Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О численной эквивалентности алгебраических циклов на потенциально простых абелевых схемах простой относительной размерности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 1, 145–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/im628>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:19:29

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

О численной эквивалентности алгебраических циклов на потенциально простых абелевых схемах простой относительной размерности

Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – потенциально простая комплексная абелева схема простой относительной размерности над гладкой проективной кривой. Доказано, что численная эквивалентность алгебраических циклов на X совпадает с гомологической эквивалентностью.

Библиография: 25 наименований.

Введение

Пусть X – гладкое проективное d -мерное многообразие над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, и пусть $H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q})$ – $\mathbb{Q}$ -подпространство в $H^{2i}(X, \mathbb{Q})$, порожденное классами когомологий $\text{cl}_X(Z) \in H^{2i}(X, \mathbb{Q})$ алгебраических циклов Z коразмерности i на X . Из гипотезы Ходжа $\text{Hodge}(X)$ следует, что

$$H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q}) = H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{i,i}(X, \mathbb{C}) \quad \forall i,$$

где $H^{i,i}(X, \mathbb{C})$ – компонента типа (i, i) разложения Ходжа

$$H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=2i} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

(см. [11]).

Напомним, что линейное отображение $u^*: H^i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^j(X, \mathbb{Q})$ называется *алгебраическим*, если оно является ограничением отображения $H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$, индуцированного элементом $\mathbb{Q}$ -векторного пространства $H_{\text{alg}}^*(X \times X, \mathbb{Q})$ [13, п. 1.3.6]. Другими словами, отображение u^* алгебраическое, если существует алгебраический цикл Z с коэффициентами в поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, для которого $u = \text{cl}_{X \times X}(Z)$ и

$$u^*: H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_1^*} H^*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup u} H^*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_2^*} H^*(X, \mathbb{Q}),$$

где pr_1, pr_2 – канонические проекции. Если $V_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow H^i(X, \mathbb{Q})$ и $W_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow H^j(X, \mathbb{Q})$ – $\mathbb{Q}$ -подструктуры Ходжа, то мы называем линейное отображение $V_{\mathbb{Q}} \rightarrow W_{\mathbb{Q}}$ *алгебраическим*, когда оно является ограничением отображения $u^*: H^i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^j(X, \mathbb{Q})$, индуцированного алгебраическим классом $u \in H_{\text{alg}}^*(X \times X, \mathbb{Q})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-00374).

Пусть H – обильный дивизор на X . Обозначим через L оператор Лефшеца на $H^*(X, \mathbb{Q})$, определенный формулой $Lx = \text{cl}_X(H) \cup x$. Согласно сильной теореме Лефшеца отображение

$$L^{d-i}: H^i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2d-i}(X, \mathbb{Q})$$

является изоморфизмом для любого $i \leq d$. Пусть $\Lambda^{d-i}: H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q})$ – изоморфизм, обратный к L^{d-i} .

СТАНДАРТНАЯ ГИПОТЕЗА ГРОТЕНДИКА $B^i(X)$ [10]. Для натурального числа $i \leq d$ изоморфизм $\Lambda^{d-i}: H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Q})$ является алгебраическим.

Хорошо известно, что $B^i(X)$ не зависит от выбора поляризации. Если гипотеза $B^i(X)$ верна для любого натурального числа i , то мы говорим, что стандартная гипотеза $B(X)$ типа Лефшеца верна для X .

Гипотеза $B(X)$ эквивалентна алгебраичности классических операторов c* и $^c\Lambda$ теории Ходжа для X и алгебраичности абстрактных операторов $*$ и Λ теории когомологий Вейля. Она также дает алгебраичность компонент Кюннета класса алгебраического цикла на $X \times X$.

Известно, что $B(X) \implies D(X)$ для любого комплексного проективного многообразия X , где $D(X)$ – гипотеза о совпадении численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов на X (для многообразий над полем положительной характеристики абстрактная гипотеза $B(X)$ влечет $D(X)$ в присутствии стандартной гипотезы типа Ходжа $I(X, L)$ (гипотезы Ходжа об индексе в терминологии [13]), которая известна для поверхностей как абстрактная теорема Ходжа об индексе [17, лекция 18], но она не доказана для многообразий размерности ≥ 3).

Хорошо известно, что гипотеза Ходжа для абелевых многообразий является следствием гипотетической алгебраичности подходящего оператора $*$ для L_2 когомологий семейств Куги абелевых многообразий над (обычно некомпактными) базами [1]. С другой стороны, используя формализм мотивных конструкций, И. Андре свел гипотезу Ходжа для абелевых многообразий к стандартной гипотезе $B(X)$ для всех абелевых схем $\pi: X \rightarrow C$ над гладкими проективными кривыми [2, теорема 0.6.2].

Мы называем комплексную абелеву схему $\pi: X \rightarrow C$ над гладкой проективной кривой *потенциально простой*, если для любого конечного накрытия $C' \rightarrow C$ абелева схема $X \times_C C' \rightarrow C'$ не содержит нетривиальных абелевых подсхем (эквивалентное условие: общий схемный слой морфизма π является абсолютно простым абелевым многообразием).

Основной результат настоящей работы – доказательство гипотезы $D(X)$ о совпадении численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов для всех потенциально простых комплексных абелевых схем $\pi: X \rightarrow C$ простой относительной размерности над гладкой проективной кривой (теорема 2.5).

§ 1. Некоторые замечания о результатах Яннсена и Смирнова

1.1. Пусть X – гладкое d -мерное проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k . Рассмотрим адекватное отношение эквивалентности $\sim$ на алгебраических циклах с коэффициентами из поля рациональных чисел (это озна-

чает, что прообраз, прямой образ и пересечение циклов корректно определены по модулю $\sim$). Для многообразия X и целого числа $j \geq 0$ обозначим через $C_{\sim}^j(X)$ группу алгебраических циклов коразмерности j на X с коэффициентами из поля рациональных чисел по модулю $\sim$. В частности, $C_{\sim}^d(X \times X)$ – кольцо относительно билинейного закона композиции:

$$C_{\sim}^d(X \times X) \times C_{\sim}^d(X \times X) \rightarrow C_{\sim}^d(X \times X), \\ (f, g) \mapsto g \circ f = \text{pr}_{13*}(\text{pr}_{12}^* f \cdot \text{pr}_{23}^* g),$$

где $\text{pr}_{ij}: X \times X \times X \rightarrow X \times X$ – каноническая проекция.

Согласно теореме Яннсена [12, теорема 1] следующие свойства эквивалентны:

- а) категория M_k мотивов по отношению эквивалентности $\sim$ является полупростой абелевой категорией;
- б) $C_{\sim}^d(X \times X)$ – конечномерная полупростая $\mathbb{Q}$ -алгебра для любого многообразия X ;
- с) отношение $\sim$ – численная эквивалентность.

Пусть $\sim_{\text{num}}$ – численная эквивалентность с группами циклов $C_{\text{num}}^j(X)$ по модулю $\sim_{\text{num}}$. Фиксируем когомологии Вейля $X \mapsto H_{\text{et}}^*(X, \mathbb{Q}_l)$ для простого числа $l \neq \text{char}(k)$. Обозначим соответствующую гомологическую эквивалентность через $\sim_{\text{hom}}$ и группы циклов по модулю $\sim_{\text{hom}}$ через $C_{\text{hom}}^j(X)$.

1.2. ТЕОРЕМА [12, шаг с) $\implies$ б) доказательства теоремы 1]. Пусть X – гладкое d -мерное проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k . Если численная и гомологическая эквивалентности алгебраических циклов на $X \times X$ совпадают, то $\mathbb{Q}$ -алгебра $C_{\text{num}}^d(X \times X) = C_{\text{hom}}^d(X \times X)$ алгебраических соответствий степени нуль полупроста.

1.3. СЛЕДСТВИЕ (исправленная версия) [21, следствие теоремы 1]. Пусть X – гладкое неприводимое проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k . Если $\mathbb{Q}$ -алгебра $C_{\text{hom}}^*(X \times X)$ всех алгебраических соответствий полупроста, то стандартная гипотеза $B(X)$ типа Лефшеца верна для X .

1.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Оригинальные условия [21, следствие теоремы 1] а priori не обеспечивают полупростоты $\mathbb{Q}$ -алгебры всех алгебраических соответствий, которая необходима для применения основного результата работы [21, теорема 1].

1.5. Над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел

$$B(X) \iff A(X \times X) \iff D(X \times X)$$

(см. [23, (1.11)], [15, теорема 1]), где гипотезы $A(X)$ и $D(X)$ формулируются следующим образом.

1.6. ГИПОТЕЗА $A(X)$. Пусть X – гладкое комплексное проективное d -мерное многообразие. Для любого натурального числа $p \leq d/2$ инъекция

$$L^{d-2p}: H_{\text{alg}}^{2p}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{alg}}^{2d-2p}(X, \mathbb{Q})$$

является изоморфизмом.

Гипотеза $A(X)$ эквивалентна каждой из следующих гипотез:

- 1) $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q})$ стабильно относительно оператора $*$;
- 2) $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q})$ стабильно относительно оператора Λ ;
- 3) $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q})$ стабильно относительно оператора ${}^c\Lambda$ [13, предложение 2.1].

Согласно классическому результату Д. Либермана $A(X)$ также эквивалентна следующим гипотезам [15, теорема 1]:

- 4) $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q})$ стабильно относительно оператора c* ;
- 5) если $x \in H_{\text{alg}}^{2p}(X, \mathbb{Q})$ и

$$x = \sum_{k \geq \max(0, 2p-d)} L^k x_{2p-2k}$$

– примитивное разложение Ходжа–Лефшеца, то $x_{2p-2k} \in H_{\text{alg}}^{2p-2k}(X, \mathbb{Q})$;

6) гипотезе $D(X)$: численная эквивалентность алгебраических циклов на X совпадает с гомологической эквивалентностью.

Гипотеза $D(X)$ не зависит от поляризации L , поэтому гипотеза $A(X)$ не зависит от поляризации.

1.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – гладкое неприводимое проективное многообразие над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Тогда стандартная гипотеза $B(X)$ типа Лефшеца эквивалентна полупростоте $\mathbb{Q}$ -алгебры $C_{\text{hom}}^*(X \times X)$ всех алгебраических соответствий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если гипотеза $B(X)$ верна, то $\mathbb{Q}$ -алгебра $C_{\text{hom}}^*(X \times X)$ всех алгебраических соответствий полупроста [13, следствие 3.12]. Остается воспользоваться следствием 1.3.

§ 2. Доказательство гипотезы $D(X)$ для некоторых абелевых схем

2.1. Пусть J – d -мерное абелево многообразие над $\mathbb{C}$, и пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ – мнимое квадратичное поле, $K \hookrightarrow \text{End}(J) \otimes \mathbb{Q}$. Действие t поля K на касательном пространстве $T_0 J$ в нуле J диагонализировано. Другими словами, в подходящем базисе пространства $T_0 J$

$$t(\alpha) = \text{diag}(\sigma(\alpha), \dots, \sigma(\alpha), \bar{\sigma}(\alpha), \dots, \bar{\sigma}(\alpha)), \quad \alpha \in K,$$

где $\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}$ – вложение K . Пусть $n_\sigma(J)$ – число вхождений σ . Если $d \geq 3$, то из [19, предложение 14] следует, что $n_\sigma(J) \geq 1$ и $n_{\bar{\sigma}}(J) \geq 1$ (см. также [14, с. 273, пример (6.7) и с. 286, упражнение (3)]).

Мы говорим, что J – абелево многообразие типа Вейля, если $n_\sigma(J) = n_{\bar{\sigma}}(J)$.

2.2. Пусть $V_{\mathbb{Q}}$ – рациональная структура Ходжа. Из общей теории групп мультипликативного типа следует, что задать разложение Ходжа

$$V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus V_{\mathbb{C}}^{p,q}$$

– это то же самое, что задать морфизм вещественных алгебраических групп $h: \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m) \rightarrow \text{GL}(V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R})$, где $\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)$ – вещественная алгебраическая группа, полученная из мультипликативной группы G_m ограничением поля скаляров

от $\mathbb{C}$ до $\mathbb{R}$ [8, определение В.42]. Элемент $z \in \mathbb{C}^\times = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R})$ действует на $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ по правилу

$$z * v = z^p \bar{z}^q v.$$

Пусть $U^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R}) \mid |z| = 1\}$. Наименьшая $\mathbb{Q}$ -подгруппа в $\text{GL}(V_{\mathbb{Q}})$, группа $\mathbb{R}$ -точек которой содержит $h(U^1)$, называется группой *Ходжа* структуры Ходжа $V_{\mathbb{Q}}$ и обозначается через $\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$ [8, определение В.51].

Если $V_{\mathbb{Q}}$ – поляризуемая рациональная структура Ходжа, то $\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$ – редуктивная $\mathbb{Q}$ -группа, действующая естественным образом в пространстве $V_{\mathbb{Q}}$ [8, предложение В.57]. В этом случае имеется разложение

$$\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}}) = [\text{Cent Hg}(V_{\mathbb{Q}})]^0 \cdot \text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})^{\text{ss}},$$

$\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})^{\text{ss}} = [\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}}), \text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})]$ – полупростой коммутант, $\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})/[\text{Cent Hg}(V_{\mathbb{Q}})]^0$ – полупростая $\mathbb{Q}$ -группа и группа $[\text{Cent Hg}(V_{\mathbb{Q}})]^0 \cap \text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})^{\text{ss}}$ конечна [3, гл. IV, § 14, п. 14.2].

Роль групп Ходжа в анализе структур Ходжа определяется тем фактом, что рациональные $\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$ -подпредставления в $V_{\mathbb{Q}}^{\otimes r} \otimes (V_{\mathbb{Q}}^{\vee})^{\otimes s}$ – это рациональные подструктуры Ходжа в $V_{\mathbb{Q}}^{\otimes r} \otimes (V_{\mathbb{Q}}^{\vee})^{\otimes s}$ [8, предложение В.54].

Предположим, что $V_{\mathbb{Q}}$ – рациональная структура Ходжа четного веса $2i$. Тогда

$$V_{\mathbb{Q}}^{\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})} = V_{\mathbb{Q}} \cap V_{\mathbb{C}}^{i,i},$$

где $V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ – разложение Ходжа [8, следствие В.55]. По определению $V_{\mathbb{Q}}^{\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})} = V_{\mathbb{Q}} \cap V_{\mathbb{C}}^{i,i}$ – пространство *циклов Ходжа* [8, определение В.46].

Для любого комплексного проективного многообразия X и для любого целого числа $i \geq 0$ имеется каноническая поляризуемая $\mathbb{Q}$ -структура Ходжа на $H^{2i}(X, \mathbb{Q})$ и

$$H^{2i}(X, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^{2i}(X, \mathbb{Q}))} = H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{i,i}(X, \mathbb{C}).$$

По определению комплексная абелева схема $\pi: X \rightarrow C$ над гладкой проективной кривой является *потенциально простой*, если для любого конечного накрытия $C' \rightarrow C$ абелева схема $X \times_C C' \rightarrow C'$ не содержит нетривиальных абелевых подсхем (эквивалентное условие: общий схемный слой морфизма π является абсолютно простым абелевым многообразием).

Для любого геометрического слоя X_s через $\text{Hg}(X_s) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hg}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ обозначим *группу Ходжа* абелева многообразия X_s . Это редуктивная связная алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа с каноническим действием на $H^*(X_s, \mathbb{Q}) = \bigwedge^* H^1(X_s, \mathbb{Q})$. Имеется разложение

$$\text{Hg}(X_s) = [\text{Cent Hg}(X_s)]^0 \cdot \text{Hg}(X_s)^{\text{ss}},$$

$\text{Hg}(X_s)^{\text{ss}} = [\text{Hg}(X_s), \text{Hg}(X_s)]$ – полупростой коммутант, $\text{Hg}(X_s)/[\text{Cent Hg}(X_s)]^0$ – полупростая $\mathbb{Q}$ -группа и группа $[\text{Cent Hg}(X_s)]^0 \cap \text{Hg}(X_s)^{\text{ss}}$ конечна [3, гл. IV, § 14, п. 14.2]. Хорошо известно, что

$$\text{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\text{Hg}(X_s)} H^1(X_s, \mathbb{Q}) \quad (2.1)$$

(см. [8, лемма 2.6]).

Мы говорим, что некоторое свойство P выполняется почти для всех $s \in C$, если P выполняется для всех точек $s \in C \setminus \Delta$, где $\Delta \hookrightarrow C$ – счетное подмножество замкнутых точек кривой C .

2.3. ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – потенциально простая комплексная абелева схема относительной размерности $d \geq 3$ над гладкой проективной кривой C (другими словами, общий стемный слой X_η морфизма π является абсолютно простым абелевым многообразием). Предположим, что $K = \text{End}(X_\eta \otimes \overline{\kappa(\eta)}) \otimes \mathbb{Q}$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$.

Если почти для всех $s \in C$ $\text{Hg}(X_s)^{\text{ss}}$ – простая $\mathbb{Q}$ -группа типа A_{d-1} и X_s не является абелевым многообразием типа Вейля по отношению к каноническому вложению $K \hookrightarrow \text{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}$, то численная эквивалентность алгебраических циклов на X совпадает с гомологической эквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\pi: X \rightarrow C$ – потенциально постоянная абелева схема, то для некоторого конечного накрытия $C' \rightarrow C$ имеем

$$X \times_C C' \xrightarrow{\sim} J \times C',$$

где J – абелево многообразие. По теореме Либермана гипотеза $B(J)$ верна (см. [15, теорема 3], [23, следствие 1.8]). С другой стороны, $B(C')$ тривиально выполняется, и

$$B(J) \& B(C') \implies B(J \times C')$$

(см. [13, следствие 2.5]). Поскольку канонический морфизм $J \times C' = X \times_C C' \rightarrow X$ сюръективен, то мы получаем соотношение $B(J \times C') \implies B(X)$ [23, теорема 1.6]. С другой стороны, $B(X) \implies A(X)$ [13, следствие 2.2], и $A(X)$ эквивалентна $D(X)$ [15, теорема 1].

Далее мы предполагаем, что $\pi: X \rightarrow C$ – потенциально непостоянная абелева схема.

По теореме Делиня [5, п. 4.1.2] каноническое отображение ограничения

$$H^i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X_s, \mathbb{Q})$$

является композицией сюръективного краевого морфизма

$$H^i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$$

спектральной последовательности Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q \pi_* \mathbb{Q}) \implies H^*(X, \mathbb{Q})$ и канонических отображений

$$H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C,s)} \hookrightarrow H^i(X_s, \mathbb{Q}). \quad (2.2)$$

Более того, существует каноническое вложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^i(X, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}),$$

потому что $H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$ естественным образом отождествляется с собственным подпространством оператора

$$\Theta_n^*: H^i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Q}),$$

отвечающим собственному числу n^i , где $\Theta_n: X \rightarrow X$ – эндоморфизм абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$, индуцированный умножением на n в слоях морфизма $\pi: X \rightarrow C$ для любого целого числа $n > 1$ [23, формула (3.2)]. Более того, все морфизмы в (2.2) являются морфизмами поляризуемых $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа. Следовательно, имеются канонические точные последовательности $\mathbb{Q}$ -групп

$$\begin{aligned} \mathrm{Hg}(X_s) &\rightarrow \mathrm{Hg}(H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})) \rightarrow 1, \\ \mathrm{Hg}(H^i(X, \mathbb{Q})) &\rightarrow \mathrm{Hg}(H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})) \rightarrow 1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

потому что для любой $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа $V_{\mathbb{Q}}$ рациональные $\mathrm{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$ -подпредставления в $V_{\mathbb{Q}}^{\otimes r} \otimes (V_{\mathbb{Q}}^{\vee})^{\otimes s}$ – это рациональные подструктуры Ходжа в $V_{\mathbb{Q}}^{\otimes r} \otimes (V_{\mathbb{Q}}^{\vee})^{\otimes s}$ [8, предложение В.54].

Пусть

$$\rho: \pi_1(C, s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$$

– представление монодромии. Обозначим через G_s замыкание $\Gamma_s = \rho(\pi_1(C, s))$ в топологии Зариского группы $\mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$. Заменяя $\pi: X \rightarrow C$ морфизмом $\pi': X \times_C C' \rightarrow C'$ для подходящего конечного накрытия $C' \rightarrow C$ (потому что $A(X \times_C C') \implies A(X)$ [23, теорема 1.5] и $A(X)$ эквивалентна $D(X)$ [15, теорема 1]), можно считать, что группа G_s связна.

Локально постоянный пучок (локальная система) $R^{2j-1} \pi_* \mathbb{Q}$ определяется представлением

$$\rho^{\wedge^{2j-1}}: \pi_1(C, s) \rightarrow \mathrm{GL}(\wedge^{2j-1} H^1(X_s, \mathbb{Q})) = \mathrm{GL}(H^{2j-1}(X_s, \mathbb{Q}))$$

(см. [9, гл. 3, § 5]).

Пусть t – другая точка кривой C^{an} . Тогда путь из s в t определяет естественные изоморфизмы

$$\begin{aligned} \Psi_{st}: H^1(X_s, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^1(X_t, \mathbb{Q}), \\ \Gamma_s &\xrightarrow{\sim} \Gamma_t \end{aligned}$$

и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(C, s) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(C, t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_s & \xrightarrow{\sim} & \Gamma_t \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q})) & \xrightarrow{\Phi_{st}} & \mathrm{GL}(H^1(X_t, \mathbb{Q})) \end{array}$$

коммутативна [24, § 3]. Здесь Φ_{st} определяется формулой

$$\mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q})) \ni \varphi \mapsto \Psi_{st} \circ \varphi \circ \Psi_{st}^{-1} \in \mathrm{GL}(H^1(X_t, \mathbb{Q})),$$

где композиция отображений $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ обозначается через $\psi \circ \varphi$.

Выбор другого пути из s в t дает новый изоморфизм

$$\tilde{\Psi}_{st} = u \circ \Psi_{st}: H^1(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(X_t, \mathbb{Q}),$$

где $u \in \Gamma_t$ – образ петли, составленной из двух путей. С другой стороны, $\tilde{\Phi}_{st}$ определяется формулой

$$\mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q})) \ni \varphi \mapsto u \circ \Psi_{st} \circ \varphi \circ (u \circ \Psi_{st})^{-1} \in \mathrm{GL}(H^1(X_t, \mathbb{Q})).$$

Поэтому

$$\tilde{\Phi}_{st} = \mathrm{Int}(u) \circ \Phi_{st},$$

где $\mathrm{Int}(u)$ – сопряжение группы $\mathrm{GL}(H^1(X_t, \mathbb{Q}))$ элементом $u \in \Gamma_t$. В частности, образ Γ_s в $\mathrm{GL}(H^1(X_t, \mathbb{Q}))$ не зависит от выбора пути, потому что $u \in \Gamma_t$.

Поскольку для всех точек $s, t \in C^{\mathrm{an}}$ группы Γ_s, Γ_t изоморфны, то G_t связна для всех точек $t \in C$. Более того, образ G_s в $\mathrm{GL}(H^1(X_t, \mathbb{Q}))$ не зависит от выбора пути, потому что $u \in \Gamma_t \hookrightarrow G_t$ и

$$\Phi_{st}(G_s) = G_t. \quad (2.4)$$

По определению имеем

$$H^i(X_s, \mathbb{Q})^{G_s} = H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}$$

(см. [25, § 7.0]), и G_s – полупростая группа [5, следствие 4.2.9].

Пусть X_η – общий схемный слой морфизма $\pi: X \rightarrow C$. Заменяя $\pi: X \rightarrow C$ морфизмом $\pi': X \times_C C' \rightarrow C'$ для подходящего конечного накрытия $C' \rightarrow C$ (потому что $A(X \times_C C') \implies A(X)$ [23, теорема 1.5] и $A(X)$ эквивалентна $D(X)$ [15, теорема 1]), мы можем считать, что

$$K = \mathrm{End}(X_\eta) \otimes \mathbb{Q}. \quad (2.5)$$

По теореме Делиня для всех точек s вне счетного подмножества замкнутых точек кривой C группа G_s является нормальной подгруппой группы Ходжа $\mathrm{Hg}(X_s)$ (см. [6, предложение 7.5], [25, теорема 7.3]). Поскольку G_s связна и полупроста, то композиция канонических морфизмов

$$G_s \hookrightarrow \mathrm{Hg}(X_s) \rightarrow \mathrm{Hg}(X_s)/\mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}}$$

тривиальна. Поэтому группа G_s является нормальной подгруппой в $\mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}}$ почти для всех $s \in C$.

Если $G_s = 1$, то абелева схема $\pi: X \rightarrow C$ постоянна (см. [5, п. 4.1.3.3], [6, п. 5.2]): существует такое абелево многообразие J , что $X \xrightarrow{\sim} J \times C$ вопреки предположению о том, что $\pi: X \rightarrow C$ – потенциально непостоянная абелева схема.

Следовательно, почти для всех $s \in C$ группа G_s является нетривиальной нормальной полупростой алгебраической подгруппой простой алгебраической группы $\mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}}$, и поэтому

$$G_s = \mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}} \quad (2.6)$$

– простая $\mathbb{Q}$ -группа типа A_{d-1} . Более того, мы имеем соотношение

$$K = \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}}} H^1(X_s, \mathbb{Q}) = \mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}. \quad (2.7)$$

Действительно, в силу соотношения (2.5)

$$\mathrm{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(X_\eta) \otimes \mathbb{Q} = K \hookrightarrow \mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}. \quad (2.8)$$

Представление монодромии $\rho: \pi_1(C, s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ полупросто [5, п. 4.2.6], и, следовательно, $\mathbb{Q}$ -алгебра $H = \mathrm{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q})$ изоморфна прямой сумме матричных алгебр вида $M_{n_i}(D_i)$, где D_i – некоторое тело. С другой стороны, центр Z алгебры H имеет тип Ходжа $(0, 0)$, и поэтому содержится в подалгебре $\mathrm{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q}$ [5, п. 4.4.7]. Из соотношения (2.8) следует, что $Z \hookrightarrow K$, поэтому $H = M_n(D)$, где D – некоторое тело, $Z = \mathrm{Cent}(D)$, $[Z : \mathbb{Q}] \leq 2$.

Если Z – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, то $\mathrm{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q})$ [5, предложение 4.4.11]. Если $Z = \mathbb{Q}$, то D – центральная алгебра с делением над $\mathbb{Q}$, и поэтому $D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ – матричная алгебра над $\mathbb{R}$ или матричная алгебра над телом $\mathbb{K}$ классических кватернионов. Следовательно, $\mathrm{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q})$ [5, предложение 4.4.11].

В любом из этих случаев

$$\mathrm{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q}). \quad (2.9)$$

Более того, в силу (2.8), (2.9), (2.6), (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q} &\hookrightarrow K = \mathrm{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q}) = \mathrm{End}_{\pi_1(C, s)} H^1(X_s, \mathbb{Q}) \\ &= \mathrm{End}_{G_s} H^1(X_s, \mathbb{Q}) = \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}}} H^1(X_s, \mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_s)} H^1(X_s, \mathbb{Q}) \\ &= \mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

и утверждение (2.7) доказано.

Из соотношения (2.7) следует, что X_s – простое абелево многообразие с умножениями из поля K почти для всех $s \in C$. По теореме Силверберг–Зархина группа $\mathrm{Hg}(X_s)$ не полупроста почти для всех $s \in C$, потому что X_s не является абелевым многообразием типа Вейля по отношению к каноническому вложению $K \hookrightarrow \mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}$ [20, теорема 3.1]. Поэтому почти для всех $s \in C$

$$[\mathrm{Cent} \, \mathrm{Hg}(X_s)]^0 \neq 1. \quad (2.10)$$

Более того, мы имеем разложение $(\mathrm{Lie} \, \mathrm{Hg}(X_s) \otimes \mathbb{C})$ -модулей

$$H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = V \bigoplus V^* = E(\omega_1)(\chi) \bigoplus E(\omega_{d-1})(-\chi),$$

где $\chi \neq 0$ – вес нетривиального центра алгебры Ли $\mathrm{Lie} \, \mathrm{Hg}(X_s) \otimes \mathbb{C}$, $E(\omega_1)$ – стандартное неприводимое представление со старшим весом ω_1 простой алгебры Ли $\mathrm{Lie} \, \mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}} \otimes \mathbb{C} = \mathrm{Lie} \, G_s \otimes \mathbb{C}$ типа A_{d-1} , $E(\omega_{d-1})$ – контрагredientное представление со старшим весом ω_{d-1} [22, п. 2.2, п. 2.9]. Другими словами, можно отождествить $E(\omega_1)$ со стандартным представлением $\mathrm{sl}(V)$ в V , и $E(\omega_{d-1})$ с контрагredientным представлением $\mathrm{sl}(V)$ в $V^* = \wedge^{d-1} V$.

Пусть h – образ класса $\mathrm{cl}_X(H)$ гиперплоского сечения относительно канонического сюръективного краевого морфизма $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ спектральной последовательности Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \implies H^*(X, \mathbb{Q})$. Мы имеем

$$H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) = \begin{cases} 0 & \text{для } i \text{ нечетного, } i \neq d, \\ \mathbb{Q} \cdot h^{\cup i/2} & \text{для } i \text{ четного, } i \neq d. \end{cases} \quad (2.11)$$

Действительно, для $i = 0$ соотношение (2.11) очевидно. Если $1 \leq i \leq d-1$, то в силу (2.6)

$$\begin{aligned} & [H^i(X_s, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}]^{\mathrm{Lie} \, G_s \otimes \mathbb{C}} \\ &= [\wedge^i(V \oplus V^*)]^{\mathrm{Lie} \, G_s \otimes \mathbb{C}} = \bigoplus_{m=0}^i [\wedge^m V \otimes \wedge^{i-m} V^*]^{\mathrm{sl}(V)} \\ &= \bigoplus_{m=1}^i \mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(V)}(\wedge^{i-m} V, \wedge^m V) \bigoplus \mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(V)}(\wedge^i V, \wedge^0 V). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Напомним, что

$$\wedge^m V = \wedge^m E(\omega_1) = E(\omega_m)$$

– неприводимое представление в случае $d-1 \geq m \geq 1$ [4, гл. 8, п. 13.1]; поэтому в силу леммы Шура

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(V)}(\wedge^{i-m} V, \wedge^m V) \neq 0 \iff i-m = m$$

и

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(V)}(\wedge^m V, \wedge^m V) = 1.$$

Из (2.12) следует, что для всех $i \leq d-1$

$$\dim_{\mathbb{Q}}[H^i(X_s, \mathbb{Q})]^{G_s} = \dim_{\mathbb{Q}}[H^i(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)} = \begin{cases} 0 & \text{для } i \text{ нечетного,} \\ 1 & \text{для } i \text{ четного.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Случай $i > d$ сводится к предыдущему с помощью сильной теоремы Лефшеца.

Действительно, $h \in H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ индуцирует алгебраический класс $h_s \in H^2(X_s, \mathbb{Q})$ относительно композиции канонических морфизмов

$$H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} \hookrightarrow H^2(X_s, \mathbb{Q}),$$

и h_s – класс гиперплоского сечения X_s ; согласно сильной теореме Лефшеца для любого $j < d$ имеется канонический изоморфизм $\pi_1(C, s)$ -модулей

$$H^j(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup h_s^{d-j}} H^{2d-j}(X_s, \mathbb{Q}),$$

который, в свою очередь, определяет изоморфизм

$$H^j(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} \xrightarrow{\sim} H^{2d-j}(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}. \quad (2.14)$$

Полагая $i = 2d - j$ в (2.14), мы получаем (2.13) для $i > d$.

Из (2.13) следует, что $H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}$ порождается элементом h_s . Поэтому для всех $i \neq d$ соотношение (2.11) следует из (2.13).

С другой стороны,

$$\begin{aligned} H^0(C, R^d \pi_* \mathbb{C}) &= [H^d(X_s, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}]^{\pi_1(C, s)} = [H^d(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)} \otimes \mathbb{C} \\ &= [H^d(X_s, \mathbb{Q})]^{G_s} \otimes \mathbb{C} = [H^d(X_s, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}]^{\text{Lie } G_s \otimes \mathbb{C}} \\ &= \wedge^d(V \oplus V^*)^{\text{Lie } G_s \otimes \mathbb{C}} = \wedge^d(V \oplus V^*)^{\text{sl}(V)} \\ &= \bigoplus_{m=1}^{d-1} [\wedge^m V \otimes \wedge^{d-m} V^*]^{\text{sl}(V)} \bigoplus [\wedge^0 V \otimes \wedge^d V^*] \bigoplus [\wedge^d V \otimes \wedge^0 V^*] \\ &= \bigoplus_{m=1}^{d-1} \text{Hom}_{\text{sl}(V)}(\wedge^{d-m} V, \wedge^m V) \bigoplus [\wedge^0 V \otimes \wedge^d V^*] \bigoplus [\wedge^d V \otimes \wedge^0 V^*]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В силу леммы Шура из (2.15) следует соотношение

$$\begin{aligned} H^0(C, R^d \pi_* \mathbb{C}) &= \begin{cases} [\wedge^0 V \otimes \wedge^d V^*] \bigoplus [\wedge^d V \otimes \wedge^0 V^*] & \text{для } d \notin 2\mathbb{Z}, \\ \text{Hom}_{\text{sl}(V)}(\wedge^{d/2} V, \wedge^{d/2} V) \bigoplus [\wedge^0 V \otimes \wedge^d V^*] \bigoplus [\wedge^d V \otimes \wedge^0 V^*] & \text{для } d \in 2\mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Согласно (2.3) имеем

$$H^0(C, R^d \pi_* \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(C, R^d \pi_* \mathbb{Q}))} \otimes \mathbb{C} = [H^0(C, R^d \pi_* \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}]^{\text{Hg}(X_s) \otimes \mathbb{C}}. \quad (2.17)$$

В силу (2.10) получим

$$\begin{aligned} & \left[[\wedge^0 V \otimes \wedge^d V^*] \bigoplus [\wedge^d V \otimes \wedge^0 V^*] \right]^{\text{Hg}(X_s) \otimes \mathbb{C}} \\ &= \left[[\wedge^0 V \otimes \wedge^d V^*] \bigoplus [\wedge^d V \otimes \wedge^0 V^*] \right]^{\text{Lie Hg}(X_s) \otimes \mathbb{C}} \\ &= \left[E(0)(-d\chi) \bigoplus E(0)(d\chi) \right]^{\text{Lie Hg}(X_s) \otimes \mathbb{C}} \\ &= \left[E(0)(-d\chi) \bigoplus E(0)(d\chi) \right]^{\text{Cent Lie Hg}(X_s) \otimes \mathbb{C}} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому из (2.16), (2.17) получаем соотношение

$$\begin{aligned} & H^0(C, R^d \pi_* \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(C, R^d \pi_* \mathbb{Q}))} \otimes \mathbb{C} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{для } d \text{ нечетного,} \\ \text{Hom}_{\text{sl}(V)}(\wedge^{d/2} V, \wedge^{d/2} V) & \text{для } d \text{ четного.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Если d четное, то $\text{Hom}_{\text{sl}(V)}(\wedge^{d/2} V, \wedge^{d/2} V)$ – 1-мерное пространство по лемме Шура, потому что $\wedge^{d/2} V = E(\omega_{d/2})$ – неприводимое представление. С другой стороны, $h^{\cup d/2} \in H^0(C, R^d \pi_* \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(C, R^d \pi_* \mathbb{Q}))}$. Поэтому (2.18) принимает вид

$$H^0(C, R^d \pi_* \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(C, R^d \pi_* \mathbb{Q}))} = \begin{cases} 0 & \text{для } d \text{ нечетного,} \\ \mathbb{Q} \cdot h^{\cup d/2} & \text{для } d \text{ четного.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Рассмотрим каноническое разложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [23, формула (3.4)]:

$$H^{2i}(X, \mathbb{Q}) = H^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}) \bigoplus H^1(C, R^{2i-1} \pi_* \mathbb{Q}) \bigoplus H^2(C, R^{2i-2} \pi_* \mathbb{Q}). \quad (2.20)$$

Очевидно, что из (2.14) получаем соотношение

$$\dim H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) = \dim H^0(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \quad \forall i. \quad (2.21)$$

Мы утверждаем, что

$$H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) = \text{cl}_X(X_s) \cup H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \quad \forall i. \quad (2.22)$$

Действительно, имеется каноническое невырожденное спаривание $\pi_1(C, s)$ -модулей

$$H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q}) \times H^i(X_s, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2d}(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{tr}_{X_s}} \mathbb{Q}.$$

Оно дает отождествление $\pi_1(C, s)$ -модулей $H^i(X_s, \mathbb{Q})^\vee = H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q})$, поэтому мы имеем отождествление $[H^i(X_s, \mathbb{Q})^\vee]^{\pi_1(C, s)} = H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}$. В частности,

$$\begin{aligned} H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})^\vee &= [H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}]^\vee = [H^i(X_s, \mathbb{Q})^\vee]^{\pi_1(C, s)} \\ &= H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} = H^0(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

и каноническое спаривание

$$H^0(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \times H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q})$$

невырождено: для любого элемента $0 \neq y \in H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$ существует такой элемент $x \in H^0(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q})$, что $0 \neq x \cup y \in H^0(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q})$.

Обозначим через $e: C \rightarrow X$ нулевое сечение абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$. Пусть c – образ $\text{cl}_X(e(C)) \in H^{2d}(X, \mathbb{Q})$ при каноническом морфизме $H^{2d}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q})$. Мы имеем

$$\text{cl}_X(e(C)) = c + c_1 + c_2,$$

где $c_j \in H^j(C, R^{2d-j}\pi_*\mathbb{Q})$, $j = 1, 2$. Поскольку $\text{cl}_X(X_s) \in H^2(C, \mathbb{Q})$ – образующая 1-мерного подпространства $H^2(C, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$, то

$$\text{cl}_X(X_s) \cup c_j = 0, \quad j = 1, 2,$$

потому что в $H^*(X, \mathbb{Q})$ имеем

$$\begin{aligned} H^a(C, R^b\pi_*\mathbb{Q}) \cup H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) &\hookrightarrow H^{a+p}(C, R^{b+q}\pi_*\mathbb{Q}), \\ H^a(C, R^b\pi_*\mathbb{Q}) &= 0 \quad \forall a \geq 3 \end{aligned} \quad (2.23)$$

(см. [23, п. 3.1]). С другой стороны,

$$\text{cl}_X(X_s) \cup c = \text{cl}_X(X_s) \cup \text{cl}_X(e(C)) = \text{cl}_X(X_s \cap e(C)) = \text{cl}_X(e(s)) \neq 0;$$

в частности,

$$0 \neq \text{cl}_X(X_s) \cup H^0(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}).$$

Поскольку это пространство содержится в 1-мерном пространстве $H^2(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q})$, то мы получаем равенства

$$H^2(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) = \text{cl}_X(X_s) \cup H^0(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) = H^2(C, \mathbb{Q}) \cup H^0(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q});$$

следовательно, канонический морфизм

$$H^0(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup \text{cl}_X(X_s)} H^2(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q})$$

биективен, и

$$0 \neq \text{cl}_X(X_s) \cup x \cup y \in H^2(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}).$$

В частности,

$$0 \neq \text{cl}_X(X_s) \cup y \in H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$$

для любого $0 \neq y \in H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$; поэтому канонический морфизм

$$H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup \text{cl}_X(X_s)} H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \quad (2.24)$$

инъективен.

В силу соотношения (2.23) элементы из $H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$ аннулируют (посредством $\cup$ -произведения) компоненты $H^1(C, R^{2d-i-1} \pi_* \mathbb{Q})$ и $H^2(C, R^{2d-i-2} \pi_* \mathbb{Q})$ пространства

$$\begin{aligned} H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \\ = H^0(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \bigoplus H^1(C, R^{2d-i-1} \pi_* \mathbb{Q}) \bigoplus H^2(C, R^{2d-i-2} \pi_* \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

По теореме двойственности Пуанкаре невырожденность канонического спаривания

$$H^{i+2}(X, \mathbb{Q}) \times H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2d+2}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{Q}$$

дает невырожденность канонического спаривания

$$H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \times H^0(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{Q}.$$

В частности,

$$H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})^\vee \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}). \quad (2.25)$$

Поэтому из (2.25) и (2.21) следует, что

$$\begin{aligned} \dim H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) &= \dim H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})^\vee \\ &= \dim H^0(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) = \dim H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

и инъективный морфизм (2.24) биективен:

$$H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup \text{cl}_X(X_s)} H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}).$$

Утверждение (2.22) доказано.

Для любого элемента $u \in H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q})$ имеется разложение

$$u = u_{0\ 2i} + u_{1\ 2i-1} + u_{2\ 2i-2},$$

определенное разложением (2.20), где $u_{k\ 2i-k} \in H^k(C, R^{2i-k} \pi_* \mathbb{Q})$.

Мы утверждаем, что

$$\begin{aligned} u_{k\ 2i-k} &\in H^k(C, R^{2i-k} \pi_* \mathbb{Q}) \cap H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{alg}}^k(C, R^{2i-k} \pi_* \mathbb{Q}) \quad \forall k, \\ H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q}) &= \bigoplus_{k=0}^2 H_{\text{alg}}^k(C, R^{2i-k} \pi_* \mathbb{Q}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Действительно, для любого целого числа $n > 1$ имеем

$$\Theta_n^*(u_{k\ 2i-k}) = n^{2i-k} u_{k\ 2i-k},$$

потому что $H^k(C, R^{2i-k}\pi_*\mathbb{Q})$ естественным образом отождествляется с собственным подпространством оператора

$$\Theta_n^*: H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Q}),$$

отвечающим собственному числу n^{2i-k} , где $\Theta_n: X \rightarrow X$ – эндоморфизм абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$, индуцированный умножением на n в слоях морфизма π [23, формула (3.2)]. Поэтому

$$H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q}) \ni \Theta_n^*(u) = n^{2i}u_{0\ 2i} + n^{2i-1}u_{1\ 2i-1} + n^{2i-2}u_{2\ 2i-2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q}) \ni n^{2i}u - \Theta_n^*(u) \\ = n^{2i-1}(n-1)u_{1\ 2i-1} + n^{2i-2}(n^2-1)u_{2\ 2i-2}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q}) \ni nu_{1\ 2i-1} + (n+1)u_{2\ 2i-2}, \\ H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q}) \ni \Theta_n^*(nu_{1\ 2i-1} + (n+1)u_{2\ 2i-2}) = n^{2i}u_{1\ 2i-1} + (n+1)n^{2i-2}u_{2\ 2i-2}, \\ H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q}) \ni n^{2i-1}(nu_{1\ 2i-1} + (n+1)u_{2\ 2i-2}) - \Theta_n^*(nu_{1\ 2i-1} + (n+1)u_{2\ 2i-2}) \\ = (n+1)(n^{2i-1} - n^{2i-2})u_{2\ 2i-2}, \end{aligned}$$

поэтому $u_{2\ 2i-2} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q})$. Из (2.27) следует, что $u_{1\ 2i-1} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q})$. Значит, $u_{0\ 2i} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q})$, и утверждение (2.26) доказано.

Из соотношений (2.3), (2.11), (2.19) имеем

$$\begin{aligned} H_{\text{alg}}^0(C, R^{2i}\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^0(C, R^{2i}\pi_*\mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^{2i}(X, \mathbb{Q}))} \\ = H^0(C, R^{2i}\pi_*\mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(C, R^{2i}\pi_*\mathbb{Q}))} = \mathbb{Q} \cdot h^{\cup i}, \end{aligned}$$

поэтому

$$H_{\text{alg}}^0(C, R^{2i}\pi_*\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cdot h^{\cup i}, \quad \dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{alg}}^0(C, R^{2i}\pi_*\mathbb{Q}) = 1 \quad \forall i \leq d. \quad (2.28)$$

Поскольку $H^2(C, \mathbb{Q})$ является 1-мерной $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(1, 1)$, то из соотношений (2.3), (2.11), (2.19), (2.20), (2.22) получаем

$$\begin{aligned} H_{\text{alg}}^2(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^{2i}(X, \mathbb{Q}))} \\ = H^2(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q}) \cap H^{i,i}(X, \mathbb{C}) \\ = [H^2(C, \mathbb{Q}) \cup H^0(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q})] \cap H^{i,i}(X, \mathbb{C}) \\ = [H^2(C, \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q})] \cap H^{i,i}(X, \mathbb{C}) \\ = H^2(C, \mathbb{Q}) \otimes [H^0(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q}) \cap H^{i-1,i-1}(X, \mathbb{C})] \\ = H^2(C, \mathbb{Q}) \cup [H^0(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q}) \cap H^{i-1,i-1}(X, \mathbb{C})] \\ = H^2(C, \mathbb{Q}) \cup H^0(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q}))} = \mathbb{Q} \cdot \text{cl}_X(X_s) \cup h^{\cup i-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} H_{\text{alg}}^2(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q}) &= \mathbb{Q} \cdot \text{cl}_X(X_s) \cup h^{\cup i-1}, \\ \forall i \quad (1 \leq i \leq d) &\implies \dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{alg}}^2(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q}) = 1, \end{aligned} \quad (2.29)$$

потому что $\text{cl}_X(X_s) \cup h^{\cup i-1} = \text{cl}_X(h_s^{\cup i-1})$ – нетривиальный когомологический класс сечения $X_s \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ линейным подпространством коразмерности $i-1$.

В силу соотношений (2.26), (2.28), (2.29) имеем

$$H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cdot h^{\cup i} \bigoplus H_{\text{alg}}^1(C, R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q}) \bigoplus \mathbb{Q} \cdot \text{cl}_X(X_s) \cup h^{\cup i-1}. \quad (2.30)$$

С другой стороны, гипотеза $D(X)$ о совпадении гомологической эквивалентности с численной эквивалентностью алгебраических циклов эквивалентна соотношению

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{alg}}^{2i}(X, \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{alg}}^{2d+2-2i}(X, \mathbb{Q}) \quad \forall i \leq \frac{d+1}{2}$$

(см. [15, теорема 1]). В силу (2.28)–(2.30) гипотеза $D(X)$ эквивалентна соотношению

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{alg}}^1(C, R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{alg}}^1(C, R^{2d+1-2i}\pi_*\mathbb{Q}) \quad \forall i \leq \frac{d+1}{2}. \quad (2.31)$$

Заметим, прежде всего, что сильная теорема Лефшеца, примененная к слоям морфизма $\pi: X \rightarrow C$, дает изоморфизм локальных систем

$$R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\cup h^{\cup d+1-2i}} R^{2d+1-2i}\pi_*\mathbb{Q},$$

который, в свою очередь, дает алгебраический изоморфизм

$$\begin{aligned} H^1(C, R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^1(C, R^{2d+1-2i}\pi_*\mathbb{Q}), \\ x &\mapsto x \cup h^{\cup d+1-2i}, \end{aligned}$$

определенный алгебраическим классом когомологий $\Delta_*(h^{\cup d+1-2i})$, где $\Delta: X \hookrightarrow X \times X$ – диагональное вложение [13, предложение 1.3.5]. Поэтому

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{alg}}^1(C, R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q}) \leq \dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{alg}}^1(C, R^{2d+1-2i}\pi_*\mathbb{Q}) \quad \forall i \leq \frac{d+1}{2}. \quad (2.32)$$

Хорошо известно, что для абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ существуют такое конечное накрытие $C' \rightarrow C$ и такая изогения $X' \rightarrow X \times_C C'$ над C' , что абелева схема $X' \rightarrow C'$ обладает главной поляризацией [18, гл. IV, § 23, следствие 1]. Поскольку $A(X') \implies A(X)$ [23, теорема 1.5] и $A(X)$ эквивалентна $D(X)$ [15, теорема 1], то можно считать, что $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема с главной поляризацией. В этом случае имеется изоморфизм двойственной абелевой схемы $\hat{\pi}: \hat{X} \rightarrow C$ с абелевой схемой $X \rightarrow C$, и мы будем отождествлять $\hat{X}$ с X .

Пусть $j: X \times_C X \hookrightarrow X \times X$ – каноническое вложение, $\tau: X \times_C X \rightarrow C$ – структурный морфизм, $\mathcal{P}$ – нормализованное расслоение Пуанкаре на $X \times_C \widehat{X} \xrightarrow{\sim} X \times_C X$ [7].

Мы утверждаем, что $c_1(\mathcal{P}) \in H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{Q})$. В обозначениях [23] это означает, что

$$c_1(\mathcal{P}) = v \in H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^1\widehat{\pi}_*\mathbb{Q}). \quad (2.33)$$

Действительно, поскольку $\tau: X \times_C \widehat{X} \rightarrow C$ – абелева схема над кривой C , то имеются разложения

$$\begin{aligned} H^2(X \times_C \widehat{X}, \mathbb{Q}) &= H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^1\tau_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, \mathbb{Q}) \\ &= \left[\bigoplus_{a+b=2} H^0(C, R^a\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^b\widehat{\pi}_*\mathbb{Q}) \right] \\ &\quad \oplus H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^1\widehat{\pi}_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

(см. [23, (3.5)]). По определению $\mathcal{P}$ нормализовано вдоль $e \times_C \widehat{X}$, где $e: C \rightarrow X$ – нулевое сечение. Здесь

$$\begin{aligned} e \times_C \widehat{X}: C \times_C \widehat{X} &\rightarrow X \times_C \widehat{X}, \\ \mathcal{O}_{C \times_C \widehat{X}} &\xrightarrow{\sim} (e \times_C \widehat{X})^*(\mathcal{P}), \end{aligned}$$

поэтому

$$0 = c_1(\mathcal{O}_{C \times_C \widehat{X}}) = c_1((e \times_C \widehat{X})^*(\mathcal{P})) = (e \times_C \widehat{X})^*(c_1(\mathcal{P}))$$

является $(H^0(C, R^2\widehat{\pi}_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^1\widehat{\pi}_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, \mathbb{Q}))$ -компонентой класса Черна $c_1(\mathcal{P})$. Поскольку $\mathcal{P}$ нормализовано вдоль $X \times_C \widehat{e}$, то $(H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, \mathbb{Q}))$ -компонента класса Черна $c_1(\mathcal{P})$ тривиальна. По определению v является $H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{Q})$ -компонентой элемента $c_1(\mathcal{P})$. Поэтому утверждение (2.33) доказано.

С другой стороны, $j_*v^i \stackrel{\text{def}}{=} j_*(v^{\cup i})$ – канонически определенный алгебраический класс, играющий важную роль в анализе гипотезы $B(X)$ [23, теоремы 10.1, 12.3]. Например, алгебраический класс $j_*v^i \in H^{2i+2}(X \times X, \mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм

$$H^k(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{[j_*v^i]^*} H^k(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$$

(см. [23, формула (6.2)]). В частности, мы получаем алгебраический изоморфизм

$$H^1(C, R^{2d-(2i-1)}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{[j_*v^{2i-1}]^*} H^1(C, R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q}).$$

Следовательно,

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{alg}}^1(C, R^{2d-(2i-1)}\pi_*\mathbb{Q}) \leq \dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{alg}}^1(C, R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q}),$$

и из (2.32) мы получаем равенство (2.31). Значит, гипотеза $D(X)$ верна, и теорема 2.3 доказана.

2.4. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – потенциально простая комплексная абелева схема нечетной относительной размерности $d \geq 3$ над гладкой проективной кривой C , и пусть X_η – общий стемный слой морфизма π . Предположим, что $K = \text{End}(X_\eta \otimes \overline{\kappa(\eta)}) \otimes \mathbb{Q}$ – мнимое квадратичное поле.

Если почти для всех $s \in C$ $\text{Hg}(X_s)^{\text{ss}}$ – простая $\mathbb{Q}$ -группа типа A_{d-1} , то численная эквивалентность алгебраических циклов на X совпадает с гомологической эквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, почти для всех $s \in C$ слой X_s не является абелевым многообразием типа Вейля, потому что $d = n_\sigma + n_{\bar{\sigma}}$ нечетно и, следовательно, $n_\sigma \neq n_{\bar{\sigma}}$. Следствие доказано.

2.5. ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – комплексная абелева схема простой относительной размерности d над гладкой проективной кривой C . Предположим, что общий стемный слой морфизма π – абсолютно простое абелево многообразие. Тогда численная эквивалентность алгебраических циклов на X совпадает с гомологической эквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\pi: X \rightarrow C$ – потенциально постоянная абелева схема, то для некоторого конечного накрытия $C' \rightarrow C$ имеем

$$X \times_C C' \xrightarrow{\sim} J \times C',$$

где J – абелево многообразие. По теореме Либермана гипотеза $B(J)$ верна [15, теорема 3]. С другой стороны, $B(C')$ тривиально выполняется, и

$$B(J) \& B(C') \implies B(J \times C')$$

(см. [13, следствие 2.5]). Поскольку канонический морфизм $J \times C' = X \times_C C' \rightarrow X$ сюръективен, то мы получаем соотношение $B(J \times C') \implies B(X)$ [23, теорема 1.6]. С другой стороны, $B(X) \implies A(X)$ [13, следствие 2.2] и гипотеза $A(X)$ эквивалентна $D(X)$ [15, теорема 1].

Далее мы предполагаем, что $\pi: X \rightarrow C$ – потенциально непостоянная абелева схема. Если $K = \text{End}(X_\eta \otimes \overline{\kappa(\eta)}) \otimes \mathbb{Q}$ не является мнимым квадратичным расширением поля $\mathbb{Q}$, то гипотеза $B(X)$ верна [23, доказательство теоремы 11.8]. С другой стороны, $B(X) \implies A(X)$ [13, следствие 2.2] и гипотеза $A(X)$ эквивалентна $D(X)$ [15, теорема 1].

Легко доказывается, что гипотеза $B(X)$ верна для всех абелевых схем относительной размерности 2, потому что не существует такой простой комплексной абелевой поверхности J , для которой $\text{End}(J) \otimes \mathbb{Q}$ – мнимое квадратичное поле [16, п. 2.9]. Поэтому можно считать, что $d \geq 3$ и $K = \text{End}(X_\eta \otimes \overline{\kappa(\eta)}) \otimes \mathbb{Q}$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$.

Заменив $\pi: X \rightarrow C$ на $\pi': X \times_C C' \rightarrow C'$ для подходящего конечного накрытия $C' \rightarrow C$ (потому что $A(X \times_C C') \implies A(X)$ [23, теорема 1.5] и $A(X)$ эквивалентна $D(X)$ [15, теорема 1]), можно считать, что $K = \text{End}(X_\eta) \otimes \mathbb{Q}$ и G_s – нетривиальная связная полупростая $\mathbb{Q}$ -группа. Следовательно, мы получаем соотношение (2.8) в рассматриваемой ситуации. С другой стороны, представление

монодромии $\rho: \pi_1(C, s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ полупросто [5, п. 4.2.6], и, следовательно, $\mathbb{Q}$ -алгебра $H = \mathrm{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q})$ изоморфна прямой сумме матричных алгебр вида $M_{n_i}(D_i)$, где D_i – некоторое тело. Кроме того, центр Z алгебры H имеет тип Ходжа $(0, 0)$ и поэтому содержится в подалгебре $\mathrm{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q}$ [5, п. 4.4.7]. Из соотношения (2.8) следует, что $Z \hookrightarrow K$, поэтому $H = M_n(D)$, где D – некоторое тело, $Z = \mathrm{Cent}(D)$, $[Z : \mathbb{Q}] \leq 2$.

Если Z – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, то $\mathrm{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q})$ [5, предложение 4.4.11]. Если $Z = \mathbb{Q}$, то D – центральная алгебра с делением над $\mathbb{Q}$, и поэтому $D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ – матричная алгебра над $\mathbb{R}$ или матричная алгебра над телом $\mathbb{K}$ классических кватернионов. Следовательно, $\mathrm{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q})$ [5, предложение 4.4.11].

В любом из этих случаев мы получаем соотношение (2.9). По теореме Делиня для всех точек s вне счетного подмножества замкнутых точек кривой C группа G_s является нормальной подгруппой группы Ходжа $\mathrm{Hg}(X_s)$ (см. [6, предложение 7.5], [25, теорема 7.3]). В силу (2.1) почти для всех $s \in C$ имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q} \hookrightarrow K &= \mathrm{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q}) = \mathrm{End}_{\pi_1(C, s)} H^1(X_s, \mathbb{Q}) \\ &= \mathrm{End}_{G_s} H^1(X_s, \mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_s)} H^1(X_s, \mathbb{Q}) = \mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$K = \mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}. \quad (2.34)$$

Из (2.34) следует, что X_s – простое d -мерное абелево многообразие с умножениями из мнимого квадратичного поля K почти для всех $s \in C$. Поскольку d – простое число, то оно не принадлежит множеству $\mathrm{Ex}(4)$ исключительных чисел, поэтому полупростая группа $\mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}}$ имеет тип A_{d-1} [22, теорема 1.1]. Мы видим, что все условия следствия 2.4 выполнены. Теорема 2.5 доказана.

Список литературы

1. *Abdulali S.* Algebraic cycles in families of Abelian varieties // Can. J. Math. 1994. V. 46. № 6. P. 1121–1134.
2. *André Y.* Pour une théorie inconditionnelle des motifs // Publ. Math. IHES. 1996. V. 83. P. 5–49.
3. *Борель А.* Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972.
4. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1976. Гл. 1–3; 1972. Гл. 4–6; 1978. Гл. 7–8.
5. *Deligne P.* Théorie de Hodge. II // Publ. Math. IHES. 1971. V. 40. P. 5–57.
6. *Deligne P.* La conjecture de Weil pour les surfaces K3 // Invent. Math. 1972. V. 15. P. 206–226.
7. *Faltings G., Chai Ch.-L.* Degeneration of Abelian varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
8. *Gordon B. B.* A survey of the Hodge conjecture for Abelian varieties // Lewis J. D. A survey of the Hodge conjecture. CRM Monograph Series. V. 10. Montréal: CRM, 1999. P. 297–356.
9. *Груффунс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
10. *Grothendieck A.* Standard conjectures on algebraic cycles // Algebr. Geom. London: Oxford Univ. Press, 1969. P. 193–199.
11. *Hodge W. V. D.* The topological invariants of algebraic varieties // Proc. Int. Congr. Math. 1952. V. 1. P. 182–192.

12. *Jannsen U.* Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity // *Invent. Math.* 1992. V. 107. P. 447–452.
13. *Kleiman S. L.* Algebraic cycles and the Weil conjectures // *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 359–386.
14. *Lange H., Birkenhake C.* Complex Abelian varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
15. *Lieberman D.* Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds // *Amer. J. Math.* 1968. V. 90. P. 366–374.
16. *Moonen B. J. J., Zarhin Yu. G.* Hodge classes and Tate classes on simple abelian fourfolds // *Duke Math. J.* 1995. V. 77. № 3. P. 553–581.
17. *Мамфорд Д.* Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир, 1968.
18. *Мамфорд Д.* Абелевы многообразия. М.: Мир, 1971.
19. *Shimura G.* On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions // *Ann. Math.* 1963. V. 78. P. 149–192.
20. *Силверберг А., Зархин Ю. Г.* Группы Ходжа абелевых многообразий с чисто мультипликативной редукцией // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1996. Т. 60. № 2. С. 264–304.
21. *Smirnov O. N.* Graded associative algebras and Grothendieck standard conjectures // *Invent. Math.* 1997. V. 128. P. 201–206.
22. *Танкеев С. Г.* Циклы на абелевых многообразиях и исключительные числа // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1996. Т. 60. № 2. С. 159–194.
23. *Танкеев С. Г.* О стандартной гипотезе для комплексных абелевых схем над гладкими проективными кривыми // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2003. Т. 67. № 3. С. 183–224.
24. *Zarhin Yu. G.* Hodge group of K3 surface // *J. für die reine und angew. Math.* 1983. V. 341. P. 193–220.
25. *Зархин Ю. Г.* Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1984. Т. 48. № 2. С. 264–304.

Владимирский государственный университет
E-mail: tankeev@vpti.vladimir.ru

Поступило в редакцию
16.03.2004