Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, О больших значениях функции $S(t)$ на коротких промежутках,
Изв. РАН. Сер. матем., 2005, том 69, выпуск 1, 115–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/im625>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:15:44

УДК 511

М. А. Королёв

О больших значениях функции $S(t)$ на коротких промежутках

Изучаются верхняя и нижняя грани аргумента дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой.

Библиография: 15 наименований.

§ 1. Введение

В настоящей работе продолжены исследования свойств аргумента дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, начатые в [1]–[7].

Известно, что функция $S(t) = \pi^{-1} \arg \zeta(1/2 + it)$ при $t \rightarrow +\infty$ меняет знак бесконечно много раз (см. [8, с. 222]), но в то же время может принимать сколь угодно большие по абсолютной величине как положительные, так и отрицательные значения.

В 1946 г. А. Сельберг [9] доказал неравенства

$$\sup_{T \leq t \leq 2T} (\pm S(t)) \geq A \frac{(\ln T)^{1/3}}{(\ln \ln T)^{7/3}}, \quad (1)$$

в которых A – положительная абсолютная постоянная. Один из возможных путей уточнения этих оценок состоит в замене правых частей неравенств (1) большими величинами.

Так, в 1977 г. Х. Монтгомери [10], пользуясь гипотезой Римана, установил существование на любом промежутке $(T^{1/6}, T)$ точек t_0 и t_1 , для которых

$$(-1)^j S(t_j) \geq \frac{1}{20} \sqrt{\frac{\ln T}{\ln \ln T}}, \quad j = 0, 1. \quad (2)$$

В 1986 г. К.-М. Тсанг [11], развивая метод работы [9], усилил результаты А. Сельберга и Х. Монтгомери и получил неравенства

$$\sup_{T \leq t \leq 2T} (\pm S(t)) \geq A \left(\frac{\ln T}{\ln \ln T} \right)^a, \quad (3)$$

в которых A – абсолютная постоянная, $A > 0$, а величина a берется равной $1/2$, если гипотеза Римана верна, и равной $1/3$ в противном случае.

Наилучшая из верхних оценок $|S(t)|$, опирающаяся на гипотезу Римана, принадлежит К. Рамачандре и А. Санкарнараянану [12]:

$$|S(t)| < 1.2 \frac{\ln t}{\ln \ln t}, \quad t > t_0 > 0. \quad (4)$$

Предполагается, однако, что окончательный результат имеет вид

$$S(t) = O((\ln t)^a),$$

где $a = 1/2 + o(1)$ при $t \rightarrow +\infty$ (см. [10], [13, с. 21]). В пользу этой гипотезы свидетельствует и условная теорема Я. Мозера [14], согласно которой на всяком интервале $(T, 2T)$ существует не менее $cT \ln T$ промежутков $[\gamma, \gamma']$ таких, что

$$|S(t)| < c_1 (\ln T)^{1/2} (\ln \ln T)^{2/3}, \quad \gamma \leq t \leq \gamma'.$$

Здесь c, c_1 – положительные абсолютные постоянные, а γ, γ' – последовательные ординаты комплексных нулей $\zeta(s)$.

Иной путь уточнения неравенств (1)–(3) состоит в замене промежутка $(T, 2T)$, на котором изучаются верхняя и нижняя грани $S(t)$, на более короткий промежуток $(T, T+H)$, $0 < H < T$. Доказательству подобного утверждения и посвящена настоящая работа. Основным результатом статьи является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T > T_0 > 0$, $(\ln T)(\ln \ln T)^{-3/2} < H < T$. Если гипотеза Римана верна, то справедливы неравенства

$$\sup_{T-H \leq t \leq T+2H} (\pm S(t)) \geq \frac{1}{90\pi} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}}.$$

Доказательство этой теоремы основано на лемме 1, которая представляет собой частный случай одного утверждения из работы [11]. Согласно этой лемме выполнение для некоторых T, H, M и k ($H, M > 0, k \geq 1$) и вещественной функции $W(t)$ неравенств

$$\int_T^{T+H} (W(t))^{2k} dt \geq HM^{2k}, \quad \left| \int_T^{T+H} (W(t))^{2k+1} dt \right| \leq \frac{1}{2} HM^{2k+1} \quad (5)$$

влечет существование на промежутке $(T, T+H)$ точек t_0 и t_1 , в которых $W(t_0) \geq 0.5M$, $W(t_1) \leq -0.5M$.

В рассматриваемой задаче роль $W(t)$ играет тригонометрический полином

$$-\sum_{p \leq e^\tau} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau}\right), \quad \tau > 0.$$

Соотношение, связывающее $W(t)$ с $S(t)$, впервые было установлено А. Сельбергом в [9], а его обобщение было получено К.-М. Тсангом [11]. В настоящей статье доказательству этого соотношения посвящена лемма 2.

Оригинальной частью работы является лемма 3, устанавливающая оптимальные значения величин k и M , при которых полином $W(t)$ удовлетворяет неравенствам (5) при $H > (\ln T)(\ln \ln T)^{-3/2}$. Лемма 3 содержит, в частности, новый способ доказательства первого из соотношений (5).

Следствием основной теоремы является следующее утверждение, доказательство которого также приведено в статье.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 1$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, и пусть E_j , $j = 0, 1$, – множество значений t , $T \leq t \leq 2T$, для которых

$$(-1)^j S(t) > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{300} \sqrt{\frac{\ln T}{\ln \ln T}}.$$

Тогда справедливы неравенства

$$\text{mes}(E_j) > \frac{1}{3} T^{1-\varepsilon} (\ln T)^{-1}, \quad j = 0, 1.$$

Отметим, что этот результат не следует из теорем А. Гоша [15] о распределении значений $S(t)$.

§ 2. Вспомогательные леммы

В настоящем параграфе приводятся вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теорем 1 и 2.

ЛЕММА 1. Пусть $H > 0$, $M > 0$, k – целое, $k \geq 1$, и пусть вещественная непрерывная функция $W(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_T^{T+H} (W(t))^{2k} dt \geq HM^{2k}, \quad \left| \int_T^{T+H} (W(t))^{2k+1} dt \right| \leq \frac{1}{2} HM^{2k+1}.$$

Тогда справедливы неравенства

$$\max_{T \leq t \leq T+H} W(t) \geq \frac{1}{2} M, \quad \min_{T \leq t \leq T+H} W(t) \leq -\frac{1}{2} M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$W_r(t) = \frac{1}{2} (|W(t)| + (-1)^r W(t)),$$

так что

$$W_0(t) = \max(0, W(t)), \quad W_1(t) = |\min(0, W(t))|$$

и

$$\begin{aligned} & \int_T^{T+H} (W_r(t))^{2k+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_T^{T+H} |W(t)|^{2k+1} dt + (-1)^r \int_T^{T+H} (W(t))^{2k+1} dt \right), \quad r = 0, 1. \end{aligned}$$

Согласно неравенству Гёльдера имеем

$$HM^{2k} \leq \int_T^{T+H} |W(t)|^{2k} dt \leq H^{\frac{1}{2k+1}} \left(\int_T^{T+H} |W(t)|^{2k+1} dt \right)^{1-\frac{1}{2k+1}},$$

откуда

$$\begin{aligned} & \int_T^{T+H} |W(t)|^{2k+1} dt \geq HM^{2k+1}, \\ & \int_T^{T+H} (W_r(t))^{2k+1} dt \geq \frac{1}{2} \left(HM^{2k+1} - \frac{1}{2} HM^{2k+1} \right) \geq H \left(\frac{1}{2} M \right)^{2k+1}, \quad r = 0, 1. \end{aligned}$$

Поскольку функции $W_0(t)$ и $W_1(t)$ неотрицательны, то из последнего неравенства следует, что каждая из них принимает значения, превосходящие $\frac{1}{2} M$ хотя бы в одной точке промежутка $(T, T+H)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если гипотеза Римана верна, то для любых достаточно больших положительных H , t и τ , $\tau < \ln t$, $H < t$, справедлива формула

$$\int_{-H\tau/2}^{H\tau/2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 S\left(t + \frac{2u}{\tau}\right) du = W(t) + O\left(\ln \tau + \frac{1}{H\tau} \frac{\ln t}{\ln \ln t}\right),$$

где

$$W(t) = - \sum_{p \leq e^\tau} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau}\right),$$

а постоянная в знаке O – абсолютная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующей формулой, доказанной в [11]:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \ln \zeta\left(\frac{1}{2} + i(t+u)\right) du &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{n^{-it}}{\sqrt{n}} \hat{f}(\ln n) \\ &+ 2\pi \left(\sum_{\beta} \int_0^{\beta - \frac{1}{2}} f(\gamma - t - i\xi) d\xi - \int_0^{\frac{1}{2}} f(-t - i\xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

Здесь $f(z)$ – функция, вещественная на вещественной прямой, аналитическая в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 1$ и удовлетворяющая в этой полосе неравенству $|f(z)| \ll (|z|+1)^{-a}$, $a > 1$,

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-ixu} du,$$

а суммирование ведется по всем нулям $\varrho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана, лежащим правее критической прямой ($\beta > 1/2$). Если гипотеза Римана верна, то эта сумма будет равна нулю.

Пусть

$$f(z) = \left(\frac{\sin \frac{\tau z}{2}}{\frac{z}{2}} \right)^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \left(\frac{\sin \frac{\tau u}{2}}{\frac{u}{2}} \right)^2 du = 2\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi \frac{2x}{\tau}} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 d\xi \\ &= 2\tau \frac{\pi}{2} \max\left(0, 2 - 2\left|\frac{x}{\tau}\right|\right) = 2\pi\tau \max\left(0, 1 - \left|\frac{x}{\tau}\right|\right), \\ \hat{f}(\ln n) &= \begin{cases} 2\pi\tau \left(1 - \frac{\ln n}{\tau}\right), & \text{если } 1 \leq n \leq e^\tau, \\ 0, & \text{если } n > e^\tau. \end{cases} \end{aligned}$$

Преобразуя в исходном равенстве мнимую часть, будем иметь

$$\begin{aligned} \pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) S(t+u) du &= -2\pi\tau \sum_{n \leq e^\tau} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{\sin(t \ln n)}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\ln n}{\tau}\right) \\ &- 2\pi \operatorname{Im} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin \frac{\tau}{2}(t+i\xi)}{\frac{1}{2}(t+i\xi)} \right)^2 d\xi. \end{aligned}$$

Поскольку при $0 \leq \xi \leq 1/2$

$$\left| \frac{\sin \frac{\tau}{2}(t + i\xi)}{\frac{1}{2}(t + i\xi)} \right|^2 \leq \left(\frac{2e^{\tau\xi/2}}{t} \right)^2 \leq \left(\frac{2e^{\tau/4}}{t} \right)^2 < \frac{4e^{\frac{1}{2}\ln t}}{t^2} < 0.1,$$

то последний интеграл по абсолютной величине не превосходит $0.1 \cdot 2\pi$.

В сумме по n выделим слагаемые, отвечающие простым $n = p$, и оценим оставшиеся по модулю:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k \geq 2} \sum_{n=p^k \leq e^\tau} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{\sin(t \ln n)}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\ln n}{\tau}\right) \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{p \leq e^{\tau/2}} \sum_{k \geq 2} p^{-k/2} = \frac{1}{2} \sum_{p \leq e^{\tau/2}} \frac{1}{p} \frac{1}{1 - p^{-1/2}} \\ & < 2 \sum_{p \leq e^{\tau/2}} \frac{1}{p} = 2 \left(\ln \frac{\tau}{2} + 0.26 \dots + O(\tau^{-1}) \right) < 2 \ln \tau - 0.1. \end{aligned}$$

Таким образом, исходная формула принимает вид

$$\begin{aligned} \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \frac{\tau u}{2}}{\frac{u}{2}} \right)^2 S(t + u) du &= -2\pi\tau \sum_{p \leq e^\tau} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau}\right) \\ &+ 2\theta\pi\tau(2 \ln \tau - 0.1 + 0.1), \quad |\theta| \leq 1. \end{aligned}$$

Делая в интеграле замену $v = \frac{\tau u}{2}$ и сокращая обе части последнего равенства на $2\pi\tau$, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin v}{v} \right)^2 S\left(t + \frac{2v}{\tau}\right) dv = - \sum_{p \leq e^\tau} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau}\right) + 2\theta \ln \tau.$$

Для завершения доказательства представим левую часть в виде суммы:

$$\left(\int_{-H\tau/2}^{H\tau/2} + \int_{-\infty}^{-H\tau/2} + \int_{H\tau/2}^{+\infty} \right) \left(\frac{\sin v}{v} \right)^2 S\left(t + \frac{2v}{\tau}\right) dv,$$

и оценим последние два интеграла, пользуясь неравенством (4):

$$\begin{aligned} & \left| \left(\int_{-\infty}^{-H\tau/2} + \int_{H\tau/2}^{+\infty} \right) \left(\frac{\sin v}{v} \right)^2 S\left(t + \frac{2v}{\tau}\right) dv \right| \ll \tau^{-1} \int_H^{+\infty} \frac{1}{v^2} \frac{\ln(t+v)}{\ln \ln(t+v)} dv \\ & \ll \tau^{-1} \int_H^t \frac{1}{v^2} \frac{\ln t}{\ln \ln t} dv + \tau^{-1} \int_t^{+\infty} \frac{1}{v^{3/2}} \frac{\ln v}{\sqrt{v} \ln \ln v} dv \\ & \ll \frac{1}{H\tau} \frac{\ln t}{\ln \ln t} + \frac{1}{t\tau} \frac{\ln t}{\ln \ln t} \ll \frac{1}{H\tau} \frac{\ln t}{\ln \ln t}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $T > T_0 > 0$, $(\ln T)(\ln \ln T)^{-3/2} < H < T$. Тогда

$$\max_{T \leq t \leq T+H} W(t) \geq \frac{1}{170} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}}, \quad \min_{T \leq t \leq T+H} W(t) \leq -\frac{1}{170} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k – достаточно большое натуральное число, точное значение которого будет выбрано позже, и

$$I_k = \int_T^{T+H} (W(t))^{2k} dt, \quad J_k = \int_T^{T+H} (W(t))^{2k+1} dt.$$

Представляя $W(t)$ в виде разности:

$$W(t) = \frac{V(t) - \bar{V}(t)}{2i},$$

где

$$V(t) = \sum_{p \leq e^\tau} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{-it}, \quad a(p) = 1 - \frac{\ln p}{\tau},$$

находим

$$I_k = (2i)^{-2k} \sum_{\nu=0}^{2k} (-1)^\nu \binom{2k}{\nu} j_{2k}(\nu),$$

$$J_k = (2i)^{-2k-1} \sum_{\nu=0}^{2k+1} (-1)^\nu \binom{2k+1}{\nu} j_{2k+1}(\nu);$$

здесь

$$j_r(\nu) = \int_T^{T+H} (V(t))^\nu (\bar{V}(t))^{r-\nu} dt$$

$$= \sum_{p_1, \dots, p_\nu \leq e^\tau} \sum_{q_1, \dots, q_{r-\nu} \leq e^\tau} \frac{a(p_1) \dots a(q_{r-\nu})}{\sqrt{p_1 \dots q_{r-\nu}}} \int_T^{T+H} \left(\frac{q_1 \dots q_{r-\nu}}{p_1 \dots p_\nu} \right)^{it} dt.$$

Из основной теоремы арифметики следует, что равенство $q_1 \dots q_{r-\nu} = p_1 \dots p_\nu$ возможно лишь в случае, когда $r = 2k$, $\nu = k$. В остальных случаях, полагая для краткости $Q = q_1 \dots q_{r-\nu}$, $P = p_1 \dots p_\nu$ и замечая, что $P, Q \leq e^{r\tau}$, находим

$$|j_r(\nu)| \leq \sum_{P \neq Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} 2 \left| \ln \frac{Q}{P} \right|^{-1} \leq 2 \sum_{P, Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} \max(P, Q)$$

$$\leq 2e^{r\tau} \sum_{P, Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} \leq 2e^{r\tau} \left(\sum_{p \leq e^\tau} \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^r \leq 2e^{r\tau} \left(\frac{3e^{\tau/2}}{\tau} \right)^r < e^{3r\tau/2}.$$

В случае $r = 2k$, $\nu = k$ в выражении для $j_r(\nu)$ присутствуют “диагональные” члены:

$$j_{2k}(k) = H\Sigma + \theta \sum_{P \neq Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} 2 \left| \ln \frac{Q}{P} \right|^{-1} = H\Sigma + \theta e^{\frac{3}{2}2k\tau}, \quad |\theta| \leq 1,$$

$$\Sigma = \sum_{p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_k} \frac{a(p_1) \dots a(q_k)}{\sqrt{p_1 \dots p_k}} = \sum_{p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_k} \frac{a^2(p_1) \dots a^2(p_k)}{p_1 \dots p_k}.$$

Оставляя в последней сумме слагаемые, отвечающие наборам $(p_1, \dots, p_k)$, не содержащим повторений, придем к нижней оценке величины Σ . Зафиксируем набор $(p_1, \dots, p_k)$, в котором все числа $p_1, \dots, p_k$ различны. Тогда число решений уравнения $p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_k$ в простых числах $q_1, \dots, q_k$ равно $k!$, и поэтому

$$\Sigma \geq k! \sum_{p_1 \leq e^\tau} \frac{a^2(p_1)}{p_1} \sum_{\substack{p_2 \leq e^\tau \\ p_2 \neq p_1}} \frac{a^2(p_2)}{p_2} \sum_{\substack{p_3 \leq e^\tau \\ p_3 \neq p_1, p_2}} \frac{a^2(p_3)}{p_3} \dots \sum_{\substack{p_k \leq e^\tau \\ p_k \neq p_1, p_2, \dots, p_{k-1}}} \frac{a^2(p_k)}{p_k}.$$

Величины $a^2(p)/p$ с ростом p , $p < e^\tau$, монотонно убывают, так как

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{a^2(p)}{p} \right) = \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau} \right)^2 \right) = -\frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau} \right) \left(1 - \frac{\ln p}{\tau} + \frac{2}{\tau} \right) < 0.$$

Следовательно, при любых значениях $p_1, \dots, p_{k-1}$ сумма по p_k не меньше суммы величин $a^2(p)/p$ по простым $p \leq e^\tau$, из которой исключены слагаемые, отвечающие первым $k-1$ простым числам. Считая k и τ такими, что $(k-1)$ -е простое число не превосходит $2k \ln k$ и $2k \ln k < e^{2\tau/3}$, убеждаемся, что сумма по p_k оценивается снизу величиной

$$\sum_{e^{2\tau/3} < p \leq e^\tau} \frac{a^2(p)}{p},$$

которая не зависит от $p_1, \dots, p_{k-1}$. Применим те же рассуждения к сумме по p_{k-1} , затем к суммам по $p_{k-2}, \dots, p_1$. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \Sigma &\geq k! \left(\sum_{e^{2\tau/3} < p \leq e^\tau} \frac{a^2(p)}{p} \right)^k > k! \left(\sum_{e^{2\tau/3} < p \leq e^{4\tau/5}} \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau} \right)^2 \right)^k \\ &> k! \left(\sum_{e^{2\tau/3} < p \leq e^{4\tau/5}} \frac{1}{5^2 p} \right)^k = 5^{-2k} k! \left(\ln \frac{4}{5} \tau - \ln \frac{2}{3} \tau + o(1) \right)^k \\ &> (0.1)^k 5^{-2k} k! = (0.004)^k k!. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} j_{2k}(k) &> (0.004)^k k! H - e^{3k\tau}, \\ I_k &> 2^{-2k} \binom{2k}{k} (0.004)^k k! H - e^{3k\tau} 2^{-2k} \sum_{\nu=0}^{2k} \binom{2k}{\nu} > (0.004 e^{-1} k)^k H - e^{3k\tau}, \\ |J_k| &< 2^{-2k-1} e^{\frac{3}{2}(2k+1)\tau} \sum_{\nu=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{\nu} = e^{3k\tau} e^{\frac{3\tau}{2}}. \end{aligned}$$

Положим

$$\tau = 2 \ln \ln H, \quad k = \left\lfloor \frac{\ln H}{7 \ln \ln H} \right\rfloor.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2k \ln k &< 2 \left(\frac{\ln H}{7 \ln \ln H} + 1 \right) \ln \ln H < (\ln H)^{4/3} = e^{2\tau/3}, \\ e^{3k\tau} &< \exp \left(6 \ln \ln H \left(\frac{\ln H}{7 \ln \ln H} + 1 \right) \right) = H^{6/7} (\ln H)^6, \\ I_k &> (0.004e^{-1}k)^k H - H^{6/7} (\ln H)^6 > (0.001k)^k H, \\ |J_k| &< H^{6/7} (\ln H)^9 < \frac{1}{2} (0.001k)^k H. \end{aligned}$$

Таким образом, для функции $W(t)$ выполнены условия леммы 1 при $M = \sqrt{0.001k}$, $k = \left\lfloor \frac{\ln H}{7 \ln \ln H} \right\rfloor$. Следовательно, на отрезке $T \leq t \leq T + H$ найдутся такие точки t_0 и t_1 , что $W(t_0) \geq \frac{1}{2}M$, $W(t_1) \leq -\frac{1}{2}M$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\frac{1}{2}M = \frac{1}{2}\sqrt{0.001k} > \frac{1}{170} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}}.$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательства теорем 1 и 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\tau = 2 \ln \ln H$. Согласно леммам 2 и 3 на отрезке $T \leq t \leq T + H$ найдутся точки t_0 и t_1 , для которых

$$\begin{aligned} j_0 &= \int_{-H\tau/2}^{H\tau/2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 S\left(t_0 + \frac{2u}{\tau}\right) du \geq \frac{1}{170} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}} + O\left(\ln \tau + \frac{1}{H\tau} \frac{\ln t_0}{\ln \ln t_0}\right), \\ j_1 &= \int_{-H\tau/2}^{H\tau/2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 S\left(t_1 + \frac{2u}{\tau}\right) du \leq -\frac{1}{170} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}} + O\left(\ln \tau + \frac{1}{H\tau} \frac{\ln t_1}{\ln \ln t_1}\right). \end{aligned}$$

Обозначая через M_0 и M_1 верхнюю и нижнюю грани функции $S(u)$ на отрезке $T - H \leq t \leq T + 2H$, находим

$$\begin{aligned} j_0 &\leq M_0 \int_{-H\tau/2}^{H\tau/2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du < M_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du = \frac{\pi}{2} M_0, \\ j_1 &\geq M_1 \int_{-H\tau/2}^{H\tau/2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du > M_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du = \frac{\pi}{2} M_1. \end{aligned}$$

Значит, при $r = 0, 1$

$$\begin{aligned} (-1)^r M_r &> \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{170} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}} + O\left(\ln \tau + \frac{1}{H\tau} \frac{\ln T}{\ln \ln T}\right) \right) \\ &= \frac{1}{85\pi} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}} \left(1 + O\left(\frac{\sqrt{\ln \ln H} \ln \ln \ln H}{\sqrt{\ln H}}\right) + O\left(\frac{\ln T}{\ln \ln T} \frac{1}{H\sqrt{\ln H} \sqrt{\ln \ln H}}\right) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{85\pi} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}} \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln \ln T}{\sqrt{\ln \ln T}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln \ln \ln T}}\right) \right) > \frac{1}{90\pi} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}}.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Положим $H = T^\varepsilon$, $k = [TH^{-1}/2]$. Согласно теореме 1 на каждом промежутке $(T + (2\nu - 1)H, T + 2\nu H)$, $\nu = 1, 2, \dots, k$, найдутся точки t_ν и τ_ν такие, что

$$S(t_\nu) > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{290} \sqrt{\frac{\ln T}{\ln \ln T}}, \quad S(\tau_\nu) < -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{290} \sqrt{\frac{\ln T}{\ln \ln T}}.$$

Обозначим $h = (\ln T)^{-1}$ и покажем, что все промежутки $(t_\nu, t_\nu + h)$ содержатся во множестве E_0 , а все промежутки $(\tau_\nu - h, \tau_\nu)$ – во множестве E_1 .

Для этого заметим, что $S(t)$ – кусочно гладкая функция, которая терпит разрывы в точках, совпадающих с ординатами нулей $\zeta(s)$. При переходе через точку разрыва $S(t)$ совершает скачок, равный сумме кратностей нулей $\zeta(s)$, для которых эта точка явилась ординатой. По формуле Римана–Мангольда

$$N(t) = \frac{t}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(t) + \Delta(t),$$

где $N(t)$ – число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq t$, а $\Delta(t)$ – гладкая функция, $\Delta(t) \asymp t^{-1}$, $\Delta'(t) \asymp t^{-2}$. Значит, на всяком промежутке вещественной прямой, не содержащем ординат нулей $\zeta(s)$, функция $N(t)$ постоянна, а $S(t)$ является монотонно убывающей функцией с производной, равной $-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + O(t^{-2})$. Поэтому для всех t , $t_\nu \leq t \leq t_\nu + h$, имеем

$$S(t) > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{290} \sqrt{\frac{\ln T}{\ln \ln T}} - h \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{t_\nu + h}{2\pi} + O(T^{-2}) \right) > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{300} \sqrt{\frac{\ln T}{\ln \ln T}},$$

а для всех τ , $\tau_\nu - h \leq \tau \leq \tau_\nu$,

$$S(\tau) < -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{290} \sqrt{\frac{\ln T}{\ln \ln T}} + h \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\tau_\nu}{2\pi} + O(T^{-2}) \right) < -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{300} \sqrt{\frac{\ln T}{\ln \ln T}}.$$

Эти неравенства означают, что все промежутки $(t_\nu, t_\nu + h)$ содержатся в E_0 , а все промежутки $(\tau_\nu - h, \tau_\nu)$ – в E_1 . Для завершения доказательства осталось заметить, что построенные промежутки попарно не пересекаются, и поэтому

$$\operatorname{mes}(E_j) \geq kh \geq \frac{1}{3} TH^{-1}h = \frac{1}{3} T^{1-\varepsilon} (\ln T)^{-1}, \quad j = 0, 1.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Карацуба А. А. О функции $S(t)$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 27–56.
2. Карацуба А. А. Плотностная теорема и поведение аргумента дзета-функции Римана // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 448–449.
3. Королёв М. А. О числе перемен знака функции $S(t)$ на коротком промежутке // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 4. С. 446–447.
4. Королёв М. А. Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой // Тр. МИАН. 2002. Т. 239. С. 215–238.
5. Королёв М. А. Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 2. С. 21–60.
6. Королёв М. А. О поведении функции $S(t)$ на коротких промежутках // Докл. РАН. 2003. Т. 390. № 5. С. 588–589.
7. Королёв М. А. Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2003.
8. Гитчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. 1-е изд. М.: ИЛ, 1953.
9. Selberg A. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function // Arch. Math. Naturvid. 1946. V. 48. № 5. P. 89–155.
10. Montgomery H. L. Extreme values of the Riemann zeta-function // Comment. Math. Helv. 1977. V. 52. № 4. P. 511–518.
11. Tsang K.-M. Some Ω -theorems for the Riemann zeta-function // Acta Arith. 1986. V. 46. № 4. P. 369–395.
12. Ramachandra K., Sankaranarayanan A. On some theorems of Littlewood and Selberg. I // J. Number Theory. 1991. V. 44. № 3. P. 281–291.
13. Odlyzko A. M. The 10^{20} -th zero of the Riemann zeta-function and 70 million of its neighbors. Murray Hill: AT&T Bell Laboratories, 1987.
14. Мозер Я. О функции $S(t)$ в теории дзета-функции Римана // Acta Arith. 1976. Т. 30. № 2. С. 145–158.
15. Ghosh A. On the Riemann zeta-function – mean value theorems and the distribution of $|S(T)|$ // J. Number Theory. 1983. V. 17. P. 93–102.

E-mail: hardy_ramanujan@mail.ru

Поступило в редакцию
10.08.2004