттаг-Леффлера.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\mathcal{E}_\rho$, $\rho > 1/2$, – регулярное ядро Миттаг-Леффлера роста (ρ, σ) со значениями в пространстве $\mathfrak{H}$, $w^2(z) = |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$ – соответствующий $A_{\gamma_\rho}^2$ -вес, Λ – правильно расположенная относительно угла γ_ρ последовательность. Семейство векторов

$$\left\{ \frac{d^j}{dz^j} \mathcal{E}_\rho(z) \Big|_{z=\lambda_k} : \lambda_k \in \Lambda, 0 \leq j < m_k \right\}, \quad \sup_{\lambda_k \in \Lambda} m_k < \infty, \quad 0 \notin \Lambda,$$

образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда Λ совпадает (с учетом кратностей m_k) с множеством корней целой функ-

ции Φ порядка роста ρ и нормального типа, которая удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) $z^{-1}(\Phi(z) - \Phi(0)) \in H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$;
- 2) $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log |\Phi(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}})| = \sigma$, $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\alpha} \log |\Phi(re^{-i\frac{\pi}{2\alpha}})| = 0$, $\alpha^{-1} + \rho^{-1} = 2$;
- 3) вес $W^2(z) := w^{-2}(z)|\Phi(z)|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$;
- 4) последовательности U, V удовлетворяют условию (3.31).

Отметим, что последовательности $U = \{u_k\}$, $V = \{v_k\}$ имеют прежний смысл:

$$u_k = \lambda_k^\alpha, \quad \lambda_k \in \Lambda^+, \quad v_k = \lambda_k^\rho, \quad \lambda_k \in \Lambda^-, \quad \Lambda^\pm := \Lambda \cap \gamma_\rho^\pm.$$

В случае простых корней ($m_k = 1$, $\lambda_k \in \Lambda$) этот результат несложно выводится из теоремы 4.2. Действительно, если семейство

$$\{\mathcal{E}_\rho(\lambda_k) : \lambda_k \in \Lambda\}, \quad 0 \notin \Lambda, \quad (4.5)$$

образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$, то из рассуждений, приведенных в начале доказательства леммы 2.3, следует, что Λ совпадает с корнями функции Φ (см. (2.11)), а векторы $\mathcal{E}_\rho(\lambda_k)$ являются собственными для оператора K вида (4.1). Ясно, что $\text{Ker } K = \text{Ker } K^* = \{0\}$. Из регулярности $\mathcal{E}_\rho$ и формулы (2.11) вытекает условие 1) теоремы 4.3. Поскольку K подобен нормальному оператору, то остальные условия вытекают из теоремы 4.2.

Обратно, пусть выполнены условия 1)–4). Нормируем функцию так, чтобы $\Phi(0) = 1$, и в силу регулярности $\mathcal{E}_\rho$ из условия 1) следует представление $\Phi(z) = 1 - z(\mathcal{E}_\rho(z), f)$, $f \in \mathfrak{H}$. Рассмотрим оператор

$$Kh = B_\rho h + (h, f)g, \quad g = \mathcal{E}_\rho(0).$$

Докажем, что условия теоремы 4.3 обеспечивают выполнение равенств $\text{Ker } K = \text{Ker } K^* = \{0\}$. Если предположить, что $\text{Ker } K \neq \{0\}$, то $g = B_\rho h_0$ при некотором $h_0 \in \mathfrak{H}$, и поэтому вес

$$w^2(z) = |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2 = |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|B_\rho(I - zB_\rho)^{-1}h_0\|^2$$

не может удовлетворять условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$, поскольку из леммы 1.1 следует, что

$$\int_{\gamma_\rho} w^2(z) |dz| \leq M \|h_0\|^2.$$

Если предположить, что $\text{Ker } K^* = \{0\}$, то при некотором $h_1 \in \mathfrak{H}$

$$f = B_\rho^* h_1, \quad (h_1, g) = -1.$$

Поэтому функцию Φ можно представить в виде

$$\Phi(z) = 1 - z(\mathcal{E}_\rho(z), B_\rho^* h_1) = -(\mathcal{E}_\rho(z), h_1),$$

а значит, вес

$$W^2(z) = w^{-2}(z)|\Phi(z)|^2 = w^{-2}(z)|(\mathcal{E}_\rho(z), h_1)|^2$$

не может удовлетворять условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$, поскольку из определения 0.2 следует, что

$$\int_{\gamma_\rho} W^2(z) |dz| \leq M \|h_1\|^2.$$

Таким образом, из теоремы 4.2 вытекает подобие K нормальному оператору, т. е. семейство (4.5) образует безусловный базис.

Доказательство теоремы 4.3 в полном объеме отличается от приведенных выше рассуждений лишь только техническими деталями.

Вернемся снова к примеру (3.42) и рассмотрим задачу о безусловной базисности семейства корневых векторов оператора A . Из (3.43) легко следует, что все достаточно большие по модулю корни функции Φ простые. Кроме того, если $|D| \neq 1$ (см. (3.44)), то последовательность $\Lambda := \sigma(A)$ правильно расположена относительно контура γ_ρ (снова предполагается, что $\sigma(A) \cap \gamma_\rho = \emptyset$). Ядро $\mathcal{E}_\rho$ регулярно при $\rho < 2$, и поэтому условия 1)–3) теоремы 4.3 выполнены (см. §3). Таким образом, безусловная базисность семейства корневых векторов равносильна выполнению условия 4). Если $|D| > 1$, то условие 4) выполнено при всех $\rho \in (1/2, 2)$. Если же $|D| < 1$, то это не так. Например, при $\rho < 1$ условие 4) не выполнено.

Список литературы

1. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М.: Наука, 1969.
2. Секефальви-Надь Б., Фойаш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
3. Губреев Г. М. Спектральный анализ биортогональных разложений, порождаемых весами Макенхаупта // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1991. Т. 190. С. 34–80.
4. Губреев Г. М. Спектральный анализ биортогональных разложений, порождаемых весами Макенхаупта. Дис. . . . докт. физ.-мат. наук. Харьков: ФТИНТ, 1995.
5. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Наука, 1984.
6. Джрбачян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
7. Ostrovskii I. V., Peresolkova I. N. Non-asymptotic result on distribution of zeros of the function $E_\rho(z, \mu)$ // Theory of functions and Appl. Collection of works dedicated to the memory of M. M. Djrbashian. Ереван: Ин-т математики, 1995. Р. 49–152.
8. Sedletsii A. M. Asymptotic formulas for zeros of a function of Mittag-Leffler's type // Anal. Math. 1994. V. 20. Р. 117–132.
9. Гельфанд И. М., Граев М. И., Ремах В. С. Общие гамма-функции, экспоненты и гипергеометрические функции // УМН. 1998. Т. 53. № 1. С. 3–60.
10. Маергойз Л. С. Индикаторная и сопряженная диаграммы целой функции уточненного порядка и ее обобщенные преобразования Бореля // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 2. С. 1–63.
11. Маергойз Л. С. Индикаторная и сопряженная диаграммы целой функции уточненного порядка. Препринт № 789Ф. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1998.
12. Губреев Г. М. L_2 -устойчивые полугруппы, веса Макенхаупта и безусловные базисы из значений квазиэкспонент // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 12. С. 3–36.
13. Губреев Г. М. Спектральная теория регулярных квазиэкспонент и регулярных B -представимых вектор-функций (метод проектирования: 20 лет спустя) // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 6. С. 1–97.
14. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
15. Золотарев В. А. Универсальные модели линейных операторов с заданными ограничениями на рост резольвенты // Теор. функц., функц. анализ и их прилож. Харьков. 1986. Вып. 45. С. 40–45.

16. Маламуд М. М. О воспроизводящих подпространствах вольтерровых операторов // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 4. С. 454–458.
17. Левин Б. Я., Любарский Ю. И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 3. С. 657–702.
18. Hunt R. A., Muckenhoupt B., Wheeden R. L. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 176. P. 227–251.
19. David G. Operateurs integraux singulieres sur certaines courbes du plan complexe // Ann. Sci. Ecole Norm. Super. 1984. V. 17. P. 157–189.
20. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967.
21. Губреев Г. М., Волкова М. Г. Безусловные базисы гильбертовых пространств, состоящие из значений целых вектор-функций половинного порядка роста // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2002. Т. 290. № 30. С. 33–41.
22. Губреев Г. М. О спектральном разложении конечномерных возмущений диссипативных вольтерровых операторов // Тр. ММО. 2003. Т. 64. С. 90–140.
23. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.

Южноукраинский государственный
педагогический университет
им. К. Д. Ушинского
E-mail: varv@rambler.ru

Поступило в редакцию
05.08.2003