Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Куликова, О фундаментальных группах дополнений к кривым Гурвица,
Изв. РАН. Сер. матем., 2005, том 69, выпуск 1, 125–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/im626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 11:55:11

УДК 514.756.44+512.543.16

О. В. Куликова

О фундаментальных группах дополнений к кривым Гурвица

Доказано, что коммутант фундаментальной группы дополнения к неприводимой аффинной плоской кривой Гурвица (а также к неприводимой аффинной плоской псевдоголоморфной кривой) является конечно определенной группой. Показано, что существует кривая Гурвица (соответственно, псевдоголоморфная кривая) в $\mathbb{CP}^2$, фундаментальная группа дополнения к которой не является хопфовой, и, следовательно, эта группа не является конечно аппроксимируемой группой. Также доказано существование неприводимой неособой алгебраической кривой $C \subset \mathbb{C}^2$ и бидиска $D \subset \mathbb{C}^2$ таких, что фундаментальная группа $\pi_1(D \setminus C)$ не является хопфовой.

Библиография: 11 наименований.

Введение

В работе [9] было введено понятие кривых Гурвица относительно линейной проекции проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ на $\mathbb{CP}^1$, являющееся естественным обобщением понятия плоских алгебраических кривых (в [9] кривые Гурвица называются *полуалгебраическими кривыми*). Кратко говоря, кривые Гурвица в $\mathbb{CP}^2$ имитируют поведение плоских алгебраических кривых относительно пучка комплексных прямых, определяющих проекцию. В частности, в окрестностях критических точек проекции кривые Гурвица выглядят как аналитические кривые, и согласно определению, данному в [3], кривая Гурвица степени m на $\mathbb{CP}^2$ – это образ $\bar{H} = f(S) \subset \mathbb{CP}^2$ ориентированной замкнутой вещественной поверхности S при гладком отображении $f: S \rightarrow \mathbb{CP}^2 \setminus \{p_\infty\}$ таким, что существует конечное множество $Z \subset \bar{H}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) ограничение отображения f на $S \setminus f^{-1}(Z)$ является вложением и для любой точки $p \in \bar{H} \setminus Z$ поверхность $\bar{H}$ и слой $F_{\text{pr}(p)}$ линейной проекции $\text{pr}: \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ из точки $p_\infty \in \mathbb{CP}^2$ пересекаются в p трансверсально с индексом пересечения, равным $+1$;

(ii) для каждой точки $p \in Z$ найдется такая окрестность $U \subset \mathbb{CP}^2$ этой точки, что $\bar{H} \cap U$ является комплексно-аналитической кривой, и комплексная ориентация на $\bar{H} \cap U \setminus \{p\}$ совпадает с ориентацией на $U \cap \bar{H}$, индуцированной с поверхности S отображением f ;

(iii) ограничение проекции pr на $\bar{H}$ является отображением конечной степени m .

Кривые Гурвица играют важную роль в симплектической геометрии. В частности, Д. Ору и Л. Катцарков (см. [1], [2]) доказали, что компактное симплектическое четырехмерное многообразие (X, ω) с симплектической формой ω , класс

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 02-01-00170).

которой $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{Z})$ является целочисленным и для которой выбрана ω -совместимая почти комплексная структура J , может быть представлено как почти голоморфное общее накрытие $f_k: X \rightarrow \mathbb{CP}^2$, $k \gg 0$, разветвленное над каспидальной кривой Гурвица $\bar{H}_k$ (возможно, с отрицательными нодами), где накрытие f_k задано тремя сечениями линейного расслоения $L^{\otimes k}$, а L – линейное расслоение на X с первым классом Черна, равным $[\omega]$. Это объясняет важность для симплектической геометрии исследования свойств фундаментальных групп $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H})$ дополнений к кривым Гурвица $\bar{H}$.

В работе [4] был определен класс групп $\mathcal{C}$, названных *C-группами*. По определению этот класс состоит из групп G , заданных конечными копредставлениями следующего вида: для некоторого целого числа m , множества

$$J = \{(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3 \mid 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq k \leq h(i, j)\},$$

где $h: \{1, \dots, m\}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ – некоторая функция, и для подмножества $W = \{w_{i,j,k} \in \mathbb{F}_m \mid (i, j, k) \in J\}$ слов из свободной группы $\mathbb{F}_m$, порожденной алфавитом $\{x_1, \dots, x_m\}$ (возможно, что $w_{i_1, j_1, k_1} = w_{i_2, j_2, k_2}$ для $(i_1, j_1, k_1) \neq (i_2, j_2, k_2)$), группа $G \in \mathcal{C}$ задается копредставлением следующего вида (т. е. системами порождающих элементов и соотношений между ними):

$$G \simeq G_W = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i = w_{i,j,k}^{-1} x_j w_{i,j,k}, w_{i,j,k} \in W \rangle. \quad (0.1)$$

C -группа G называется *неприводимой*, если $G/G' \simeq \mathbb{Z}$, где $G' = [G, G]$ – коммутант группы G .

Обозначим через $\varphi_W: \mathbb{F}_m \rightarrow G_W$ канонический эпиморфизм. Элементы $\varphi_W(x_i)$ группы G_W , $1 \leq i \leq m$, и элементы, сопряженные им, называются *C-порождающими* C -группы $G = G_W$. Пусть $f: G_1 \rightarrow G_2$ – гомоморфизм C -групп. Он называется *C-гомоморфизмом*, если образы C -порождающих группы G_1 при гомоморфизме f являются C -порождающими C -группы G_2 . Мы будем различать C -группы с точностью до C -изоморфизмов.

Отметим, что класс $\mathcal{C}$ содержит подклассы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ соответственно групп узлов и зацеплений, заданных копредставлением Виртингера. В работе [4] было доказано, что класс $\mathcal{C}$ совпадает с классом фундаментальных групп дополнений к ориентируемым замкнутым поверхностям в четырехмерной сфере S^4 (с обобщенным копредставлением Виртингера). Кроме того, из [6, теорема 1.14] и [3, теорема 2.1] следует, что для любой C -группы G найдутся неособая аффинная алгебраическая кривая $C \subset \mathbb{C}^2$ и бидиск $D = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| \leq 1, |w| \leq 1\}$ такие, что $G \simeq \pi_1(D \setminus C)$.

Пусть $H \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{CP}^2 \setminus L_\infty$ – аффинная кривая Гурвица степени m , т. е. $H = \bar{H} \cap \mathbb{C}^2$, где $\bar{H}$ – некоторая кривая Гурвица в $\mathbb{CP}^2$ относительно некоторого пучка прямых, L_∞ – одна из прямых этого пучка, находящаяся в общем положении относительно $\bar{H}$, и индекс пересечения $\bar{H} \cdot L_\infty$ равен m . Обозначим через $\mathcal{H} = \{\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)\}$ класс фундаментальных групп дополнений к аффинным кривым Гурвица H . Если $\bar{H}$ – кривая Гурвица степени m , то копредставление Зариского–ван Кампена группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ (заданное с помощью брэйд-монодромии, определяемой пучком прямых) является копредставлением вида (0.1) таким, что слова $w_{i,i,1} = x_1 \dots x_m$, $i = 1, \dots, m$, принадлежат множеству W , т. е. элемент $x_1 \dots x_m$ принадлежит центру группы G_W . В работе [6] было доказано, что если C -группа G_W задана копредставлением (0.1) таким, что элемент $x_1 \dots x_m$

принадлежит центру группы G_W , то для некоторого $k \in \mathbb{N}$ найдется кривая Гурвица $\bar{H} \subset \mathbb{CP}^2$ степени $M = m2^k$ такая, что $G_W = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus H)$ и элемент $(x_1 \dots x_m)^{2^k} \in G_W$ соответствует обходу вокруг прямой L_∞ . Если к копредставлению (0.1) группы G_W добавить порождающие $x_{m+1}, \dots, x_{2^k m}$ и соотношения $x_i = x_{i+m}$ для $i = 1, \dots, (2^k - 1)m$, то получим группу, изоморфную группе G_W . Отметим, что соотношения $x_i = x_j$ являются C -соотношениями, так как они могут быть записаны в виде $x_j = x_j^{-1} x_i x_j$. Следовательно, так как мы рассматриваем C -группы с точностью до C -изоморфизмов, класс $\mathcal{H}$ совпадает с подклассом в $\mathcal{C}$, состоящим из групп G , заданных копредставлением (0.1), таким, что элементы $x_1 \dots x_m$ (при некотором m для каждой группы $G \in \mathcal{H}$) принадлежат центрам этих групп. Назовем группу $G \in \mathcal{H}$ *гурвицевской C -группой степени m* , если C -порождающие $x_1, \dots, x_m$ группы G порождают всю группу и элемент $x_1 \dots x_m$ принадлежит центру группы G (отметим, что степень гурвицевской C -группы G определена неканонически и зависит от ее C -копредставления).

Как известно, для многих неприводимых C -групп G их коммутанты G' не являются конечно порожденными группами (в частности, коммутант G' группы $G \in \mathcal{K}$ конечно порожден тогда и только тогда, когда G является группой расслоенного узла и, более того, в случае расслоенного узла группа G' является свободной [10]).

Одним из основных результатов настоящей статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 0.1. *Пусть $G = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus H) \in \mathcal{H}$, где $\bar{H}$ – неприводимая кривая Гурвица. Тогда коммутант $G' = [G, G]$ группы G является конечно определенной группой.*

Отметим, что теорема 0.1 является обобщением аналогичного результата в алгебраическом случае (см. [5]).

Для любой C -группы $G = G_W$, заданной копредставлением (0.1), обозначим через $\nu: G \rightarrow \mathbb{F}_1$ естественный C -гомоморфизм и через $N = \ker \nu$ – его ядро. Поскольку $N = [G, G]$ для неприводимой C -группы G , то теорема 0.1 является простым следствием приведенной ниже теоремы.

ТЕОРЕМА 0.2. *Для любой гурвицевской C -группы $G \in \mathcal{H}$ группа N является конечно определенной.*

В отличие от [5] приведенное в §1 доказательство теоремы 0.2 является чисто алгебраическим.

Пусть J – почти комплексная структура на $\mathbb{CP}^2$, совместимая с симплектической формой Фубини–Штуди, и $\bar{H}$ – J -голоморфная кривая в $\mathbb{CP}^2$. Если выбрать пучок псевдоголоморфных прямых, то согласно теореме Зариского–ван Кампена копредставление группы $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\bar{H} \cup L_\infty))$ определяется брэйд-монодромным разложением на множители кривой $\bar{H}$ относительно выбранного пучка прямых, где L_∞ – одна из J -прямых пучка, находящаяся в общем положении относительно кривой $\bar{H}$. Следовательно, как и в случае кривых Гурвица, легко показать (см. доказательство теоремы 6.1 в [6]), что $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\bar{H} \cup L_\infty))$ является гурвицевской C -группой. Поэтому имеет место

СЛЕДСТВИЕ 0.3. *Пусть $\bar{H}$ – неприводимая псевдоголоморфная кривая в $\mathbb{CP}^2$. Тогда коммутант G' группы $G = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\bar{H} \cup L_\infty))$ является конечно определенной группой.*

Пусть $\bar{H}$ – кривая Гурвица (соответственно, псевдоголоморфная кривая) степени m . Чтобы получить копредставление группы $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H})$ из копредставления Зариского–ван Кампена (0.1) группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$, достаточно добавить дополнительное соотношение $x_1 \dots x_m = 1$ (элемент $x_1 \dots x_m \in \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ соответствует обходу вокруг прямой L_∞).

Для любой гурвицевской C -группы $G = G_W$ степени m , заданной копредставлением (0.1), обозначим

$$\bar{G}_{m,k} = G_W / \{(x_1 \dots x_m)^k = 1\}$$

и назовем такие группы *проективными гурвицевскими группами степени mk* . Легко видеть, что гомоморфизм ν индуцирует гомоморфизм $\nu_{m,k}: \bar{G}_W \rightarrow \mathbb{Z}/mk\mathbb{Z}$. Положим $\bar{N}_{m,k} = \ker \nu_{m,k}$. Следующая теорема является частным случаем следствия 2.8 из [8].

ТЕОРЕМА 0.4. *Для любой проективной гурвицевской группы $\bar{G}_{m,k}$ степени mk группа $\bar{N}_{m,k}$ является конечно определенной.*

Поскольку для неприводимой кривой Гурвица (соответственно, для неприводимой псевдоголоморфной кривой) $\bar{H}$ степени $\deg \bar{H} = m$ коммутант G' группы $G = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H})$, заданной копредставлением Зариского–ван Кампена, совпадает с $\bar{N}_{m,1}$, то имеет место

СЛЕДСТВИЕ 0.5. *Пусть $\bar{H} \subset \mathbb{CP}^2$ – неприводимая кривая Гурвица (соответственно, неприводимая псевдоголоморфная кривая). Тогда коммутант G' группы $G = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \bar{H})$ является конечно определенной группой.*

Пусть C – плоская алгебраическая кривая. В работе [11] О. Зариский сформулировал следующий вопрос: *является ли $G = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus C)$ конечно аппроксимируемой группой?*

Естественно задать аналогичный вопрос в локальном случае, т. е. в случае $G = \pi_1(D \setminus C)$, где D – некоторый бидиск в $\mathbb{C}^2$, а также в случаях гурвицевских C -групп и проективных гурвицевских групп.

Хорошо известно (см., например, [7, теорема 4.10]), что конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа является хопфовой (напомним, что группа называется *хопфовой*, если она не изоморфна никакой своей собственной факторгруппе).

ТЕОРЕМА 0.6. *Существуют:*

- (i) *неприводимая C -группа $\tilde{G}$,*
- (ii) *гурвицевская C -группа G степени три, для которой $G/G' \simeq \mathbb{Z}^2$,*

такие, что $\tilde{G}$, G и проективные гурвицевские группы $\bar{G}_{3,k}$, $k \in \mathbb{N}$, связанные с G , являются нехопфовыми. В частности, эти группы не являются конечно аппроксимируемыми.

Применяя теоремы 1.14, 6.2 из [6] и теорему 2.1 из [3], мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 0.7. *Существуют:*

- (i) *неприводимая неособая алгебраическая кривая $C \subset \mathbb{C}^2$ и бидиск $D = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| \leq 1, |w| \leq 1\}$,*
- (ii) *кривая Гурвица $\bar{H} \subset \mathbb{CP}^2$, состоящая из двух неприводимых компонент,*

для которых группы $\pi_1(D \setminus C)$, $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \overline{H})$ и $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ являются нехопфовыми, и, в частности, эти группы не являются конечно аппроксимируемыми.

Отметим, что в противоположность следствию 0.7, (i), если $C \subset \mathbb{C}^2$ – неособая алгебраическая кривая, пересекающаяся трансверсально с бесконечно удаленной прямой, то согласно теореме Зариского ее фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$ является абелевой группой. Отметим также, что из [6, доказательство теоремы 6.2] следует, что кривая Гурвица $\overline{H}$ в следствии 0.7, (ii) может быть выбрана такой, что все ее особые точки являются простейшими тройными точками, т.е. локально они могут быть заданы уравнением $w(w^2 - z^2) = 0$. Применяв перемасштабирование, мы можем считать, что $\overline{H}$ является симплектической поверхностью. Поэтому имеет место

СЛЕДСТВИЕ 0.8. *Существует псевдоголоморфная кривая $\overline{H} \subset \mathbb{CP}^2$ с простейшими тройными особыми точками, состоящая из двух неприводимых компонент, для которой группа $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \overline{H})$ является нехопфовой.*

Доказательство теоремы 0.6 приведено в § 2.

Автор благодарна своему научному руководителю А. Ю. Ольшанскому за полезные замечания.

§ 1. Доказательство теоремы 0.2

Очевидно, теорема 0.2 вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть группа G задана копредставлением*

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid (x_1 \dots x_n)x_j = x_j(x_1 \dots x_n), j \in \{1, \dots, n\}, R \rangle,$$

где R – некоторое множество слов алфавита $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ такое, что существует гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow \mathbb{F}_1$, отображающий каждый элемент x_j в порождающий элемент x свободной группы $\mathbb{F}_1$. Обозначим через N ядро гомоморфизма φ . Если множество R конечно, то N является конечно определенной группой. В частности, если R пусто, то N является конечно порожденной свободной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем точную последовательность групп

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow \mathbb{F}_1 \rightarrow 1.$$

Применяя теорему Тита, имеем

$$\begin{aligned} G &\simeq \langle x_1, \dots, x_n, y \mid y = x_1 \dots x_n, (x_1 \dots x_n)x_j = x_j(x_1 \dots x_n), j \in \{1, \dots, n\}, R \rangle \\ &\simeq \langle x_1, \dots, x_n, y \mid y = x_1 \dots x_n, yx_j = x_jy, j \in \{1, \dots, n\}, R \rangle \\ &\simeq \langle x_2, \dots, x_n, y \mid yx_j = x_jy, j \in \{2, \dots, n\}, \overline{R} \rangle, \end{aligned}$$

где множество $\overline{R}$ получено из R с помощью замены x_1 на $y(x_2 \dots x_n)^{-1}$ в каждом слове из R .

В терминах последнего копредставления гомоморфизм φ задан следующим образом: $\varphi(x_j) = x$ для каждого $j \in \{2, \dots, n\}$ и $\varphi(y) = x^n$.

Для нахождения конечного копредставления группы N применим метод Рейдемейстера–Шрайера. Напомним кратко этот метод (см. детали, например, в [8, § 2.3]). Выбирается так называемая шрайерова система представителей, т. е. выбирается по одному представителю s_i в каждом правом смежном классе группы $G = \langle x \in X \mid r = 1, r \in R \rangle$ по подгруппе N так, что если слово s_i является представителем, то все его начальные подслова также являются представителями некоторых смежных классов (в рассматриваемом случае в качестве шрайеровых представителей смежных классов в группе G по подгруппе N мы выбираем элементы x_n^k , $k \in \mathbb{Z}$). Тогда группа N порождается элементами $a_{i,j} = s_i \cdot x_j \cdot \overline{s_i x_j}^{-1}$, где $\overline{s_i x_j}$ – шрайеров представитель из смежного класса, которому принадлежит элемент $s_i x_j$, а система определяющих соотношений для группы N имеет вид

$$\{s_i r s_i^{-1} = 1 \mid r \in R\},$$

где соотношения $s_i r s_i^{-1}$ записаны в виде слов от $a_{i,j}$.

В нашем случае группа N порождается элементами

$$a_{k,j} = x_n^k x_j \overline{x_n^k x_j}^{-1} = x_n^k x_j x_n^{-(k+1)}, \quad j \in \{2, \dots, n-1\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и элементами

$$a_{k,n} = x_n^k y \overline{x_n^k y}^{-1} = x_n^k y x_n^{-(k+n)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Соотношения

$$y x_j = x_j y, \quad j = 2, \dots, n,$$

приводят к следующим соотношениям:

$$a_{k,n} a_{k+n,j} a_{k+1,n}^{-1} a_{k,j}^{-1} = 1 \quad (1.1)$$

для $j \in \{2, \dots, n-1\}$ и $k \in \mathbb{Z}$;

$$a_{k,n} a_{k+1,n}^{-1} = 1 \quad (1.2)$$

для $j = n$ и $k \in \mathbb{Z}$, так как

$$\begin{aligned} x_n^k (y x_j y^{-1} x_j^{-1}) x_n^{-k} &= (x_n^k y x_n^{-(k+n)}) (x_n^{k+n} x_j x_n^{-(k+n+1)}) \\ &\quad \times (x_n^{k+n+1} y^{-1} x_n^{-(k+1)}) (x_n^{k+1} x_j^{-1} x_n^{-k}) \end{aligned}$$

и

$$x_n^k (y x_n y^{-1} x_n^{-1}) x_n^{-k} = (x_n^k y x_n^{-(k+n)}) (x_n^{k+n+1} y^{-1} x_n^{-(k+1)}).$$

Аналогично мы можем переписать соотношения $\overline{R}$. Полученное в результате переписывания множество соотношений обозначим через $\tilde{R}$. Множество $\tilde{R}$ более детально будет исследовано далее, а вначале покажем, что группа N является конечно порожденной. Имеем

$$N = \langle a_{i,j}, i \in \mathbb{Z}, j \in \{2, \dots, n\} \mid (1.1), (1.2), \tilde{R} \rangle.$$

Определяющие соотношения (1.1) и (1.2) эквивалентны соотношениям

$$a_{0,n} = a_{i,n}, \quad (1.3)$$

$$a_{0,n} a_{i+n,j} a_{0,n}^{-1} = a_{i,j}, \quad (1.4)$$

где $i \in \mathbb{Z}$ и $j \in \{2, \dots, n\}$.

Из (1.4) следует, что $a_{i+kn,j} = a_{0,n}^{-k} a_{i,j} a_{0,n}^k$ для $j \in \{2, \dots, n-1\}$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$ и $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому, применяя преобразования Типа, получаем

$$N = \langle a_{0,n}, a_{i,j}, i \in \{0, \dots, n-1\}, j \in \{2, \dots, n-1\} \mid \hat{R} \rangle,$$

где $\hat{R}$ получено из $\tilde{R}$ с помощью подстановок $a_{k,n} = a_{0,n}$ и $a_{i+kn,j} = a_{0,n}^{-k} a_{i,j} a_{0,n}^k$ в слова из $\tilde{R}$ при $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $j \in \{2, \dots, n-1\}$ и $k \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, группа N порождается элементами $a_{0,n}$, $a_{i,j}$ при $i \in \{0, \dots, n-1\}$ и $j \in \{2, \dots, n-1\}$, число которых равно $n(n-1) + 1 = (n-1)^2$. В частности, если R является пустым множеством, то N – свободная группа, свободно порожденная этими элементами.

Вернемся к рассмотрению множества $\tilde{R}$. Каждое соотношение $r \in \tilde{R}$ дает множество соотношений $\{x_n^k r x_n^{-k}, k \in \mathbb{Z}\} \subset \tilde{R}$, где соотношение $\tilde{r}_k = x_n^k \cdot r \cdot x_n^{-k}$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$ переписано через порождающие $a_{i,j}$, $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \{2, \dots, n\}$. Более того, из переписывающего процесса Рейдемейстера, примененного к N , следует, что слово $\tilde{r}_l$, переписанное в алфавите $\{a_{i,j}\}$, совпадает с $\tilde{r}_m$ после замены в $\tilde{r}_l$ каждой порождающей $a_{l+\nu,\mu}$ на $a_{m+\nu,\mu}$, так как $a_{m+\nu,\mu} = x_n^{m-l} a_{l+\nu,\mu} x_n^{l-m}$ и $\tilde{r}_m = x_n^{m-l} \tilde{r}_l x_n^{l-m}$. Из (1.3) и (1.4) получаем, что $\tilde{r}_{j+kn} = a_{0,n}^{-k} \tilde{r}_j a_{0,n}^k$ для всех $k \in \mathbb{Z}$ и $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Следовательно, соотношения $\tilde{r}_{j+kn}$ являются следствием соотношений $\tilde{r}_j$ для всех $r \in \tilde{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ и $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Таким образом, при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $j \in \{0, \dots, n-1\}$ соотношения $\tilde{r}_{j+kn}$ могут быть удалены из множества определяющих соотношений $\tilde{R}$ группы N . Поскольку множество R является конечным, то множество $\{\tilde{r}_j = x_n^j \cdot r \cdot x_n^{-j} \mid j \in \{0, \dots, n-1\}, r \in R\}$ также является конечным. Следовательно, N является конечно определенной группой, и, тем самым, теорема 1.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. А. Ю. Ольшанский заметил, что теорема 1.1 может быть получена также из теоремы 0.4. Действительно, так как элемент $y = x_1 \dots x_n$ принадлежит центру группы G и группа H , порожденная y , имеет тривиальное пересечение с N , то ядро $\ker \nu_{n,1}$ гомоморфизма $\nu_{n,1}: G/H \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ изоморфно N .

§ 2. Существование нехопфовых гурвицевских C -групп

Хорошо известно (см., например, [7]), что группа

$$\tilde{G} = \langle a, t \mid t^{-1} a^2 t = a^3 \rangle$$

является нехопфовой группой. Следовательно, для доказательства утверждения (i) теоремы 0.6 достаточно показать, что $\tilde{G}$ является неприводимой C -группой. Применяя теорему Типа, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{G} &\simeq \langle a, t, x_1, x_2 \mid x_1 = t, x_2 = ta, a^2 ta^{-2} = ta \rangle \\ &\simeq \langle x_1, x_2 \mid (x_1^{-1} x_2)^2 x_1 (x_1^{-1} x_2)^{-2} = x_2 \rangle \\ &\simeq \langle x_1, \dots, x_5 \mid x_3 = x_1^{x_2}, x_3 = x_4^{x_1}, x_5 = x_4^{x_2}, x_5 = x_2^{x_1} \rangle, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $x_i^{x_j} = x_j x_i x_j^{-1}$, и, следовательно, $\tilde{G}$ является C -группой. Она является неприводимой C -группой, так как все C -порождающие $x_1, \dots, x_5$ сопряжены друг с другом в группе $\tilde{G}$.

Для доказательства утверждения (ii) теоремы 0.6 рассмотрим группу

$$G = \tilde{G} \times \langle y \mid \emptyset \rangle.$$

Имеем $G/G' \simeq \mathbb{Z}^2$ и

$$\begin{aligned} G &\simeq \langle x_1, x_2, y \mid yx_1 = x_1y, x_2y = yx_2, (x_1^{-1}x_2)^2x_1(x_1^{-1}x_2)^{-2} = x_2 \rangle \\ &\simeq \langle x_1, x_2, x_3, y \mid x_3 = (x_1x_2)^{-1}y, yx_1 = x_1y, x_2y = yx_2, \\ &\quad (x_1^{-1}x_2)^2x_1(x_1^{-1}x_2)^{-2} = x_2 \rangle \\ &\simeq \langle x_1, x_2, x_3 \mid (x_1^{-1}x_2)^2x_1(x_1^{-1}x_2)^{-2} = x_2, \\ &\quad (x_1x_2x_3)x_i = x_i(x_1x_2x_3), i = 1, 2, 3 \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, G является гурвицевской C -группой степени три. Поскольку группа $\tilde{G}$ является нехопфовой и $G = \tilde{G} \times \langle y \mid \emptyset \rangle$, то G также является нехопфовой.

Легко видеть, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ проективная гурвицевская группа $\bar{G}_{3,k}$ изоморфна группе $\tilde{G} \times \mathbb{Z}/3k\mathbb{Z}$, и, следовательно, эти группы также являются нехопфовыми.

Как отмечалось выше, нехопфовы группы не являются конечно аппроксимируемыми группами.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из [4] следует, что группа $\tilde{G}$ также является группой 2-узла, так как граф последнего копредставления в (2.1) является деревом.

Список литературы

1. Auroux D. Symplectic 4-manifolds as branched coverings of $\mathbb{P}^2$ // Invent. Math. 2000. V. 139. P. 551–602.
2. Auroux D., Katzarkov L. Branched coverings of $\mathbb{P}^2$ and invariants of symplectic 4-manifolds // Invent. Math. 2000. V. 142. P. 631–673.
3. Куликов Вик. С., Харламов В. М. О брэйл-монодромных разложениях на множители // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 3. С. 79–118.
4. Куликов Вик. С. Геометрическая реализация C -групп // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 65. № 1. С. 197–206.
5. Куликов Вик. С. Конечная представимость коммутанта фундаментальной группы дополнения к плоской кривой // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 5. С. 63–70.
6. Куликов Вик. С. Формула разложения на множители полного поворота с удвоенным числом нитей // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. № 1. С. 123–158.
7. Линдзон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
8. Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
9. Moishezon B. The arithmetic of braids and a statement of Chisini // Contemporary Math. 1994. V. 164. P. 151–175.
10. Stallings J. R. On fibering certain 3-manifolds // Topology of 3-manifolds (Proc. Top. Inst. Univ. Georgia) / Ed. M. K. Fort. N. Y.: Prentice Hall, 1962. P. 95–100.
11. Zariski O. Algebraic surfaces. N. Y.: Springer-Verlag, 1971.

МГУ им. М.В. Ломоносова
E-mail: olga.kulikova@mail.ru

Поступило в редакцию
31.08.2004