Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев, Задача Коши для уравнения типа Соболева со степенной нелинейностью, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 1, 61–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/im624>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 07:46:17

УДК 517.9+535.5

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв

Задача Коши для уравнения типа Соболева со степенной нелинейностью

Исследовано асимптотическое поведение при больших временах решений задачи Коши для нелинейного уравнения типа Соболева с диссипацией. Используемый подход в случае малых начальных данных основан на детальном изучении функции Грина линейной задачи и применении метода сжимающих отображений. Рассмотрен также случай больших начальных данных. В суперкритическом случае асимптотика имеет квазилинейный характер. Асимптотическое поведение решений в критическом случае отличается от поведения решений соответствующего линейного уравнения логарифмической поправкой. В субкритическом случае доказано, что если начальные данные имеют ненулевую общую массу, то главный член асимптотики решения при больших временах представляется автомодельным решением.

Библиография: 51 наименование.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению задачи Коши для *уравнения типа Соболева*

$$\begin{aligned}\partial_t(u - \Delta u) - \alpha \Delta u &= \lambda |u|^\sigma u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Уравнениями типа Соболева описываются многие физические процессы (см. работы [41], [9], [13], [31], [32], [37]).

В последнее время большое внимание уделялось изучению уравнений типа Соболева. Теория полугрупп применялась к общей теории сингулярных уравнений типа Соболева в работе [40]. Уравнения типа Соболева со знакопеременным или необратимым оператором при старшей производной по времени изучались в [14]. Вырожденные уравнения типа Соболева исследовались с абстрактной точки зрения в книге [17]. В книге [12] получено много важных результатов для систем уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени. В ряде случаев уравнения типа Соболева называются также *псевдопараболическими* уравнениями. Локальная разрешимость уравнений типа Соболева рассмотрена в книге [10]. Уравнения типа Соболева с двумя нелинейностями рассматривались в [43]. Псевдопараболические уравнения с монотонной нелинейностью изучались в работе [48]. В работах [29], [30] доказано глобальное существование ограниченных решений и обнаружен эффект разрушения решений уравнений типа Соболева. Исследования разрушения решений различных классов нелинейных параболических уравнений проведены в работах [18], [33], [36]. Асимптотическое поведение при

больших временах решения задачи Коши для уравнения типа Соболева с нелинейностью конвективного типа изучалось в работах [1]–[4], [7], [26], [27], [34], [35], [38], [49], [50].

Насколько нам известно, асимптотическое поведение при больших временах решений задачи Коши для нелинейного уравнения типа Соболева с неконвективной нелинейностью степенного вида (1) не было изучено до сих пор. В настоящей работе мы восполним этот пробел. Асимптотика при больших временах решений задачи (1) оказывается различной в следующих трех случаях. В суперкритическом случае $\sigma > \frac{2}{n}$ нелинейность является асимптотически слабой и не влияет существенно на асимптотическую форму решений. В критическом случае $\sigma = \frac{2}{n}$ нелинейность определяет логарифмическую поправку в главном члене асимптотики по сравнению с соответствующим линейным уравнением. Наконец, в субкритическом случае $\sigma \in (0, \frac{2}{n})$ асимптотика при больших временах задается специальным автомодельным решением. Отметим, что подобное поведение было ранее обнаружено для нелинейного уравнения теплопроводности

$$\partial_t u - \Delta u + u^{1+\sigma} = 0,$$

где $\sigma > 0$ (см. работу [25] в суперкритическом случае $\sigma > \frac{2}{n}$, [11] в критическом случае $\sigma = \frac{2}{n}$ и работы [15], [16], [19], [28] в субкритическом случае $\sigma \in (0, \frac{2}{n})$).

Через $\mathcal{F}\varphi$ или $\widehat{\varphi}$ будем обозначать преобразование Фурье функции φ , определяемое формулой

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx,$$

тогда

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \varphi(x) dx$$

задает обратное преобразование Фурье функции φ . Через $\mathbf{C}(\mathbf{I}; \mathbf{V})$ обозначим пространство непрерывных функций, отображающих интервал времени $\mathbf{I}$ в банахово пространство $\mathbf{V}$. Пространство Лебега обозначаем, как обычно, через $\mathbf{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Определим также весовое пространство Лебега $\mathbf{L}^{p,a}$ следующим образом:

$$\mathbf{L}^{p,a} = \{\varphi \in \mathbf{L}^p; \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{p,a}} = \|\langle x \rangle^a \varphi\|_{\mathbf{L}^p} < \infty\},$$

где $\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$ – японские скобки, $a \geq 0$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Весовое пространство Соболева определим как

$$\mathbf{W}_p^{k,a} = \left\{ \varphi \in \mathbf{L}^p; \|\varphi\|_{\mathbf{W}_p^{k,a}} = \sum_{j=0}^k \|\partial^j \varphi\|_{\mathbf{L}^{p,a}} < \infty \right\},$$

где $k \geq 0$, $a \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$. В частности, при $p = 2$ обозначим также $\mathbf{H}^{k,a} = \mathbf{W}_2^{k,a}$ и $\mathbf{W}_p^k = \mathbf{W}_p^{k,0}$. Норму обычного пространства Соболева $\mathbf{H}^k = \mathbf{H}^{k,0}$ зададим следующим образом: $\|\varphi\|_{\mathbf{H}^k}^2 = \sum_{j=0}^k \|\partial^j \varphi\|_{\mathbf{L}^2}^2$.

В §2 мы получим предварительные оценки для линейной задачи Коши, соответствующей (1), и установим локальную во времени разрешимость нелинейной задачи (1). Затем в §3–5 мы изучим асимптотическое поведение при больших временах

решений задачи Коши для нелинейного уравнения типа Соболева (1) в суперкритическом, критическом и субкритическом случаях соответственно.

§ 2. Предварительные результаты

2.1. Оператор Грина. Рассмотрим линейную задачу Коши

$$\begin{aligned} \partial_t(u - \Delta u) - \alpha \Delta u &= f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя преобразование Фурье и принцип Дюамеля, перепишем задачу (2) в виде интегрального уравнения

$$u(t) = \mathcal{G}(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{B}f(\tau) d\tau, \quad (3)$$

или, более подробно,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x - y) u_0(y) dy \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} H(t - \tau, x - y) f(\tau, y) dy, \end{aligned}$$

где оператор Грина $\mathcal{G}(t)$ определен с помощью обратного преобразования Фурье

$$\mathcal{G}(t)\varphi = e^{-\alpha t} \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} e^{\frac{\alpha t}{1+|\xi|^2}} \widehat{\varphi}(\xi)$$

и оператор

$$\mathcal{B}\varphi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} B(x - y) \varphi(y) dy$$

задан ядром Бесселя–Макдональда (см. [44])

$$B(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} (1 + |\xi|^2)^{-1} d\xi = |x|^{1-\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}-1}(|x|),$$

где

$$K_\nu(|x|) = K_{-\nu}(|x|) = 2^{-\nu-1} |x|^\nu \int_0^\infty \xi^{-\nu-1} e^{-\xi - \frac{|x|^2}{4\xi}} d\xi$$

– функция Макдональда (либо модифицированная функция Бесселя) порядка $\nu \in \mathbb{R}$ (см. [8]). Пользуясь разложением в ряд Тэйлора

$$e^{\frac{\alpha t}{1+|\xi|^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!} (1 + |\xi|^2)^{-k},$$

мы можем представить оператор Грина в виде

$$\mathcal{G}(t)\varphi = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!} \mathcal{B}^k \varphi,$$

где $\mathcal{B}^0 = 1$ и

$$\mathcal{B}^k \varphi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} B_k(x-y) \varphi(y) dy$$

с ядром

$$\begin{aligned} B_k(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} (1 + |\xi|^2)^{-k} d\xi \\ &= \frac{2^{1-k}}{(k-1)!} |x|^{k-\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}-k}(|x|) \end{aligned}$$

для $k \geq 1$. Таким образом, легко убеждаемся, что операторы $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{G}(t)\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t)\varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x-y) \varphi(y) dy, \\ \mathcal{G}(t)\mathcal{B}\varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} H(t, x-y) \varphi(y) dy, \end{aligned}$$

имеют положительные ядра

$$\begin{aligned} G(t, x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!} B_k(x) \geq 0, \\ H(t, x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!} B_{k+1}(x) \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

для всех $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Принимая во внимание оценки для функции Макдональда (см. [8]), получаем

$$|B_k(x)| \leq \begin{cases} C|x|^{k-\frac{n+1}{2}} e^{-|x|} & \text{при } |x| \geq 1, \\ C \int_{|x|}^1 y^{2k-n-1} dy & \text{при } |x| < 1 \end{cases}$$

для любого $k \geq 1$. Отсюда следуют неравенства

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}^k \varphi\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} B_k(t, x-y) \varphi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \leq \|B_k(t)\|_{\mathbf{L}^1} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \left(\int_{|x|<1} dx \int_{|x|}^1 y^{2k-n-1} dy + \int_{|x|\geq 1} |x|^{k-\frac{n+1}{2}} e^{-|x|} dx \right) \\ &\leq C \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \end{aligned} \quad (5)$$

для всех $1 \leq p \leq \infty$ и

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}^k \varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &\leq C \left\| \langle x \rangle^a \int_{\mathbb{R}^n} B_k(t, x-y) \varphi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C \|B_k(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ &\leq C \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \left(\int_{|x|<1} dx \int_{|x|}^1 y^{2k-n-1} dy + \int_{|x|\geq 1} |x|^{a+k-\frac{n+1}{2}} e^{-|x|} dx \right) \\ &\leq C \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \end{aligned} \quad (6)$$

для любых $a \geq 0$ и $k \geq 0$.

В следующей лемме мы оценим оператор Грина $\mathcal{G}(t)$ в нормах $\|\varphi\|_{\mathbf{L}^p}$ и $\|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}}$, где $a \in (0, 1)$, $1 \leq p \leq \infty$.

ЛЕММА 1. Пусть функция $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)$, где $a \in (0, 1)$. Тогда имеют место оценки

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} &\leq e^{-at}\|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} + Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|\varphi\|_{\mathbf{L}^q}, \\ \|(\Delta\mathcal{B})^l\mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C\langle t\rangle^{-l}\|\varphi\|_{\mathbf{L}^p}, \\ \|\mathcal{G}(t)\varphi - \vartheta G_0(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq Ct^{-\frac{n}{2}-\frac{a}{2}}(\|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}}), \\ \| |x|^b(\mathcal{G}(t)\varphi - \vartheta G_0(t)) \|_{\mathbf{L}_x^1} &\leq Ct^{\frac{b-a}{2}}\|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}}\end{aligned}$$

для всех $t > 0$, где $G_0(t, x) = (4\pi\alpha t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}}$, $l = 0, 1, 2$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $0 \leq b \leq a$ и

$$\vartheta = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что оператор Грина $\mathcal{G}(t)$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(t)\varphi &= \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} e^{-\alpha t \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}} \widehat{\varphi}(\xi) \\ &= \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} e^{-\alpha t |\xi|^2} \widehat{\varphi}(\xi) + e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} (1+|\xi|^2)^{-k} \widehat{\varphi}(\xi) \\ &\quad + \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \left(e^{-\alpha t \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}} - e^{-\alpha t |\xi|^2} - e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} (1+|\xi|^2)^{-k} \right) \widehat{\varphi}(\xi) \\ &= \mathcal{G}_0(t)\varphi + e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} \mathcal{B}^k \varphi + \mathcal{R}(t)\varphi,\end{aligned}\tag{7}$$

где оператор Грина $\mathcal{G}_0(t)$ для уравнения теплопроводности

$$\mathcal{G}_0(t)\varphi = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} e^{-\alpha t |\xi|^2} \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t, x-y)\varphi(y) dy$$

имеет ядро

$$G_0(t, x) = (4\pi\alpha t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}},$$

а остаток

$$\mathcal{R}(t)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} R(t, x-y)\varphi(y) dy$$

задается ядром $R(t, x) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \widehat{R}(t, \xi)$, где образ Фурье $\widehat{R}(t, \xi)$ определяется следующим образом:

$$\widehat{R}(t, \xi) = e^{-\alpha t \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}} - e^{-\alpha t |\xi|^2} - e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} (1 + |\xi|^2)^{-k}.$$

Ввиду неравенств (5) и (6) имеем оценки

$$\left\| e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} \mathcal{B}^k \varphi \right\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^n e^{-\alpha t} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p}, \quad (8)$$

$$\left\| e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} \mathcal{B}^k \varphi \right\|_{\mathbf{L}^{1,b}} \leq C \langle t \rangle^n e^{-\alpha t} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,b}} \quad (9)$$

для всех $t > 0$, где $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq b \leq a$.

Обозначим

$$\widehat{R}_l(t, \xi) = \left(\frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^l \widehat{R}(t, \xi)$$

для $l = 0, 1, 2$. Чтобы оценить остаток $(\Delta \mathcal{B})^l \mathcal{R}(t)$, запишем представление

$$\begin{aligned} \widehat{R}_l(t, \xi) &= e^{-\alpha t \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}} \left(1 - e^{-\alpha t \frac{|\xi|^4}{1+|\xi|^2}} \right) \left(\frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^l \\ &\quad - e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} (1 + |\xi|^2)^{-k} \left(\frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^l \end{aligned}$$

при $|\xi| \leq 1$ и представление

$$\begin{aligned} \widehat{R}_l(t, \xi) &= -e^{-\alpha t |\xi|^2} \left(\frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^l \\ &\quad + e^{-\alpha t} \left(e^{\frac{\alpha t}{1+|\xi|^2}} - \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} (1 + |\xi|^2)^{-k} \right) \left(\frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^l \end{aligned}$$

при $|\xi| \geq 1$, откуда вытекает оценка

$$|\partial_\xi^j \widehat{R}_l(t, \xi)| \leq C t^{\frac{j}{2}} \langle t \rangle^{-1-l} e^{-\frac{\alpha}{2} t |\xi|^2} + C t^{n+1} e^{-\alpha t} (1 + |\xi|^2)^{-n-1}$$

для всех $t > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq j \leq n+2$, $l = 0, 1, 2$. Взяв обратное преобразование Фурье, для всех $|x| \leq 1$ найдем

$$\begin{aligned} |R_l(t, x)| &= \left| (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \widehat{R}_l(t, \xi) d\xi \right| \\ &\leq C \langle t \rangle^{-1-l} \left\| e^{-\frac{\alpha}{2} t |\xi|^2} \right\|_{\mathbf{L}^1} + C t^{n+1} e^{-\alpha t} \left\| (1 + |\xi|^2)^{-n-1} \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C \langle t \rangle^{-1} t^{-\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

а в случае $|x| \geq 1$, проведя интегрирование по частям $n + 2$ раза по ξ , получим

$$\begin{aligned} |R_l(t, x)| &= C|x|^{-n-2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \partial_\xi^{n+2} \widehat{R}_l(t, \xi) d\xi \right| \\ &\leq C|x|^{-n-2} t^{\frac{n}{2}+1} \langle t \rangle^{-1-l} \left\| e^{-\frac{\alpha}{2}t|\xi|^2} \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\quad + C|x|^{-n-2} t^{n+1} e^{-\alpha t} \left\| (1 + |\xi|^2)^{-n-1} \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C(|x|t^{-\frac{1}{2}})^{-n-2} \langle t \rangle^{-1-l} t^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ имеем неравенство

$$|R_l(t, x)| \leq C \langle xt^{-\frac{1}{2}} \rangle^{-n-2} \langle t \rangle^{-1-l} t^{-\frac{n}{2}}.$$

Используя эту оценку, с помощью неравенства Юнга для сверток при $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$ получаем

$$\begin{aligned} \|(\Delta \mathcal{B})^l \mathcal{R}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} &= \left\| (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} R_l(t, x-y) \varphi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C \|R_l(t)\|_{\mathbf{L}^r} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^q} \\ &\leq C \langle t \rangle^{-1-l} t^{-\frac{n}{2}} \left\| \langle xt^{-\frac{1}{2}} \rangle^{-n-2} \right\|_{\mathbf{L}^r} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^q} \\ &\leq C \langle t \rangle^{-1-l} t^{-\frac{n}{2} + \frac{n}{2r}} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^q} \leq C \langle t \rangle^{-1-l} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^q} \end{aligned}$$

для всех $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Аналогично находим

$$\begin{aligned} \|(\Delta \mathcal{B})^l \mathcal{R}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,b}} &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} R_l(t, x-y) \langle y \rangle^b \varphi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\quad + C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^b R_l(t, x-y) \varphi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C \langle t \rangle^{-1-l} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,b}} + C \langle t \rangle^{-1-l} t^{-\frac{n}{2}} \left\| |x|^b \langle xt^{-\frac{1}{2}} \rangle^{-n-2} \right\|_{\mathbf{L}^1} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C \langle t \rangle^{-1-l} (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,b}} + t^{\frac{b}{2}} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^1}) \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, $0 \leq b \leq a$, $l = 0, 1, 2$. Известно, что оператор Грина $\mathcal{G}_0(t)$ для уравнения теплопроводности удовлетворяет оценке (см. работы [21], [24])

$$\|\mathcal{G}_0(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^q}$$

для всех $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Теперь из представления (7) ввиду (8) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} &\leq \|\mathcal{G}_0(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} + \left\| e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} \mathcal{B}^k \varphi \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\quad + \|\mathcal{R}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^q} + C e^{-\alpha t} \langle t \rangle^n \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\quad + C \langle t \rangle^{-1} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^q}, \end{aligned}$$

откуда следует первая оценка леммы. Поскольку

$$\|(\Delta \mathcal{B})^l \mathcal{G}_0(t) \varphi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{-l} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p},$$

то ввиду (8) справедлива вторая оценка леммы

$$\begin{aligned} \|(\Delta \mathcal{B})^l \mathcal{G}(t) \varphi\|_{\mathbf{L}^p} &\leq \|(\Delta \mathcal{B})^l \mathcal{G}_0(t) \varphi\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\quad + \left\| (\Delta \mathcal{B})^l e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} \mathcal{B}^k \varphi \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\quad + \|(\Delta \mathcal{B})^l \mathcal{R}(t) \varphi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{-l} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \end{aligned}$$

при $l = 0, 1, 2$. Точно так же, используя неравенство

$$\|\mathcal{G}_0(t) \varphi - \vartheta G_0(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C t^{-\frac{n}{2} - \frac{a}{2}} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}},$$

имеем третью оценку леммы

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t) \varphi - \vartheta G_0(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \|\mathcal{G}_0(t) \varphi - \vartheta G_0(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\quad + \left\| e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} \mathcal{B}^k \varphi \right\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\mathcal{R}(t) \varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq C t^{-\frac{n}{2} - \frac{a}{2}} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + C e^{-\alpha t} \langle t \rangle^n \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} + C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2} - 1} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C t^{-\frac{n}{2} - \frac{a}{2}} (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}}), \end{aligned}$$

поскольку $\|\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|\langle \cdot \rangle^a \varphi\|_{\mathbf{L}^1} = \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}}$. Наконец, учитывая неравенство

$$\| |x|^b (\mathcal{G}_0(t) \varphi - \vartheta G_0(t)) \|_{\mathbf{L}_x^1} \leq C t^{\frac{b-a}{2}} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}},$$

в силу (9) находим

$$\begin{aligned} \| |x|^b (\mathcal{G}(t) \varphi - \vartheta G_0(t)) \|_{\mathbf{L}_x^1} &\leq \| |x|^b (\mathcal{G}_0(t) \varphi - \vartheta G_0(t)) \|_{\mathbf{L}_x^1} \\ &\quad + \left\| e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} \mathcal{B}^k \varphi \right\|_{\mathbf{L}^{1,b}} + \|\mathcal{R}(t) \varphi\|_{\mathbf{L}^{1,b}} \\ &\leq C t^{\frac{b-a}{2}} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + C e^{-\alpha t} \langle t \rangle^n \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ &\quad + C \langle t \rangle^{-1} (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \langle t \rangle^{\frac{b}{2}} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^1}) \leq C t^{\frac{b-a}{2}} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}}, \end{aligned}$$

откуда следует последняя оценка леммы. Лемма доказана.

В следующей лемме мы оценим оператор Грина в основной норме

$$\|\varphi\|_{\mathbf{X}} = \sup_{t>0} (\langle t \rangle^{\frac{n}{2}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \langle t \rangle^{-\frac{a}{2}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}}),$$

где $a \in (0, 1)$. Отметим, что норма $\mathbf{L}^1$ оценивается через норму $\mathbf{X}$:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^1} &= \int_{|x| \leq \langle t \rangle^{\frac{1}{2}}} |\varphi(t, x)| dx + \int_{|x| > \langle t \rangle^{\frac{1}{2}}} |x|^{-a} |x|^a |\varphi(t, x)| dx \\ &\leq C \langle t \rangle^{\frac{n}{2}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} + C \langle t \rangle^{-\frac{a}{2}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C \|\varphi\|_{\mathbf{X}}. \end{aligned}$$

Определим функцию

$$g(t) = 1 + \kappa \log \langle t \rangle$$

с некоторым $\kappa > 0$.

ЛЕММА 2. Пусть функция $f(t, x)$ имеет нулевое среднее значение

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) dx = 0.$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\left\| g^k(t) \int_0^t g^{-k}(\tau) \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{B}f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}}$$

при $k = 0, 1$, в предположении, что правая часть ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценки $g^{-1}(\tau) \leq C$ с помощью леммы 1 получим

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t g^{-k}(\tau) \mathcal{G}(t - \tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} + \left\| \int_0^t g^{-k}(\tau) \mathcal{G}(t - \tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ &\leq C \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}} g^{-k}(t) \end{aligned}$$

для всех $0 \leq t \leq 4$. Теперь рассмотрим $t > 4$. Из определения функции $g(t)$ имеем оценку $\langle t \rangle^{-\frac{a}{4}} \leq C g^{-1}(t)$, а также

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in [\sqrt{t}, t]} g^{-1}(\tau) &\leq C (1 + \kappa \log(1 + \sqrt{t}))^{-1} \\ &\leq C \left(1 + \frac{\kappa}{2} \log \langle t \rangle \right)^{-1} \leq C g^{-1}(t), \end{aligned}$$

поэтому с помощью леммы 1 ввиду оценок (5) и (6) получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t g^{-k}(\tau) \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{B}f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq C \int_0^{\sqrt{t}} (t - \tau)^{-\frac{n}{2} - \frac{a}{2}} (\|\mathcal{B}f(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\mathcal{B}f(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}}) d\tau \\ &\quad + C g^{-k}(t) \int_{\sqrt{t}}^{\frac{t}{2}} (t - \tau)^{-\frac{n}{2} - \frac{a}{2}} (\|\mathcal{B}f(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\mathcal{B}f(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}}) d\tau \\ &\quad + C g^{-k}(t) \int_{\frac{t}{2}}^t \|\mathcal{B}f(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau, \end{aligned}$$

откуда, используя определение нормы $\mathbf{X}$, находим

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t g^{-k}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
& \leq C \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}} \int_0^{\sqrt{t}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}-\frac{a}{2}} \langle \tau \rangle^{\frac{a}{2}-1} d\tau \\
& \quad + C g^{-k}(t) \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}} \int_{\sqrt{t}}^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}-\frac{a}{2}} \langle \tau \rangle^{\frac{a}{2}-1} d\tau \\
& \quad + C g^{-k}(t) \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}} \int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}-1} d\tau \\
& \leq C (t^{-\frac{n}{2}-\frac{a}{4}} + g^{-k}(t) t^{-\frac{n}{2}}) \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}} \leq C g^{-k}(t) t^{-\frac{n}{2}} \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}}.
\end{aligned}$$

Аналогично оценим

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t g^{-k}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\
& \leq C \int_0^t g^{-k}(\tau) \|\mathcal{B} f(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \\
& \leq C \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}} \int_0^{\sqrt{t}} \tau^{\frac{a}{2}-1} d\tau + C g^{-k}(t) \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}} \int_{\sqrt{t}}^t \tau^{\frac{a}{2}-1} d\tau \\
& \leq C \varepsilon (t^{\frac{a}{4}} + g^{-k}(t) t^{\frac{a}{2}}) \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}} \leq C g^{-k}(t) t^{\frac{a}{2}} \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}}
\end{aligned}$$

для всех $t > 4$, откуда следует результат леммы, поскольку

$$\begin{aligned}
& \left\| g^k(t) \int_0^t g^{-k}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\
& = \sup_{t>0} \left(\left\langle t \right\rangle^{\frac{n}{2}} g^k(t) \left\| \int_0^t g^{-k}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \right. \\
& \quad \left. + \left\langle t \right\rangle^{-\frac{a}{2}} g^k(t) \left\| \int_0^t g^{-k}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \right) \leq C \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{X}}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

2.2. Локальное существование. Докажем локальное существование решений задачи Коши (1). Под решением задачи Коши (1) далее будем понимать решение соответствующего интегрального уравнения

$$u(t) = \mathcal{G}(t) u_0 + \lambda \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} |u(\tau)|^\sigma u(\tau) d\tau. \quad (10)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть начальные данные $u_0 \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)$, $a \geq 0$. Тогда для некоторого $T > 0$ существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим принцип сжимающих отображений в функциональном пространстве

$$\mathbf{Z} = \{\varphi \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)) : \|u\|_{\mathbf{Z}} < \infty\}$$

с нормой

$$\|u\|_{\mathbf{Z}} = \sup_{t \in [0, T]} (\|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}).$$

Для $v \in \mathbf{Z}$ определим отображение $\mathcal{M}(v)$ следующим образом:

$$\mathcal{M}(v) = \mathcal{G}(t)u_0 + \lambda \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau) d\tau. \quad (11)$$

В предположении, что $\|v\|_{\mathbf{Z}} < \delta$, докажем, что $\|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{Z}} < \delta$.

Применяя первую оценку леммы 1, находим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + |\lambda| \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \\ &\leq C\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + C \int_0^t \|\mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку в силу четвертой оценки леммы 1 имеем

$$\|\mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C\langle t \rangle^{\frac{a}{2}} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1,a}},$$

то

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &\leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + |\lambda| \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \\ &\leq C\langle t \rangle^{\frac{a}{2}} \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}} \|\mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу (5), (6) оценим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C\|v(\tau)\|^{\sigma+1}_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\sigma+1} \leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{Z}}^{\sigma+1} \leq C\delta^{\sigma+1}, \\ \|\mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}}^{\sigma+1} \\ &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{Z}}^{\sigma+1} \leq C\delta^{\sigma+1}. \end{aligned}$$

Поэтому из (12) и (13) получим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + CT\delta^{\sigma+1}, \\ \|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &\leq C\langle T \rangle^{\frac{a}{2}} \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + CT\langle T \rangle^{\frac{a}{2}} \delta^{\sigma+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, если выбрать $\delta \geq 2C\|u_0\|_{\mathbf{Z}}$ и достаточно малое $T > 0$, то

$$\|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{Z}} \leq \delta.$$

Значит, отображение $\mathcal{M}$ преобразует шар радиуса $\delta > 0$ в пространстве $\mathbf{Z}$ в себя. Теперь докажем, что справедлива оценка для разности

$$\|\mathcal{M}(v_1) - \mathcal{M}(v_2)\|_{\mathbf{Z}} \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{Z}}.$$

Имеем

$$\|\mathcal{M}(v_1) - \mathcal{M}(v_2)\|_{\mathbf{Z}} \leq C \int_0^T \|\mathcal{B}(|v_1|^\sigma v_1(\tau) - |v_2|^\sigma v_2(\tau))\|_{\mathbf{Z}} \langle t - \tau \rangle^{\frac{\sigma}{2}} d\tau.$$

Поскольку

$$\|\mathcal{B}(|v_1|^\sigma v_1(\tau) - |v_2|^\sigma v_2(\tau))\|_{\mathbf{Z}} \leq C\delta^\sigma \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{Z}},$$

то получаем

$$\|\mathcal{M}(v_1) - \mathcal{M}(v_2)\|_{\mathbf{Z}} \leq CT\delta^\sigma \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{Z}} \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{Z}},$$

если взять достаточно малое время существования $T > 0$.

Итак, $\mathcal{M}$ является сжимающим отображением, поэтому существует единственное решение $u(t, x) \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ задачи (1). Утверждение доказано.

§ 3. Асимптотически слабая нелинейность

3.1. Малые начальные данные. Чтобы доказать глобальное существование решения в случае произвольного знака коэффициента λ перед нелинейностью, нам приходится предположить малость начальных данных. (В случае $\lambda > 0$ возможно разрушение решений за конечное время (см. книгу [36].) Также нам необходимо следить за скоростью убывания нелинейного члена. В суперкритическом случае $\sigma > \frac{2}{n}$ нелинейность $|u|^\sigma u$ оказывается асимптотически слабой в том смысле, что она не имеет существенного влияния на вид главного члена асимптотики решения при больших временах.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma > \frac{2}{n}$. Предположим, что начальные данные $u_0 \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)$, $a \in (0, 1]$, имеют достаточно малую норму $\|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty}$. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (1). Это решение имеет асимптотику

$$u(t, x) = A(\alpha t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}} + O(t^{-\frac{n}{2}-\gamma}) \quad (14)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где $0 < \gamma < \min(\frac{a}{2}, \frac{n}{2}\sigma - 1)$, константа A задается следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx + \lambda \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}|u(t, x)|^\sigma u(t, x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) dx. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Частный случай теоремы 1 был рассмотрен в заметке [46].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим принцип сжимающих отображений в функциональном пространстве

$$\mathbf{X} = \{\varphi \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)) : \|\varphi\|_{\mathbf{X}} < \infty\},$$

где

$$\|\varphi\|_{\mathbf{X}} = \sup_{t>0} (\langle t \rangle^{-\frac{a}{2}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \langle t \rangle^{\frac{n}{2}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}).$$

Отметим, что $\sup_{t>0} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|\varphi\|_{\mathbf{X}}$.

Пусть $\|v\|_{\mathbf{X}} < \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Определим отображение $\mathcal{M}(v)$ с помощью формулы (11). Сначала докажем, что

$$\|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{X}} < \delta.$$

Применяя первую оценку леммы 1 при $p = \infty$, $q = 1$, получаем

$$\|\mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq Ct^{-\frac{n}{2}} (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^1}),$$

а из второй оценки леммы 1 при $p = \infty$, $l = 0$ следует, что

$$\|\mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C\langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} (\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^1}) \\ &\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t - \tau \rangle^{-\frac{n}{2}} (\|\mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^1}) d\tau \\ &\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \|\mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau. \end{aligned}$$

Используя неравенства

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C\|v(\tau)\|^{\sigma+1}_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\sigma+1} \leq C\delta^{\sigma+1} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}(\sigma+1)}, \\ \|\mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C\|v(\tau)\|^{\sigma+1}_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \leq C\delta^{\sigma+1} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma}, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C\langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} (\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^1}) \\ &\quad + C\delta^{\sigma+1} \int_0^{\frac{t}{2}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} \langle t - \tau \rangle^{-\frac{n}{2}} d\tau \\ &\quad + C\delta^{\sigma+1} \int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}(\sigma+1)} d\tau \leq \delta \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

поскольку начальные данные u_0 и $\delta > 0$ являются малыми, и в суперкритическом случае имеем $\frac{n}{2} \sigma > 1$. Подобным образом оценим норму

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &\leq C \langle t \rangle^{\frac{a}{2}} (\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^1}) \\ &\quad + C \int_0^t \|\mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau + C \int_0^t \|\mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \langle t - \tau \rangle^{\frac{a}{2}} d\tau \\ &\leq \delta \langle t \rangle^{\frac{a}{2}} + C \delta^{\sigma+1} \int_0^t \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma + \frac{a}{2}} d\tau \\ &\quad + C \delta^{\sigma+1} \int_0^t \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} \langle t - \tau \rangle^{\frac{a}{2}} d\tau \leq \delta \langle t \rangle^{\frac{a}{2}}, \end{aligned}$$

где мы учли неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}|v(\tau)|^\sigma v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &\leq C \| |v(\tau)|^{\sigma+1} \|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ &\leq C \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C \delta^{\sigma+1} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma + \frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{X}} \leq \delta$, откуда следует, что отображение $\mathcal{M}$ преобразует шар радиуса $\delta > 0$ в пространстве $\mathbf{X}$ в себя. Аналогично оценивается разность

$$\|\mathcal{M}(v_1) - \mathcal{M}(v_2)\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{X}},$$

откуда следует, что $\mathcal{M}$ является сжимающим отображением. Таким образом, существует единственное решение $u(t, x) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ задачи (1), подчиняющееся оценкам

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}}, \quad \|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C \langle t \rangle^{\frac{a}{2}}. \quad (15)$$

Теперь докажем асимптотику (14). Воспользуемся интегральным уравнением (10). Ввиду третьей оценки леммы 1 имеем следующее асимптотическое представление для оператора Грина:

$$\mathcal{G}(t)u_0 = \theta G_0(t, x) + O(t^{-\frac{n+a}{2}} \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}}) \quad (16)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где $G_0(t, x) = (4\pi\alpha t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}}$ – функция Грина для уравнения теплопроводности,

$$\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$$

– общая масса начальных данных, $a \in (0, 1]$. Рассмотрим теперь разность

$$\begin{aligned} &\lambda \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau) d\tau - G_0(t, x) \int_0^\infty \vartheta(\tau) d\tau \\ &= \lambda \int_0^t (\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau) - \vartheta(\tau) G_0(t-\tau, x)) d\tau \\ &\quad + \int_0^t (G_0(t-\tau, x) - G_0(t, x)) \vartheta(\tau) d\tau + G_0(t, x) \int_t^\infty \vartheta(\tau) d\tau, \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$\vartheta(\tau) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau) dy.$$

Пользуясь леммой 1, получаем

$$\begin{aligned} & \|\lambda \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau) - \vartheta(\tau) G_0(t-\tau, x)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C(t-\tau)^{-\frac{n}{2}-\frac{a}{2}} (\|\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}}) \end{aligned}$$

в области $0 < \tau < \frac{t}{2}$, а в области $\frac{t}{2} \leq \tau < t$ имеем оценку

$$\begin{aligned} & \|\lambda \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau) - \vartheta(\tau) G_0(t-\tau, x)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C \|\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}. \end{aligned}$$

Таким образом, ввиду (15) имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t (\lambda \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau) - \vartheta(\tau) G_0(t-\tau, x)) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C \|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}-\frac{a}{2}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} d\tau + C \|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}(\sigma+1)} d\tau \\ & \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}-\gamma}, \end{aligned}$$

где $0 < \gamma < \min(\frac{a}{2}, \frac{n}{2}\sigma - 1)$. Теперь оценим разность

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t (G_0(t-\tau, x) - G_0(t, x)) \vartheta(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C \int_0^t \|G_0(t-\tau) - G_0(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} d\tau \\ & \leq C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}-\gamma} \langle \tau \rangle^{\gamma-\frac{n}{2}\sigma} d\tau + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} d\tau \\ & \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}-\gamma}, \end{aligned}$$

а для последнего слагаемого в (17) имеем оценку

$$\left\| G_0(t) \int_t^\infty \vartheta(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C t^{-\frac{n}{2}} \int_t^\infty \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} d\tau \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}-\gamma}.$$

Таким образом, из интегрального уравнения (10) мы видим, что существует число

$$A = \theta + \int_0^\infty \vartheta(\tau) d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) dx$$

такое, что имеет место асимптотика (14). Теорема доказана.

3.2. Большие начальные данные. Рассмотрим случай $\lambda < 0$. Тогда, следуя методу работы [23], мы сможем отказаться от малости начальных данных $u_0(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\sigma > \frac{2}{n}$, $\lambda < 0$, $n = 1, 2$. Предположим, что начальные данные $u_0 \in \mathbf{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^{2,a}(\mathbb{R}^n)$, $a \in (0, 1]$. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (1), причем справедлива асимптотика (14).

Прежде чем доказывать теорему 2, мы докажем несколько лемм. Определим норму

$$\|\varphi\|_{p,q} \equiv \left\| \|\varphi(t, x)\|_{\mathbf{L}^q(\mathbb{R}_x^n)} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_t^+)}. \quad (13)$$

ЛЕММА 3. Пусть размерность $n = 1, 2$. Предположим, что начальные данные $u_0 \in \mathbf{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть нормы $\|u\|_{\infty, 2}$ и $\|u\|_{\sigma+2, \sigma+2}$ решения $u(t, x)$ ограничены

$$\|u\|_{\infty, 2} + \|u\|_{\sigma+2, \sigma+2} \leq C.$$

Тогда справедлива оценка

$$\int_0^t \| |u(\tau)|^\sigma \Delta u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} d\tau \leq C \langle t \rangle^\beta$$

для всех $t > 0$, где $\beta = 0$ при $\sigma > 1$ и $\beta > \frac{1}{\sigma} - 1$ при $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью неравенства Гёльдера получим

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^{1-(1-\frac{2}{p})(1+\frac{2}{\sigma})} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^{2+\sigma}}^{(1-\frac{2}{p})(1+\frac{2}{\sigma})}$$

при $2 \leq p \leq \sigma + 2$, откуда

$$\|u\|_{s,p} \leq \|u\|_{\infty, 2}^{1-(1-\frac{2}{p})(1+\frac{2}{\sigma})} \|u\|_{\sigma+2, \sigma+2}^{(1-\frac{2}{p})(1+\frac{2}{\sigma})} \leq C,$$

где $s = \frac{\sigma p}{p-2}$. Теперь оценим $\mathbf{L}^p$ -норму функции $u(t)$ при $\sigma + 2 \leq p \leq \infty$. Запишем (1) в виде интегрального уравнения

$$u(t) = \mathcal{G}(t)u_0 + \lambda \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau) d\tau, \quad (18)$$

откуда следует неравенство

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^p} + |\lambda| \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^p}.$$

В силу леммы 1 имеем оценку

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} &\leq e^{-a(t-\tau)} \|\mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \\ &+ C \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \|\mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^r} \end{aligned}$$

при $1 \leq r \leq p$. Применяя теорему вложения Соболева (см. [5], [42]), получим

$$\|\mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \| |u(\tau)|^\sigma u(\tau) \|_{\mathbf{L}^r} \leq C \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{(\sigma+1)r}}^{\sigma+1} \quad (19)$$

при $\max\left(1, \frac{p}{1+\frac{2}{n}p}\right) \leq r \leq p$. Поэтому

$$\|\mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{(\sigma+1)r}}^{\sigma+1},$$

откуда с помощью неравенства Юнга найдем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} d\tau \right\|_{\mathbf{L}_t^s(0,\infty)} \\ & \leq C \left\| \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{(\sigma+1)r}}^{\sigma+1} d\tau \right\|_{\mathbf{L}_t^s(0,\infty)} \\ & \leq C \|\langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\|_{\mathbf{L}_t^{q'}(0,\infty)} \|u\|_{(\sigma+1)q,(\sigma+1)r}^{\sigma+1} \\ & \leq C \|u\|_{(\sigma+1)q,(\sigma+1)r}^{\sigma+1} \end{aligned}$$

при условии, что $\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}) > \frac{1}{q'} = \frac{1}{s} - \frac{1}{q} + 1$. Воспользуемся этим неравенством, взяв $q = r = \frac{\sigma+2}{\sigma+1}$, $n = 1, 2$, следовательно, $s > \max\left(1, \left(\frac{\sigma+1}{\sigma+2}\left(1+\frac{n}{2}\right) - 1 - \frac{n}{2p}\right)^{-1}\right)$. Таким образом, при $p = \infty$ получаем оценку

$$\|u\|_{s,\infty} \leq C \quad (20)$$

для всех $s > \frac{2(\sigma+2)}{n(\sigma+1)-2}$.

Теперь оценим Δu . Отметим, что из-за сглаживающего свойства оператора $\mathcal{B}$, стоящего перед нелинейностью в интегральном уравнении (10), нетрудно установить, что решение $u(t) \in \mathbf{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}^n)$ при всех $t \geq 0$, когда начальные данные $u_0 \in \mathbf{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}^n)$. В силу второй оценки леммы 1 имеем

$$\|\Delta \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t-\tau \rangle^{-1} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{(\sigma+1)p}}^{\sigma+1}$$

при $p \geq 1$, поэтому

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \|\Delta \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{B}|u(\tau)|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} d\tau \right\|_{\mathbf{L}_t^s(0,\infty)} \\ & \leq C \left\| \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-1} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{(\sigma+1)p}}^{\sigma+1} d\tau \right\|_{\mathbf{L}_t^s(0,\infty)} \\ & \leq C \|\langle t \rangle^{-1}\|_{\mathbf{L}_t^{q'}(0,\infty)} \|u\|_{(\sigma+1)q,(\sigma+1)p}^{\sigma+1} \\ & \leq C \|u\|_{(\sigma+1)q,(\sigma+1)p}^{\sigma+1} \end{aligned}$$

при $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} - 1$, $q' > 1$. Таким образом, получаем

$$\|\Delta u\|_{s,p} \leq C \|u\|_{(\sigma+1)q,(\sigma+1)p}^{\sigma+1} \quad (21)$$

при $s > q$. Используя неравенство

$$\|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma(\sigma+2)}}^{\sigma} \leq \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\infty}}^{\sigma-1} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}},$$

с помощью неравенства Гёльдера находим

$$\begin{aligned} \int_0^t \| |u(\tau)|^{\sigma} \Delta u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} d\tau &\leq \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma(\sigma+2)}}^{\sigma} \|\Delta u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}} d\tau \\ &\leq t^{1-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2}-\frac{1}{\sigma+2}} \|u(\tau)\|_{s_1(\sigma-1), \infty}^{\sigma-1} \|u(\tau)\|_{\sigma+2, \sigma+2} \|u\|_{(\sigma+1)s_3, \sigma+2}^{\sigma+1} \leq C \end{aligned}$$

при $\sigma > 1$, поскольку мы можем выбрать $s_1(\sigma-1) > \frac{2(\sigma+2)}{n(\sigma+1)-2}$, $s_2 > s_3 = \frac{\sigma+2}{\sigma+1}$, так что $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{\sigma+2} > 1$. Рассмотрим теперь $\sqrt{3}-1 < \sigma \leq 1$; тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t \| |u(\tau)|^{\sigma} \Delta u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} d\tau &\leq \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma(\sigma+2)}}^{\sigma} \|\Delta u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}} d\tau \\ &\leq C \langle t \rangle^{1-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2}} \|u(\tau)\|_{s_1\sigma, \sigma(\sigma+2)}^{\sigma} \|u\|_{(\sigma+1)s_3, \sigma+2}^{\sigma+1} \leq C \langle t \rangle^{\beta}, \end{aligned}$$

где мы берем $s_1\sigma > \frac{\sigma^2(\sigma+2)}{\sigma(\sigma+2)-2}$, $s_2 > s_3 = \frac{\sigma+2}{\sigma+1}$, так что $\beta = 1 - \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} > \frac{1}{\sigma} - 1$. Наконец, при $\frac{1}{2} < \sigma \leq \sqrt{3}-1$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \| |u(\tau)|^{\sigma} \Delta u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} d\tau &\leq \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^{\sigma} \|\Delta u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\frac{2}{2-\sigma}}} d\tau \\ &\leq C \langle t \rangle^{1-\frac{1}{s_1}} \|u(\tau)\|_{\infty, 2}^{\sigma} \|u\|_{(\sigma+1)s_2, (\sigma+1)\frac{2}{2-\sigma}}^{\sigma+1} \leq C \langle t \rangle^{\beta}, \end{aligned}$$

поскольку можно взять $s_1 > s_2 = \frac{\sigma}{2\sigma-1}$, так что $\beta = 1 - \frac{1}{s_1} > \frac{1}{\sigma} - 1$. Лемма доказана.

Следующая лемма необходима для того, чтобы уточнить оценку леммы 3 для случая $\sigma \leq 1$.

ЛЕММА 4. Пусть $n = 2$, $\sigma \in (\frac{3}{4}, 1]$. Предположим, что начальные данные $u_0 \in \mathbf{W}_{\infty}^2(\mathbb{R}^2) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}^2)$. Допустим также, что выполнена оценка решения

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{\alpha-1+\frac{1}{p}}$$

для всех $t > 0$, где $1 \leq p \leq \sigma+2$, $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$. Тогда справедлива оценка

$$\int_0^t \| |u(\tau)|^{\sigma} \Delta u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} d\tau \leq C \langle t \rangle^{\beta}$$

для всех $t > 0$, где $\beta = 0$, когда $\max(\sigma\alpha + \frac{1}{\sigma+2} - \sigma, \alpha(1+2\sigma) + 1 - 2\sigma) < 0$, и $\beta > \max(\sigma\alpha + \frac{1}{\sigma+2} - \sigma, \alpha(1+2\sigma) + 1 - 2\sigma)$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки (21) получим

$$\begin{aligned} \|\Delta u(t)\|_{\mathbf{L}^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}} &\leq C + \int_0^t \|\Delta \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}} d\tau \\ &\leq C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-1} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+1} d\tau \\ &\leq C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-1} \langle \tau \rangle^{(\sigma+1)(\alpha-\frac{\sigma+1}{\sigma+2})} d\tau \leq C \langle t \rangle^\delta \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, где $\delta > \max(-1, (\sigma+1)(\alpha - \frac{\sigma+1}{\sigma+2}))$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t \| |u(\tau)|^\sigma \Delta u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} d\tau &\leq \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma(\sigma+2)}}^\sigma \|\Delta u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}} d\tau \\ &\leq \int_0^t \langle \tau \rangle^{\sigma(\alpha-1) + \frac{1}{\sigma+2}} \langle \tau \rangle^\delta d\tau \leq C \langle t \rangle^\beta, \end{aligned}$$

где

$$\beta = 0, \quad \text{если} \quad \max\left(\sigma\alpha + \frac{1}{\sigma+2} - \sigma, \alpha(1+2\sigma) + 1 - 2\sigma\right) < 0,$$

и

$$\beta > \max\left(\sigma\alpha + \frac{1}{\sigma+2} - \sigma, \alpha(1+2\sigma) + 1 - 2\sigma\right)$$

в противном случае. Лемма доказана.

В следующей лемме мы установим зависимость от времени $\mathbf{L}^p$ -нормы решения.

ЛЕММА 5. Пусть $u_0 \in \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что

$$\int_0^t d\tau \| |u(\tau)|^\sigma \Delta u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} \leq C \langle t \rangle^\beta \quad (22)$$

для всех $t > 0$, где $\beta \in [0, \frac{n}{4})$. Тогда выполнена оценка

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{\beta - \frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}$$

для всех $t > 0$ при $1 \leq p \leq \sigma+2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяем $w = (1 - \Delta)u$; тогда из (1) получим уравнение

$$\partial_t w = \alpha(\mathcal{B} - 1)w + \lambda |\mathcal{B}w|^\sigma w + \lambda |u|^\sigma \Delta u, \quad (23)$$

где $\mathcal{B} = (1 - \Delta)^{-1}$. Оценим сначала $\mathbf{L}^1$ -норму. Пусть $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\Theta(x) = -1$ при $x < 0$; $\Theta(0) = 0$. Уравнение (23) умножим на $\Theta(w(t, x))$ и проинтегрируем по x по всему пространству $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t w(t, x) \Theta(w(t, x)) dx &= \alpha \int_{\mathbb{R}^n} \Theta(w(t, x)) (\mathcal{B} - 1)w dx \\ &\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{B}w(t, x)|^\sigma |w(t, x)| dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \Theta(w(t, x)) |u(t, x)|^\sigma \Delta u(t, x) dx. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} w_t(t, x) \Theta(w(t, x)) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} |w(t, x)| dx = \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{\mathbf{L}^1}, \\ \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{B}w(t, x)|^\sigma |w(t, x)| dx &\leq 0, \\ \int_{\mathbb{R}^n} \Theta(w(t, x)) \mathcal{B}w dx &\leq \|\mathcal{B}w(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|w(t)\|_{\mathbf{L}^1}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} &\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \Theta(w(t, x)) (\mathcal{B} - 1)w dx \\ &= \alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Theta(w(t, x)) \mathcal{B}w dx - \|w(t)\|_{\mathbf{L}^1} \right) \leq 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq |\lambda| \| |u(t)|^\sigma \Delta u(t) \|_{\mathbf{L}^1}. \quad (24)$$

Интегрируя неравенство (24), ввиду оценки (22) получаем

$$\|w(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|w_0\|_{\mathbf{L}^1} + C \langle t \rangle^\beta.$$

В частности, в силу (5) имеем

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{u}(t, \xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\mathcal{B}w(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq C \|w(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq C \langle t \rangle^\beta. \quad (25)$$

Таким образом, оценка леммы при $p = 1$ выполнена.

Умножим теперь уравнение (1) на $2u$ и, проинтегрировав по $x \in \mathbb{R}^n$, получим

$$\frac{d}{dt} (\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2) = -2\alpha \|\nabla u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\lambda \|u(t)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+2} \quad (26)$$

(отметим, что из интегрального уравнения (10) легко следует, что решение $u(t) \in \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ при всех $t \geq 0$ в случае, когда $u_0 \in \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, поэтому интегрирование по частям здесь оправдано). С помощью теоремы Планшереля, следуя методу работы [47], найдем

$$\begin{aligned} \|\nabla u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= \|\xi \widehat{u}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \int_{|\xi| \leq \delta} |\widehat{u}(t, \xi)|^2 |\xi|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq \delta} |\widehat{u}(t, \xi)|^2 |\xi|^2 d\xi \\ &\geq \delta^2 \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - C \delta^{2+n} \sup_{|\xi| \leq \delta} |\widehat{u}(t, \xi)|^2, \end{aligned}$$

где $\delta \in (0, 1)$. Таким образом, из (26) приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq -\alpha \delta^2 \|u(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 + C \delta^{2+n} \sup_{|\xi| \leq \delta} |\widehat{u}(t, \xi)|^2. \quad (27)$$

Выберем $\alpha\delta^2 = (1+n)(t_0+t)^{-1}$, $t_0 = \sqrt{\frac{1+n}{\alpha}}$, и заменим $\|u(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 = (t_0+t)^{-1-n}W(t)$. Тогда в силу (25) получим из (27)

$$\frac{d}{dt} W(t) \leq C(t_0+t)^{2\beta+\frac{n}{2}}. \quad (28)$$

Интегрируя (28) по времени, имеем

$$W(t) \leq \|u_0\|_{\mathbf{H}^1}^2 + C((t_0+t)^{\frac{n}{2}+1+2\beta} - 1),$$

откуда получаем оценку убывания по времени $\mathbf{L}^2$ -нормы решения

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(1+t)^{\beta-\frac{n}{4}} \quad (29)$$

для всех $t > 0$.

Аналогично, умножив уравнение (1) на $4u^3$ и проинтегрировав по $x \in \mathbb{R}^n$, получим

$$\frac{d}{dt} \|u^2(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 = -3\alpha \|\nabla(u^2(t))\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 4\lambda \|u(t)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+4}}^{\sigma+4}. \quad (30)$$

Как и выше, учитывая (29), имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla(u^2(t))\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= \|\xi \widehat{u^2}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &= \int_{|\xi| \leq \delta} |\widehat{u^2}(t, \xi)|^2 |\xi|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq \delta} |\widehat{u^2}(t, \xi)|^2 |\xi|^2 d\xi \\ &\geq \delta^2 \|u(t)\|_{\mathbf{L}^4}^4 - C\delta^{2+n} \sup_{|\xi| \leq \delta} |\widehat{u^2}(t, \xi)|^2 \\ &\geq \delta^2 \|u(t)\|_{\mathbf{L}^4}^4 - C\delta^{2+n} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^4, \end{aligned}$$

где $\delta > 0$. Таким образом, из (30) приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt} \|u^2(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq -\alpha\delta^2 \|u^2(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 + C\delta^{2+n}(1+t)^{4\beta-n}. \quad (31)$$

Выберем на этот раз $\alpha\delta^2 = (1+2n)(t_1+t)^{-1}$, $t_1 = \sqrt{\frac{1+2n}{\alpha}}$, и заменим

$$\|u^2(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 = (t_1+t)^{-1-2n}W_1(t).$$

Тогда из (31) найдем

$$\frac{d}{dt} W_1(t) \leq C(t_1+t)^{4\beta+\frac{n}{2}}. \quad (32)$$

Интегрируя (32) по времени, получаем

$$W_1(t) \leq \|u_0^2\|_{\mathbf{H}^1}^2 + C((t_1+t)^{\frac{n}{2}+1+4\beta} - 1),$$

откуда следует оценка убывания по времени $\mathbf{L}^4$ -нормы решения

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^4} \leq C(1+t)^{\beta - \frac{3n}{8}} \quad (33)$$

для всех $t > 0$. Продолжая эти рассуждения и используя неравенство Гёльдера, ввиду (25) и (33) приходим к оценке леммы. Лемма доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\sigma > 1$ при $n = 1$ и $\sigma > \frac{3}{4}$ при $n = 2$. Предположим, что начальные данные $u_0 \in \mathbf{W}_{\infty}^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}$$

для всех $t > 0$ при $1 \leq p \leq \sigma + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя формулу (26) по времени, имеем

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\alpha \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau - 2\lambda \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+2} d\tau \\ &= \|u_0\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \|u_0\|_{\mathbf{H}^1}^2 \end{aligned}$$

для всех $t \geq 0$. В частности, имеем оценки

$$\|u\|_{\infty,2} \equiv \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u_0\|_{\mathbf{H}^1}, \quad (34)$$

$$\|u\|_{\sigma+2,\sigma+2} \equiv \left\| \|u(t,x)\|_{\mathbf{L}_x^{\sigma+2}} \right\|_{\mathbf{L}_t^{\sigma+2}(0,\infty)} \leq C \|u_0\|_{\mathbf{H}^1}. \quad (35)$$

В силу (34) и (35), применяя лемму 3, получаем

$$\int_0^t d\tau \| |u(\tau)|^{\sigma} \Delta u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} \leq C$$

для всех $t > 0$ при $\sigma > 1$. Таким образом, результат утверждения в случае $\sigma > 1$ следует из леммы 5. Рассмотрим случай $\sigma \in (\frac{3}{4}, 1]$, когда $n = 2$. Из леммы 3 имеем

$$\int_0^t d\tau \| |u(\tau)|^{\sigma} \Delta u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} \leq C \langle t \rangle^{\beta_1} \quad (36)$$

для всех $t > 0$, где $\beta_1 > \frac{1}{\sigma} - 1$. Тогда в силу леммы 5 находим

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{\beta_1 - \frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}$$

для всех $t > 0$ при $1 \leq p \leq \sigma + 2$. Теперь с помощью леммы 4 получаем

$$\int_0^t \| |u(\tau)|^{\sigma} \Delta u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} d\tau \leq C \langle t \rangle^{\beta_2}$$

для всех $t > 0$, где $\beta_2 = 0$, если $\sigma \in (\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}), 1]$, и $\beta_2 > \frac{1}{\sigma} - 4\sigma + 2$ в противном случае.

Снова применив лемму 5, найдем

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{\beta_2 - \frac{n}{2}(1 - \frac{1}{p})}$$

для всех $t > 0$ при $1 \leq p \leq \sigma + 2$. После этого, используя лемму 4, получим

$$\int_0^t \| |u(\tau)|^\sigma \Delta u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} d\tau \leq C \langle t \rangle^{\beta_3}$$

для всех $t > 0$, где $\beta_3 = 0$ при $\sigma > 0.775$ и $\beta_3 > \beta_2(1 + 2\sigma) + 1 - 2\sigma$ в противном случае. Продолжив эти рассуждения, получим окончательно

$$\int_0^t \| |u(\tau)|^\sigma \Delta u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} d\tau \leq C$$

для всех $t > 0$, если $\sigma > \frac{3}{4}$. Откуда в силу леммы 5 приходим к оценке убывания по времени

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(1 - \frac{1}{p})}$$

для всех $t > 0$ при $1 \leq p \leq \sigma + 2$, если $\sigma \in (\frac{3}{4}, 1]$, и $n = 2$. Утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Используя утверждение 2, мы получаем следующую точную оценку убывания по времени решения:

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(1 - \frac{1}{p})} \quad (37)$$

для всех $t > 0$ при $1 \leq p \leq \sigma + 1$. Докажем (37) также и для $p = \infty$. Достаточно рассмотреть $t \geq T > 0$, поскольку при $t \in [0, T]$ оценка (37) следует из утверждения 1. Применяя первую оценку леммы 1 с $p = \infty$ и $r = \frac{\sigma+2}{\sigma+1}$, ввиду (5) и (19) имеем

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{B} |u|^\sigma u(\tau) \|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C e^{-at} \| \mathcal{B} |u|^\sigma u(\tau) \|_{\mathbf{L}^\infty} + C (t - \tau)^{-\frac{n(\sigma+1)}{2(\sigma+2)}} \| \mathcal{B} |u|^\sigma u(\tau) \|_{\mathbf{L}^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}} \\ & \leq C (t - \tau)^{-\frac{n(\sigma+1)}{2(\sigma+2)}} \| u(\tau) \|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+1} \end{aligned}$$

в области $\frac{t}{2} \leq \tau \leq t$. В области $0 \leq \tau \leq \frac{t}{2}$ с помощью первой оценки леммы 1 при $p = \infty$ и $r = 1$ получаем

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{B} |u|^\sigma u(\tau) \|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C e^{-at} \| \mathcal{B} |u|^\sigma u(\tau) \|_{\mathbf{L}^\infty} + C (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} \| \mathcal{B} |u|^\sigma u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} \\ & \leq C (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} (\| u(\tau) \|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+1} + \| u(\tau) \|_{\mathbf{L}^{\sigma+1}}^{\sigma+1}). \end{aligned}$$

Поэтому из интегрального уравнения (10) находим

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + C \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \\
&\leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-\tau)^{-\frac{n(\sigma+1)}{2(\sigma+2)}} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+1} d\tau \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} (\|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+1} + \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+1}}^{\sigma+1}) d\tau \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2}} + C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-\tau)^{-\frac{n(\sigma+1)}{2(\sigma+2)}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n(\sigma+1)^2}{2(\sigma+2)}} d\tau \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} d\tau \leq Ct^{-\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

для всех $t \geq 1$, поскольку порядок нелинейности σ суперкритический, т. е. $\frac{n}{2}\sigma > 1$. Теперь (37) вытекает для всех $1 \leq p \leq \infty$ благодаря неравенству Гёльдера.

Оценим $\mathbf{L}^{1,a}$ -норму решения. В силу четвертой оценки леммы 1 ввиду (5) и (19) найдем

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\
&\leq C\langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}} \|\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} + C\|\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\
&\leq C\langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} + C\|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}},
\end{aligned}$$

поэтому из интегрального уравнения (10) вытекает оценка

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &\leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\
&\quad + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} d\tau + C \int_0^t \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \\
&\leq C\langle t \rangle^{\frac{a}{2}} + C \int_0^t \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau,
\end{aligned}$$

откуда с помощью леммы Гронуолла получаем

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C\langle t \rangle^{\frac{a}{2}}$$

для всех $t > 0$. Значит, мы снова приходим к точной оценке убывания по времени (15). В силу (15) локальное решение, построенное в утверждении 1, может быть продолжено для любого $t > 0$, следовательно, существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (1). Рассуждая теперь так же, как и при доказательстве теоремы 1, получаем асимптотику (14). Теорема доказана.

§ 4. Критический случай

Настоящий параграф посвящен исследованию задачи Коши (1) в критическом случае $\sigma = \frac{2}{n}$.

4.1. Малые начальные данные. Определим

$$\eta = 2t \int_{\mathbb{R}^n} (G_0(t, x))^{\frac{2}{n}+1} dx = \frac{1}{2\pi\alpha} \left(\frac{2}{n} + 1 \right)^{-\frac{n}{2}},$$

где

$$G_0(t, x) = (4\pi\alpha t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}}.$$

Обозначим $g(t) = 1 + |\theta|^{\frac{2}{n}} \eta \log(1+t)$, $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$. Сформулируем основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что $\lambda < 0$. Пусть начальные данные $u_0 \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)$, $a \in (0, 1]$, являются достаточно малыми: $\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq \varepsilon$, и $\theta \geq C\varepsilon > 0$. Тогда задача Коши (1) имеет единственное глобальное во времени решение $u(t, x) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ и для него справедлива оценка*

$$\|u(t) - \theta G_0(t) g^{-\frac{n}{2}}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} g^{-1-\frac{n}{2}}(t) \log g(t). \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в работе [20], сделаем замену $u(t, x) = v(t, x)e^{-\varphi(t)}$. Тогда для новой функции $v(t, x)$ получаем следующее уравнение:

$$\partial_t(v - \Delta v) - \alpha \Delta v - \lambda e^{-\frac{2}{n}\varphi} |v|^{\frac{2}{n}} v - \varphi' v = 0.$$

Функцию $\varphi(t)$ выберем из условий $\varphi(0) = 0$ и

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda e^{-\frac{2}{n}\varphi} |v|^{\frac{2}{n}} v + \varphi' v) dx = 0;$$

тогда среднее значение новой функции $v(t, x)$ удовлетворяет закону сохранения:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} v(t, x) dx = 0,$$

откуда

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$$

при всех $t > 0$. Таким образом, мы приходим к задаче Коши для новых функций $(v(t, x), \varphi(t))$:

$$\begin{aligned} \partial_t(v - \Delta v) - \alpha \Delta v &= \lambda e^{-\frac{2}{n}\varphi} \left(|v|^{\frac{2}{n}} - \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\frac{2}{n}} v dx \right) v, \\ \varphi'(t) &= -\frac{\lambda}{\theta} e^{-\frac{2}{n}\varphi} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\frac{2}{n}} v dx, \\ v(0, x) &= u_0(x), \quad \varphi(0) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Обозначим $h(t) = e^{\frac{2}{n}\varphi(t)}$ и запишем (39) в форме

$$\begin{aligned}\partial_t(v - \Delta v) - \alpha \Delta v &= f(v, h), & v(0, x) &= u_0(x), \\ \partial_t h &= -\frac{2\lambda}{\theta n} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\frac{2}{n}} v \, dx, & h(0) &= 1,\end{aligned}\tag{40}$$

где

$$f(v, h) = \lambda h^{-1} \left(|v|^{\frac{2}{n}} - \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\frac{2}{n}} v \, dx \right) v.$$

Заметим, что среднее значение нелинейности

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(v, h)(t, x) \, dx = 0$$

для всех $t > 0$. Докажем существование решения $(v(t, x), h(t))$ задачи Коши (40) с помощью метода последовательных приближений. Обозначим

$$v_1 = \mathcal{G}(t)u_0, \quad h_1 = g(t), \quad g(t) = 1 + |\theta|^{\frac{2}{n}} \eta \log \langle t \rangle,$$

а функции $(v_m(t, x), h_m(t))$ определим для всех $m \geq 2$ как решение следующей задачи (которое понимается в смысле соответствующего интегрального уравнения, получаемого ниже с помощью преобразования Фурье):

$$\begin{aligned}\partial_t(v_m - \Delta v_m) - \alpha \Delta v_m &= f(v_{m-1}, h_{m-1}), \\ \partial_t h_m &= -\frac{2\lambda}{\theta n} \int_{\mathbb{R}^n} |v_{m-1}|^{\frac{2}{n}} v_{m-1} \, dx, \\ v_m(0, x) &= u_0(x), \quad h_m(0) = 1.\end{aligned}\tag{41}$$

Докажем по индукции оценки

$$\begin{aligned}\|v_m\|_{\mathbf{X}} &\leq C\varepsilon, & \|v_m(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}} g^{-1}(t), \\ |h_m(t) - g(t)| &\leq C\varepsilon^{\frac{2}{n}} (1 + \log g(t))\end{aligned}\tag{42}$$

для всех $m \geq 1$, где норма $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ определена, как и выше, следующим образом:

$$\|\varphi\|_{\mathbf{X}} = \sup_{t>0} (\langle t \rangle^{\frac{n}{2}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}}).$$

Из леммы 1 найдем

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}}, & \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C\varepsilon, \\ \|\cdot\|^a (\mathcal{G}(t)u_0 - \theta G_0(t, x)) &\|_{\mathbf{L}^1} \leq C\varepsilon\end{aligned}$$

и

$$\|\cdot\|^a G_0(t, x) \|_{\mathbf{L}^1} \leq C t^{\frac{a}{2}}.$$

Следовательно, оценки (42) выполнены при $m = 1$. Предположим, что оценки (42) справедливы для некоторого номера $m - 1$. Перепишем задачу (41) в виде интегральных уравнений

$$\begin{aligned} v_m(t) &= \mathcal{G}(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}f(v_{m-1}(\tau), h_{m-1}(\tau)) d\tau, \\ h_m(t) &= 1 - \frac{2\lambda}{\theta n} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |v_{m-1}|^{\frac{2}{n}} v_{m-1} dx. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\|f(v_{m-1}(t), h_{m-1}(t))\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq Ch_{m-1}^{-1}(t) \|v_{m-1}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1+\frac{2}{n}} \left(1 + \frac{1}{|\theta|} \|v_{m-1}(t)\|_{\mathbf{L}^1}\right) \\ &\leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}} \langle t \rangle^{-1-\frac{n}{2}} g^{-1}(t), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} &\|f(v_{m-1}(t), h_{m-1}(t))\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ &\leq Ch_{m-1}^{-1}(t) \|v_{m-1}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\frac{2}{n}} \|v_{m-1}(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \left(1 + \frac{1}{|\theta|} \|v_{m-1}(t)\|_{\mathbf{L}^1}\right) \\ &\leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}} \langle t \rangle^{-1+\frac{a}{2}} g^{-1}(t) \end{aligned} \quad (44)$$

для всех $t > 0$ при условии, что $(v_{m-1}(t), h_{m-1}(t))$ подчиняется (42). Отсюда следует оценка

$$\|\langle t \rangle g(t) f(v_{m-1}(t), h_{m-1}(t))\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}}.$$

Поскольку $f(v_{m-1}(\tau), h_{m-1}(\tau))$ имеет нулевое среднее значение, из леммы 2 получаем

$$\left\| g(t) \int_0^t g^{-1}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}f(v_{m-1}(\tau), h_{m-1}(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}},$$

откуда следует, что

$$\|v_m\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon, \quad \|v_m(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} \leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}} g^{-1}(t). \quad (45)$$

Чтобы доказать третью оценку в (42), нам потребуется следующая лемма, в которой мы вычислим эволюцию во времени среднего значения нелинейности в уравнении (1) в критическом случае. Как и выше, положим $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$.

ЛЕММА 6. Пусть $\lambda < 0$. Предположим, что $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)$, причем норма $\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} = \varepsilon$ достаточно мала. Кроме того, пусть $\theta \geq C\varepsilon > 0$. Предположим, что функция $v(t, x)$ подчиняется оценкам

$$\begin{aligned} \langle t \rangle^{\frac{n}{2}} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|v\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C\varepsilon, \\ \|v(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}} g^{-1}(t) \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Тогда имеет место неравенство

$$\left| 1 - \frac{2\lambda}{\theta n} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\frac{2}{n}} v(\tau, x) dx - g(t) \right| \leq C\varepsilon^{\frac{2}{n}} (1 + \log g(t)) \quad (46)$$

для всех $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду условия $\|v\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|v\|_{\mathbf{L}^1} \leq C\varepsilon$ получаем

$$\left| \frac{2\lambda}{\theta n} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\frac{2}{n}} v(\tau, x) dx \right| \leq C\varepsilon^{\frac{2}{n}} t,$$

откуда приходим к оценке (46) при всех $0 < t < 1$.

Рассмотрим теперь $t \geq 1$. В силу леммы 1 имеем

$$\|\mathcal{G}(t)u_0 - \theta G_0(t, x)\|_{\mathbf{L}^1} \leq C\varepsilon t^{-\frac{a}{2}},$$

откуда находим

$$\begin{aligned} & \left\| |v|^{\frac{2}{n}} v - |\theta|^{\frac{2}{n}} \theta (G_0(t, x))^{1+\frac{2}{n}} \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ & \leq C(\|v(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} + \|\mathcal{G}(t)u_0 - \theta G_0(t, x)\|_{\mathbf{L}^1}) \\ & \quad \times \left(\|v\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\frac{2}{n}} + \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\frac{2}{n}} + |\theta|^{\frac{2}{n}} \|G_0(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\frac{2}{n}} \right) \\ & \leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}} t^{-1} (\varepsilon^{\frac{2}{n}} g^{-1}(t) + t^{-\frac{a}{2}}) \end{aligned}$$

для всех $t \geq 1$. Поскольку

$$t \int_{\mathbb{R}^n} (G_0(t, x))^{1+\frac{2}{n}} dx = \frac{1}{4\pi\alpha} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{\eta}{2\lambda},$$

находим

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\frac{2}{n}} v(t, x) dx - |\theta|^{\frac{2}{n}} \theta t^{-1} \frac{\eta}{2\lambda} \right| \\ & \leq C \left\| |v|^{\frac{2}{n}} v - |\theta|^{\frac{2}{n}} \theta (G_0(t, x))^{1+\frac{2}{n}} \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ & \leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}} t^{-1} (\varepsilon^{\frac{2}{n}} g^{-1}(t) + t^{-\frac{a}{2}}) \end{aligned}$$

для всех $t \geq 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2\lambda}{\theta} \int_1^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\frac{2}{n}} v(\tau, x) dx - |\theta|^{\frac{2}{n}} \eta \log t \right| \\ & \leq \int_1^t \frac{C\varepsilon^{\frac{4}{n}} d\tau}{\tau(1 + \theta^{\frac{2}{n}} \eta \log(1 + \tau))} + C\varepsilon^{\frac{2}{n}} \int_1^t \tau^{-1-\frac{a}{2}} d\tau \\ & \leq C\varepsilon^{\frac{2}{n}} (1 + \log g(t)) \end{aligned}$$

для всех $t \geq 1$. Таким образом, получаем (46). Лемма доказана.

В силу (45), применяя лемму 6, находим

$$|h_m(t) - g(t)| \leq C\varepsilon^{\frac{2}{n}} (1 + \log g(t))$$

для всех $t > 0$. Таким образом, по индукции получаем оценки (42) для всех $m \geq 1$. Аналогично, по индукции доказываются неравенства

$$\begin{aligned} \|v_m - v_{m-1}\|_{\mathbf{X}} &\leq \frac{1}{4} \|v_{m-1} - v_{m-2}\|_{\mathbf{X}}, \\ \sup_{t>0} g^{-1}(t) |h_m(t) - h_{m-1}(t)| &\leq \frac{1}{4} \|v_{m-1} - v_{m-2}\|_{\mathbf{X}} \\ &+ \frac{1}{4} \sup_{t>0} g^{-1}(t) |h_{m-1}(t) - h_{m-2}(t)| \end{aligned}$$

при всех $m > 2$. Таким образом, переходя к пределу в $\mathbf{X}$ при $m \rightarrow \infty$, получаем единственное решение $\lim_{m \rightarrow \infty} v_m(t, x) = v(t, x) \in \mathbf{X}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m(t) = h(t) = e^{\frac{2}{n}\varphi(t)} \in \mathbf{C}(0, \infty)$, удовлетворяющее уравнениям

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{G}(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}f(v(\tau), h(\tau)) d\tau, \\ h(t) &= 1 - \frac{2\lambda}{\theta n} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\frac{2}{n}} v dx \end{aligned} \quad (47)$$

и оценкам

$$\begin{aligned} \|v(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}} g^{-1}(t), \\ |h_m(t) - g(t)| &\leq C\varepsilon^{\frac{2}{n}} (1 + \log g(t)). \end{aligned} \quad (48)$$

Применяя (43) и (44) к уравнениям (47), находим

$$\|v(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}} \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} g^{-1}(t). \quad (49)$$

Отсюда, пользуясь формулами

$$u(t, x) = e^{-\varphi(t)} v(t, x) = h^{-\frac{n}{2}}(t) v(t, x),$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} \|u(t) - \theta G_0(t, x) e^{-\varphi(t)}\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \|u(t) - (\mathcal{G}(t)u_0) e^{-\varphi(t)}\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|(\mathcal{G}(t)u_0 - \theta G_0(t, x)) e^{-\varphi(t)}\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}} \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} g^{-1-\frac{n}{2}}(t), \end{aligned} \quad (50)$$

где мы учли неравенство

$$\|(\mathcal{G}(t)u_0 - \theta G_0(t, x)) e^{-\varphi(t)}\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C t^{-\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2}} \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}}$$

и соотношение (49). Также ввиду (48) имеем

$$\begin{aligned} \|\theta G_0(t) h^{-\frac{n}{2}}(t) - \theta G_0(t, x) g^{-\frac{n}{2}}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C\varepsilon t^{-\frac{n}{2}} g^{-1-\frac{n}{2}}(t) |h(t) - g(t)|, \end{aligned}$$

откуда в силу (50) вытекает

$$\|u(t) - \theta G_0(t, x) g^{-\frac{n}{2}}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\varepsilon^{1+\frac{2}{n}} \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} g^{-1-\frac{n}{2}}(t) \log g(t), \quad (51)$$

что и завершает доказательство теоремы.

4.2. Большие начальные данные. Здесь мы освободимся от условия малости начальных данных $u_0(x)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\lambda < 0$, $n = 1, 2$. Предположим, что начальные данные $u_0 \in \mathbf{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^{2,a}(\mathbb{R}^n)$, $0 < a \leq 1$, таковы, что $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx \neq 0$. Тогда задача Коши (1) при $\sigma = \frac{2}{n}$ имеет единственное глобальное во времени решение $u(t, x) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$. Более того, имеет место асимптотика (38).

Прежде чем доказывать теорему 4, мы сравним решения следующих двух задач:

$$\begin{aligned} u_t - \alpha \Delta u + |u|^\sigma u &= f(t, x), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (52)$$

и

$$\begin{aligned} v_t - \alpha \Delta v + \varepsilon v^{\sigma+1} &= |f(t, x)|, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ v(0, x) &= \mu |u_0(x)|, & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (53)$$

где $\alpha > 0$. Отметим, что решение $v(t, x)$ задачи (53) остается положительным для всех $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ (см. [39]).

ЛЕММА 7. Пусть $0 < \sigma \leq \frac{2}{n}$. Предположим, что $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $\mu \geq 1$, начальные данные $u_0(x) \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)$ и $f(t, x) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$. Тогда для решений задач (52) и (53) справедливо неравенство $|u(t, x)| \leq v(t, x)$ для всех $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначив $r = v - u$, из (52) и (53) получим

$$\begin{aligned} r_t - \alpha \Delta r + \varepsilon v^{\sigma+1} - |u|^\sigma u &= |f| - f, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ r(0, x) &= \mu |u_0(x)| - u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (54)$$

Рассмотрим $R(t) \equiv \inf_{x \in \mathbb{R}^n} r(t, x)$. Отметим, что из-за сглаживающего эффекта, характерного для уравнения теплопроводности (см. [39]), функция $R(t)$ является непрерывной по времени. Нам нужно доказать, что $R(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$. Предположим от противного, что $R(T) < 0$ для некоторого $T > 0$. По непрерывности мы можем найти отрезок времени $[T_1, T]$ такой, что $R(t) \leq 0$ для всех $t \in [T_1, T]$ и $R(T_1) = 0$. По теореме 2.1 из работы [6] существует кривая $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$ такая, что $R(t) = r(t, \zeta(t))$, причем $R'(t) = \frac{d}{dt} r(t, \zeta(t)) = r_t(t, \zeta(t))$ почти на всем сегменте $[T_1, T]$. Имеем на кривой $x = \zeta(t)$

$$|u|^\sigma u - \varepsilon v^{\sigma+1} = (v - R)^{\sigma+1} - \varepsilon v^{\sigma+1} \geq 0$$

для всех $t \in [T_1, T]$. Для лапласиана Δr в точках минимума $\zeta(t)$ имеем

$$-\Delta r(t, x)|_{x=\zeta(t)} \leq 0.$$

Поэтому из уравнения (54) получаем

$$R'(t) \geq 0$$

почти для всех $t \in [T_1, T]$, откуда интегрирование по времени дает $R(t) \geq 0$. Это противоречит предположению, значит, $u(t, x) \leq v(t, x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq 0$. Аналогично доказывается, что $v + u \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq 0$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Как и при доказательстве теоремы 2, пользуясь леммой 1 и утверждением 2, при $\sigma = \frac{2}{n}$ найдем

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n(\sigma+1)}{2(\sigma+2)}} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+1} d\tau \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}} (\|u\|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} + \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+1}) d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n(\sigma+1)}{2(\sigma+2)}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n(\sigma+1)^2}{2(\sigma+2)}} d\tau \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}} \langle \tau \rangle^{-1} d\tau \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} \log \langle t \rangle
\end{aligned} \tag{55}$$

для всех $t > 0$. Из интегрального уравнения (10) следует, что решение $u(t)$ является гладким: $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}^n))$, поскольку начальные данные $u_0 \in \mathbf{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^{2,a}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому, взяв лапласиан от уравнения (10), ввиду (55) получим

$$\begin{aligned}
\|\Delta u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C \langle t \rangle^{-1-\frac{n}{2}} + \int_0^t \|\Delta \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{-1-\frac{n}{2}} + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-1-\frac{n}{2}} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+1}}^{\sigma+1} d\tau \\
&\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-1} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\sigma+1} d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{-1-\frac{n}{2}} + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-1-\frac{n}{2}} \langle \tau \rangle^{-1} d\tau \\
&\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-1} \langle \tau \rangle^{-1-\frac{n}{2}} \log^{\sigma+1} \langle \tau \rangle d\tau \leq C \langle t \rangle^{-1-\frac{n}{2}} \log^{\sigma+2} \langle t \rangle
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Обозначим $f(t, x) = \Delta u_t$. Поскольку $\partial_t \mathcal{G}(t) = \Delta \mathcal{B} \mathcal{G}(t)$, то из интегрального уравнения (10) получаем

$$\begin{aligned}
\Delta u_t(t) &= \Delta^2 \mathcal{B} \mathcal{G}(t) u_0 + \lambda \Delta \mathcal{B} |u(t)|^{\frac{2}{n}} u(t) \\
&\quad + \lambda \int_{\frac{t}{2}}^t \Delta \mathcal{B} \mathcal{G}(t-\tau) \Delta \mathcal{B} |u(\tau)|^{\frac{2}{n}} u(\tau) d\tau \\
&\quad + \lambda \int_0^{\frac{t}{2}} (\Delta \mathcal{B})^2 \mathcal{G}(t-\tau) |u(\tau)|^{\frac{2}{n}} u(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Поскольку оператор $\Delta \mathcal{B} = \mathcal{B} - 1$ ограничен, а начальные данные $u_0 \in \mathbf{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^{2,a}(\mathbb{R}^n)$, заключаем, что $\Delta u_t(t) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)$. Применяя теперь оценки

леммы 1, находим

$$\begin{aligned}
\|f(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &= \|\Delta u_t(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|\Delta^2 \mathcal{B}\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\lambda \Delta \mathcal{B}|u(t)|^{\frac{2}{n}}u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-1} \|\Delta \mathcal{B}|u|^{\frac{2}{n}}u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}-2} (\| |u|^{\frac{2}{n}}u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} + \|\mathcal{B}|u|^{\frac{2}{n}}u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}) d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{-2-\frac{n}{2}} \log^{2\sigma+2} \langle t \rangle + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-1} \langle \tau \rangle^{-2-\frac{n}{2}} \log^{2\sigma+2} \langle \tau \rangle d\tau \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}-2} \langle \tau \rangle^{-1} \log \langle \tau \rangle d\tau \leq C \langle t \rangle^{-2-\frac{n}{2}} \log^{2\sigma+2} \langle t \rangle
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Возьмем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим следующие две вспомогательные задачи Коши

$$\begin{aligned}
U_t - \alpha \Delta U + U^{\sigma+1} &= \varepsilon^2 |f(t, x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\
U(0, x) &= \varepsilon |u_0(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned} \tag{56}$$

и

$$\begin{aligned}
V_t - \alpha \Delta V + \varepsilon^{2\sigma} V^{\sigma+1} &= |f(t, x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\
V(0, x) &= \frac{1}{\varepsilon} |u_0(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned} \tag{57}$$

Заметим, что задача (57) может быть сведена к задаче (56) с помощью замены $V = \varepsilon^{-2}U$. В свою очередь, задача (56) имеет достаточно малые начальные данные и малую правую часть $\varepsilon^2|f|$, причем общая масса начальных данных

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(0, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon |u_0(x)| dx$$

имеет порядок $O(\varepsilon)$, так что среднее значение $\frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^2 |f(t, x)| dx$ также является малым. Применение принципа максимума к задаче (56) (см., например, [39]) дает почти точную оценку убывания по времени (в точной оценке добавляется логарифмическое убывание)

$$\|U(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}},$$

откуда с помощью леммы 7 находим

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}}. \tag{58}$$

Теперь оценим $\mathbf{L}^{1,a}$ -норму решения. В силу (5) и (6), принимая во внимание (58) и результат утверждения 2, имеем

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \\
&\leq C \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \leq C \langle \tau \rangle^{-1}, \\
\|\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &\leq C \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\
&\leq C \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C \langle \tau \rangle^{-1} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}},
\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &\leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\
&\quad + C \int_0^t (\|\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}} \|\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1}) d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{\frac{a}{2}} + C \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}} \langle \tau \rangle^{-1} d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{\frac{a}{2}} + C \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau.
\end{aligned}$$

Откуда с помощью леммы Гронуолла получаем

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C \langle t \rangle^{\frac{a}{2}} \quad (59)$$

для всех $t > 0$. Аналогично оценим $\mathbf{L}^{1,a}$ -норму функции f

$$\begin{aligned}
\|f(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &= \|\Delta u_t(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\
&\leq \|\Delta^2 \mathcal{B} \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + C \|\Delta \mathcal{B}|u|^{\frac{2}{n}} u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\
&\quad + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-1} (\| |u|^{\frac{2}{n}} u(\tau) \|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}} \| |u|^{\frac{2}{n}} u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1}) d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{-1+\frac{a}{2}} + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-1} \langle \tau \rangle^{\frac{a}{2}-1} d\tau + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}-1} \langle \tau \rangle^{-1} d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{-1+\frac{a}{2}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы можем использовать результаты работ [21], [22], чтобы вычислить асимптотическое поведение при больших временах функций $U(t, x)$ и $V(t, x)$, откуда с помощью леммы 7 получаем точную оценку убывания по времени решения

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} (\log(2+t))^{-\frac{n}{2}} \quad (60)$$

для всех $t > 0$.

Теперь, как и в доказательстве теоремы 3, сделаем замену $u(t, x) = v(t, x)e^{-\varphi(t)}$. Тогда для новых функций $(v(t, x), \varphi(t))$ получаем задачу (39). Докажем оценку

$$\|v(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C \langle t \rangle^{\frac{a}{2}}$$

для всех $t > 0$. Воспользуемся интегральным уравнением, вытекающим из (39):

$$\begin{aligned}
v(t) &= \mathcal{G}(t)u_0 + \lambda \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} \left(|u(\tau)|^\sigma v(\tau) \right. \\
&\quad \left. - \frac{v(\tau)}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\tau)|^\sigma v(\tau) dx \right) d\tau.
\end{aligned} \quad (61)$$

Из неравенства (60) находим

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma \leq C \langle t \rangle^{-1} (\log(2+t))^{-1},$$

поэтому в силу леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} \left(|u(\tau)|^\sigma v(\tau) - \frac{v(\tau)}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\tau)|^\sigma v(\tau) dx \right) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ & \leq C \int_0^t \left\| |u(\tau)|^\sigma v(\tau) - \frac{v(\tau)}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\tau)|^\sigma v(\tau) dx \right\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \\ & \leq C \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1} (\log(2+\tau))^{-1} \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Следовательно, ввиду (59) находим

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} & \leq \|\mathcal{G}(t)v(0)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ & \quad + C \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1} (\log(2+\tau))^{-1} \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \\ & \leq C \langle t \rangle^{\frac{a}{2}} + C \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1} (\log(2+\tau))^{-1} \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, откуда, применяя лемму Гронуолла, приходим к оценке

$$\|v(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C \langle t \rangle^{\frac{a}{2}}$$

для всех $t > 0$. Аналогично, с помощью оценки (60) и леммы 1 получим

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{\mathbf{L}^p} & \leq \|\mathcal{G}(t)v(0)\|_{\mathbf{L}^p} \\ & \quad + \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} \left(|u(\tau)|^\sigma v(\tau) - \frac{v(\tau)}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\tau)|^\sigma v(\tau) dx \right) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ & \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \\ & \quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{a}{2}} \langle \tau \rangle^{\frac{a}{2}-1} (\log(2+\tau))^{-1} d\tau \\ & \quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-1} (\log(2+\tau))^{-1} \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} d\tau \\ & \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} + \int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} d\tau \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Откуда лемма Гронуолла приводит к оценке

$$\|v(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}$$

для всех $t > 0$.

Из интегрального уравнения (61) и леммы 1 получаем теперь

$$\begin{aligned}
\|v(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} &\leq \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{a}{2}} \left\| |u(\tau)|^\sigma v(\tau) - \frac{v(\tau)}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\tau)|^\sigma v(\tau) dx \right\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \\
&\quad + \int_{\frac{t}{2}}^t \left\| |u(\tau)|^\sigma v(\tau) - \frac{v(\tau)}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\tau)|^\sigma v(\tau) dx \right\|_{\mathbf{L}^1} d\tau \\
&\leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{a}{2}} \langle \tau \rangle^{\frac{a}{2}-1} (\log(2+\tau))^{-1} d\tau \\
&\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-1} (\log(2+\tau))^{-1} d\tau \leq C \log(2+t)^{-1} \quad (62)
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Поэтому, применив лемму 6 к функции $h(t) = e^{\sigma\varphi(t)}$, найдем

$$|h(t) - g(t)| \leq C \log g(t)$$

для всех $t > 0$. Тогда из формул $u(t, x) = e^{-\varphi(t)}v(t, x) = h^{-\frac{n}{2}}(t)v(t, x)$ находим оценку

$$\begin{aligned}
\|u(t) - \theta e^{-\varphi(t)}G_0(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \|u(t) - e^{-\varphi(t)}\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\quad + \|\mathcal{G}(t)u_0 - \theta e^{-\varphi(t)}G_0(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\leq Ct^{-\frac{n}{2}}g^{-1-\frac{n}{2}}(t) + Ct^{-\frac{n}{2}-\frac{a}{2}}\|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq Ct^{-\frac{n}{2}}g^{-1-\frac{n}{2}}(t) \quad (63)
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Также имеем

$$\|\theta G_0(t)(h^{-\frac{n}{2}}(t) - g^{-\frac{n}{2}}(t))\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq Ct^{-\frac{n}{2}}g^{-1-\frac{n}{2}}(t)|h(t) - g(t)|,$$

откуда ввиду (63) получаем

$$\|u(t) - \theta G_0(t)g^{-\frac{n}{2}}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}}g^{-1-\frac{n}{2}}(t)\log g(t),$$

что завершает доказательство теоремы.

§ 5. Субкритический случай

В настоящем параграфе мы изучим задачу Коши (1) в субкритическом случае $\sigma < \frac{2}{n}$.

5.1. Малые начальные данные. Сначала мы докажем существование глобальных во времени малых решений задачи Коши (1) в субкритическом случае $0 < \sigma < \frac{2}{n}$. Обозначим

$$\tilde{G}(x) = (4\pi\alpha)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha}} = G_0(1, x).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\lambda < 0$, $0 < \sigma < \frac{2}{n}$. Предположим, что начальные данные $u_0 \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)$, $0 < a \leq 1$, достаточно малы: $\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq \varepsilon$, и таковы, что $\theta \geq C\varepsilon > 0$, где $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$. Также предположим, что значение σ близко к $\frac{2}{n}$, так что $\frac{2}{n} - \sigma \leq C\varepsilon^\sigma$. Тогда задача Коши (1) имеет единственное глобальное во времени решение $u(t, x) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ и справедлива следующая оценка убывания решения $u(t, x)$:

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}} \quad (64)$$

для всех $t > 0$. Более того, существуют число A и функция $V \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)$ такие, что справедлива асимптотическая формула

$$u(t, x) = At^{-\frac{1}{\sigma}} V(xt^{-\frac{1}{2}}) + O(t^{-\frac{1}{\sigma}-\gamma}) \quad (65)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где $\gamma = \frac{1}{2} \min(a, 1 - \frac{n\sigma}{2})$, и $V(\xi)$ является решением интегрального уравнения

$$V(\xi) = \tilde{G}(\xi) - \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}((\xi - yz^{\frac{1}{2}})(1-z)^{-\frac{1}{2}}) F(y) dy, \quad (66)$$

где

$$\beta = \frac{\sigma}{1 - \frac{n}{2}\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} V^{1+\sigma}(y) dy, \\ F(y) = V^{1+\sigma}(y) - V(y) \int_{\mathbb{R}^n} V^{1+\sigma}(\xi) d\xi.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие, что значение σ должно быть близким к величине $\frac{2}{n}$, так что $\frac{2}{n} - \sigma \leq C\varepsilon^\sigma$, является в известной мере техническим. Оно возникает из-за применения принципа сжимающих отображений при доказательстве существования глобального во времени решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Как и при доказательстве теоремы 3, сделаем замену $u(t, x) = v(t, x)e^{-\varphi(t)}$ и для новых функций $(v(t, x), \varphi(t))$ снова приходим к задаче Коши

$$\begin{aligned} \partial_t(v - \Delta v) - \alpha \Delta v &= \lambda e^{-\sigma\varphi} \left(|v|^\sigma - \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^\sigma v dx \right) v, \\ \varphi'(t) &= -\frac{\lambda}{\theta} e^{-\sigma\varphi} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^\sigma v dx, \\ v(0, x) &= u_0(x), \quad \varphi(0) = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Обозначим $h(t) = e^{\sigma\varphi(t)}$ и перепишем (67) в виде

$$\begin{aligned} \partial_t(v - \Delta v) - \alpha \Delta v &= f(v, h), \quad v(0, x) = u_0(x), \\ h' &= -\frac{\sigma\lambda}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^\sigma v dx, \quad h(0) = 1, \end{aligned} \quad (68)$$

где

$$f(v, h) = \lambda h^{-1} \left(|v|^\sigma - \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^\sigma v dx \right) v.$$

Заметим, что среднее значение нелинейности

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(v, h)(t, x) dx = 0$$

для всех $t > 0$. Будем доказывать существование решения $(v(t, x), h(t))$ задачи Коши (68) с помощью метода последовательных приближений. Обозначим $v_1 = \mathcal{G}(t)u_0$ и

$$h_1(t) = 1 + \frac{2|\theta|^\sigma \eta}{2 - n\sigma} t^{1 - \frac{\sigma}{2}n},$$

где

$$\eta = \sigma \lambda (4\pi\alpha)^{-\frac{n}{2}\sigma} (1 + \sigma)^{-\frac{n}{2}}.$$

Определим функции $(v_m(t, x), h_m(t))$ для всех $m \geq 2$ как решение следующей линейной задачи (понимаемое в смысле соответствующего интегрального уравнения):

$$\begin{aligned} \partial_t(v_m - \Delta v_m) - \alpha \Delta v_m &= f(v_{m-1}, h_{m-1}), \\ h'_m &= -\frac{\sigma\lambda}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |v_{m-1}|^\sigma v_{m-1} dx, \\ v_m(0, x) &= u_0(x), \quad h_m(0) = 1. \end{aligned} \quad (69)$$

Докажем по индукции следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|v_m\|_{\mathbf{X}} &\leq C\varepsilon, \quad \|v_m(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} \leq C\varepsilon^{1+\sigma}, \\ |h_m(t) - h_1(t)| &\leq C\varepsilon^\sigma h_1(t) \end{aligned} \quad (70)$$

для всех $m \geq 1$, где норма $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ задается, как и раньше, с помощью равенства

$$\|\varphi\|_{\mathbf{X}} = \sup_{t>0} \left(\langle t \rangle^{\frac{n}{2}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \langle t \rangle^{-\frac{\alpha}{2}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \right).$$

Из леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}}, \quad \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} \leq C\varepsilon, \\ \left\| |\cdot|^a (\mathcal{G}(t)u_0 - \theta t^{-\frac{n}{2}} \tilde{G}(t^{-\frac{1}{2}}(\cdot))) \right\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C\varepsilon, \\ \left\| t^{-\frac{n}{2}} |\cdot|^a \tilde{G}(t^{-\frac{1}{2}}(\cdot)) \right\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C t^{\frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

откуда видим, что оценки (70) выполнены при $m = 1$. Предположим по индукции, что оценки (70) верны для некоторого номера $m - 1$. Запишем интегральное уравнение для задачи (69) в виде

$$\begin{aligned} v_m(t) &= \mathcal{G}(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}f(v_{m-1}(\tau), h_{m-1}(\tau)) d\tau, \\ h_m(t) &= 1 - \frac{\sigma\lambda}{\theta} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |v_{m-1}|^\sigma v_{m-1} dx. \end{aligned}$$

Поскольку $(v_{m-1}(t), h_{m-1}(t))$ удовлетворяют (70), получаем

$$\begin{aligned}
& \|f(v_{m-1}(t), h_{m-1}(t))\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
& \leq Ch_{m-1}^{-1}(t) \|v_{m-1}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1+\sigma} \left(1 + \frac{1}{|\theta|} \|v_{m-1}(t)\|_{\mathbf{L}^1}\right) \\
& \leq C\varepsilon^{1+\sigma} \langle t \rangle^{-\frac{1+\sigma}{2}n} \left(1 + \frac{n\sigma|\theta|^\sigma \eta}{2-n\sigma} t^{1-\frac{\sigma}{2}n}\right)^{-1} \\
& \leq C\varepsilon \left(\frac{2}{n} - \sigma\right) \langle t \rangle^{-1-\frac{n}{2}}
\end{aligned} \tag{71}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned}
& \|f(v_{m-1}(t), h_{m-1}(t))\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\
& \leq Ch_{m-1}^{-1}(t) \|v_{m-1}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma \|v_{m-1}(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \left(1 + \frac{1}{|\theta|} \|v_{m-1}(t)\|_{\mathbf{L}^1}\right) \\
& \leq C\varepsilon \left(\frac{2}{n} - \sigma\right) \langle t \rangle^{-1+\frac{a}{2}}
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Отсюда получаем оценку

$$\|\langle t \rangle f(v_{m-1}(t), h_{m-1}(t))\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon^{1+\sigma},$$

так как мы предполагаем, что $2 - n\sigma \leq C\varepsilon^\sigma$. Поскольку $f(v_{m-1}, h_{m-1})$ имеет нулевое среднее значение:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} f(v_{m-1}(t, x), h_{m-1}(t)) dx \\
& = \frac{\lambda}{h_{m-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|v_{m-1}|^\sigma v_{m-1} - \frac{v_{m-1}}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |v_{m-1}|^\sigma v_{m-1} dx \right) dx \\
& = \frac{\lambda}{h_{m-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |v_{m-1}|^\sigma v_{m-1} dx \left(1 - \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} v_{m-1} dx\right) = 0,
\end{aligned}$$

то из леммы 2 получаем оценку

$$\left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) f(v_{m-1}(\tau), h_{m-1}(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon^{1+\sigma},$$

откуда следует, что

$$\|v_m\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon, \quad \|v_m(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} \leq C\varepsilon^{1+\sigma}. \tag{72}$$

Для доказательства третьей оценки в (70) мы воспользуемся следующей леммой, в которой вычислена эволюция среднего значения нелинейности в уравнении (1) в субкритическом случае.

ЛЕММА 8. *Предположим, что $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)$ и норма $\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} = \varepsilon$ достаточно мала. Кроме того, пусть*

$$\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx \geq C\varepsilon > 0.$$

Допустим, что функция $v(t, x)$ удовлетворяет оценкам

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}}, & \|v\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C\varepsilon, \\ \|v(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C\varepsilon^{1+\sigma} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{\sigma\lambda}{\theta} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |v|^\sigma v(\tau, x) dx - h_1(t) \right| \\ \leq C\varepsilon^\sigma h_1(t) + C\varepsilon^\sigma t^{1-\frac{\sigma n}{2}-\frac{\sigma}{2}} \end{aligned} \quad (73)$$

для всех $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 получим

$$\|\mathcal{G}(t)u_0 - \theta G_0(t, x)\|_{\mathbf{L}^1} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{\sigma}{2}}$$

для всех $t > 0$, откуда находим

$$\begin{aligned} &\| |v|^\sigma v - |\theta|^\sigma \theta (G_0(t, x))^{\sigma+1} \|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C(\|v(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} + \|\mathcal{G}(t)u_0 - \theta G_0(t, x)\|_{\mathbf{L}^1}) \\ &\quad \times (\|v\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma + \|\mathcal{G}u_0\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma + |\theta|^\sigma \|G_0\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma) \\ &\leq C\varepsilon^{1+\sigma} t^{-\frac{n\sigma}{2}} (\varepsilon^\sigma + \langle t \rangle^{-\frac{\sigma}{2}}) \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Поскольку

$$t^{\frac{n}{2}\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} (G_0(t, x))^{\sigma+1} dx = (4\pi\alpha)^{-\frac{n}{2}\sigma} (1+\sigma)^{-\frac{n}{2}} = \frac{\eta}{\sigma\lambda},$$

получаем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^n} |v|^\sigma v(t, x) dx - |\theta|^\sigma \theta t^{-\frac{\sigma}{2}n} \frac{\eta}{\sigma\lambda} \right| \\ &\leq C\| |v|^\sigma v - |\theta|^\sigma \theta (G_0(t, x))^{\sigma+1} \|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C\varepsilon^{1+\sigma} t^{-\frac{n\sigma}{2}} (\varepsilon^\sigma + \langle t \rangle^{-\frac{\sigma}{2}}) \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, где $0 < \sigma < \frac{2}{n}$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left| 1 - \frac{\sigma\lambda}{\theta} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |v|^\sigma v(\tau, x) dx - h_1(t) \right| \\ &= \left| \frac{\sigma\lambda}{\theta} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |v|^\sigma v(\tau, x) dx - |\theta|^\sigma \eta \left(1 - \frac{n}{2} \sigma \right)^{-1} t^{1-\frac{\sigma}{2}n} \right| \\ &\leq \frac{C\varepsilon^{2\sigma}}{2-\sigma n} t^{1-\frac{\sigma}{2}n} + C\varepsilon^\sigma t^{1-\frac{\sigma n}{2}-\frac{a}{2}} \leq \varepsilon^\sigma h_1(t) + C\varepsilon^\sigma t^{1-\frac{\sigma n}{2}-\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, откуда вытекает (73). Лемма доказана.

В силу (72) мы можем применить лемму 8 к функции

$$h_m(t) = 1 - \frac{\sigma\lambda}{\theta} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |v_{m-1}|^\sigma v_{m-1} dx,$$

откуда видим, что

$$|h_m(t) - h_1(t)| \leq C\varepsilon^\sigma h_1(t)$$

для всех $t > 0$. Таким образом, по индукции оценки (70) доказаны для всех $m \geq 1$. Точно так же по индукции доказываются неравенства

$$\begin{aligned} \|v_m - v_{m-1}\|_{\mathbf{X}} &\leq \frac{1}{4} \|v_{m-1} - v_{m-2}\|_{\mathbf{X}}, \\ \sup_{t>0} h_1^{-1}(t) |h_m(t) - h_{m-1}(t)| &\leq \frac{1}{4} \|v_{m-1} - v_{m-2}\|_{\mathbf{X}} \\ &\quad + \frac{1}{4} \sup_{t>0} h_1^{-1}(t) |h_{m-1}(t) - h_{m-2}(t)| \end{aligned}$$

для всех $m > 2$. Следовательно, переходя к пределу в пространстве $\mathbf{X}$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} v_m(t, x) = v(t, x) \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(t) = h(t),$$

получаем единственные решения $v(t, x) \in \mathbf{X}$, $h(t) = e^{\sigma\varphi(t)} \in \mathbf{C}(0, \infty)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{G}(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) f(v(\tau), h(\tau)) d\tau, \\ h(t) &= 1 - \frac{\sigma\lambda}{\theta} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |v|^\sigma v dx \end{aligned} \tag{74}$$

и оценкам

$$\begin{aligned} \|v(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C\varepsilon^{1+\sigma}, \\ |h(t) - h_1(t)| &\leq C\varepsilon^\sigma h_1(t). \end{aligned} \tag{75}$$

Также применяя оценку (71) к уравнениям (74), находим

$$\|v(t) - \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\varepsilon^{1+\sigma} \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} \quad (76)$$

для всех $t > 0$. Теперь по формулам $u(t, x) = e^{-\varphi(t)}v(t, x) = h^{-\frac{1}{\sigma}}(t)v(t, x)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} & \|u(t) - \theta t^{-\frac{n}{2}} \tilde{G}(t^{-\frac{1}{2}}(\cdot))e^{-\varphi(t)}\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq \|u(t) - (\mathcal{G}(t)u_0)e^{-\varphi(t)}\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|(\mathcal{G}(t)u_0 - \theta t^{-\frac{n}{2}} \tilde{G}(t^{-\frac{1}{2}}(\cdot)))e^{-\varphi(t)}\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C\varepsilon^{1+\sigma} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}}, \end{aligned} \quad (77)$$

где мы воспользовались неравенствами

$$\|(\mathcal{G}(t)u_0 - \theta t^{-\frac{n}{2}} \tilde{G}(t^{-\frac{1}{2}}(\cdot)))e^{-\varphi(t)}\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{a}{2}} \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}}$$

и (76). Также из (75) имеем

$$\begin{aligned} & \|\theta t^{-\frac{n}{2}} \tilde{G}(t^{-\frac{1}{2}}(\cdot))h^{-\frac{1}{\sigma}}(t) - \theta t^{-\frac{n}{2}} \tilde{G}(t^{-\frac{1}{2}}(\cdot))h_1^{-\frac{1}{\sigma}}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C\varepsilon t^{-\frac{n}{2}} h_1^{-1-\frac{1}{\sigma}}(t) |h(t) - h_1(t)|, \end{aligned}$$

откуда ввиду (77) следует, что

$$\|u(t) - \theta t^{-\frac{n}{2}} \tilde{G}(t^{-\frac{1}{2}}(\cdot))h_1^{-\frac{1}{\sigma}}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\varepsilon^{1+\sigma} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}}.$$

Поэтому

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \theta t^{-\frac{n}{2}} h_1^{-\frac{1}{\sigma}}(t) \|\tilde{G}(t^{-\frac{1}{2}}(\cdot))\|_{\mathbf{L}^\infty} + C\varepsilon^{1+\sigma} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}} \leq Ct^{-\frac{1}{\sigma}}.$$

Таким образом, оценка (64) установлена.

Перейдем теперь к вычислению асимптотики решения. Сначала докажем существование решения интегрального уравнения

$$V(\xi) = V_1(\xi) - \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}\left(\frac{\xi - yz^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}\right) F(y) dy, \quad (78)$$

где $V_1(\xi) = \tilde{G}(\xi)$ и

$$\begin{aligned} F(y) &= V^{1+\sigma}(y) - V(y) \int_{\mathbb{R}^n} V^{\sigma+1}(\xi) d\xi, \\ \beta &= \frac{\sigma}{1-\frac{n}{2}\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} V^{\sigma+1}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Для доказательства существования решения интегрального уравнения (78) нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 9. Пусть $F(x)$ имеет нулевое среднее значение $\int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = 0$ и для некоторого a , $0 < a \leq 1$, норма $\|F\|_{\mathbf{L}^\infty, a} + \|F\|_{\mathbf{L}^1, a}$ ограничена. Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}})(1-z)^{-\frac{1}{2}} F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p, a}} \\ & \leq C \|F\|_{\mathbf{L}^1, a} + C \|F\|_{\mathbf{L}^{p, a}}, \\ & \left\| \int_0^1 \frac{dz}{(1-z)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{z} - \frac{t}{\langle tz \rangle} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}})(1-z)^{-\frac{1}{2}} F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p, a}} \\ & \leq C \langle t \rangle^{-\frac{a}{2}} (\|F\|_{\mathbf{L}^1, a} + \|F\|_{\mathbf{L}^{p, a}}) \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, где $1 \leq p \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью неравенства Юнга для сверток получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}})(1-z)^{-\frac{1}{2}} F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p, a}} \\ & \leq \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \langle (\cdot) - yz^{\frac{1}{2}} \rangle^a \tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}})(1-z)^{-\frac{1}{2}} |F(y)| dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ & \quad + \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}})(1-z)^{-\frac{1}{2}} \langle y \rangle^a |F(y)| dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ & \leq \|\tilde{G}((\cdot)(1-z)^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{L}^1, a} \|F\|_{\mathbf{L}^p} + \|\tilde{G}((\cdot)(1-z)^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{L}^1} \|F\|_{\mathbf{L}^{p, a}} \\ & \leq (1-z)^{\frac{n}{2}} \|F\|_{\mathbf{L}^{p, a}} \end{aligned}$$

для всех $z \in [\frac{1}{2}, 1]$, поскольку

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}) F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \|\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \|F\|_{\mathbf{L}^p},$$

и, заменяя переменную интегрирования $y = x(1-z)^{-\frac{1}{2}}$, находим

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}((\cdot)(1-z)^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{L}^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}(x(1-z)^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= (1-z)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}(y) dy \leq C(1-z)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{z(1-z)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}})(1-z)^{-\frac{1}{2}} F(y) dy dz \right\|_{\mathbf{L}^{p, a}} \\ & \leq C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{-\frac{n}{2}} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}})(1-z)^{-\frac{1}{2}} F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p, a}} dz \\ & \leq C \|F\|_{\mathbf{L}^{p, a}}, \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dz}{(1-z)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{z} - \frac{t}{\langle tz \rangle} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G} \left(\frac{(\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \right) F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \\
& \leq C \langle t \rangle^{-1} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{-\frac{n}{2}} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G} \left(\frac{(\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \right) F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p,a}} dz \\
& \leq C \langle t \rangle^{-1} \|F\|_{\mathbf{L}^{p,a}}, \tag{80}
\end{aligned}$$

где $1 \leq p \leq \infty$.

Ввиду условия $\int_{\mathbb{R}^n} F(y) dy = 0$ запишем

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}) (1-z)^{-\frac{1}{2}} F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \\
& = \left\| \langle \cdot \rangle^a \int_{\mathbb{R}^n} \left(\tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}) (1-z)^{-\frac{1}{2}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \tilde{G}((\cdot) (1-z)^{-\frac{1}{2}}) \right) F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\
& \leq \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \left((\langle \cdot \rangle^a - \langle (\cdot) - yz^{\frac{1}{2}} \rangle^a) \tilde{G} \left(\frac{(\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \right) \right) F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\
& \quad + \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (\langle (\cdot) - yz^{\frac{1}{2}} \rangle^a \tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}) (1-z)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. - \langle \cdot \rangle^a \tilde{G}((\cdot) (1-z)^{-\frac{1}{2}})) F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\
& \leq C z^{\frac{a}{2}} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}) (1-z)^{-\frac{1}{2}} \langle y \rangle^a |F(y)| dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\
& \quad + C z^{\frac{a}{2}} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}) (1-z)^{-\frac{1}{2}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \tilde{G}((\cdot) (1-z)^{-\frac{1}{2}}) \right) \langle y \rangle^a |F(y)| dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\
& \leq C z^{\frac{a}{2}} \|F\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \|\tilde{G}((\cdot) (1-z)^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{L}^p} \leq C z^{\frac{a}{2}} \|F\|_{\mathbf{L}^{1,a}}
\end{aligned}$$

для всех $z \in (0, \frac{1}{2})$, поскольку

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}) F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \|F\|_{\mathbf{L}^1}.$$

Таким образом, находим

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z(1-z)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}) (1-z)^{-\frac{1}{2}} F(y) dy dz \right\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \\
& \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(1-z)^{\frac{n}{2}}} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}) (1-z)^{-\frac{1}{2}} F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \\
& \leq C \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^{1-\frac{a}{2}}(1-z)^{\frac{n}{2}}} \|F\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C \|F\|_{\mathbf{L}^{1,a}}, \tag{81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{z} - \frac{t}{\langle tz \rangle} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G} \left(\frac{(\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \right) F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \\
& \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{z} - \frac{t}{\langle tz \rangle} \right) \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G} \left(\frac{(\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \right) F(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \\
& \leq C \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z^{\frac{a}{2}}}{(1-z)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{z} - \frac{t}{\langle tz \rangle} \right) dz \|F\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{a}{\alpha}} \|F\|_{\mathbf{L}^{1,a}}, \quad (82)
\end{aligned}$$

где $1 \leq p \leq \infty$. Теперь, используя оценки (79)–(82), приходим к результату леммы. Лемма доказана.

Зададим последовательные приближения $V_{k+1} = \mathcal{Q}(V_k)$ для всех $k = 1, 2, \dots$, где

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(V_k)(\xi) &= V_1(\xi) - \frac{1}{\beta_k} \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G} \left(\frac{\xi - yz^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \right) F_k(y) dy, \\
F_k(y) &= V_k^{\sigma+1}(y) - V_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} V_k^{\sigma+1}(\xi) d\xi, \\
\beta_k &= \frac{\sigma}{1 - \frac{n}{2}\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} V_k^{\sigma+1}(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

По индукции, с помощью леммы 9, докажем оценки

$$\sup_{1 \leq p \leq \infty} \|V_{k+1} - V_1\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \leq C\varepsilon, \quad \sup_{1 \leq p \leq \infty} \|V_k\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \leq C, \quad \beta_k \geq C\varepsilon^{-1}, \quad (83)$$

$$\sup_{1 \leq p \leq \infty} \|V_{k+1} - V_k\|_{\mathbf{L}^p} \leq \frac{1}{2} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \|V_k - V_{k-1}\|_{\mathbf{L}^p} \quad (84)$$

для всех $k \geq 1$. Чтобы применить лемму 9, надо показать, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_k(y) dy = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} V_k(y) dy = 1. \quad (85)$$

Поскольку $\int_{\mathbb{R}^n} V_1(y) dy = 1$, то по определению $F_1(y)$ имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} F_1(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(V_1^{\sigma+1}(y) - V_1(y) \int_{\mathbb{R}^n} V_1^{\sigma+1}(\xi) d\xi \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} V_1^{\sigma+1}(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} V_1^{\sigma+1}(\xi) d\xi = 0,
\end{aligned}$$

так что равенства (85) справедливы при $k = 1$. Предположим, по индукции, что равенства (85) имеют место для некоторого k . Тогда из рекуррентных соотношений, определяющих $V_{k+1}(\xi)$, найдем

$$\int_{\mathbb{R}^n} V_{k+1}(\xi) d\xi = 1 - \frac{1}{\beta_k} \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dy F_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G} \left(\frac{\xi - yz^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \right) d\xi = 1,$$

откуда, как и выше, получаем, что $\int_{\mathbb{R}^n} F_{k+1}(y) dy = 0$. Таким образом, равенства (85) доказаны для всех k . Применив лемму 9, получим

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq p \leq \infty} \|V_{k+1} - V_1\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \\ &= \frac{C}{\beta_k} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}\left(\frac{(\cdot) - yz^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}\right) F_k(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \\ &\leq \frac{C}{\beta_k} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \left(V_k^{\sigma+1}(\cdot) - V_k(\cdot) \int_{\mathbb{R}^n} V_k^{\sigma+1}(\xi) d\xi \right) \right\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \\ &\leq \frac{C}{\beta_k} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \|V_k\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \left(\left(\sup_{1 \leq p \leq \infty} \|V_k\|_{\mathbf{L}^p} \right)^\sigma + \left(\sup_{1 \leq p \leq \infty} \|V_k\|_{\mathbf{L}^p} \right)^{\sigma+1} \right) \leq C\varepsilon, \end{aligned}$$

так как σ близко к $\frac{2}{n}$, поэтому β_k можно считать достаточно большим. Следовательно, оценки (83) имеют место для всех k . Аналогично доказывается неравенство (84) для всех $k \geq 1$. Отсюда видим, что $\mathcal{Q}$ является сжимающим отображением, значит, существует единственное решение $V(\xi)$ интегрального уравнения (78).

Перейдем к доказательству асимптотики решения v . Установим оценку для последовательных приближений

$$\|v_k(t) - t^{-\frac{n}{2}} \theta V_k((\cdot)t^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \leq C \langle t \rangle^{\frac{b}{2}} t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\gamma} \quad (86)$$

для всех $k \geq 1$, $t > 0$, $b \in [0, a]$, $1 \leq p \leq \infty$, где $\gamma = \frac{1}{2} \min(a, 1 - \frac{n}{2}\sigma)$. Проведем индукцию по $k \geq 1$. При $k = 1$ в силу леммы 1 получим

$$\begin{aligned} \|v_1(t) - t^{-\frac{n}{2}} \theta V_1((\cdot)t^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{L}^{p,b}} &= \|\mathcal{G}(t)u_0 - t^{-\frac{n}{2}} \theta \tilde{G}((\cdot)t^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\ &\leq C \langle t \rangle^{\frac{b}{2}} t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \langle t \rangle^{-\frac{a}{2}}. \end{aligned} \quad (87)$$

Теперь по индукции предположим, что оценка (86) справедлива для некоторого номера k :

$$\|v_k(t) - t^{-\frac{n}{2}} \theta V_k((\cdot)t^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \leq C \langle t \rangle^{\frac{b}{2}} t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\gamma} \quad (88)$$

для всех $t > 0$, $b \in [0, a]$, $1 \leq p \leq \infty$, и докажем (86) для следующего номера $k+1$. Тогда, поскольку

$$\beta_k = \frac{\sigma}{1 - \frac{n}{2}\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} V_k^{\sigma+1}(\xi) d\xi,$$

из неравенства (88) следует, что

$$\begin{aligned} & |h_k(t) - |\theta|^\sigma \beta_k t^{1-\frac{n}{2}\sigma}| = \left| 1 - \frac{\sigma\lambda}{\theta} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^\sigma v_k(\tau, x) dx d\tau \right. \\ & \quad \left. - t^{1-\frac{n}{2}\sigma} \frac{\sigma\theta^\sigma}{1 - \frac{n}{2}\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} V_k^{1+\sigma}(\xi) d\xi \right| \\ & \leq 1 + \frac{C}{\theta} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left| |v_k|^\sigma v_k(\tau, x) - |\theta|^\sigma \theta \tau^{-\frac{n}{2}\sigma - \frac{n}{2}} V_k^{1+\sigma}(x\tau^{-\frac{1}{2}}) \right| dx d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 1 + \frac{C}{\theta} \int_0^t (\|v_k\|_{\mathbf{L}^\infty} + \theta \tau^{-\frac{n}{2}} \|V_k\|_{\mathbf{L}^\infty})^\sigma \|v_k(\tau, \cdot) - \theta \tau^{-\frac{n}{2}} V_k((\cdot) \tau^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{L}^1} d\tau \\
&\leq 1 + \frac{C}{|\theta|} \int_0^t \tau^{-\frac{n}{2} \sigma - \gamma} d\tau \leq 1 + C \beta_k t^{1 - \frac{n}{2} \sigma - \gamma}
\end{aligned} \tag{89}$$

для всех $t > 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Делая замену переменных $\tau = zt$ и $\xi \tau^{-\frac{1}{2}} = y$, находим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta_k} \int_0^t \tau^{\frac{n}{2} \sigma - 1} \mathcal{G}_0(t - \tau) \tau^{-\frac{n}{2} \sigma - \frac{n}{2}} F_k((\cdot) \tau^{-\frac{1}{2}}) d\tau \\
&= \frac{1}{\beta_k} \int_0^t \tau^{-1 - \frac{n}{2}} (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}((x - \xi)(t - \tau)^{-\frac{1}{2}}) F_k(\xi \tau^{-\frac{1}{2}}) d\xi \\
&= \frac{1}{\beta_k} \int_0^1 \frac{dz}{z(1 - z)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}(xt^{-\frac{1}{2}} - yz^{\frac{1}{2}})(1 - z)^{-\frac{1}{2}} F_k(y) dy \\
&= t^{-\frac{n}{2}} (V_1(xt^{-\frac{1}{2}}) - V_k(xt^{-\frac{1}{2}})),
\end{aligned}$$

поэтому, обозначив

$$f_k(\tau) = \lambda |v_k|^\sigma v_k(\tau) - \frac{\lambda v_k(\tau)}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^\sigma v_k(\tau) dx,$$

получаем

$$\begin{aligned}
&\langle t \rangle^{-\frac{b}{2}} \left\| \theta t^{-\frac{n}{2}} V_k((\cdot) t^{-\frac{1}{2}}) - v_k(t) \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&= \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}} \left\| \theta t^{-\frac{n}{2}} V_k((\cdot) t^{-\frac{1}{2}}) - \mathcal{G}(t) u_0 + \int_0^t h^{-1}(\tau) \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{B} f_k(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\leq C \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}} \left\| \theta t^{-\frac{n}{2}} V_1((\cdot) t^{-\frac{1}{2}}) - \mathcal{G}(t) u_0 \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\quad + C \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}} \left\| \int_0^t \left(h_k^{-1}(\tau) - \frac{1}{\beta_k |\theta|^\sigma} \tau^{\frac{n}{2} \sigma} \langle \tau \rangle^{-1} \right) \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{B} f_k(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\quad + \frac{C \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}}}{\beta_k |\theta|^\sigma} \left\| \int_0^t (\mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{B} - \mathcal{G}_0(t - \tau)) f_k(\tau) \frac{\tau^{\frac{n}{2} \sigma} d\tau}{\langle \tau \rangle} \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\quad + \frac{C \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}}}{\beta_k |\theta|^\sigma} \left\| \int_0^t \left(\mathcal{G}_0(t - \tau) \left(f_k(\tau) - \frac{|\theta|^\sigma \theta \lambda}{\tau^{\frac{n}{2}(\sigma+1)}} F_k((\cdot) \tau^{-\frac{1}{2}}) \right) \right) \frac{\tau^{\frac{n}{2} \sigma} d\tau}{\langle \tau \rangle} \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\quad + \frac{C |\theta \lambda| \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}}}{\beta_k} \left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t - \tau) F_k((\cdot) \tau^{-\frac{1}{2}}) \left(\frac{1}{\langle \tau \rangle} - \frac{1}{\tau} \right) \tau^{-\frac{n}{2}} d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
\end{aligned}$$

Согласно (87) имеем

$$I_1 \leq C t^{-\frac{n}{2}(1 - \frac{1}{p})} \langle t \rangle^{-\frac{a}{2}}.$$

Ввиду (89) из леммы 9 получаем

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}} \left\| \int_0^t \frac{\tau^{\frac{n}{2}\sigma}}{\langle \tau \rangle} \left| \frac{\langle \tau \rangle}{\tau^{\frac{n}{2}\sigma}} - \frac{h_k(\tau)}{\beta_k \theta^\sigma} \right| h_k^{-1}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} f_k(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\leq C \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}} \left\| \int_0^t \frac{\tau^{\frac{n}{2}\sigma}}{\langle \tau \rangle} \left(\frac{\langle \tau \rangle}{\tau^{\frac{n}{2}\sigma}} - \tau^{1-\frac{n}{2}\sigma} + \frac{1}{\beta_k |\theta|^\sigma} + C \tau^{1-\frac{n}{2}\sigma-\gamma} \right) \right. \\
&\quad \times h_k^{-1}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} f_k(\tau) d\tau \left. \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\leq C \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}} \left\| \int_0^t \langle \tau \rangle^{-\gamma} h_k^{-1}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} f_k(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \leq C t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\gamma}
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Благодаря оценке (71), применяя лемму 1, находим

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}} \left\| \int_0^t (\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} - \mathcal{G}_0(t-\tau)) f_k(\tau) \frac{\tau^{\frac{n}{2}\sigma} d\tau}{\langle \tau \rangle} \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\leq C \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} \tau^{\frac{n}{2}\sigma} \langle \tau \rangle^{-1} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\gamma} (\langle \tau \rangle^{\frac{b}{2}} + \langle t-\tau \rangle^{\frac{b}{2}}) d\tau \\
&\quad + C \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t \tau^{\frac{n}{2}\sigma} \langle \tau \rangle^{-1-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \langle t-\tau \rangle^{-\gamma} (\langle \tau \rangle^{\frac{b}{2}} + \langle t-\tau \rangle^{\frac{b}{2}}) d\tau \\
&\leq C t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\gamma}
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{C \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}}}{\beta_k |\theta|^\sigma} \left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau) (f_k(\tau) - \tau^{-\frac{n}{2}\sigma-\frac{n}{2}} |\theta|^\sigma \theta \lambda F_k((\cdot) \tau^{-\frac{1}{2}})) \frac{\tau^{\frac{n}{2}\sigma} d\tau}{\langle \tau \rangle} \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\leq \frac{C}{\beta_k |\theta|^\sigma} t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\gamma} \\
&\quad \times \sup_{t>0} \sup_{1 \leq p \leq \infty} t^{\frac{n}{2}(1+\sigma-\frac{1}{p})+\gamma} \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}} \|f_k(t) - t^{-\frac{n}{2}\sigma-\frac{n}{2}} |\theta|^\sigma \theta \lambda F_k((\cdot) t^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\leq \frac{C}{\beta_k |\theta|^\sigma} t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\gamma} \left(\sup_{t>0} (t^{\frac{n}{2}} \|v_k(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \theta \|V_k\|_{\mathbf{L}^\infty}) \right)^\sigma \\
&\quad \times \sup_{t>0} \sup_{1 \leq p \leq \infty} t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})+\gamma} \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}} \|v_k(t) - t^{-\frac{n}{2}} \theta V_k((\cdot) t^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\leq C t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\gamma}
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Наконец, заменяя переменные $\tau = zt$ и $\xi \tau^{-\frac{1}{2}} = y$,

с помощью леммы 9 находим

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{C|\theta\lambda|}{\beta_k \langle t \rangle^{\frac{b}{2}}} \left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau) F_k((\cdot)\tau^{-\frac{1}{2}}) \left(\frac{1}{\langle \tau \rangle} - \frac{1}{\tau} \right) \tau^{-\frac{n}{2}} d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&= \frac{C|\theta\lambda| \langle t \rangle^{-\frac{b}{2}}}{\beta_k} \left\| \int_0^t \left(\frac{1}{\langle \tau \rangle} - \frac{1}{\tau} \right) \tau^{-\frac{n}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau \right. \\
&\quad \times \left. \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}(((\cdot) - \xi)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}) F_k(\xi \tau^{-\frac{1}{2}}) d\xi \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&= C t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \left\| \int_0^1 \frac{dz}{(1-z)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{z} - \frac{t}{\langle tz \rangle} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}(((\cdot) - yz^{\frac{1}{2}})(1-z)^{-\frac{1}{2}}) F_k(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p,b}} \\
&\leq C t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\gamma}
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, откуда следует (86) для всех $t > 0$. Взяв $b = 0$ в (86) и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\|v(t) - t^{-\frac{n}{2}} \theta V((\cdot)t^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{L}^p} \leq C t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\gamma}. \quad (90)$$

Отсюда в силу (89) и (90) находим асимптотику

$$\begin{aligned}
v(t) &= t^{-\frac{n}{2}} \theta V((\cdot)t^{-\frac{1}{2}}) + O(t^{-\frac{n}{2}-\gamma}), \\
h(t) &= |\theta|^\sigma \beta t^{1-\frac{n}{2}\sigma} (1 + O(t^{-\gamma}))
\end{aligned} \quad (91)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$ (поскольку решение $v(t, x) \in \mathbf{X}$, вследствие чего оно является непрерывным). Откуда ввиду формулы $u(t, x) = e^{-\varphi(t)} v(t, x)$, принимая во внимание оценку (90), получаем асимптотику (65) решения $u(t, x)$ с константой $A = \beta^{-\frac{1}{\sigma}}$, где

$$\beta = \frac{\sigma}{1 - \frac{n}{2}\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} V^{\sigma+1}(\xi) d\xi.$$

Доказательство теоремы завершено.

5.2. Большие начальные данные. Здесь мы освободимся от условия малости начальных данных и установим глобальное во времени существование решений задачи Коши (1) с субкритической степенью $\sigma \in (0, \frac{2}{n})$ нелинейности. По-прежнему будем предполагать, что $\sigma \in (0, \frac{2}{n})$ достаточно близко к $\frac{2}{n}$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\lambda < 0$, $n = 1, 2$. Предположим, что начальные данные $u_0 \in \mathbf{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^{2,a}(\mathbb{R}^n)$, $0 < a \leq 1$, таковы, что $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx \neq 0$. Предположим также, что $\frac{2}{n} - \varepsilon < \sigma < \frac{2}{n}$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, так что заведомо $\sigma > 1$ для $n = 1$ и $\sigma > \frac{3}{4}$ для $n = 2$. Тогда существует единственное глобальное во времени решение $u(t, x) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (1). Это решение удовлетворяет оценке убывания (64) и имеет асимптотическое представление (65), (66).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 4, с помощью леммы 1 и утверждения 2 находим

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n(\sigma+1)}{2(\sigma+2)}} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+1} d\tau \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}} (\|u\|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} + \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+1}) d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n(\sigma+1)}{2(\sigma+2)}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n(\sigma+1)^2}{2(\sigma+2)}} d\tau \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} d\tau \leq C \langle t \rangle^{1-\frac{n}{2}\sigma-\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Аналогично,

$$\begin{aligned}
\|\Delta u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C \langle t \rangle^{-1-\frac{n}{2}} + \int_0^t \|\Delta \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{-1-\frac{n}{2}} + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-1-\frac{n}{2}} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+1}}^{\sigma+1} d\tau \\
&\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-1} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\sigma+1} d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{-1-\frac{n}{2}} + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-1-\frac{n}{2}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} d\tau \\
&\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-1} \langle t \rangle^{(1-\frac{n}{2}\sigma-\frac{n}{2})(\sigma+1)} d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{(1-\frac{n}{2}\sigma-\frac{n}{2})(\sigma+1)}
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Обозначим $f(t, x) = \Delta u_t$. Как и при доказательстве теоремы 4, используя оценки леммы 1, имеем

$$\begin{aligned}
\|f(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &= \|\Delta u_t(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|\Delta \partial_t \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\Delta \mathcal{B}|u|^\sigma u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-1} \|\Delta \mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}-2} (\|u\|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} + \|\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}) d\tau \\
&\leq C \langle t \rangle^{(1-\frac{n}{2}\sigma-\frac{n}{2})(2\sigma+1)} + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-1} \langle \tau \rangle^{(1-\frac{n}{2}\sigma-\frac{n}{2})(2\sigma+1)} d\tau \\
&\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}-2} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} d\tau \leq C \langle t \rangle^{-1-\frac{1}{\sigma}}
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$, поскольку $(1-\frac{n}{2}\sigma-\frac{n}{2})(2\sigma+1) \leq -1-\frac{1}{\sigma}$ и $-\frac{n}{2}-1-\frac{n}{2}\sigma \leq -1-\frac{1}{\sigma}$, если $\sigma \in (0, \frac{2}{n})$ достаточно близко к $\frac{2}{n}$.

Как и выше, рассмотрим две вспомогательные задачи Коши (56) и (57) с достаточно малым $\varepsilon > 0$. При этом задача (56) имеет достаточно малые начальные данные и малую правую часть $\varepsilon^2|f|$. Применяя принцип максимума к задаче (56), получим точную оценку убывания по времени:

$$\|U(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}},$$

откуда с помощью леммы 7 получим точную оценку убывания по времени для решения:

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}}.$$

Оценим теперь $\mathbf{L}^{1,a}$ -норму решения

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &\leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ &\quad + C \int_0^t (\|\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}} \|\mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1}) d\tau \\ &\leq C\langle t \rangle^{\frac{a}{2}} + C \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}} \langle \tau \rangle^{-1} d\tau \\ &\leq C\langle t \rangle^{\frac{a}{2}} + C \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau, \end{aligned}$$

откуда с помощью леммы Гронуолла получаем оценку

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C\langle t \rangle^{\frac{a}{2}} \quad (92)$$

для всех $t > 0$. Аналогично оценим $\mathbf{L}^{1,a}$ -норму правой части f . Как и при доказательстве теоремы 4, из леммы 1 находим

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &= \|\Delta u_t(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq \|\Delta \partial_t \mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \|\Delta \mathcal{B}|u|^\sigma u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ &\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-2} (\| |u|^\sigma u(\tau) \|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}} \| |u|^\sigma u(\tau) \|_{\mathbf{L}^1}) d\tau \\ &\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-1} (\|\Delta \mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}} \|\Delta \mathcal{B}|u|^\sigma u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1}) d\tau \\ &\leq C\langle t \rangle^{\frac{a}{2}-1-\frac{1}{\sigma}+\frac{n}{2}} + C \int_0^{\frac{t}{2}} (\langle t-\tau \rangle^{-2} \langle \tau \rangle^{\frac{a}{2}-1} + \langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}-2} \langle \tau \rangle^{-1}) d\tau \\ &\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t (\langle t-\tau \rangle^{-1} \langle \tau \rangle^{\frac{a}{2}-1-\frac{1}{\sigma}+\frac{n}{2}} + \langle t-\tau \rangle^{\frac{a}{2}-1} \langle \tau \rangle^{-1-\frac{1}{\sigma}+\frac{n}{2}}) d\tau \\ &\leq C\langle t \rangle^{\frac{a}{2}-1-\frac{1}{\sigma}+\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

поскольку $\sigma \in (0, \frac{2}{n})$ достаточно близко к $\frac{2}{n}$. Таким образом, мы можем применить результаты работ [21], [22] и вычислить асимптотическое поведение решений $U(t, x)$ и $V(t, x)$ соответствующих задач (56) и (57). Отсюда с помощью леммы 7

получаем точную оценку убывания по времени для решения с малым коэффициентом $\frac{2}{n} - \sigma$:

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} \left(1 + C\varepsilon \left(\frac{2}{n} - \sigma \right)^{-\frac{1}{\sigma}} t^{\frac{1}{\sigma} - \frac{n}{2}} \right)^{-1} \quad (93)$$

для всех $t > 0$. Как и при доказательстве теоремы 4, рассмотрим задачу Коши (68) для новых функций $(v(t, x), \varphi(t))$. Докажем оценку

$$\|v(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C \langle t \rangle^{\frac{a}{2}}$$

для всех $t > 0$. Из оценки (93) следует

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} \left(1 + C\varepsilon^\sigma \left(\frac{2}{n} - \sigma \right)^{-1} t^{1 - \frac{n}{2}\sigma} \right)^{-1}.$$

В силу (92), (93), применяя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} \left(|u(\tau)|^\sigma v(\tau) - \frac{v(\tau)}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\tau)|^\sigma v(\tau) dx \right) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ & \leq C \int_0^t \left\| |u(\tau)|^\sigma v(\tau) - \frac{v(\tau)}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\tau)|^\sigma v(\tau) dx \right\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \\ & \leq C\varepsilon^{-\sigma} \left(\frac{2}{n} - \sigma \right) \int_T^t \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Следовательно, из интегрального уравнения (61) имеем

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} & \leq \|\mathcal{G}(t)v(0)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + C\varepsilon^{-\sigma} \left(\frac{2}{n} - \sigma \right) \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \\ & \leq C \langle t \rangle^{\frac{a}{2}} + \varepsilon \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало (напомним, что $\sigma < \frac{2}{n}$ является достаточно близким к $\frac{2}{n}$). Применяя лемму Гронуолла, получим оценку

$$\|v(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C \langle t \rangle^{\frac{a}{2}} \quad (94)$$

для всех $t > 0$. Аналогично, с помощью оценки (93) и леммы 1 получим

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} & \leq \|\mathcal{G}(t)v(0)\|_{\mathbf{L}^\infty} + C \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{B} \left(|u(\tau)|^\sigma v(\tau) - \frac{v(\tau)}{\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\tau)|^\sigma v(\tau) dx \right) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} + C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2} - \frac{a}{2}} \tau^{\frac{a}{2} - 1} d\tau \\ & \quad + C\varepsilon^{-\sigma} \left(\frac{2}{n} - \sigma \right) \int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \\ & \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} + \varepsilon \int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Снова применяя лемму Гронуолла, приходим к оценке

$$\|v(t)\|_{L^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}}$$

для всех $t > 0$.

Умножив второе уравнение системы (68) на $e^{\sigma\varphi(t)}$ и проинтегрировав по $t > 0$, заменяя $e^{\sigma\varphi(t)} = h(t)$, получаем интегральное уравнение

$$h(\tau) = 1 - \frac{\sigma\lambda}{\theta} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^n} |v|^\sigma v \, dx \, dt.$$

Ввиду (94), используя лемму 8, видим, что

$$|h_m(t) - h_1(t)| \leq \varepsilon h_1(t)$$

для всех $t > 0$, где

$$h_1(t) = 1 + \frac{2|\theta|^\sigma \eta}{2 - n\sigma} t^{1-\frac{\sigma}{2}n},$$

$$\eta = \sigma\lambda(4\pi\alpha)^{-\frac{n}{2}\sigma} (1 + \sigma)^{-\frac{n}{2}}.$$

Теперь асимптотические формулы устанавливаются точно так же, как и в конце доказательства теоремы 5. Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Amick C. J., Bona J. L., Schonbek M. E. Decay of solutions of some nonlinear wave equations // J. Diff. Eqs. 1989. V. 81. № 4. P. 1–49.
2. Bisognin V. On the asymptotic behavior of the solutions of a nonlinear dispersive system of Benjamin–Bona–Mahony’s type // Boll. Un. Mat. Ital. B. 1996. V. 10. № 7. P. 99–128.
3. Bona J. L., Luo L. Decay of solutions to nonlinear, dispersive wave equations // J. Diff. Integ. Eqs. 1993. V. 6. P. 961–980.
4. Bona J. L., Luo L. More results on the decay of solutions to nonlinear, dispersive wave equations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 1995. V. 1. P. 151–193.
5. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1978.
6. Constantin A., Escher J. Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations // Acta Math. 1998. V. 181. № 2. P. 229–243.
7. Dix D. B. The dissipation of nonlinear dispersive waves: The case of asymptotically weak nonlinearity // Comm. P.D.E. 1992. V. 17. P. 1665–1693.
8. Ватсон Дж. Теория функций Бесселя. М.: Мир, 1944.
9. Габов С. А. Новые задачи математической теории волн. М.: Физматгиз, 1998.
10. Гаевский Х., Грезер К., Захариас К. Нелинейные операторные методы и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
11. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Асимптотические собственные функции задачи Коши для нелинейных параболических уравнений // Матем. сб. 1985. Т. 126. № 4. С. 435–472.
12. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

13. *Доброхотов С. Ю.* Нелокальные аналоги нелинейного уравнения Буссинеска для поверхностных волн над неровным дном и их асимптотические решения // ДАН СССР. 1987. Т. 292. № 1. С. 63–67.
14. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
15. *Escobedo M., Kavian O.* Asymptotic behavior of positive solutions of a non-linear heat equation // Houston J. of Math. 1987. V. 13. № 4. P. 39–50.
16. *Escobedo M., Kavian O., Matano H.* Large time behavior of solutions of a dissipative nonlinear heat equation // Comm. Partial Diff. Eqs. 1994. V. 20. P. 1427–1452.
17. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. N.Y.: Marcel Dekker, Inc, 1999.
18. *Fujita H.* On blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo. Sect. I. 1966. V. 13. P. 109–124.
19. *Gmira A., Veron L.* Large time behavior of solutions of a semilinear parabolic equation in $\mathbb{R}^N$ // J. Diff. Eqs. 1984. V. 53. P. 258–276.
20. *Hayashi N., Kaikina E. I., Naumkin P. I.* Large time behavior of solutions to dissipative nonlinear Schrödinger equation // Proceedings of Royal Soc. Edingburgh. 2000. V. 130A. P. 1029–1043.
21. *Hayashi N., Kaikina E. I., Naumkin P. I.* Global existence and decay in time of small solutions to Landau–Ginzburg type equations // J. d'Analyse Mathématique. 2003. V. 90. P. 141–173.
22. *Hayashi N., Ito N., Kaikina E. I., Naumkin P. I.* On some nonlinear dissipative equations with sub-critical nonlinearities // Taiwanese J. of Math. 2004. V. 8. P. 135–154.
23. *Hayashi N., Naumkin P. I.* Asymptotics for Korteweg–de Vries–Burgers equation // J.M.M.A. (в печати).
24. *Кайкина Е. И., Наумкин П. И., Шишмарёв И. А.* Асимптотика решений нелинейных диссипативных систем уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. № 3. С. 29–62.
25. *Kamin S., Peletier L. A.* Large time behaviour of solutions of the heat equation with absorption // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1985. V. 12. P. 393–408.
26. *Karch G.* Asymptotic behaviour of solutions to some pseudoparabolic equations // Math. Methods in the Applied Sciences. 1997. V. 20. P. 271–289.
27. *Karch G.* Large-time behavior of solutions to nonlinear wave equations: higher-order asymptotics // Math. Methods in the Applied Sciences. 1999. V. 22. P. 1671–1697.
28. *Kavian O.* Remarks on the large time behavior of a nonlinear diffusion equation // Ann. Inst. Henri Poincaré. Analyse non linéaire. 1987. V. 4. № 5. P. 423–452.
29. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с нелинейным нелокальным источником // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 5. С. 1062–1073.
30. *Кожанов А. И.* Начально-краевая задача для уравнения типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 1. С. 70–75.
31. *Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // ЖВМиМФ. 1999. Т. 39. № 6. С. 968–984.
32. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // ЖВМиМФ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1835–1869.
33. *Levine H. A.* Some nonexistence and instability theorems for solutions of the formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Rational Mech. Anal. 1973. V. 51. P. 371–386.
34. *Mei M.* L_q -decay rates of solutions for Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations // J. Diff. Eqs. 1999. V. 158. P. 314–340.
35. *Mei M., Schmeiser C.* Asymptotic profiles of solutions for the BBM–Burgers equations // Funkcial. Ekvac. 2001. V. 44. P. 151–170.
36. *Митидиери Э., Попожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 1–222.

37. *Naumkin P. I., Shishmarev I. A.* Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves. V. 133. Providence: AMS, 1994.
38. *Prado R., Zuazua E.* Asymptotic expansion for the generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation // *Diff. Integ. Eqs.* 2002. V. 15. № 12. P. 1409–1434.
39. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1999.
40. *Свиридюк Г. А., Федоров В. Е.* Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева // *Сиб. матем. журн.* 1995. Т. 36. № 5. С. 1130–1145.
41. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1954. Т. 18. № 1. С. 3–50.
42. *Стейн Е.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1970.
43. *Stefanelli U.* On a class of doubly nonlinear nonlocal evolution equations // *Diff. Integ. Eqs.* 2002. V. 15. № 8. P. 897–922.
44. *Титчмарш Е. С.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Мир, 1944.
45. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
46. *Шিশмарёв И. А.* Об одном нелинейном уравнении типа Соболева // *Дифф. уравн.* 2005. Т. 41. № 1.
47. *Schonbek M. E.* The Fourier splitting method // *Advances in geometric analysis and continuum mechanics.* Cambridge: Internat. Press, 1995. P. 269–274.
48. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. Providence: AMS, 1997.
49. *Zhang L.* Decay of solutions of generalized Benjamin–Bona–Mahony equations // *Acta Math. Sinica. New Series.* 1994. V. 10. P. 428–438.
50. *Zhang L.* Decay of solutions of generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations in n -space dimensions // *Nonlinear Analysis T.M.A.* 1995. V. 25. P. 1343–1369.
51. *Zuazua E.* A dynamical system approach to self similar large time behavior in scalar convection-diffusion equation // *J. Diff. Eqs.* 1994. V. 108. P. 1–35.

МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: shish@voxnet.ru,
 pavelni@matmor.unam.mx

Поступило в редакцию
 30.09.2004