Общероссийский математический портал

С. Ю. Тихонов, О двух теоремах Лоренца, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 1, 165–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/im629>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:27:12

УДК 517.518

С. Ю. Тихонов

О двух теоремах Лоренца

Решаются задачи о нахождении достаточных и необходимых условий принадлежности функции классу Вейля–Никольского.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение

Обозначим через C пространство всех 2π -периодических непрерывных функций $f(x)$ с нормой $\|f\| = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$. Модулем гладкости функции $f(x)$ порядка β , $\beta \in \mathbb{R}_+$, называют величину

$$\omega_\beta(f, t) = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^\beta f(x)\|,$$

где

$$\Delta_h^\beta f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\beta}{\nu} f(x + (\beta - \nu)h)$$

и $\binom{\beta}{\nu} = \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-\nu+1)}{\nu!}$ при $\nu > 1$, $\binom{\beta}{\nu} = \beta$ при $\nu = 1$ и $\binom{\beta}{\nu} = 1$ при $\nu = 0$.

Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.1)$$

– ряд Фурье функции $f(x)$, и пусть $\text{Lip } \alpha = \{f \in C: \omega_1(f, \delta) = O(\delta^\alpha)\}$, $0 < \alpha \leq 1$.

Дж. Лоренц (см. [1], [2, с. 209, 678]) доказал следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. Если $0 < \alpha < 1$ и коэффициенты ряда Фурье (1.1) функции $f(x)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=n}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

то $f(x) \in \text{Lip } \alpha$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 03-01-00080) и программы “Поддержка ведущих научных школ” (проект № НШ-1657.2003.1)

ТЕОРЕМА 1.2. Если $0 < \alpha < 1$ и коэффициенты ряда Фурье (1.1) функции $f(x)$ монотонно убывают, то условие

$$a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

эквивалентно условию $f(x) \in \text{Lip } \alpha$.

В настоящей работе решаются следующие задачи: найти достаточные условия принадлежности функции классу Вейля–Никольского (аналог теоремы 1.1) для функции, коэффициенты Фурье которой удовлетворяют определенным условиям монотонности или знакопостоянности, получить необходимые и достаточные условия принадлежности классу Вейля–Никольского (аналог теоремы 1.2) и решить обратную задачу.

§ 2. Определения и обозначения

Будем говорить, что функция $\varphi(\delta)$, $0 \leq \delta \leq \pi$, является *мажорантой*, $\varphi \in \Phi$, если:

- 1) $\varphi(\delta) > 0$ для любого δ , $0 < \delta \leq \pi$;
- 2) $\varphi(\delta)$ не убывает на $[0, \pi]$;
- 3) $\varphi(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Далее будем налагать на функцию $\varphi \in \Phi$ следующие условия (см. [3]):

$$(B) \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \varphi\left(\frac{1}{k}\right) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right];$$

$$(B_\beta) \quad \sum_{k=1}^n k^{\beta-1} \varphi\left(\frac{1}{k}\right) = O\left[n^\beta \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Последовательность положительных чисел $\gamma := \{\gamma_n\}$ будем называть:

а) *почти возрастающей (почти убывающей)*, если существует число $K := K(\gamma) \geq 1$ такое, что неравенство (см. [3]) $\gamma_n K \geq \gamma_m$ ($\gamma_n \leq K \gamma_m$) выполнено для любых натуральных $n \geq m$;

б) *квазигеометрически возрастающей (квазигеометрически убывающей)*, если существуют натуральные числа $\mu := \mu(\gamma)$, $N := N(\gamma)$ и константа $K := K(\gamma) \geq 1$ такие, что неравенства (см. [4])

$$\gamma_{n+\mu} \geq 2\gamma_n \quad \text{и} \quad \gamma_n \leq K\gamma_{n+1} \quad \left(\gamma_{n+\mu} \leq \frac{1}{2}\gamma_n \quad \text{и} \quad \gamma_{n+1} \leq K\gamma_n \right)$$

выполнены для любых натуральных $n \geq N$;

в) *ограниченной по блокам* (см. [5]), если неравенства

$$\alpha_1 \Gamma_m^{(k)} \leq \gamma_n \leq \alpha_2 \Gamma_M^{(k)}, \quad 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \infty,$$

выполнены для любых $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, где $\Gamma_m^{(k)} = \min(\gamma_{2^k}, \gamma_{2^{k+1}})$ и $\Gamma_M^{(k)} = \max(\gamma_{2^k}, \gamma_{2^{k+1}})$;

г) *квазимонотонной*, если существует число $\rho \geq 0$ такое, что $\gamma_n n^{-\rho} \downarrow 0$.

По определению последовательность положительных чисел $\gamma := \{\gamma_n\}$ удовлетворяет:

- *условию* (SQ) (обозначается $\gamma \in SQ$), если существует $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что $\{n^\varepsilon \gamma_n\}$ почти убывает;
- *условию* (SQ_β) (обозначается $\gamma \in SQ_\beta$), если существует $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что $\{n^{\beta-\varepsilon} \gamma_n\}$ почти возрастает.

Будем говорить (см. [6]), что последовательность положительных чисел $\gamma := \{\gamma_n\}$, стремящаяся к нулю, *принадлежит классу* $R_0^+ BVS$, если неравенство

$$\sum_{n=m}^{\infty} |\gamma_n - \gamma_{n+1}| \leq K \gamma_m$$

справедливо для всех натуральных чисел m и константа K зависит только от γ .

Будем называть последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *знакопостоянной*, если неравенство $a_n a_m \geq 0$ справедливо для любых натуральных n и m .

Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ принадлежит множеству Λ (и обозначать $\lambda \in \Lambda$), если выполнены следующие условия:

- 1) $\lambda_n = \overline{\lambda_{-n}}$;
- 2) последовательность $\{|\lambda_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ не убывает, т. е. $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots$;
- 3) последовательность $\{|\lambda_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ квазимоноотонна.

Пусть даны последовательности комплексных чисел $\mu = \{\mu_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ и $\xi = \{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, которые удовлетворяют следующим условиям: $\mu_n = \overline{\mu_{-n}}$ и $\xi_n = \overline{\xi_{-n}}$. Будем говорить, что пара (μ, ξ) *удовлетворяет условию* S (и обозначать $(\mu, \xi) \in S$), если последовательности $\{\operatorname{Re}(\mu_k \xi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\operatorname{Im}(\mu_k \xi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ являются знакопостоянными.

Определим следующие классы функций. Пусть $\lambda \in \Lambda$. Будем говорить, что непрерывная функция $f(x)$, $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, *принадлежит классу* C^λ , если $(\lambda, c) \in S$, где $c = \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Будем говорить, что непрерывная функция $f(x)$, $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, *принадлежит классу* $C^\downarrow$, если последовательность $\{|c_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ квазимоноотонная или почти убывающая (см. замечание 6.7).

Будем говорить, что непрерывная функция $f(x)$, $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, *принадлежит классу Вейля* (и обозначать $f \in \mathcal{W}(\lambda)$), если для данной последовательности комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ существует непрерывная функция $\xi(x)$, ряд Фурье которой записывается в виде $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n c_n e^{inx}$.

Через $\mathcal{WH}(\lambda, \beta, \gamma)$ (соответственно, $WH(\lambda, \beta, \varphi)$) обозначим класс Вейля–Никольского – класс функций $f(x) \in \mathcal{W}(\lambda)$ таких, что $\omega_\beta(\xi, \frac{1}{n}) = O(\gamma_n)$ (соответственно, $\omega_\beta(\xi, \delta) = O[\varphi(\delta)]$), где $\gamma := \{\gamma_n\}$ – данная последовательность положительных чисел ($\varphi(\delta)$ – данная мажоранта).

Если $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \equiv \{1\}_{n \in \mathbb{Z}}$, то $H_\varphi^\beta := WH(\lambda, \beta, \varphi)$.

Пусть $E_n(f)_p$ – наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n в равномерной метрике, т. е.

$$E_n(f) = \inf_{\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right\|.$$

Через $C, C_1, C_2, \dots$ будем обозначать положительные константы, быть может, разные в разных соотношениях.

§3. Основные результаты

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\beta > 0$, $\lambda \in \Lambda$ и $\gamma = \{\gamma_n\}$ – последовательность положительных чисел.

А) Если $\gamma \in SQ$ и $\gamma \in SQ_\beta$, то для любой непрерывной функции $f(x)$, $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, условия

$$\sum_{k=n}^{\infty} |c_k| = O\left(\frac{\gamma_n}{|\lambda_n|}\right), \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k| |c_k| = O(\gamma_n), \quad (3.2)$$

$$\sum_{k=1}^n k^\beta |\lambda_k| |c_k| = O(n^\beta \gamma_n) \quad (3.3)$$

равносильны и любое из них влечет

$$f \in \mathcal{WH}(\lambda, \beta, \gamma). \quad (3.4)$$

Б) Пусть последовательность γ не возрастает. Если для любой непрерывной функции $f(x)$, $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, условия (3.1)–(3.3) равносильны, то $\gamma \in SQ$ и $\gamma \in SQ_\beta$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\beta > 0$, $\lambda \in \Lambda$ и $\gamma = \{\gamma_n\}$ – последовательность положительных чисел.

А) Если $\gamma \in SQ$ и $\gamma \in SQ_\beta$, то для любой функции $f(x) \in C^\lambda$, $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, условия (3.1)–(3.4) равносильны.

Б) Пусть последовательность γ не возрастает. Если для любой функции $f(x) \in C^\lambda$, $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, условия (3.1)–(3.4) равносильны, то $\gamma \in SQ$ и $\gamma \in SQ_\beta$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\beta > 0$, $\lambda \in \Lambda$ и $\gamma = \{\gamma_n\}$ – последовательность положительных чисел, причем выполнено условие $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n|\lambda_n|} < \infty$.

А) Если $\gamma \in SQ$ и $\gamma \in SQ_\beta$, то для любой функции $f(x) \in C^\downarrow \cap C^\lambda$, $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, условия

$$|c_n| = O\left(\frac{\gamma_n}{n|\lambda_n|}\right), \quad (3.5)$$

$$f \in \mathcal{WH}(\lambda, \beta, \gamma) \quad (3.6)$$

равносильны.

Б) Пусть последовательность γ не возрастает. Если для любой функции $f(x) \in C^\downarrow \cap C^\lambda$, $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, условия (3.5) и (3.6) равносильны, то $\gamma \in SQ$ и $\gamma \in SQ_\beta$.

§ 4. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 4.1 [5]. Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$, $\gamma_n > 0$. Тогда неравенство $\sum_{k=1}^n \gamma_k \leq C\gamma_n$, $n = 1, 2, \dots$ (соответственно, $\sum_{k=n}^{\infty} \gamma_k \leq C\gamma_n$), выполнено тогда и только тогда, когда последовательность γ является квазигеометрически возрастающей (квазигеометрически убывающей).

ЛЕММА 4.2 [4]. Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$, $\gamma_n > 0$, – последовательность, ограниченная по блокам. Последовательность $\{n^\varepsilon \gamma_n\}$ является почти возрастающей (соответственно, почти убывающей) с некоторым $\varepsilon < 0$ ($\varepsilon > 0$) тогда и только тогда, когда последовательность $\{\gamma_{2^n}\}$ – квазигеометрически возрастающая (квазигеометрически убывающая).

ЛЕММА 4.3 [7]. Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$, $\gamma_n > 0$, $\lambda = \{\lambda_n\}$, $\lambda_n \geq 0$ и $\beta > 0$. Если существует положительное число ε такое, что:

- а) последовательность $\{n^{-\varepsilon} \gamma_n\}$ является почти возрастающей;
- б) последовательность $\{n^{\varepsilon-\beta} \gamma_n\}$ является почти убывающей.

Тогда условия

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k = O(n^{-\beta} \gamma_n),$$

$$\sum_{k=1}^n k^\beta \lambda_k = O(\gamma_n)$$

эквивалентны.

ЛЕММА 4.4. Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$, $\gamma_n > 0$ и $\beta > 0$. Тогда:

А) Если $\gamma \in SQ$ и $\gamma \in SQ_\beta$, то для любой последовательности неотрицательных чисел $\{\mu_n\}$ условия

$$\sum_{k=1}^n k^\beta \mu_k = O(\gamma_n n^\beta), \quad (4.1)$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu_k = O(\gamma_n) \quad (4.2)$$

равносильны.

Б) Пусть последовательность γ не возрастает. Если для любой последовательности неотрицательных чисел $\{\mu_n\}$ условия (4.1) и (4.2) равносильны, то $\gamma \in SQ$ и $\gamma \in SQ_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) Пусть последовательность γ удовлетворяет условиям (SQ) и (SQ_β) . Тогда последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n = n^\beta \gamma_n$, удовлетворяет всем условиям леммы 4.3, применяя которую, мы получим эквивалентность условий (4.1) и (4.2).

Б) Пусть для любой последовательности $\{\mu_n\}$, $\mu_n \geq 0$, условия (4.1) и (4.2) равносильны. Рассмотрим последовательность $\{\mu_n\}$, $\mu_n = \Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n+1}$.

В силу невозрастания последовательности $\{\gamma_n\}$ последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяет условию (4.2), а следовательно, и условию (4.1). Тогда

$$\begin{aligned} 2^{-n\beta} \sum_{k=0}^n 2^{k\beta} \gamma_{2^k} &\leq C 2^{-n\beta} \sum_{k=1}^{2^n} k^{\beta-1} \gamma_k = C 2^{-n\beta} \sum_{k=1}^{2^n} k^{\beta-1} \left(\sum_{l=k}^{2^n} \Delta \gamma_l + \gamma_{2^{n+1}} \right) \\ &\leq C 2^{-n\beta} \sum_{l=1}^{2^n} \Delta \gamma_l \left(\sum_{k=1}^l k^{\beta-1} \right) + O(\gamma_{2^{n+1}}) \\ &= O \left(2^{-n\beta} \sum_{l=1}^{2^n} l^\beta \Delta \gamma_l + \gamma_{2^n} \right) = O(\gamma_{2^n}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, применяя последовательно леммы 4.1 и 4.2, получим, что последовательность $\{2^{n\beta} \gamma_{2^n}\}$ квазигеометрически возрастающая и, значит, существует $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что $\{n^{\beta-\varepsilon} \gamma_n\}$ почти возрастающая, т.е. $\gamma \in SQ_\beta$.

Тогда

$$\sum_{k=1}^n k^{\beta-1} \gamma_k = \sum_{k=1}^n k^{\beta-\varepsilon} \gamma_k k^{\varepsilon-1} = O \left(n^{\beta-\varepsilon} \gamma_n \sum_{k=1}^n k^{\varepsilon-1} \right) = O(n^\beta \gamma_n),$$

т.е. последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n = \frac{1}{n} \gamma_n$, удовлетворяет условию (4.1), а значит, и условию (4.2). Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_{2^k} &\leq C \left(\gamma_{2^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_{2^k} \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} l^{-1} \right) \\ &\leq C \left(\gamma_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{\infty} \gamma_k k^{-1} \right) = O(\gamma_{2^n}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Применяя леммы 4.1 и 4.2, получим, что $\gamma \in SQ$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.5 [8]. Пусть $f(x) \in C$ и $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $a_n \geq 0$. Тогда

$$\sum_{k=2n}^{\infty} a_k \leq 4E_n(f).$$

ЛЕММА 4.6 [9]. Пусть $f(x) \in C$ и справедливо условие $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} E_n(f) < \infty$. Тогда $\tilde{f}(x) \in C$ и

$$E_n(\tilde{f}) \leq C \left(E_n(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-1} E_k(f) \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

ЛЕММА 4.7 [10]. Если $f(x) \in C$, то $E_{n-1}(f) \leq C \omega_\beta(f, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 4.8¹. Пусть коэффициенты ряда Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ функции $f(x) \in C$ неотрицательны. Тогда

$$n^{-\beta} \sum_{k=1}^n k^{\beta} a_k \leq C \omega_{\beta} \left(f, \frac{1}{n} \right), \quad \beta \neq 2l+1, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, то

$$\Delta_h^{\beta} f \left(x - \frac{\beta h}{2} \right) \sim 2^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sin \frac{nh}{2} \right)^{\beta} \left(\cos nx \cos \frac{\pi\beta}{2} - \sin nx \sin \frac{\pi\beta}{2} \right) \equiv A.$$

Заметим, что для любой интегрируемой 2π -периодической функции $g(x)$, $\int_0^{2\pi} |g(x)| dx > 0$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^{\beta} f(\cdot)\| &\geq \left(\int_0^{2\pi} |g(x)| dx \right)^{-1} \int_0^{2\pi} |g(x)| \left| \Delta_h^{\beta} f \left(x - \frac{\beta h}{2} \right) \right| dx \\ &\geq \left(\int_0^{2\pi} |g(x)| dx \right)^{-1} \left| \int_0^{2\pi} g(x) \Delta_h^{\beta} f \left(x - \frac{\beta h}{2} \right) dx \right|. \end{aligned}$$

Если в качестве функции $g(x)$ взять ядро Фейера [2], т.е.

$$g(x) = K_{2n}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{2n} \left(1 - \frac{m}{2n+1} \right) \cos mx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{2\pi} |K_{2n}(x)| dx = \pi,$$

то, используя равенство Парсеваля, получим

$$\|\Delta_h^{\beta} f(\cdot)\| \geq \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} K_{2n}(x) A dx \right| = \left| \sum_{m=1}^{2n} \left(1 - \frac{m}{2n+1} \right) \left(\sin \frac{mh}{2} \right)^{\beta} \cos \left(\frac{\pi\beta}{2} \right) a_m \right|.$$

Значит, если $h \in (0, \frac{1}{n})$, то, учитывая неравенство $\sin \frac{mh}{2} \geq \frac{mh}{\pi}$, $0 \leq mh \leq \pi$, имеем

$$\|\Delta_h^{\beta} f(\cdot)\| \geq C(\beta) h^{\beta} \sum_{m=1}^{2n} \left(1 - \frac{m}{2n+1} \right) m^{\beta} a_m \geq C(\beta) h^{\beta} \sum_{m=1}^n m^{\beta} a_m.$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

ЛЕММА 4.9². Пусть коэффициенты ряда Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ функции $f(x) \in C$ неотрицательны. Тогда

$$n^{-\beta} \sum_{k=1}^n k^{\beta} a_k \leq C \omega_{\beta} \left(f, \frac{1}{n} \right), \quad \beta \neq 2l, \quad l = 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству леммы 4.8.

¹ Отметим, что для модулей гладкости четного порядка лемма доказана в [15].

² Отметим, что для модулей гладкости нечетного порядка лемма доказана в [15].

§ 5. Доказательство теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. А) Пусть $\gamma \in SQ$ и $\gamma \in SQ_\beta$.

1. Докажем, что условия (3.1) и (3.2) эквивалентны. В силу неубывания последовательности $\lambda = \{|\lambda_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ условие (3.2) влечет (3.1). Обратно, учитывая тот факт, что последовательность $\{|\lambda_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ квазимоноотонна (т.е. существует $\tau > 0$ такое, что $\frac{|\lambda_n|}{n^\tau} \downarrow 0$), а также условие (3.1) и условие $\gamma \in SQ$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k| |c_k| &\leq C(\tau) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|\lambda_k|}{k^\tau} |c_k| \left(\sum_{s=n}^k s^{\tau-1} + \sum_{s=1}^{n-1} s^{\tau-1} \right) \\ &\leq C(\tau) \sum_{s=n}^{\infty} s^{\tau-1} \left(\sum_{k=s}^{\infty} \frac{|\lambda_k|}{k^\tau} |c_k| \right) + C(\tau) n^\tau \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|\lambda_k|}{k^\tau} |c_k| \\ &\leq C(\tau) \sum_{s=n}^{\infty} s^{\tau-1} \frac{|\lambda_s|}{s^\tau} \frac{\gamma_s}{|\lambda_s|} + |\lambda_n| O\left(\frac{\gamma_n}{|\lambda_n|}\right) \\ &= O\left(n^\varepsilon \gamma_n \sum_{s=n}^{\infty} s^{-\varepsilon-1} + \gamma_n\right) = O(\gamma_n), \end{aligned}$$

т.е. выполнено условие (3.2).

2. Эквивалентность условий (3.2) и (3.3) следует из леммы 4.4, если положить $\mu_n = |\lambda_n| |c_n|$.

3. Докажем, что из условия (3.2) следует, что $f \in \mathcal{WH}(\lambda, \beta, \gamma)$, т.е. выполнено условие (3.4).

Пусть для функции f выполнено условие (3.2), а следовательно, и (3.3). Заметим, что если $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, то

$$\Delta_h^\beta f\left(x - \frac{\beta h}{2}\right) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(2i \sin \frac{kh}{2}\right)^\beta c_k e^{ikx}.$$

Для данного h выберем натуральное n : $\frac{1}{n+1} < h \leq \frac{1}{n}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(2i \sin \frac{kh}{2}\right)^\beta \lambda_k c_k e^{ikx} \right| &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| 2 \sin \frac{kh}{2} \right|^\beta |\lambda_k| |c_k| \\ &\leq 2 \left(\sum_{k=1}^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \right) \left| 2 \sin \frac{kh}{2} \right|^\beta |\lambda_k| |c_k| =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Поскольку $\left| \sin \frac{kh}{2} \right| \leq \frac{kh}{2}$, то в силу условия (3.3) получим, что

$$I_1 \leq Ch^\beta \sum_{k=1}^n k^\beta |\lambda_k| |c_k| = O(\gamma_n),$$

а в силу условия (3.2)

$$I_2 \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k| |c_k| = O(\gamma_n).$$

Таким образом, для функции $\xi(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k c_k e^{ikx}$ выполнено неравенство

$$\left| \Delta_h^\beta \xi \left(x - \frac{\beta h}{2} \right) \right| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(2i \sin \frac{kh}{2} \right)^\beta \lambda_k c_k e^{ikx} \right| = O(\gamma_n), \quad \frac{1}{n+1} < h \leq \frac{1}{n}.$$

Следовательно, $\omega_\beta(\xi, \frac{1}{n}) = O(\gamma_n)$, т.е. мы доказали, что $f \in \mathcal{WH}(\lambda, \beta, \gamma)$. Утверждение А) доказано.

Б) Пусть условия (3.1)–(3.3) равносильны. Тогда в силу эквивалентности условий (3.2) и (3.3) из леммы 4.4 следует, что $\gamma \in SQ$ и $\gamma \in SQ_\beta$. Теорема доказана полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. А) Эквивалентность условий (3.1)–(3.3), а также импликация (3.2) $\Rightarrow$ (3.4) следуют из теоремы 3.1. Докажем, что (3.4) $\Rightarrow$ (3.2). Пусть $f \in \mathcal{WH}(\lambda, \beta, \gamma)$, т.е. существует непрерывная функция $\xi(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n c_n e^{inx}$, причем $\omega_\beta(\xi, \frac{1}{n}) = O(\gamma_n)$. Пусть последовательности $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяют условию теоремы. Тогда

$$\xi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx,$$

причем последовательности $\{a'_n\}$ и $\{b'_n\}$ знакопостоянны и $|\lambda_n| |c_n| \leq (|a'_n| + |b'_n|)$.

Рассмотрим функции $\xi_\pm(x) = \frac{\xi(x) \pm \xi(-x)}{2}$. Имеем $\omega_\beta(\xi_\pm, \frac{1}{n}) \leq \omega_\beta(\xi, \frac{1}{n}) = O(\gamma_n)$. Тогда, применяя лемму 4.5, неравенство Джексона (лемма 4.7) и используя свойства модуля гладкости, получим

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a'_k| \leq CE_{[\frac{n}{2}]}(\xi_+) \leq C(\beta) \omega_\beta \left(\xi_+, \frac{2}{n} \right) \leq C(\beta) \omega_\beta \left(\xi_+, \frac{1}{n} \right) = O(\gamma_n). \quad (5.1)$$

Рассмотрим функцию $\xi_-(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin nx$ и сопряженную функцию $\widetilde{\xi}_- \sim -\sum_{n=1}^{\infty} b'_n \cos nx$. Тогда, аналогично (5.1), применяя леммы 4.5–4.7 и условие $\gamma \in SQ$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} |b'_k| &\leq CE_{[\frac{n}{2}]}(\widetilde{\xi}_-) \leq C \left\{ E_{[\frac{n}{2}]}(\xi_-) + \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(\xi_-) \right\} \\ &= O \left(\omega_\beta \left(\xi_-, \frac{1}{n} \right) + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \omega_\beta \left(\xi_-, \frac{1}{k} \right) \right) \\ &= O \left(\gamma_n + n^\varepsilon \gamma_n \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\varepsilon-1} \right) = O(\gamma_n). \end{aligned}$$

Таким образом, $\sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k| |c_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} (|a'_k| + |b'_k|) = O(\gamma_n)$, т.е. выполнено условие (3.2). Утверждение А) доказано.

Утверждение Б) следует из эквивалентности условий (3.2) и (3.3) по лемме 4.4. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. А) Пусть последовательность γ удовлетворяет условиям (SQ) и (SQ_β) . Докажем, что условия (3.5) и (3.5) эквивалентны. Действительно, если выполнено условие (3.5), то, используя условие $\gamma \in SQ$, получим

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k| |c_k| \leq C \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \gamma_k \leq C n^\varepsilon \gamma_n \sum_{k=n}^{\infty} k^{-(1+\varepsilon)} \leq C \gamma_n,$$

т. е. по теореме 3.2 из эквивалентности условий (3.2) и (3.4) получим, что выполнено условие (3.6).

Обратно, пусть выполнено условие (3.6). Если последовательность $\{\lambda_n\}$ квазимонотонная (т. е. существует $\tau > 0$ такое, что $\frac{|\lambda_n|}{n^\tau} \downarrow 0$), то, поскольку последовательность $\{|c_n|\}$ также квазимонотонная (существует $\xi > 0$ такое, что $\frac{|c_n|}{n^\xi} \downarrow 0$), имеем

$$|\lambda_n| |c_n| n \leq C_1 n^{-\beta} \frac{|\lambda_n| |c_n|}{n^{\tau+\xi}} \sum_{k=1}^n k^{\beta+\tau+\xi} \leq C_2 n^{-\beta} \sum_{k=1}^n |\lambda_k| |c_k| k^\beta \leq C_3 \gamma_n,$$

т. е. по теореме 3.2 из эквивалентности условий (3.3) и (3.4) получим, что выполнено условие (3.5). Если последовательность $\{\lambda_n\}$ почти убывающая, то справедливости соотношения

$$\begin{aligned} |\lambda_n| |c_n| n &\leq C_1 n^{-\beta} |c_n| \frac{|\lambda_n|}{n^\tau} \sum_{k=1}^n k^{\beta+\tau} \leq C_2 n^{-\beta} |c_n| \sum_{k=1}^n |\lambda_k| k^\beta \\ &\leq C_3 n^{-\beta} \sum_{k=1}^n |\lambda_k| |c_k| k^\beta \leq C_4 \gamma_n. \end{aligned}$$

Утверждение А) доказано.

Б) Пусть дано, что условия (3.5) и (3.6) эквивалентны. Тогда по условию теоремы ряд³ $\sum'_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\gamma_{|n|}}{|n| |\lambda_n|} e^{inx}$ сходится равномерно и абсолютно к непрерывной функции $f(x)$, и поскольку для $f(x)$ условие (3.5) выполнено, то $f(x) \in \mathcal{WH}(\lambda, \beta, \gamma)$. Значит, $\omega_\beta(\xi, \frac{1}{n}) = O(\gamma_n)$, где

$$\xi(x) \sim \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\gamma_{|n|}}{|n|} e^{inx} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \cos nx.$$

Так как при этом функция $\xi(x)$ непрерывна и все $\frac{\gamma_n}{n} > 0$, то (см. [2, с. 277]) $\xi(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \cos nx$. Отсюда, применяя леммы 4.5 и 4.7 и используя свойства модуля гладкости, получаем неравенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k} \leq CE_{[\frac{n}{2}]}(\xi) \leq C(\beta) \omega_\beta\left(\xi, \frac{1}{n}\right) = O(\gamma_n). \quad (5.2)$$

³Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что при суммировании член с нулевым номером пропущен.

Тогда, используя (5.2) и монотонность последовательности γ , получим $\sum_{k=n}^{\infty} \gamma_{2^k} \leq C\gamma_{2^n}$ (см. (4.4)). Таким образом, применяя последовательно леммы 4.1 и 4.2, получим, что $\gamma \in SQ$.

Аналогично, применяя леммы 4.8 и 4.9, получим неравенства

$$n^{-\beta} \sum_{k=1}^n k^{\beta-1} \gamma_k \leq C(\beta) \omega_{\beta} \left(\xi, \frac{1}{n} \right) = O(\gamma_n),$$

где для $\beta \neq 2l+1$, $l = 0, 1, 2, \dots$, f и ξ определены выше, а для $\beta = 2l+1$, $l = 0, 1, 2, \dots$,

$$f(x) = \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\gamma_{|n|}}{n\lambda_n} e^{i(n x - \frac{\pi}{2})}, \quad \xi(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \sin nx.$$

Тогда, используя монотонность γ_n , несложно проверить справедливость условия $\sum_{k=1}^n 2^{k\beta} \gamma_{2^k} = O(2^{n\beta} \gamma_{2^n})$, откуда, применяя леммы 4.1 и 4.2, имеем $\gamma \in SQ_{\beta}$. Теорема доказана полностью.

§6. Замечания

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Если $\varphi(\delta) = \delta^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1$, $\gamma = \{\gamma_n\} \equiv \{\varphi(\frac{1}{n})\}$ и $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \equiv \{1\}_{n \in \mathbb{Z}}$, то классы $\mathcal{WH}(\lambda, \beta, \gamma)$, $WH(\lambda, \beta, \varphi)$, H_{φ}^{β} и $\text{Lip } \alpha$ совпадают и из теорем 3.1 и 3.3 получаем теоремы 1.1 и 1.2 соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Пусть дана последовательность $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \equiv \{1\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Тогда для $\beta = 1$ утверждение А) теоремы 3.2 совпадает с теоремой 3.4 работы [7], а для $\beta = 2$ — с теоремой 3.5 работы [11]. Из теоремы 3.3 также следует теорема 4 работы [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Если $\varphi(\delta) \in \Phi$ и $\gamma = \{\gamma_n\} \equiv \{\varphi(\frac{1}{n})\}$, то классы $\mathcal{WH}(\lambda, \beta, \gamma)$ и $WH(\lambda, \beta, \varphi)$ совпадают. Тогда, используя результаты работы [13], теоремы 3.2 и 3.3 можно записать в следующем виде.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $\beta > 0$, $\lambda \in \Lambda$ и $\varphi \in \Phi$. Тогда для того, чтобы для любой функции $f(x) \in C^{\lambda}$, $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, условия

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| &= O \left[\frac{\varphi(\frac{1}{n})}{|\lambda_n|} \right], & \sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k| |c_k| &= O \left[\varphi \left(\frac{1}{n} \right) \right], \\ \sum_{k=1}^n k^{\beta} |\lambda_k| |c_k| &= O \left[n^{\beta} \varphi \left(\frac{1}{n} \right) \right] & \text{ и } f &\in WH(\lambda, \beta, \varphi) \end{aligned}$$

были равносильны, необходимо и достаточно выполнение условий $\varphi \in B$ и $\varphi \in B_{\beta}$.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\beta > 0$, $\lambda \in \Lambda$ и $\varphi \in \Phi$, причем справедливо условие $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\frac{1}{n})}{n|\lambda_n|} < \infty$. Тогда для того, чтобы для любой функции $f(x) \in C^\downarrow \cap C^\lambda$, $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, условия

$$|c_n| = O\left[\frac{\varphi(\frac{1}{n})}{n|\lambda_n|}\right] \quad \text{и} \quad f \in WH(\lambda, \beta, \varphi)$$

были равносильны, необходимо и достаточно выполнение условий $\varphi \in B$ и $\varphi \in B_\beta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Если $\lambda_n = |n|^\alpha \exp(\frac{i\pi}{2} \alpha \operatorname{sign}(n))$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$, то условие $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\frac{1}{n})}{n|\lambda_n|} < \infty$ теоремы 6.2 выполняется автоматически и класс $WH(\lambda, \beta, \varphi)$ совпадает с классом

$$W^\alpha H_\varphi^\beta = \{f: f^{(\alpha)} \in C, \omega_\beta(f^{(\alpha)}, \delta) = O[\varphi(\delta)]\},$$

где $f^{(\alpha)}$ – производная функции f порядка $\alpha > 0$ в смысле Вейля (см. [14, с. 201]). Отметим, что для случая, когда $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ и коэффициенты a_n , b_n ряда Фурье (1.1) монотонны, теорема 6.2 известна (см. [15]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5. Для функции с неотрицательными коэффициентами ряда Фурье (1.1) теоремы 3.2 и 6.1 обобщают результаты работы [16], где приведены достаточные условия на мажоранту φ , при выполнении которых справедлив критерий принадлежности функции классу $W^\alpha H_\varphi^\beta$ (для случаев $\beta = 1$ и $\beta = 2$) в терминах коэффициентов Фурье. Это непосредственно следует из лемм о взаимосвязи различных условий на мажоранту (см. [13]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.6. Пусть $f \in C^\lambda$. Рассмотрим последовательность $\mu = \{\mu_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \equiv \{-i \operatorname{sign}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, считая, что $\operatorname{sign}(0) = 0$. Тогда ряд $\sum'_{n \in \mathbb{Z}} \mu_n c_n e^{inx}$ – сопряженный с рядом $\sum'_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Используя этот факт и то, что $|\lambda_n| = |\lambda_n \mu_n|$, из теоремы 6.1 получим, что если $\varphi \in B \cap B_\beta$, то

$$f \in WH(\lambda, \beta, \varphi) \iff \tilde{f} \in WH(\lambda, \beta, \varphi) \iff \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| = O\left[\frac{\varphi(\frac{1}{n})}{|\lambda_n|}\right].$$

(Подробнее историю вопроса о теоремах такого типа можно найти в работе [3].)

ЗАМЕЧАНИЕ 6.7. Очевидно, что класс монотонных последовательностей $M = \{\gamma: \gamma_n \downarrow 0\}$ является подклассом класса $R_0^+ BVS$. С другой стороны, $R_0^+ BVS$ является подклассом класса почти убывающих последовательностей. Это следует из неравенства

$$\gamma_k = \left| \sum_{\nu=k}^{\infty} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1}) \right| \leq \sum_{\nu=k}^{\infty} |\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1}| \leq \sum_{\nu=m}^{\infty} |\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1}| \leq C \gamma_m,$$

справедливого для любых натуральных $k \geq m$. В работе [6] показано, что класс квазимонотонных последовательностей QM не сравним с классом R_0^+BVS , т.е. найдутся последовательности γ^1 и γ^2 такие, что $\gamma^1 \in QM$, но $\gamma^1 \notin R_0^+BVS$, и $\gamma^2 \in R_0^+BVS$, но $\gamma^2 \notin QM$. Заметим, что класс почти убывающих нуль-последовательностей AD не сравним с классом QM , т.е. найдутся последовательности γ^3 и γ^4 такие, что $\gamma^3 \in QM$, но $\gamma^3 \notin AD$, и $\gamma^4 \in AD$, но $\gamma^4 \notin QM$. Несложно показать, что в качестве γ^3 и γ^4 можно взять соответственно последовательности γ^1 и γ^2 из работы [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 6.8. Из доказательства теоремы 3.3 видно, что в определении класса $C^\downarrow$ можно считать, что последовательность $\{n^{-\tau}|c_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ почти убывающая для некоторого $\tau \geq 0$. В утверждениях Б) леммы 4.4, теорем 3.1–3.3 вместо условия невозрастания последовательности γ можно потребовать условие $\gamma \in R_0^+BVS$. Из доказательств теорем видно, что это достаточно показать только для леммы 4.4. Действительно, вместо последовательности $\{\Delta\gamma_n\}$ будем рассматривать последовательность $\{|\Delta\gamma_n|\}$ и повторим доказательство леммы 4.4. По определению $\{\mu_n\}$ удовлетворяет условию (4.2), а следовательно, и условию (4.1). В силу того, что последовательность γ является почти убывающей (см. замечание 6.7), справедливо неравенство (4.3). Далее рассуждения можно повторить дословно.

Автор благодарит профессора М. К. Потапова за внимание к работе.

Список литературы

1. Lorentz G. G. Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen // Math. Z. 1948. V. 51. P. 135–149.
2. Барн Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
3. Барн Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. ММО. 1956. Т. 5. С. 483–522.
4. Leindler L., Nemeth J. On the connection between quasi power-monotone and quasi geometrical sequences with application to integrability theorems for power series // Acta Math. Hung. 1995. V. 68. № 1–2. P. 7–19.
5. Leindler L. On the converses of inequalities of Hardy and Littlewood // Acta Sci. Math. 1993. V. 58. № 1–4. P. 191–196.
6. Leindler L. A new class of numerical sequences and its applications to sine and cosine series // Analysis Math. 2002. V. 28. P. 279–286.
7. Leindler L. Power-monotone sequences and Fourier series with positive coefficients // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2000. V. 1. № 1.
8. Барн Н. К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. № 2. С. 285–302.
9. Стечкин С. Б. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. № 1. С. 197–206.
10. Taberski R. Differences, moduli and derivatives of fractional orders // Commentat. Math. 1976–1977. V. 19. P. 389–400.
11. Nemeth J. Power-monotone sequences and Fourier series with positive coefficients // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2001. V. 2. № 14.

12. *Пак И. Н.* Коэффициенты рядов Фурье и класс Липшица // Analysis Math. 1990. V. 16. P. 57–64.
13. *Тихонов С. Ю.* Обобщенные классы Липшица и коэффициенты Фурье // Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 6. С. 947–951.
14. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. II. М.: Мир, 1965.
15. *Гейт В. Э.* Обобщенная теорема Лоренца о рядах Фурье с монотонными коэффициентами и ее обращение // Изв. вузов. Сер. матем. 1998. № 4 (431). С. 15–17.
16. *Nemeth J.* On Fourier series with nonnegative coefficients // Acta Sci. Math. 1991. V. 55. № 1–2. P. 95–101.

МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: tikhonov@mccme.ru

Поступило в редакцию
01.08.2003