Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Лауринчикас, Совместная универсальность общих рядов Дирихле, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 1, 133–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/im627>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:29:34

УДК 511

А. Лауринчикас

Совместная универсальность общих рядов Дирихле

При некоторых условиях на коэффициенты и систему показателей получена совместная теорема универсальности типа теоремы Воронина для общих рядов Дирихле.

Библиография: 21 наименование.

§ 1. Введение

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, и пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ – множества соответственно всех целых положительных, действительных и комплексных чисел. Ряд

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}, \quad \sigma > \sigma_a,$$

называется *общим рядом Дирихле*. Здесь $a_m \in \mathbb{C}$, $\{\lambda_m\}$ – возрастающая последовательность положительных чисел, $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = +\infty$, а σ_a – абсцисса абсолютной сходимости ряда. В работе [1] была получена универсальность функции $f(s)$. Отметим, что проблема универсальности дзета-функций восходит к работам С. М. Воронина. В 1975 г. он доказал [2] (см. также [3]–[8]) замечательную теорему о приближении аналитических функций сдвигами дзета-функции Римана. Пусть при $T > 0$

$$\nu_T(\dots) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T]: \dots\},$$

где $\text{meas}\{A\}$ означает меру Лебега множества $A \subset \mathbb{R}$, а вместо многоточия записывается условие, которому удовлетворяет τ . Тогда последний вариант теоремы Воронина утверждает, что если K – компактное подмножество полосы $\{s \in \mathbb{C}: \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, обладающее связным дополнением, а функция $g(s)$ непрерывна, не имеет нулей в K и аналитична внутри K , то для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - g(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Теорема универсальности, полученная для функции $f(s)$ в [1], содержит некоторые дополнительные условия. Предположим, что система показателей $\{\lambda_m\}$ линейно независима над полем рациональных чисел, функция $f(s)$ мероморфно продолжается на полуплоскость $\sigma > \sigma_1$ с некоторым $\sigma_1 < \sigma_a$, где все полюсы

Работа поддержана Государственным фондом науки и высшего образования Литвы.

содержатся в компактном множестве, и $f(s)$ аналитична в полосе $D = \{s \in \mathbb{C}: \sigma_1 < \sigma < \sigma_a\}$. Необходимо также, чтобы при $\sigma > \sigma_1$ выполнялись оценки

$$f(\sigma + it) \ll |t|^\alpha, \quad |t| \geq t_0, \quad \alpha > 0,$$

$$\int_{-T}^T |f(\sigma + it)|^2 dt \ll T, \quad T \rightarrow \infty.$$

При $x > 0$ положим

$$r(x) = \sum_{\lambda_m \leq x} 1,$$

и пусть $c_m = a_m e^{-\lambda_m \sigma_a}$. Предположим, что при $x \rightarrow \infty$

$$\sum_{\lambda_m \leq x} |c_m|^2 = \theta r(x)(1 + o(1))$$

с некоторой константой $\theta > 0$, $|c_m| \leq d$, $d > 0$, а также

$$r(x) = C_1 x^\kappa + B, \quad (1)$$

где $\kappa > 1$, $C_1 > 0$ и $|B| \leq C_2$. Наконец, предположим, что в полуплоскости $\sigma > \sigma_a$ функция $f(s)$ не может быть представлена эйлеровским произведением по простым числам. Тогда имеет место следующее утверждение [1].

ТЕОРЕМА А. Пусть выполнены все сформулированные выше условия, и пусть K – компактное подмножество полосы D , обладающее связным дополнением, а $g(s)$ – непрерывная в K и аналитическая внутри K функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |f(s + i\tau) - g(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Первые результаты о совместной универсальности рядов Дирихле были получены С. М. Ворониным [7], [5], [8], а затем С. М. Goneком [9] и Б. Багчи [10], [11]. Они доказали совместную универсальность L -функций Дирихле. Совместная универсальность дзета-функций Матсумото и Лерха была получена соответственно в [12] и [13]. В [14] рассматривалась совместная универсальность дзета-функций некоторых параболических форм, в [15] и [10] совместная теорема универсальности была доказана для сверток рядов Дирихле, имеющих мультипликативные коэффициенты с характером Дирихле, а в [16] – для таких сверток автоморфных L -функций.

Первая попытка получить совместную теорему универсальности для общих рядов Дирихле была сделана в [17]. При этом требовалось, чтобы множество $\{\log 2\} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\lambda_m\}$ было линейно независимо над полем рациональных чисел, что не является естественным условием. Оказывается, что можно ограничиться только линейной независимостью системы показателей $\{\lambda_m\}$.

Пусть при $\sigma > \sigma_{aj}$ ряд

$$f_j(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj} e^{-\lambda_m s}$$

абсолютно сходится, $j = 1, \dots, n$. Как и выше, предполагаем, что функция $f_j(s)$ мероморфно продолжается в полуплоскость $\sigma > \sigma_{1j}$ с некоторым $\sigma_{1j} < \sigma_{aj}$,

все полюсы содержатся в компактном множестве, она аналитична в полосе $D_j = \{s \in \mathbb{C}: \sigma_{1j} < \sigma < \sigma_{aj}\}$, и что $f_j(s)$ в области $\sigma > \sigma_{aj}$ не может быть представлена эйлеровским произведением по простым числам, $j = 1, \dots, n$. Кроме того, при $\sigma > \sigma_{1j}$ мы требуем выполнения оценок

$$f_j(\sigma + it) \ll |t|^{\alpha_j}, \quad |t| \geq t_0, \quad \alpha_j > 0, \quad (2)$$

$$\int_{-T}^T |f_j(\sigma + it)|^2 dt \ll T, \quad T \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $j = 1, \dots, n$. Пусть

$$c_{mj} = a_{mj} e^{-\lambda_m \sigma_{aj}}, \quad j = 1, \dots, n,$$

и предположим, что существуют $r \geq n$ множеств $\mathbb{N}_k$, $\mathbb{N}_{k_1} \cap \mathbb{N}_{k_2} = \emptyset$ при $k_1 \neq k_2$, $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^r \mathbb{N}_k$, таких, что $c_{mj} = b_{kj}$ при $m \in \mathbb{N}_k$, где b_{kj} – некоторые комплексные числа, $k = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, n$. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix},$$

и предположим, что последовательность показателей $\{\lambda_m\}$ удовлетворяет соотношению (1) и

$$\sum_{\lambda_m \leq x, m \in \mathbb{N}_k} 1 = \kappa_k r(x) + B_k \quad (4)$$

с положительной константой κ_k и $|B_k| \leq C_3$, $k = 1, \dots, r$. Целью настоящей статьи является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия (1)–(4), система $\{\lambda_m\}$ линейно независима над полем рациональных чисел и $\text{rank}(B) = n$. Пусть K_j – компактное подмножество полосы D_j , обладающее связным дополнением, и функция $g_j(s)$ непрерывна в K_j и аналитична внутри K_j , $j = 1, \dots, n$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |f_j(s + i\tau) - g_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

§ 2. Совместная предельная теорема в пространстве аналитических функций

Пусть G – область на комплексной плоскости. Через $H(G)$ обозначим пространство аналитических в G функций, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах. Пусть при $N > 0$

$$D_{j,N} = \{s \in \mathbb{C}: \sigma_{1j} < \sigma < \sigma_{aj}, |t| < N\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

и

$$H_{n,N} = H_n(D_{1,N}, \dots, D_{n,N}) = H(D_{1,N}) \times \dots \times H(D_{n,N}).$$

Через $\mathcal{B}(S)$ обозначим класс борелевских множеств пространства S . Для доказательства теоремы необходима предельная теорема в смысле слабой сходимости вероятностных мер для вероятностной меры

$$P_T(A) = \nu_T(f_1(s_1 + i\tau), \dots, f_n(s_n + i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H_{n,N}),$$

с явным видом предельной меры. Пусть γ – единичная окружность на комплексной плоскости и

$$\Omega = \prod_{m=1}^{\infty} \gamma_m,$$

где $\gamma_m = \gamma$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Поскольку Ω является компактной топологической абелевой группой, на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ существует вероятностная мера Хаара m_H . Это дает вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Через $\omega(m)$ обозначим проекцию элемента $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_m .

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ определим $H_{n,N}$ -значный случайный элемент $f(s_1, \dots, s_n; \omega)$ формулой

$$f(s_1, \dots, s_n; \omega) = (f_1(s_1, \omega), \dots, f_n(s_n, \omega)),$$

где

$$f_j(s_j, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj} \omega(m) e^{-\lambda_m s_j}, \quad s_j \in D_{j,N}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть P_f – распределение случайного элемента $f(s_1, \dots, s_n; \omega)$, т. е.

$$P_f(A) = m_H(\omega \in \Omega: f(s_1, \dots, s_n; \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H_{n,N}).$$

ЛЕММА 1. *Вероятностная мера P_T при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере P_f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_j = \{s \in \mathbb{C}: \sigma > \sigma_{1j}\}$, и пусть $M(G_j)$ – пространство мероморфных на D_j функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах, $j = 1, \dots, n$. Положим

$$M_n = M(G_1, \dots, G_n) = M(G_1) \times \dots \times M(G_n)$$

и определим

$$Q_T(A) = \nu_T(f_1(s_1 + i\tau), \dots, f_n(s_n + i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(M_n).$$

В работе [18] была получена предельная теорема для вероятностной меры Q_T . В этой теореме предполагалось, что функции $f_1(s), \dots, f_n(s)$ удовлетворяют условиям (2) и (3), система $\{\lambda_m\}$ линейно независима над полем рациональных чисел и

$$\lambda_m \geq c(\log m)^\theta$$

с положительными c и θ . Отметим, что последнее условие вытекает из соотношения (1). Поэтому имеем, что вероятностная мера Q_T при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к распределению $(H(G_1) \times \dots \times H(G_n))$ -значного случайного элемента $F(s_1, \dots, s_n; \omega)$, определенного на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ формулой

$$F(s_1, \dots, s_n; \omega) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m1} \omega(m) e^{-\lambda_m s_1}, \dots, \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \omega(m) e^{-\lambda_m s_n} \right),$$

$$s_j \in G_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть

$$M_{n,N} = M(D_{1,N}) \times \cdots \times M(D_{n,N}).$$

Тогда функция $h: M_n \rightarrow M_{n,N}$, определенная покоординатным сужением, непрерывна, и лемма вытекает из слабой сходимости меры Q_T .

§ 3. Носитель элемента $f(s_1, \dots, s_n; \omega)$

Носителем случайного элемента X называется носитель распределения X . Будем обозначать носитель элемента X через S_X . Итак, в этом параграфе мы будем рассматривать носитель меры P_f из леммы 1. Носителем меры P_f является минимальное замкнутое множество S_{P_f} из $H_{n,N}$ такое, что $P_f(S_{P_f}) = 1$. Множество S_{P_f} состоит из всех таких точек $\underline{g} \in H_{n,N}$, что для всякой окрестности G точки $\underline{g}$ имеет место неравенство $P_f(G) > 0$.

Мы будем пользоваться следующими утверждениями.

ЛЕММА 2. Пусть $\{X_m\}$ – последовательность независимых $H_{n,N}$ -значных случайных элементов таких, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m \quad (5)$$

сходится почти наверное. Тогда носителем суммы ряда (5) является замыкание множества всех таких $\underline{g} \in H_{n,N}$, которые могут быть записаны в виде сходящегося ряда:

$$\underline{g} = \sum_{m=1}^{\infty} \underline{g}_m, \quad \underline{g}_m \in S_{X_m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [14, лемма 5].

ЛЕММА 3. Пусть $\{g_m\} = \{(g_{1,m}, \dots, g_{n,m})\}$ – последовательность в $H_{n,N}$, удовлетворяющая условиям:

1) если $\mu_1, \dots, \mu_n$ – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактными носителями, содержащимися в $D_{1,N}, \dots, D_{n,N}$ соответственно, такие, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{C}} g_{j,m}(s) d\mu_j(s) \right| < \infty,$$

то

$$\int_{\mathbb{C}} s^r d\mu_j(s) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 0, 1, 2, \dots;$$

2) ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \underline{g}_m$ сходится в $H_{n,N}$;

3) для любого компакта $K_j \subset D_{j,N}$, $j = 1, \dots, n$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \sup_{s \in K_j} |g_{j,m}(s)|^2 < \infty.$$

Тогда множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \underline{g}_m, \quad a_m \in \gamma,$$

плотно в $H_{n,N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [14].

Пусть

$$w(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\nu(s), \quad z \in \mathbb{C},$$

где ν – комплекснозначная мера на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактным носителем, содержащимся в прямоугольнике

$$D_N = \left\{ s \in \mathbb{C} : \min_{1 \leq j \leq n} (\sigma_{1j} - \sigma_{aj}) < \sigma < 0, |t| < N \right\}.$$

При изучении меры ν используются некоторые элементы теории функций экспоненциального типа.

ЛЕММА 4. Пусть $g(s)$ – целая функция экспоненциального типа и $\{u_m\}$ – последовательность комплексных чисел. Кроме того, пусть c_1 , c_2 и c_3 – положительные действительные числа такие, что:

- 1) $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |g(\pm ix)|}{x} \leq c_1$;
- 2) $|u_m - u_n| \geq c_2 |m - n|$;
- 3) $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{u_m}{m} = c_3$;
- 4) $c_1 c_3 < \pi$.

Тогда

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log |g(u_m)|}{|u_m|} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |g(r)|}{r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [19].

ЛЕММА 5. Пусть μ – комплекснозначная мера на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактным носителем, содержащимся в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$,

$$g(s) = \int_{\mathbb{C}} e^{sz} d\mu(z)$$

и $g(s) \not\equiv 0$. Тогда

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |g(r)|}{r} > \sigma_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [19].

ЛЕММА 6. Предположим, что существует k , $1 \leq k \leq r$, такое, что

$$\sum_{m \in \mathbb{N}_k} |w(\lambda_m)| < \infty.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{C}} s^l d\nu(s) = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $w(z)$ находим, что при $x > 0$

$$|w(\pm x)| \leq e^{Nx} \int_{\mathbb{C}} |d\nu(s)|.$$

Это показывает, что условие 1) леммы 4 выполнено при $c_1 = N$. Пусть c_3 – фиксированное число такое, что

$$0 < c_3 < \frac{\pi}{N}.$$

Пусть ξ – действительное число, удовлетворяющее условию

$$0 < 4\xi < 1. \quad (6)$$

Пусть

$$A = \{l \in \mathbb{N} : \exists r \in ((l - \xi)c_3, (l + \xi)c_3], |w(r)| \leq r^{-\kappa}\}.$$

Тогда

$$\sum_{m \in \mathbb{N}_k} |w(\lambda_m)| \geq \sum_{l \notin A} \sum'_m |w(\lambda_m)| \geq \sum_{l \notin A} \sum'_m \frac{1}{\lambda_m^\kappa},$$

где $\sum'_m$ обозначает сумму по всем $m \in \mathbb{N}_k$, удовлетворяющим неравенствам

$$(l - \xi)c_3 < \lambda_m \leq (l + \xi)c_3.$$

Отсюда и из условия леммы имеем

$$\sum_{l \notin A} \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_k \\ a < \lambda_m \leq b}} \frac{1}{\lambda_m^\kappa} < \infty, \quad (7)$$

где $a = (l - \xi)c_3$ и $b = (l + \xi)c_3$. Суммируя по частям и применяя соотношения (1) и (4), получаем, что при $l \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_k \\ a < \lambda_m \leq b}} \frac{1}{\lambda_m^\kappa} &= \frac{1}{b^\kappa} \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_k \\ a < \lambda_m \leq b}} 1 + \kappa \int_a^b \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_k \\ a < \lambda_m \leq u}} 1 \right) \frac{du}{u^{\kappa+1}} \\ &\geq (r(b) - r(a)) \frac{\kappa_k}{b^\kappa} - \frac{2C_3}{b^\kappa} \geq \frac{C_1 \kappa_k}{b^\kappa} \\ &\quad \times (((l + \xi)c_3)^\kappa - ((l - \xi)c_3)^\kappa) - \frac{2\kappa_k}{b^\kappa} C_2 - \frac{2C_3}{b^\kappa} \\ &= \frac{C_1 \kappa_k c_3^\kappa l^\kappa}{b^\kappa} \left(\left(1 + \frac{\xi}{l}\right)^\kappa - \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)^\kappa \right) - \frac{2\kappa_k C_2}{b^\kappa} - \frac{2C_3}{b^\kappa} \\ &= \frac{2C_1 \kappa_k c_3^\kappa l^\kappa \kappa \xi}{b^\kappa l} + O\left(\frac{1}{l^2}\right) - \frac{2\kappa_k C_2}{b^\kappa} - \frac{2C_3}{b^\kappa}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенства $\kappa > 1$ и (7), получаем

$$\sum_{l \notin A} \frac{1}{l} < \infty. \quad (8)$$

Предположим, что $A = \{a_l : l \in \mathbb{N}\}$, где $a_1 < a_2 < \dots$. Тогда в силу (8) имеем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a_l}{l} = 1. \quad (9)$$

Ввиду определения множества A существует последовательность $\{\xi_l\}$ такая, что

$$(a_l - \xi)c_3 < \xi_l \leq (a_l + \xi)c_3, \\ |w(\xi_l)| \leq \xi_l^{-\kappa}.$$

Отсюда в силу соотношения (9) получаем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\xi_l}{l} = c_3, \\ \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\log |w(\xi_l)|}{\xi_l} \leq 0.$$

Кроме того,

$$|\xi_m - \xi_n| > c_2|m - n|$$

с некоторым $c_2 > 0$, так как из неравенства $(a_l - \xi)c_3 < \xi_l \leq (a_l + \xi)c_3$ при $n > m$ имеем, что

$$|\xi_n - \xi_m| \geq (a_n - a_m)c_3 - 2\xi c_3 \geq c_3(n - m) - 2\xi c_3 \geq c_2(n - m)$$

в силу (6). Поэтому по лемме 4

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |w(r)|}{r} \leq 0. \quad (10)$$

Однако из определения меры ν и леммы 5 следует, что если $w(s) \neq 0$, то

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |w(r)|}{r} > 0.$$

Это противоречит неравенству (10). Поэтому $w(s) \equiv 0$, и утверждение леммы получаем, дифференцируя $w(s)$.

ЛЕММА 7. *Носителем случайного элемента $f(s_1, \dots, s_n; \omega)$ является все пространство $H_{n,N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения Ω имеем, что $\{\omega(m)\}$ – последовательность независимых случайных величин, определенных на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Положим

$$\underline{f}_m(s_1, \dots, s_n; \omega(m)) = (f_{m1}(s_1, \omega), \dots, f_{mn}(s_n, \omega)) \\ = (a_{m1}\omega(m)e^{-\lambda_m s_1}, \dots, a_{mn}\omega(m)e^{-\lambda_m s_n}).$$

Тогда $\{\underline{f}_m(s_1, \dots, s_n; \omega(m))\}$ – последовательность независимых $H_{n,N}$ -значных случайных элементов, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Носителем каждой случайной величины $\omega(m)$ является единичная окружность γ . Поэтому множество $\{\underline{f}_m(s_1, \dots, s_n; a) : a \in \gamma\}$ является носителем случайного элемента $\underline{f}_m(s_1, \dots, s_n; \omega(m))$. Следовательно, в силу леммы 2 замыкание множества всех сходящихся рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty} \underline{f}_m(s_1, \dots, s_n; a_m), \quad a_m \in \gamma,$$

является носителем случайного элемента $f(s_1, \dots, s_n; \omega)$. Поэтому мы должны доказать, что последнее множество плотно в $H_{n,N}$. Это будет следовать из леммы 3.

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с носителями, содержащимися в $D_{1,N}, \dots, D_{n,N}$ соответственно, такие, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{C}} a_{mj} e^{-\lambda_m s} d\mu_j(s) \right| < \infty. \quad (11)$$

Определим $h_j: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ формулой $h_j(s) = s - \sigma_{aj}$, $j = 1, \dots, n$. Тогда

$$\mu_j h_j^{-1}(A) = \mu_j(h_j^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

является комплекснозначной мерой на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактным носителем, содержащимся в $\widehat{D}_{j,N} = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_{1j} - \sigma_{aj} < \sigma < 0, |t| < N\}$, $j = 1, \dots, n$. Отсюда и из соотношения (11) получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n c_{mj} \int_{\mathbb{C}} e^{-\lambda_m s} d\mu_j h_j^{-1}(s) \right| < \infty,$$

где, как и выше, $c_{mj} = a_{mj} e^{-\lambda_m \sigma_a}$, $j = 1, \dots, n$. Используя свойства чисел c_{mj} , отсюда получаем

$$\sum_{m \in \mathbb{N}_k} \left| \sum_{j=1}^n b_{kj} \int_{\mathbb{C}} e^{-\lambda_m s} d\mu_j h_j^{-1}(s) \right| < \infty, \quad k = 1, \dots, r. \quad (12)$$

Пусть

$$\hat{\mu}_k(A) = \sum_{j=1}^n b_{kj} \mu_j h_j^{-1}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

и

$$v_k(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\hat{\mu}_k(s), \quad z \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, r.$$

Тогда соотношение (12) может быть записано в виде

$$\sum_{m \in \mathbb{N}_k} |v_k(\lambda_m)| < \infty, \quad k = 1, \dots, r.$$

По определению $\hat{\mu}_k$, $k = 1, \dots, r$, является комплекснозначной мерой на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактным носителем, содержащимся в D_N . Поэтому ввиду леммы 6 имеем

$$\int_{\mathbb{C}} s^l d\hat{\mu}_k(s) = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, r.$$

Отсюда, используя определение $\hat{\mu}_k$ и свойства матрицы B , получаем

$$\int_{\mathbb{C}} s^l d\mu_j h_j^{-1}(s) = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, n.$$

Учитывая определение h_j , отсюда легко выводим, что

$$\int_{\mathbb{C}} s^l d\mu_j(s) = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{mj} \omega(m) e^{-\lambda_m s_j}$$

для почти всех $\omega \in \Omega$ равномерно сходится на компактных подмножествах из G_j , $j = 1, \dots, n$ [20]. Таким образом, существует последовательность $\{b_m : b_m \in \gamma\}$ такая, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \underline{f}_m(s_1, \dots, s_n; b_m) \quad (14)$$

сходится в $H_{n,N}$. Также [20] при $\sigma > \sigma_{1j}$ имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mj}|^2 e^{-2\lambda_m \sigma} < \infty, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поэтому свойства рядов Дирихле влекут за собой сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \sup_{s \in K_j} |f_{mj}(s, b_m)|^2$$

для всякого компакта $K_j \subset D_{j,N}$, $j = 1, \dots, n$. Отсюда, учитывая соотношение (13) и сходимость ряда (14), получаем, что все условия леммы 3 выполнены. Поэтому множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_m \underline{f}_m(s_1, \dots, s_n; b_m), \quad \hat{a}_m \in \gamma,$$

плотно в $H_{n,N}$. Значит, множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty} \underline{f}_m(s_1, \dots, s_n; a_m), \quad a_m \in \gamma,$$

плотно в $H_{n,N}$, и лемма доказана.

§ 4. Доказательство теоремы

Сначала предположим, что функции $g_1(s), \dots, g_n(s)$ имеют аналитические продолжения соответственно в областях $D_{1,N}, \dots, D_{n,N}$. Пусть множество G состоит из $(y_1, \dots, y_n) \in H_{n,N}$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |y_j(s) - g_j(s)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Очевидно, множество G открыто. Поэтому из свойств слабой сходимости вероятностных мер, лемм 1 и 7 имеем

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |f_j(s + i\tau) - g_j(s)| < \frac{\varepsilon}{4} \right) \geq P_f(G) > 0.$$

Пусть функции $g_1(s), \dots, g_n(s)$ и множества $K_1, \dots, K_n$ удовлетворяют условиям теоремы. По теореме Мергеляна (см., например, [21]) существуют полиномы $p_1(s), \dots, p_n(s)$ такие, что

$$\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |p_j(s) - g_j(s)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (15)$$

Используя приведенные неравенства, имеем

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |f_j(s + i\tau) - p_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right) > 0. \quad (16)$$

В силу (15) получаем

$$\left\{ \tau: \sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |f_j(s + i\tau) - p_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \subseteq \left\{ \tau: \sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |f_j(s + i\tau) - g_j(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Отсюда и из соотношения (16) следует, что

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |f_j(s + i\tau) - g_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Теорема доказана.

Приведем пример. Пусть $\{a_{mj}\}$ – периодическая последовательность с периодом $r \geq n$, $j = 1, \dots, n$, а $\lambda_m = (m + \alpha)^\beta$, где α – положительное трансцендентное число и $\beta \in (0, 1)$. Тогда ряд

$$f_j(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj} e^{-(m+\alpha)^\beta s}$$

абсолютно сходится при $\sigma > \sigma_{aj} = 0$, $j = 1, \dots, n$, а $c_{mj} = a_{mj}$ является константой на множестве $\mathbb{N}_k = \{m \in \mathbb{N}: m \equiv k \pmod{r}\}$. Кроме того,

$$r(x) = \sum_{(m+\alpha)^\beta \leq x} 1 = x^{1/\beta} + O(1).$$

Понятно, что элементы b_{kj} можно выбрать так, чтобы $\text{rank}(B) = n$. Поэтому, предполагая аналитическое продолжение функции $f_j(s)$ на полуплоскость $\sigma > \sigma_{1j}$, $\sigma_{1j} < \sigma_{aj}$, $j = 1, \dots, n$, и выполнение оценок (2) и (3), получаем универсальность набора $f_1(s), \dots, f_n(s)$.

Автор благодарит проф. С. В. Конягина за ценные замечания.

Список литературы

1. *Laurinćikas A., Schwarz W., Steuding J.* The universality of general Dirichlet series // *Analysis*. 2003. V. 23. P. 13–26.
2. *Воронин С. М.* Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1975. Т. 39. №3. С. 475–486.
3. *Воронин С. М.* Теорема о распределении значений дзета-функции Римана // *ДАН СССР*. 1975. Т. 221. №4. С. 771.
4. *Воронин С. М.* Исследование поведения дзета-функции Римана: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: МИАН СССР, 1972.
5. *Воронин С. М.* Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. М.: МИАН СССР, 1977.
6. *Воронин С. М.* Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов // *Матем. заметки*. 1978. Т. 24. №6. С. 897–884.
7. *Воронин С. М.* О функциональной независимости L -функций Дирихле // *Acta Arith.* 1975. V. 27. № 2. P. 493–503.
8. *Воронин С. М., Карацуба А. А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
9. *Gonek S. M.* Analytic properties of zeta and L -functions: Ph. D. Thesis. University of Michigan, 1979.
10. *Bagchi B.* The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series: Ph. D. Thesis. Calcutta: Indian statistical Institute, 1981.
11. *Bagchi B.* Joint universality theorem for Dirichlet L -functions // *Math. Z.* 1982. V. 181. P. 319–334.
12. *Laurinćikas A.* On the zeros of linear combinations of the Matsumoto zeta-functions // *Liet. Matem. Rink.* 1998. V. 38. № 2. P. 185–204.
13. *Laurinćikas A., Matsumoto K.* The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-function // *Nagoya. Math. J.* 2000. V. 157. P. 211–227.
14. *Laurinćikas A., Matsumoto K.* The joint universality of zeta-function attached to certain cusp forms // *Proc. Sci. Seminar Faculty of Phys. and Math. Šiauliai University*. 2002. V. 5. P. 57–75.
15. *Šleževičienė R.* The joint universality for twists of Dirichlet series with multiplicative coefficients by characters // *Analytic and Probab. Methods in Number Theory. Proc. of the Third Palanga Conf. (2001)* / Eds. A. Dubickas et al. Vilnius: TEV, 2002. P. 309–319.
16. *Laurinćikas A., Matsumoto K.* The joint universality of twisted automorphic L -functions // *J. Math. Soc. Japan*. 2004. V. 56. № 3. P. 923–939.
17. *Laurinćikas A.* The joint universality for general Dirichlet series // *Ann. Univ. Sc. Budapest. Sect. Comp.* 2003. V. 22. P. 235–251.
18. *Genys J., Laurinćikas A.* On joint limit theorem for general Dirichlet series // *Nonlinear Analysis: Modeling and Control*. 2003. V. 8. № 2. P. 27–39.
19. *Laurinćikas A.* Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function. London: Kluwer Academic Publishers, 1996.
20. *Laurinćikas A., Schwarz N., Steuding J.* Value distribution of general Dirichlet series. III // *Analytic and Probab. Methods in Number Theory. Proc. of the Third Palanga Conf. (2001)* / Eds. A. Dubickas et al. Vilnius: TEV, 2002. P. 137–156.
21. *Walsch J. L.* Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain // *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* 1960. V. 20.