Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, О мере иррациональности значений G -функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 1, 87–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/im63>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:12:50

УДК 511.36

В. В. Зудилин

О мере иррациональности значений G -функций

В работе установлена иррациональность значений G -функций, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений, в рациональной точке a/b , $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, с условием $b > C(\varepsilon)|a|^{2+\varepsilon}$ для произвольного положительного ε . В случае обобщенной полилогарифмической функции

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{(\nu + \lambda)^m}, \quad m \geq 2, \quad \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\},$$

указан явный вид постоянной $C(\varepsilon)$.

Библиография: 12 наименований.

Введение

В классической работе К. Зигеля [1] был предложен метод исследования арифметических свойств значений некоторых аналитических функций, которые были названы автором E - и G -функциями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что *совокупность функций*

$$f_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{j,\nu} z^{\nu}, \quad j = 1, \dots, m,$$

принадлежит классу $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$, где $C \geq 1$ и $\Phi \geq 1$, если все коэффициенты $f_{j,\nu}$, $j = 1, \dots, m$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$, принадлежат полю рациональных чисел и для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная γ , зависящая только от ε и функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$, такая, что:

- 1) $|f_{j,\nu}| < \gamma C^{(1+\varepsilon)\nu}$, $j = 1, \dots, m$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$;
- 2) существуют натуральные числа $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такие, что все числа $\varphi_n f_{j,\nu} \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, m$, $\nu = 0, 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\varphi_n < \gamma \Phi^{(1+\varepsilon)n}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Если совокупность функций принадлежит классу $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$ с некоторыми (конечными) постоянными $C \geq 1$, $\Phi \geq 1$, то каждая из этих функций *лежит в классе G -функций с рациональными коэффициентами*. В дальнейшем под G -функцией мы будем понимать произвольную функцию из последнего класса.

В первых работах, связанных с применением метода Зигеля к классу G -функций (см. [2], [3]), были получены оценки линейных форм и многочленов от значений этих

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00739.

функций в алгебраических точках. При этом, однако, величина этих точек зависела от высоты рассматриваемых форм. В 1974 г., воспользовавшись указанием Зигеля в работе [1] о сокращении коэффициентов линейных приближающих форм (“сокращении факториалов”), А. И. Галочкин [4] получил для одного подкласса G -функций оценки модулей многочленов от значений в точках, не зависящих от высоты многочленов. Там же была сформулирована теорема об эффективной оценке линейной формы от G -функций из одного класса, доказательство которой опубликовано в работе [5]. В 1985 г. Д. В. Чудновский и Г. В. Чудновский [6] доказали, что условие “сокращения факториалов”, сформулированное в работе [4], выполняется для однородных систем линейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют G -функции. Несложное усовершенствование схемы Чудновских позволило в работе [7] получить этот результат и для неоднородных систем. Тем самым применение метода Зигеля к классу G -функций было доведено до его естественных границ. Отметим, что использование приближений Паде второго рода дает возможность получать оценки линейных форм от значений G -функций без условия “сокращения факториалов” (см. [6]).

Пусть совокупность G -функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$, линейно независимых с единицей, удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} y_l &= Q_{l0} + \sum_{j=1}^m Q_{lj} y_j, \quad l = 1, \dots, m, \\ Q_{lj} &= Q_{lj}(z) \in \mathbb{C}(z), \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (0.1)$$

Согласно [8, гл. 3, лемма 3] для всех коэффициентов системы (0.1) будет выполнено $Q_{lj}(z) \in \mathbb{Q}(z)$ и можно выбрать многочлен $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$ таким, что

$$T(z)Q_{lj}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m. \quad (0.2)$$

Наряду с системой (0.1) будем рассматривать сопряженную к ее однородной части систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} a_j &= \sum_{l=1}^m S_{jl} a_l, \quad j = 1, \dots, m, \\ S_{jl}(z) &= -Q_{lj}(z) \in \mathbb{Q}(z), \quad j, l = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (0.3)$$

Из (0.3) следует, что для производных порядка n , $n = 1, 2, \dots$, имеют место соотношения

$$\frac{d^n}{dz^n} a_j = \sum_{l=1}^m S_{jl}^{[n]} a_l, \quad j = 1, \dots, m, \quad (0.4)$$

где $S_{jl}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}(z)$, $j, l = 1, \dots, m$. Обозначим через $T_*(z) \in \mathbb{Z}[z]$ наименьший общий знаменатель функций $S_{jl}(z) = -Q_{lj}(z)$, $j, l = 1, \dots, m$, т.е. такой многочлен, что

$$T_*(z)S_{jl}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad j, l = 1, \dots, m.$$

Согласно выбору (0.2) многочлена $T(z)$ получаем, что

$$T(z)/T_*(z) \in \mathbb{Z}[z]. \quad (0.5)$$

Несложные выкладки показывают справедливость следующих рекуррентных соотношений для коэффициентов систем (0.4):

$$S_{jl}^{[n+1]}(z) = \frac{d}{dz} S_{jl}^{[n]}(z) + \sum_{i=1}^m S_{ji}^{[n]}(z) \cdot S_{il}(z), \quad j, l = 1, \dots, m, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (0.6)$$

и, значит,

$$\begin{aligned} T_*^{n+1}(z) S_{jl}^{[n+1]}(z) &= T_*(z) \frac{d}{dz} (T_*^n(z) S_{jl}^{[n]}(z)) + \sum_{i=1}^m T_*^n(z) S_{ji}^{[n]}(z) \cdot T_*(z) S_{il}(z) \\ &\quad - n T_*'(z) T_*^n(z) S_{jl}^{[n]}(z), \quad j, l = 1, \dots, m, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (0.7)$$

Отсюда, в частности, следует, что $T_*^n(z) S_{jl}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $j, l = 1, \dots, m$, $n \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что *система линейных дифференциальных уравнений (0.3) принадлежит классу $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, \Psi)$* (удовлетворяет условию “сокращения факториалов” с постоянной Ψ), где $\Psi \geq 1$, если существуют натуральные числа $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такие, что

$$\frac{\psi_n}{i!} T_*^i(z) S_{jl}^{[i]}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad j, l = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная γ' , зависящая только от ε и системы (0.3), такая, что $\psi_n < \gamma' \Psi^{(1+\varepsilon)n}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Положим

$$t = \max \left\{ \deg T - 1, \max_{l,j} \{ \deg T Q_{lj} \} \right\}, \quad H = \max \left\{ H(T), \max_{l,j} \{ H(T Q_{lj}) \} \right\},$$

где под $H(\cdot)$ мы понимаем высоту многочлена из $\mathbb{Z}[z]$ (максимум модулей его коэффициентов).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть совокупность функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$, $m \geq 2$, из класса $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$

- а) линейно независима над $\mathbb{C}(z)$ с единицей в случае $m = 2$,
- б) алгебраически независима над $\mathbb{C}(z)$ в случае $m > 2$

и составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (0.1), для которой система (0.3) принадлежит классу $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, \Psi)$. Пусть, кроме того, рациональная точка $\alpha = a/b$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию

$\alpha T(\alpha) \neq 0$, $\varepsilon < 1/(m+t+1)$ – произвольная положительная постоянная. Положим $N = [1/\varepsilon] - m + 1$,

$$C_0 = e^{\varepsilon(1-\log \varepsilon)} (2(t+1)^2 H \Psi)^{\varepsilon(1+\log N)} \Phi^{1+t\varepsilon} (C\Phi)^{\frac{1}{\varepsilon} \left(2 - \frac{m-1}{N+m-1}\right) \binom{N+m-2}{m-1}},$$

$$\eta_0 = \frac{(1+t\varepsilon) \log b + \log C_0}{(1-(m+t+1)\varepsilon) \log b - \log C_0 - (2-(m+1)\varepsilon) \log(C|a|)}.$$

Если для заданной точки α выполнено условие $\eta_0 > 0$, иными словами, если

$$b^{1-(m+t+1)\varepsilon} > C_0 \cdot (C|a|)^{2-(m+1)\varepsilon}, \quad (0.8)$$

то числа $f_l(\alpha)$, $l = 1, \dots, m$, иррациональны. Более того, для любого $\eta > \eta_0$ и произвольных $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*(f_1, \dots, f_m; \alpha, \varepsilon, \eta)$, справедливы оценки

$$\left| f_l(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > q^{-1-\eta}, \quad l = 1, \dots, m.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В предыдущих работах (см., например, [5], [6]) доказана иррациональность значений G -функций, удовлетворяющих системе (0.1), в рациональных точках $\alpha = a/b$, для которых выполнено условие типа

$$b > C'_0 |a|^{m+1+\delta}, \quad \delta > 0.$$

Поэтому основная теорема расширяет класс известных иррациональных значений таких G -функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Результаты основной теоремы и следствий из нее сохраняют силу в случае, когда рассматриваются G -функции с коэффициентами из мнимого квадратичного поля $\mathbb{I}$ и $\alpha \in \mathbb{I}$. При этом схема доказательства основной теоремы остается неизменной.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для доказательства основной теоремы используется конструкция *градуированных приближений Паде*, предложенная Г. В. Чудновским в работе [9]. Она позволяет установить хорошие оценки меры иррациональности значений не только G -, но и E -функций (см. по этому поводу работу автора [10]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция $f(z) \in \mathbf{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$ является решением линейного дифференциального уравнения

$$A_m y^{(m)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = B, \quad m \geq 2,$$

$$A_j = A_j(z) \in \mathbb{C}[z], \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad B = B(z) \in \mathbb{C}[z],$$

порядка m и не удовлетворяет никакому

- а) линейному в случае $m = 2$,
- б) алгебраическому в случае $m > 2$

дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ меньшего порядка. Пусть, кроме того, $\alpha = a/b$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию $\alpha A_m(\alpha) \neq 0$, $\varepsilon < 1/(m+t+1)$ – произвольная положительная постоянная. Обозначим через $d \in \mathbb{N}$ наименьший общий знаменатель коэффициентов многочленов $B, A_0, \dots, A_m \in \mathbb{Q}[z]$ и положим

$$\begin{aligned} t &= \max \left\{ \deg A_m - 1, \max_{0 \leq j < m} \{ \deg A_j \}, \deg B \right\}, \\ H &= d \cdot \max \left\{ H(B), \max_{0 \leq j \leq m} \{ H(A_j) \} \right\}, \\ \Psi &= (C\Phi)^{6(m+1)^2(t+1)(1+\log m)}, \\ C_0 &= (2e(t+1)^2 H \Psi)^{\varepsilon(1-\log \varepsilon)} \Phi^{1+t\varepsilon} (C\Phi)^{\frac{2-(m-1)\varepsilon}{\varepsilon^m(m-1)!}}, \\ \eta_0 &= \frac{(1+t\varepsilon) \log b + \log C_0}{(1-(m+t+1)\varepsilon) \log b - \log C_0 - (2-(m+1)\varepsilon) \log(C|a|)}. \end{aligned}$$

Если для заданной точки α выполнено условие (0.8), то число $f(\alpha)$ иррационально и для любого $\eta > \eta_0$ и произвольных $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*(f; \alpha, \varepsilon, \eta)$, справедливы оценки

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > q^{-1-\eta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $f_l(z) = f^{(l-1)}(z)$, $l = 1, \dots, m$, удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$y'_l = y_{l+1}, \quad l = 1, \dots, m-1, \quad y'_m = \frac{B}{A_m} - \frac{A_0}{A_m} y_1 - \dots - \frac{A_{m-1}}{A_m} y_{m-1},$$

и принадлежат классу $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$. Как следует из теоремы [7, §4 гл. VI], сокращение факториалов для системы (0.1) происходит с постоянной, не большей $(C\Phi)^{6(m+1)^2(t+1)}$, а согласно утверждению [7, §5.5 гл. IV] для системы (0.3), сопряженной к (0.1), эту постоянную необходимо еще возвести в степень $1+\log m$. Кроме того, для $N = [1/\varepsilon] - m + 1 \geq 1$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \log N < \log(N+m-1) &\leq -\log \varepsilon, \quad \frac{m-1}{N+m-1} \geq (m-1)\varepsilon, \\ \binom{N+m-2}{m-1} &< \frac{(N+m-1)^{m-1}}{(m-1)!} \leq \frac{1}{\varepsilon^{m-1}(m-1)!}. \end{aligned} \tag{0.9}$$

Результат следствия получается теперь из основной теоремы прямой подстановкой.

Через $\text{den } \lambda \in \mathbb{N}$ обозначим знаменатель несократимой дроби рационального числа λ . Введем в рассмотрение следующие функции натурального аргумента:

$$\begin{aligned} \rho(b) &= \frac{b}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leq i \leq b \\ (i,b)=1}} \frac{1}{i}, \quad \chi(b) = \sum_{p|b} \frac{\log p}{p-1}, \\ \varphi(b) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq b \\ (i,b)=1}} 1 - \text{функция Эйлера}, \quad b \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{0.10}$$

Так, например, $\rho(1) = 1$, $\chi(1) = 0$; $\rho(2) = 2$, $\chi(2) = \log 2$; $\rho(3) = \frac{9}{4}$, $\chi(3) = \frac{1}{2} \log 3$; $\rho(4) = \frac{8}{3}$, $\chi(4) = \log 2$ и т.д.

СЛЕДСТВИЕ 2. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{(\nu + \lambda)^m}, \quad m \geq 2, \quad \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}.$$

Пусть $\alpha = a/b \neq 0$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, и пусть $0 < \varepsilon < 1/(m+2)$. Положим $\rho = \rho(\text{den } \lambda)$, $\chi = \chi(\text{den } \lambda)$, $H = \text{den } \lambda \cdot \max\{1, |\lambda|\}$,

$$C_0 = \exp \left\{ (\log(8H) + \chi + m)\varepsilon(1 - \log \varepsilon) + m\rho \left(1 + \varepsilon + \frac{2 - (m-1)\varepsilon}{\varepsilon^m(m-1)!} \right) \right\},$$

$$\eta_0 = \frac{(1 + \varepsilon) \log b + \log C_0}{(1 - (m+2)\varepsilon) \log b - \log C_0 - (2 - (m+1)\varepsilon) \log |a|}.$$

Если для заданной точки α выполнено условие

$$b^{1-(m+2)\varepsilon} > C_0 \cdot |a|^{2-(m+1)\varepsilon},$$

то число $f(\alpha)$ иррационально и для любого $\eta > \eta_0$ и произвольных $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*(\lambda, \alpha, \varepsilon, \eta)$, справедлива оценка

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > q^{-1-\eta}.$$

В частном случае, при $\lambda = 0$, имеем

$$C_0 = \exp \left\{ (m + \log 8)\varepsilon(1 - \log \varepsilon) + m \left(1 + \varepsilon + \frac{2 - (m-1)\varepsilon}{\varepsilon^m(m-1)!} \right) \right\}.$$

Доказательство следствия 2 подробно описано в § 3.

Справедливость оценок основной теоремы будем доказывать для фиксированного $l = l^*$, $1 \leq l^* \leq m$.

§ 1. Градуированные приближения Паде

Докажем прежде всего два вспомогательных утверждения: об оценке сверху высоты произведения произвольных многочленов и об оценке сверху степеней и высот многочленов $T^n(z)S_{jl}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $j, l = 1, \dots, m$, $n \in \mathbb{N}$ (тот факт, что эти функции являются многочленами, непосредственно следует из выбора многочлена $T_*(z)$ и того, что он делит $T(z)$ согласно (0.5)).

ЛЕММА 1.1. Пусть $w_1(z), \dots, w_N(z)$ — произвольные многочлены с вещественными коэффициентами, а степень многочлена $w(z) = w_1(z) \dots w_N(z)$ не выше n . Тогда

$$H(w) \leq (n+1)^N H(w_1) \dots H(w_N).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если коэффициенты формальных степенных рядов

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} z^{\nu}, \quad F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\nu} z^{\nu}$$

удовлетворяют условиям $|f_{\nu}| \leq F_{\nu}$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$, то условимся обозначать $f(z) \ll F(z)$. Как следует из определения высоты многочлена,

$$w_i(z) \ll H(w_i) \sum_{\nu=0}^{\deg w_i} z^{\nu} \ll H(w_i)(1 + z + \dots + z^n), \quad i = 1, \dots, N,$$

откуда

$$w(z) \ll H(w_1) \dots H(w_N)(1 + z + \dots + z^n)^N.$$

Поскольку высота многочлена с неотрицательными вещественными коэффициентами не превосходит суммы всех его коэффициентов, равную значению многочлена в точке $z = 1$, получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 1.2. *Справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \deg T^n S_{jl}^{[n]} &\leq tn, & H(T^n S_{jl}^{[n]}) &\leq C_1 (2(t+1)^2 H)^n n!, \\ C_1 = C_1(m, t) &> 0, & j, l &= 1, \dots, m, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся рекуррентными соотношениями (0.7), в которых $T_*(z)$ заменено на $T(z)$. Из них непосредственно вытекают оценки для степеней: $\deg T^n S_{jl}^{[n]} \leq tn$, $j, l = 1, \dots, m$, $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, полагая

$$H_n = \max_{1 \leq j, l \leq m} \{H(T^n S_{jl}^{[n]})\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

получаем

$$\begin{aligned} T(z) \frac{d}{dz} (T^n(z) S_{jl}^{[n]}(z)) &\ll H \sum_{\nu=0}^{t+1} z^{\nu} \cdot H_n \frac{d}{dz} \sum_{\mu=0}^{tn} z^{\mu} \\ &\ll H \sum_{\nu=0}^{t+1} z^{\nu} \cdot tn H_n \sum_{\mu=0}^{tn-1} z^{\mu} \\ &\ll (t+2) H \cdot tn H_n \sum_{\nu=0}^{tn+t} z^{\nu}, \quad j, l = 1, \dots, m; \\ T^n(z) S_{ji}^{[n]}(z) \cdot T(z) S_{il}(z) &\ll H_n \sum_{\nu=0}^{tn} z^{\nu} \cdot H \sum_{\mu=0}^t z^{\mu} \\ &\ll H_n \cdot (t+1) H \sum_{\nu=0}^{tn+t} z^{\nu}, \quad j, i, l = 1, \dots, m; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
nT'(z)T^n(z)S_{jl}^{[n]}(z) &\ll nH \frac{d}{dz} \sum_{\nu=0}^{t+1} z^\nu \cdot H_n \sum_{\mu=0}^{tn} z^\mu \\
&\ll (t+1)nH \sum_{\nu=0}^t z^\nu \cdot H_n \sum_{\mu=0}^{tn} z^\mu \\
&\ll (t+1)^2 nH \cdot H_n \sum_{\nu=0}^{tn+t} z^\nu, \quad j, l = 1, \dots, m, \\
n &\in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Поэтому из рекуррентных соотношений имеем

$$\begin{aligned}
T^{n+1}(z)S_{jl}^{[n+1]}(z) &\ll (t(t+2)nHH_n + (t+1)mHH_n + (t+1)^2nHH_n) \sum_{\nu=0}^{tn+t} z^\nu \\
&\ll 2(t+1)^2(n+1) \left(1 - \frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{m}{2(t+1)(n+1)} \right) HH_n \sum_{\nu=0}^{tn+t} z^\nu, \\
j, l &= 1, \dots, m, \quad n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

или

$$H_{n+1} \leq 2(t+1)^2(n+1) \left(1 - \frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{m}{2(t+1)(n+1)} \right) HH_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $H_1 \leq H$, получаем

$$H_{n+1} \leq 2^n(t+1)^{2n} H^{n+1}(n+1)! \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{m}{2(t+1)(i+1)} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{m}{2(t+1)(i+1)} &\geq 1 \quad \text{при } i \leq m(t+1) - 1, \\
1 - \frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{m}{2(t+1)(i+1)} &\leq 1 \quad \text{при } i \geq m(t+1) - 1,
\end{aligned}$$

для любого натурального n выполнено неравенство

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{m}{2(t+1)(i+1)} \right) \\
&\leq C_1 = \prod_{i=1}^{m(t+1)-1} \left(1 - \frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{m}{2(t+1)(i+1)} \right),
\end{aligned}$$

которое и завершает доказательство леммы.

В описываемой ниже схеме построения систем приближающих линейных форм будут встречаться суммы, слагаемые которых нумеруются мультииндексами $\bar{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_m) \in \mathbb{Z}^m$. При этом если в некоторой сумме по $\bar{\kappa}$ встретится слагаемое хотя бы с одной компонентой $\kappa_j < 0$, то будем считать это слагаемое отсутствующим (равным нулю). Через $\bar{e}_j$ обозначим мультииндекс, у которого на месте с номером j стоит единица, а на остальных местах – нули. Для экономии места в формулах будем писать

$$\bar{a}^{\bar{\kappa}} = \prod_{j=1}^m a_j^{\kappa_j}, \quad |\bar{\kappa}| = \sum_{j=1}^m \kappa_j.$$

Введем множества мультииндексов

$$\Omega = \Omega(m, N) = \{\bar{\kappa} : |\bar{\kappa}| \in \{N-1, N\}\}, \quad \Theta = \Theta(m, N) = \{\bar{s} : |\bar{s}| = N\},$$

$$\omega = \text{Card } \Omega = \binom{N+m-2}{m-1} + \binom{N+m-1}{m-1}, \quad \theta = \text{Card } \Theta = \binom{N+m-1}{m-1},$$

элементы которых упорядочены в лексикографическом порядке.

Будем рассматривать формы от переменных $a_1, \dots, a_m$ с функциональными коэффициентами вида

$$R(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{\kappa}: |\bar{\kappa}|=N} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) + \sum_{\bar{\kappa}: |\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \sum_{j=1}^m a_j f_j(z), \quad P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{C}(z). \quad (1.1)$$

Поскольку такие формы однородны и имеют степень N , их можно представить в виде

$$R(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{s} \in \Theta} \bar{a}^{\bar{s}} R_{\bar{s}}(z). \quad (1.2)$$

Сравнивая коэффициенты при $\bar{a}^{\bar{s}}$, $\bar{s} \in \Theta$, в (1.1) и (1.2), получаем

$$R_{\bar{s}}(z) = P_{\bar{s}}(z) + \sum_{j=1}^m P_{\bar{s}-\bar{e}_j}(z) f_j(z), \quad \bar{s} \in \Theta. \quad (1.3)$$

ЛЕММА 1.3. Пусть совокупность функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$ принадлежит классу $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$. Тогда для любых натуральных чисел N и M существуют многочлены $P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) не все они тождественно равны нулю;
- 2) $\deg P_{\bar{\kappa}} < M$ для всех $\bar{\kappa} \in \Omega$;
- 3) $P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$, и для произвольного $\varepsilon_1 > 0$ при $M > M_1(N, \varepsilon_1)$

выполнено

$$H(P_{\bar{\kappa}}) < C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta,$$

$$C_2 = (C\Phi)^{\frac{\omega(\omega-\theta)}{\varepsilon\theta}} = (C\Phi)^{\frac{1}{\varepsilon} \left(2 - \frac{m-1}{N+m-1}\right) \binom{N+m-2}{m-1}};$$

4) порядок нуля в точке $z = 0$ каждой из линейных функциональных форм (1.3) не ниже

$$K = \left\lceil \frac{(\omega - \varepsilon)M}{\theta} \right\rceil = \left\lceil \left(2 - \frac{m-1}{N+m-1} - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)M \right\rceil.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение в степенной ряд требуемых многочленов:

$$P_{\bar{\kappa}}(z) = \sum_{\nu=0}^{M-1} P_{\bar{\kappa},\nu} z^{\nu}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^m P_{\bar{s}-\bar{e}_j}(z) f_j(z) = \sum_{j=1}^m \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\min\{\mu, M-1\}} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\nu} f_{j,\mu-\nu} z^{\mu}, \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Будем искать совокупность целых чисел $P_{\bar{\kappa},\nu}$, $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$, $\nu = 0, 1, \dots, M-1$, таких, что

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\nu=0}^{M-1} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\nu} f_{j,\mu-\nu} = 0, \quad \mu = M, M+1, \dots, K-1, \quad \bar{s} \in \Theta. \quad (1.4)$$

Тогда, полагая

$$P_{\bar{s},\mu} = - \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=0}^{\mu} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\nu} f_{j,\mu-\nu}, \quad \mu = 0, 1, \dots, M-1, \quad \bar{s} \in \Theta,$$

получим

$$R_{\bar{s}}(z) = P_{\bar{s}}(z) + \sum_{j=1}^m P_{\bar{s}-\bar{e}_j}(z) f_j(z) = \sum_{\mu=K}^{\infty} \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=0}^{M-1} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\nu} f_{j,\mu-\nu} z^{\mu}, \quad \bar{s} \in \Theta,$$

иными словами, что

$$\text{ord}_{z=0} R_{\bar{s}}(z) \geq K, \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Возьмем последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ из определения класса $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$ и умножим уравнения (1.4) на φ_K :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\nu=0}^{M-1} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\nu} \varphi_K f_{j,\mu-\nu} = 0, \quad \mu = M, M+1, \dots, K-1, \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Получившиеся $\theta(K-M)$ уравнений относительно $(\omega - \theta)M$ неизвестных $P_{\bar{\kappa},\nu}$, $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$, $\nu = 0, 1, \dots, M-1$, имеют целочисленные коэффициенты, ограниченные по модулю величиной $\gamma^2(C\Phi)^{(1+\varepsilon_1/4)K}$, где постоянная γ зависит только от $\varepsilon_1 > 0$. Согласно лемме Зигеля [8, гл.3, лемма 11] существует нетривиальный набор многочленов $P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$, высота каждого из которых не превосходит

$$\left((\omega - \theta)M \gamma^2(C\Phi)^{(1+\frac{\varepsilon_1}{4})K} \right)^{\frac{\theta(K-M)}{(\omega-\theta)M-\theta(K-M)}} \leq \left((C\Phi)^{(1+\frac{\varepsilon_1}{2})\frac{\omega M}{\theta}} \right)^{\frac{(\omega-\theta)}{\varepsilon}}$$

при любом $\varepsilon_1 > 0$ и произвольных $N, M > M_1(N, \varepsilon_1)$. Утверждение леммы доказано.

Введем дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} - \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^m Q_{lj}(z) a_l \right) \frac{\partial}{\partial a_j},$$

связанный с системой линейных однородных уравнений (0.3). Тогда, как легко убедиться [10],

$$D \sum_{j=1}^m a_j f_j(z) = \sum_{l=1}^m a_l Q_{l0}(z), \quad (1.5)$$

а значит, функциональные формы вида (1.1) с коэффициентами $P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{C}(z)$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, после применения к ним оператора D переходят в формы того же вида с другими коэффициентами.

Положим теперь

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{[n]}(z; \bar{a}) &= \sum_{\bar{s}: |\bar{s}|=N} \bar{a}^{\bar{s}} \mathcal{R}_{\bar{s}}^{[n]}(z) \\ &= \sum_{\bar{\kappa}: |\bar{\kappa}|=N} \bar{a}^{\bar{\kappa}} \mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) + \sum_{\bar{\kappa}: |\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} \mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \sum_{j=1}^m a_j f_j(z) \\ &= D^n \left(\sum_{\bar{\kappa}: |\bar{\kappa}|=N} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) + \sum_{\bar{\kappa}: |\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \sum_{j=1}^m a_j f_j(z) \right) \\ &= D^n \left(\sum_{\bar{s}: |\bar{s}|=N} \bar{a}^{\bar{s}} R_{\bar{s}}(z) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $P_{\bar{\kappa}}(z)$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, и $R_{\bar{s}}(z)$, $\bar{s} \in \Theta$, – построенные в лемме 1.3 многочлены и отвечающие им линейные формы (1.3).

ЛЕММА 1.4. *Для элементов последовательности функциональных форм (1.6) справедливы рекуррентные соотношения*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n+1]}(z) &= \frac{d}{dz} \mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) - \sum_{l,j=1}^m (\kappa_j - \delta_{lj} + 1) Q_{lj}(z) \mathcal{P}_{\bar{\kappa} - \bar{e}_l + \bar{e}_j}^{[n]}(z) \\ &\quad + (|\bar{\kappa}| - N + 1) \sum_{l=1}^m Q_{l0}(z) \mathcal{P}_{\bar{\kappa} - \bar{e}_l}^{[n]}(z), \quad \bar{\kappa} \in \Omega, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\mathcal{R}_{\bar{s}}^{[n+1]}(z) = \frac{d}{dz} \mathcal{R}_{\bar{s}}^{[n]}(z) - \sum_{l,j=1}^m (s_j - \delta_{lj} + 1) Q_{lj}(z) \mathcal{R}_{\bar{s} - \bar{e}_l + \bar{e}_j}^{[n]}(z), \quad \bar{s} \in \Theta, \quad n \geq 0. \quad (1.8)$$

Отсюда, в частности, следует, что:

а) функции

$$P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) = \frac{T^n(z)}{n!} \mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z), \quad \bar{\kappa} \in \Omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

являются многочленами степени не выше $M + tn - 1$;

б) порядок нуля в точке $z = 0$ функциональных линейных форм

$$R_{\bar{s}}^{[n]}(z) = \frac{T^n(z)}{n!} \mathcal{R}_{\bar{s}}^{[n]}(z), \quad \bar{s} \in \Theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.10)$$

не ниже $K - n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемые рекуррентные формулы (1.7), (1.8) вытекают из соотношения

$$\mathcal{R}^{[n+1]}(z; \bar{a}) = D\mathcal{R}^{[n]}(z; \bar{a}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и определения оператора D .

а) Из рекуррентных соотношений (1.7), поскольку

$$T^{n+1}(z) \frac{d}{dz} \mathcal{P}(z) = T(z) \frac{d}{dz} (T^n(z) \mathcal{P}(z)) - nT'(z)T^n(z) \mathcal{P}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

для любой функции $\mathcal{P}(z)$, имеем

$$\begin{aligned} T^{n+1}(z) \mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n+1]}(z) &= T(z) \frac{d}{dz} (T^n(z) \mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)) - nT'(z)T^n(z) \mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \\ &- \sum_{l,j=1}^m (\kappa_j - \delta_{lj} + 1) T(z) Q_{lj}(z) \cdot T^n(z) \mathcal{P}_{\bar{\kappa} - \bar{e}_l + \bar{e}_j}^{[n]}(z) \\ &+ (|\bar{\kappa}| - N + 1) \sum_{l=1}^m T(z) Q_{l0}(z) \cdot T^n(z) \mathcal{P}_{\bar{\kappa} - \bar{e}_l}^{[n]}(z), \quad \bar{\kappa} \in \Omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

При $n = 0$ функции $\mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[0]}(z) = P_{\bar{\kappa}}(z)$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, являются многочленами степени не выше $M - 1$ согласно лемме 1.3. Простой индукцией по $n = 0, 1, 2, \dots$ убеждаемся, что функции (1.9) также являются многочленами, степень которых не превосходит $M + tn - 1$. Отсюда следует утверждение п. а).

б) Из рекуррентных соотношений (1.8) и ввиду того, что построенные в лемме 1.3 функции $\mathcal{R}_{\bar{s}}^{[0]}(z) = R_{\bar{s}}(z)$, $\bar{s} \in \Theta$, имеют в точке $z = 0$ порядок нуля не ниже K , индукцией по $n = 0, 1, 2, \dots$ заключаем, что

$$\text{ord}_{z=0} \mathcal{R}_{\bar{s}}^{[n]}(z) \geq K - n, \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Отсюда следует оценка снизу порядка нуля линейных форм (1.10).

В дальнейшем будем пользоваться символами $\bar{\kappa}^*$ и $\bar{s}^*$ для обозначения мультииндексов $(N - 1)\bar{e}_l^*$ и $N\bar{e}_l^*$ соответственно. Через ψ'_n обозначим наименьший общий знаменатель коэффициентов многочлена $P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

ЛЕММА 1.5. Пусть $\varepsilon_1 > 0$ выбрано в соответствии с п. 3) леммы 1.3. Тогда для натуральных чисел ψ'_n , многочленов $P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(z)$ и форм $R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z)$ при $M > M_2(N, \varepsilon_1) \geq M_1(N, \varepsilon_1)$, $n < (K - M)/(t + 1)$ и $|\alpha| < 1/2C$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}\psi'_n &\leq C_3 \Psi^{(1+\varepsilon_1/2)n(1+\log N)}, \\ |P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)| &\leq C_4 \binom{M}{n} (2(t+1)^2 H)^{n(1+\log N)} C_2^{(1+\varepsilon_1)M}, \\ |R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)| &\leq C_5 \binom{M}{n} (2(t+1)^2 H)^{n(1+\log N)} C_2^{(1+\varepsilon_1)M} (C|\alpha|)^{K-n}, \\ C_3 = C_3(N, \varepsilon_1) &> 0, \quad C_4 = C_4(N) > 0, \quad C_5 = C_5(N) > 0.\end{aligned}$$

Кроме того, при $n < (K - M)/(t + 1)$ имеем $\varphi_{M+tn} \psi'_n P_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (1.6), (1.7) и свойства (1.5) следует, что

$$\sum_{\bar{\kappa}: |\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) = \frac{T^n(z)}{n!} \cdot D^n \left(\sum_{\bar{\kappa}: |\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому многочлен $P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(z)$ является коэффициентом при $\bar{a}^{\bar{\kappa}^*}$ в функциональной форме

$$\frac{T^n(z)}{n!} \cdot D^n \left(\sum_{\bar{\kappa}: |\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \right).$$

Чтобы его найти, определим прежде всего коэффициент при $\bar{a}^{\bar{\kappa}^*}$ в выражении $D^n(\bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z))$ для каждого $\bar{\kappa}$, $|\bar{\kappa}| = N - 1$.

Пусть элемент $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$ фиксирован. Будем рассматривать произвольное решение $a_1(z), \dots, a_m(z)$ системы (0.3). Для него выполнено

$$D^n(\bar{a}^{\bar{\kappa}}(z) P_{\bar{\kappa}}(z)) = \frac{d^n}{dz^n}(\bar{a}^{\bar{\kappa}}(z) P_{\bar{\kappa}}(z)).$$

Положим

$$\begin{aligned}b_1(z) &= \dots = b_{\kappa_1}(z) = a_1(z), \\ b_{\kappa_1+1}(z) &= \dots = b_{\kappa_1+\kappa_2}(z) = a_2(z), \\ &\dots\dots\dots \\ b_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}(z) &= \dots = b_{N-1}(z) = a_m(z), \\ b_N(z) &= P_{\bar{\kappa}}(z).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n}(\bar{a}^{\bar{\kappa}}(z)P_{\bar{\kappa}}(z)) &= \frac{d^n}{dz^n}(b_1(z)\dots b_N(z)) \\ &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_N \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_N = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_N!} b_1^{(n_1)}(z) \dots b_N^{(n_N)}(z). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Если $b_i(z) = a_j(z)$ для некоторого j , $1 \leq j \leq m$, то

$$b_i^{(n_i)}(z) = \sum_{l=1}^m S_{jl}^{[n_i]}(z) a_l(z)$$

согласно уравнениям (0.4). Поэтому вклад каждого такого множителя из (1.11) в коэффициент при $\bar{a}^{\bar{\kappa}^*}(z)$, где $\bar{\kappa}^* = (N-1)\bar{e}_{l^*}$, будет в точности равен $S_{jl^*}^{[n_i]}(z)$, и, следовательно, этот коэффициент будет равен

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{n_1, \dots, n_N \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_N = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_N!} S_{1l^*}^{[n_1]}(z) \dots S_{1l^*}^{[n_{\kappa_1}]}(z) S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+1}]}(z) \dots S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+\kappa_2}]}(z) \dots \\ &\times S_{ml^*}^{[n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}]}(z) \dots S_{ml^*}^{[n_{N-1}]}(z) P_{\bar{\kappa}}^{(n_N)}(z). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(z) = \sum_{\bar{\kappa}: |\bar{\kappa}|=N-1} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_N \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_N = n}} w(\bar{\kappa}; n_1, \dots, n_N), \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} w(\bar{\kappa}; n_1, \dots, n_N) &= \frac{T^{n_1}(z) S_{1l^*}^{[n_1]}(z)}{n_1!} \dots \frac{T^{n_{\kappa_1}}(z) S_{1l^*}^{[n_{\kappa_1}]}(z)}{n_{\kappa_1}!} \\ &\times \frac{T^{n_{\kappa_1+1}}(z) S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+1}]}(z)}{n_{\kappa_1+1}!} \dots \frac{T^{n_{\kappa_1+\kappa_2}}(z) S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+\kappa_2}]}(z)}{n_{\kappa_1+\kappa_2}!} \dots \\ &\times \frac{T^{n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}}(z) S_{ml^*}^{[n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}]}(z)}{n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}!} \dots \frac{T^{n_{N-1}}(z) S_{ml^*}^{[n_{N-1}]}(z)}{n_{N-1}!} \\ &\times T^{n_N}(z) \frac{P_{\bar{\kappa}}^{(n_N)}(z)}{n_N!}. \end{aligned}$$

Упорядочим числа $n_1, n_2, \dots, n_N$ в порядке убывания: $n_{i_1} \geq n_{i_2} \geq \dots \geq n_{i_N}$. Тогда, поскольку $n_1 + n_2 + \dots + n_N = n$, выполнены неравенства

$$n_{i_1} \leq n, n_{i_2} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \dots, n_{i_N} \leq \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor.$$

Следовательно,

$$H\left(\frac{T^{n_{i_j}}(z)S_{.t^*}^{[n_{i_j}]}(z)}{n_{i_j}!}\right) \leq C_1(2(t+1)^2H)^{n/j}, \quad j = 1, \dots, N, \quad i_j \neq N,$$

согласно лемме 1.2 и

$$H(T^{n_{i_j}}(z)) \leq ((t+2)H)^{n_{i_j}} \leq C_1(2(t+1)^2H)^{n/j}, \quad i_j = N.$$

Кроме того, ввиду (0.5) для последовательности $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ из определения 2 выполнено

$$\psi_{[n/j]} \frac{T^{n_{i_j}}(z)S_{.t^*}^{[n_{i_j}]}(z)}{n_{i_j}!} \in \mathbb{Z}[z], \quad j = 1, \dots, N, \quad i_j \neq N.$$

Поэтому с учетом того, что

$$\begin{aligned} H\left(\frac{P_{\bar{\kappa}}^{(n_N)}(z)}{n_N!}\right) &\leq \binom{M}{n_N} H(P_{\bar{\kappa}}) \leq \binom{M}{n} C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M}, \\ \frac{P_{\bar{\kappa}}^{(n_N)}(z)}{n_N!} &\in \mathbb{Z}[z], \quad T^{n_N}(z) \in \mathbb{Z}[z], \\ n_N &\leq n < M/2, \quad M > M_1(N, \varepsilon_1), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^N \psi_{[n/j]} \cdot w(\bar{\kappa}; n_1, \dots, n_N) &\in \mathbb{Z}[z], \\ \bar{\kappa} &\in \Omega \setminus \Theta, \quad n_1, \dots, n_N \geq 0, \quad n_1 + \dots + n_N = n < M/2, \end{aligned}$$

и согласно леммам 1.2 и 1.1

$$\begin{aligned} \deg w(\bar{\kappa}; n_1, \dots, n_N) &\leq t(n_1 + \dots + n_{N-1}) + (t+1)n_N + (M + tn_N - 1) \\ &\leq M + (2t+1)n - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(w(\bar{\kappa}; n_1, \dots, n_N)) &\leq (M + (2t+1)n)^{N+1} \cdot C_1^N (2(t+1)^2H)^{ng_N} \\ &\quad \times \binom{M}{n} C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M}, \end{aligned}$$

$$\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta, \quad n_1, \dots, n_N \geq 0, \quad n_1 + \dots + n_N = n < M/2,$$

где

$$g_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} \leq 1 + \log N.$$

Пользуясь представлением (1.12), находим, что для заданного $\varepsilon_1 > 0$

$$\psi'_n \leq \prod_{j=1}^N \psi_{[n/j]} \leq (\gamma')^N \Psi^{(1+\varepsilon_1/2)ng_N} \leq C_3 \Psi^{(1+\varepsilon_1/2)n(1+\log N)}, \quad n < M/2,$$

с некоторой постоянной C_3 , зависящей только от N и ε_1 ,

$$\begin{aligned} H(P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}) &\leq \binom{N+m-2}{N-1} \binom{n+N-1}{n} \cdot (M+(2t+1)n)^{N+1} \\ &\quad \times C_1^N (2(t+1)^2 H)^{ng_N} \cdot \binom{M}{n} C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M} \\ &\leq C_6 (3M)^{2N} (2(t+1)^2 H)^{n(1+\log N)} \cdot \binom{M}{n} C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M}, \\ C_6 &= C_6(N) > 0, \quad n < M/2, \end{aligned}$$

и для $|\alpha| < 1$, $M > M'_2(N, \varepsilon_1)$ выполнено

$$\begin{aligned} |P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)| &\leq (M+tn) H(P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}) \leq C_4 \binom{M}{n} (2(t+1)^2 H)^{n(1+\log N)} C_2^{(1+\varepsilon_1)M}, \\ n &< M/2, \end{aligned}$$

с некоторой положительной постоянной $C_4 = C_4(N)$.

Если положить

$$P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(z) = \sum_{\nu=0}^{M+tn-1} P_{\bar{\kappa}^*, \nu}^{[n]} z^\nu, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

то

$$R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) - P_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) = P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(z) f_{l^*}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\min\{\mu, M+tn-1\}} P_{\bar{\kappa}^*, \nu}^{[n]} f_{l^*, \mu-\nu} z^\mu, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Поскольку

$$\deg P_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) \leq M+tn-1 < K-n \leq \operatorname{ord}_{z=0} R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z), \quad n < \frac{K-M}{t+1},$$

имеем

$$\begin{aligned} R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) &= \sum_{\mu=K-n}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{M+tn-1} P_{\bar{\kappa}^*, \nu}^{[n]} f_{l^*, \mu-\nu} z^\mu, \\ P_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) &= - \sum_{\mu=0}^{M+tn-1} \sum_{\nu=0}^{\mu} P_{\bar{\kappa}^*, \nu}^{[n]} f_{l^*, \mu-\nu} z^\mu, \end{aligned} \quad n < \frac{K-M}{t+1}.$$

Отсюда для $M > M''_2(N, \varepsilon_1)$, $|\alpha| < 1/2C$ получаем

$$\begin{aligned} |R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)| &\leq (M+tn) H(P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}) \sum_{\mu=K-n}^{\infty} C^{(1+\varepsilon_1/8)\mu} |\alpha|^\mu \\ &\leq (M+tn) H(P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}) C^{\varepsilon_1(K-n)/8} (C|\alpha|)^{K-n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{C^{1+\varepsilon_1/8}}{2C} \right)^\mu \\ &\leq (M+tn) H(P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}) C^{\varepsilon_1 M/4} (C|\alpha|)^{K-n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^\mu \\ &\leq C_5 \binom{M}{n} (2(t+1)^2 H)^{n(1+\log N)} C_2^{(1+\varepsilon_1)M} (C|\alpha|)^{K-n}, \quad n < \frac{K-M}{t+1}, \end{aligned}$$

и

$$\varphi_{M+tn} \psi'_n P_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) = - \sum_{\mu=0}^{M+tn-1} \sum_{\nu=0}^{\mu} \psi'_n P_{\bar{\kappa}^*, \nu}^{[n]} \cdot \varphi_{M+tn} f_{l^*, \mu-\nu} z^{\mu} \in \mathbb{Z}[z].$$

Осталось положить $M_2(N, \varepsilon_1) = \max\{M'_2(N, \varepsilon_1), M''_2(N, \varepsilon_1)\}$.

Лемма доказана полностью.

§ 2. Переход к числовым линейным формам

ЛЕММА 2.1. *При $M > M_3(N)$ функциональный определитель*

$$\det \left(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \right)_{n=0,1,\dots,\omega-1; \bar{\kappa} \in \Omega} \quad (2.1)$$

отличен от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого факта повторяет общую схему доказательства леммы 3.3 [10], однако значительно проще последнего.

Предположим, что определитель (2.1) равен нулю тождественно, т.е. ранг совокупности форм $R^{[0]}(z; \bar{a}), R^{[1]}(z; \bar{a}), R^{[2]}(z; \bar{a}), \dots$ равен $\tilde{\omega}$, $1 \leq \tilde{\omega} < \omega$. Согласно [8, гл. 3, лемма 6] это означает линейную независимость функциональных форм

$$R^{[n]}(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{\kappa}: |\bar{\kappa}|=N} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) + \sum_{\bar{\kappa}: |\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \sum_{j=1}^m a_j f_j(z),$$

$$n = 0, 1, \dots, \tilde{\omega} - 1.$$

Таким образом, в матрице

$$\left(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \right)_{n=0,1,\dots,\tilde{\omega}-1; \bar{\kappa} \in \Omega}$$

(ранга $\tilde{\omega}$) можно выбрать $\tilde{\omega}$ линейно независимых столбцов. Если делать такой выбор, последовательно двигаясь (в лексикографическом порядке) “слева направо” по столбцам с номерами $\bar{\kappa} \in \Omega$, то базисные столбцы будут иметь номера из некоторого множества $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, причем с некоторыми рациональными функциями

$$\begin{aligned} D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z) &\in \mathbb{C}(z), \\ D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z) &\equiv 0, \quad \bar{\kappa}' \prec \bar{\kappa}, \quad \bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

выполняются равенства

$$P_{\bar{\kappa}'}^{[n]}(z) = \sum_{\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z) = \sum_{\substack{\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega} \\ \bar{\kappa} \prec \bar{\kappa}'}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z),$$

$$n = 0, 1, \dots, \tilde{\omega} - 1, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}.$$

Таким образом,

$$\Delta = \Delta(z) = \det \left(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \right)_{n=0,1,\dots,\tilde{\omega}-1; \bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}} \neq 0,$$

и согласно лемме 1.4, а) находим, что

$$\deg \Delta < \tilde{\omega}M + \frac{\tilde{\omega}(\tilde{\omega}-1)}{2}t. \quad (2.3)$$

Для произвольного решения $a_1, \dots, a_m$ системы (0.3) набор функций

$$x_{\bar{\kappa}} = \begin{cases} \bar{a}^{\bar{\kappa}}, & \text{если } |\bar{\kappa}| = N, \\ \bar{a}^{\bar{\kappa}}(a_1 f_1 + \dots + a_m f_m), & \text{если } |\bar{\kappa}| = N-1, \end{cases}$$

доставляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} x_{\bar{\kappa}} = - \sum_{l,j=1}^m \kappa_j Q_{lj}(z) x_{\bar{\kappa} - \bar{e}_j + \bar{e}_l} + (N - |\bar{\kappa}|) \sum_{l=1}^m Q_{l0}(z) x_{\bar{\kappa} + \bar{e}_l}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega, \quad (2.4)$$

порядка ω . В доказательстве леммы 8 из [8, гл. 3, с. 102–103] рациональные функции $D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}$, $\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}$, $\bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}$, были представлены в виде

$$D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'} = -\frac{\lambda_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}}{\lambda}, \quad \lambda \neq 0, \quad \bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}, \quad (2.5)$$

где λ и $\lambda_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}$ – миноры порядка $(\omega - \tilde{\omega})$ некоторой фундаментальной матрицы решений системы (2.4). Там же было показано, что сумма степеней числителя каждой рациональной функции (2.5) и их общего знаменателя не превосходит некоторой постоянной C_7 , зависящей только от системы линейных дифференциальных уравнений (2.4), которая, в свою очередь, однозначно определяется системой (0.1) и числом N . Но ввиду линейной независимости функций $1, f_1(z), \dots, f_m(z)$ над $\mathbb{C}(z)$ по лемме 3 [8, гл. 3] система (0.1) определена функциями $f_1(z), \dots, f_m(z)$ однозначно. Поэтому $C_7 = C_7(f_1, \dots, f_m; N)$.

Сравнивая коэффициенты при $\bar{a}^{\bar{s}}$, $\bar{s} \in \Theta$, в (1.6), согласно (1.9) и (1.10) получаем

$$\begin{aligned} R_{\bar{s}}^{[n]}(z) &= P_{\bar{s}}^{[n]}(z) + \sum_{j=1}^m P_{\bar{s} - \bar{e}_j}^{[n]}(z) f_j(z) \\ &= \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa}, \bar{s}}(\bar{f}), \quad n = 0, 1, \dots, \tilde{\omega}-1, \quad \bar{s} \in \Theta, \end{aligned}$$

где функции $x_{\bar{\kappa}, \bar{s}}(\bar{f})$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, $\bar{s} \in \Theta$, определяются равенствами

$$\begin{aligned} x_{\bar{\kappa}, \bar{s}}(\bar{f}) &= \delta_{\bar{\kappa}, \bar{s}}, & \text{если } |\bar{\kappa}| = N, \\ x_{\bar{\kappa}, \bar{s}}(\bar{f}) &= \sum_{j=1}^m \delta_{\bar{\kappa} + \bar{e}_j, \bar{s}} f_j(z), & \text{если } |\bar{\kappa}| = N-1, \quad \bar{s} \in \Theta. \end{aligned}$$

Здесь

$$\delta_{\bar{s}', \bar{s}} = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{s}' = \bar{s}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad \bar{s}', \bar{s} \in \Theta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R_{\bar{s}}^{[n]}(z) &= \sum_{\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa}, \bar{s}}(\bar{f}) + \sum_{\bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}'}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa}', \bar{s}}(\bar{f}) \\ &= \sum_{\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \left(x_{\bar{\kappa}, \bar{s}}(\bar{f}) + \sum_{\bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}} D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z) x_{\bar{\kappa}', \bar{s}}(\bar{f}) \right) \\ &= \sum_{\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \tilde{x}_{\bar{\kappa}, \bar{s}}(\bar{f}), \quad n = 0, 1, \dots, \tilde{\omega} - 1, \quad \bar{s} \in \Theta, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\tilde{x}_{\bar{\kappa}, \bar{s}}(\bar{f}) = x_{\bar{\kappa}, \bar{s}}(\bar{f}) + \sum_{\bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}} D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z) x_{\bar{\kappa}', \bar{s}}(\bar{f}), \quad \bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}, \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Согласно [10, предложение 2.1] (и [10, лемма 4.2] в случае $m = 2$) для множества $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ найдутся множества $\Omega_1 \subset \tilde{\Omega}$ и $\Theta_1 \subset \Theta$, для которых

$$\det(\tilde{x}_{\bar{\kappa}, \bar{s}}(\bar{f}))_{\bar{\kappa} \in \Omega_1; \bar{s} \in \Theta_1} \neq 0 \quad (2.7)$$

и величина $\tilde{\theta} = \text{Card } \Omega_1 = \text{Card } \Theta_1$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\theta}} \leq \frac{\omega - \frac{1}{N+m-1}}{\theta} \leq \frac{\omega - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{N+m-1}}{\theta}.$$

Обозначая через $D(z)$ наименьший общий знаменатель рациональных функций (2.2), получаем, что определитель $\chi = \chi(z, f_1(z), \dots, f_m(z))$ матрицы

$$(D(z) \tilde{x}_{\bar{\kappa}, \bar{s}}(\bar{f}) \mid \delta_{\bar{\kappa}, \bar{r}})_{\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}; \bar{s} \in \Theta_1, \bar{r} \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega_1}, \quad (2.8)$$

с точностью до знака равный произведению $D^{\tilde{\theta}}(z)$ и (2.7), есть отличный от нуля многочлен от функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$. В то же время

$$\deg D(z) < C_7, \quad \deg(D(z) \cdot D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z)) < C_7, \quad \bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \tilde{\Omega},$$

и функции $D(z) \tilde{x}_{\bar{\kappa}, \bar{s}}(\bar{f})$, $\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}$, $\bar{s} \in \Theta_1$, являются линейными формами от $1, f_1(z), \dots, f_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ и оценкой C_7 на степени этих коэффициентов. Поэтому степень χ как многочлена от z не выше $\tilde{\theta} C_7$ и по лемме 4 [8, гл. 3] порядок нуля $\chi(z)$ как линейной формы от всевозможных мономов $f_1^{\nu_1}(z) \dots f_m^{\nu_m}(z)$ степени не выше $\tilde{\theta}$ в точке $z = 0$ ограничен сверху некоторой положительной постоянной $C_8 = C_8(f_1, \dots, f_m; \tilde{\theta}, \tilde{\theta} C_7) = C_8(f_1, \dots, f_m; N)$.

Умножим теперь матрицу

$$(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z))_{n=0,1,\dots,\tilde{\omega}-1; \bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}},$$

определитель которой равен Δ , справа на матрицу (2.8) и согласно соотношениям (2.6) получим матрицу

$$\left(D(z) R_{\bar{s}}^{[n]}(z) \mid P_{\bar{r}}^{[n]}(z) \right)_{n=0,1,\dots,\tilde{\omega}-1; \bar{s} \in \Theta_1, \bar{r} \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega_1}.$$

Ее определитель равен $\Delta\chi \neq 0$. В первых $\tilde{\theta}$ столбцах этой матрицы стоят функции, порядок нуля которых в точке $z = 0$ не ниже $K - \tilde{\omega}$ по лемме 1.4,б). Таким образом,

$$\text{ord}_{z=0} \Delta\chi \geq \tilde{\theta}(K - \tilde{\omega}).$$

С другой стороны,

$$\text{ord}_{z=0} \Delta\chi = \text{ord}_{z=0} \Delta + \text{ord}_{z=0} \chi \leq \text{ord}_{z=0} \Delta + C_8,$$

и, значит,

$$\text{ord}_{z=0} \Delta > \tilde{\theta}(K - \tilde{\omega}) - C_8. \quad (2.9)$$

Отсюда согласно (2.3) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq \deg \Delta - \text{ord}_{z=0} \Delta &< \tilde{\omega}M - \tilde{\theta}K + \frac{\tilde{\omega}(\tilde{\omega} - 1)}{2}t + \tilde{\theta}\tilde{\omega} + C_8 \leq \tilde{\omega}M - \tilde{\theta}\frac{\omega - \varepsilon}{\theta}M + C_9 \\ &\leq \tilde{\theta}\frac{\omega - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{N+m-1}}{\theta}M - \tilde{\theta}\frac{\omega - \varepsilon}{\theta}M + C_9 \\ &= -\frac{\tilde{\theta}}{\theta} \cdot \frac{\varepsilon}{N+m-1}M + C_9 \leq -\frac{\varepsilon}{\theta(N+m-1)}M + C_9, \\ C_9 &= C_9(f_1, \dots, f_m; N). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Поскольку величины ε и $N + m - 1$ положительны, для всех натуральных чисел $M > M_3(\varepsilon, N) = M_3(N)$ неравенство (2.10) становится противоречивым. Следовательно, при этих значениях M предположение о том, что определитель (2.1) равен нулю, неверно. Это завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 2.2. *При $M > M_3(N)$ справедливо равенство*

$$\Delta(z) = \det \left(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \right)_{n=0,1,\dots,\omega-1; \bar{\kappa} \in \Omega} = z^{\text{ord}_{z=0} \Delta} \Delta_0(z),$$

где $\Delta_0(z)$ – многочлен, $\Delta_0 \neq 0$ и $\deg \Delta_0 < \varepsilon M + C_{10}$, где положительная постоянная C_{10} зависит только от N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся неравенствами (2.3) и (2.9) с $\tilde{\omega} = \omega$, $\tilde{\theta} = \theta$:

$$\deg \Delta_0 = \deg \Delta - \text{ord}_{z=0} \Delta < \omega M + \frac{\omega(\omega - 1)}{2}t - \theta(K - \omega) + C_8 \leq \varepsilon M + C_{10},$$

что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. В статье [9] отсутствует доказательство утверждения леммы 1.2 о том, что разность степени и порядка нуля функционального определителя есть малая величина (по сравнению со степенью входящих в определитель многочленов), являющегося аналогом доказанной нами леммы 2.2. Поэтому теоремы I и II работы [9] и подобные им теоремы для G -функций нельзя считать доказанными.

Следующие два утверждения (второе является непосредственным следствием первого) реализуют переход от построенных градуированных приближений Паде к приближающим числовым линейным формам. Доказательство первой леммы осуществляется с помощью ставших уже стандартными рассуждений Зигеля, и поэтому опускается (см., например, доказательство леммы 10 [8, гл. 3]).

ЛЕММА 2.3. *При $M > M_3(N)$ ранг числовой матрицы*

$$\left(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(\alpha) \right)_{n=0,1,\dots,\omega+[\varepsilon M]+C_{10}; \bar{\kappa} \in \Omega}$$

равен в точности ω .

ЛЕММА 2.4. *При $M > M_3(N)$ ранг числовой матрицы*

$$\left(P_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha) \quad P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha) \right)_{n=0,1,\dots,\omega+[\varepsilon M]+C_{10}},$$

где, как и раньше, $\bar{s}^ = N\bar{e}_{l^*}$, $\bar{\kappa}^* = (N-1)\bar{e}_{l^*}$, равен двум.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. По заданным $\eta > \eta_0$ и $\varepsilon > 0$ выберем число $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\eta, \varepsilon, \alpha) > 0$ таким образом, чтобы для постоянной

$$C_{11} = b^{(t+1)\varepsilon_1} (C|\alpha|)^{-\varepsilon\varepsilon_1} C_0^{1+\varepsilon_1}$$

выполнялось неравенство

$$\eta_1 = \frac{\eta + \eta_0}{2} > \frac{(1 + t\varepsilon) \log b + \log C_{11}}{(1 - (m + t + 1)\varepsilon) \log b - \log C_{11} - (2 - (m + 1)\varepsilon) \log(C|a|)}. \quad (2.11)$$

Положим

$$M_* = M_*(N, \varepsilon_1, \alpha) = \max \left\{ M_2(N, \varepsilon_1), M_3(N), \frac{\log(C_3 C_4 C_5)}{\varepsilon_1 \log b}, \frac{(2 + \varepsilon_1)(C_{10} + \omega)}{\varepsilon \varepsilon_1} \right\}.$$

Тогда при любых натуральных $M > M_*$ справедливы утверждения лемм 1.5, 2.4 и неравенства

$$C_3 C_4 C_5 \leq b^{\varepsilon_1 M}, \quad \varepsilon M + C_{10} + \omega < \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{2} \right) (\varepsilon M + C_{10} + \omega) \leq (1 + \varepsilon_1) \varepsilon M.$$

Кроме того, при всех $M > M_*$ и $n < \varepsilon M + C_{10} + \omega$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \binom{M}{n} &= \frac{(M-n+1) \dots (M-1)M}{n!} < \frac{M^n}{(n/e)^n} \leq \left(\frac{e}{\varepsilon}\right)^{\varepsilon M + C_{10} + \omega} \\ &\leq \exp\{(1 - \log \varepsilon)(1 + \varepsilon_1)\varepsilon M\}, \\ K - n &\geq \left(\frac{\omega - \varepsilon}{\theta} - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon_1\right)M = \left(2 - \frac{m-1}{N+m-1} - \frac{\varepsilon}{\theta} - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon_1\right)M \\ &\geq \left(2 - \frac{m-1}{1/\varepsilon - 1} - \varepsilon\left(1 + \frac{1}{m}\right) - \varepsilon\varepsilon_1\right)M \geq (2 - (m+1)\varepsilon - \varepsilon\varepsilon_1)M. \end{aligned}$$

Поэтому для заданной $C_{11} > C_0$ и всех $M > M_*$ при $n < \varepsilon M + C_{10} + \omega$ согласно лемме 1.5 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \varphi_{M+tn} \psi'_n b^{M+tn} |P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)| &\leq (b^{1+t\varepsilon} (C|\alpha|)^{\varepsilon\varepsilon_1} C_{11})^M \leq (b^{1+t\varepsilon} C_{11})^M, \\ \varphi_{M+tn} \psi'_n b^{M+tn} |R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)| &\leq (b^{1+t\varepsilon} (C|\alpha|)^{\varepsilon\varepsilon_1} C_{11})^M (C|\alpha|)^{K-n} \\ &\leq (b^{1+t\varepsilon} C_{11} (C|a/b|)^{2-(m+1)\varepsilon})^M. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Возьмем теперь

$$\begin{aligned} q_* &= \max \left\{ \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{(1+t\varepsilon) \log b + \log C_{11}}{\eta_1} M_* \right\}, \right. \\ &\quad \left. \exp \left\{ \frac{(\eta_1 + 1) \log 2 + (1+t\varepsilon) \log b + \log C_{11}}{\eta - \eta_1} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда, полагая для произвольной числовой линейной формы $r = qf_{l^*}(\alpha) - p$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*$,

$$M = \left\lceil \frac{\eta_1 \log(2q)}{(1+t\varepsilon) \log b + \log C_{11}} \right\rceil + 1, \quad (2.13)$$

получим, что $M > M_*$. Кроме того, при $q > q_*$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} M \cdot ((1+t\varepsilon) \log b + \log C_{11}) &\leq \eta_1 \log(2q) + (1+t\varepsilon) \log b + \log C_{11} \\ &< \eta \log q - \log 2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Согласно лемме 2.4 для $M > M_*$ существует $n < \varepsilon M + C_{10} + \omega$ такое, что

$$qP_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha) + pP_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha) \neq 0.$$

Тогда

$$P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)r = -(qP_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha) + pP_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)) + q(P_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha) + P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)f_{l^*}(\alpha))$$

и, поскольку

$$\varphi_{M+tn} \psi'_n b^{M+tn} (qP_{\bar{s}^*}^{[n]}(a/b) + pP_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(a/b))$$

является целым числом, отличным от нуля,

$$\varphi_{M+tn} \psi'_n b^{M+tn} |P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)| \cdot |r| \geq 1 - \varphi_{M+tn} \psi'_n b^{M+tn} |R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)| \cdot q.$$

Согласно оценкам (2.12) и выбору (2.11), (2.13) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{M+tn} \psi'_n b^{M+tn} |R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)| &\leq \exp \left\{ M \cdot \left(-(1 - (m + t + 1)\varepsilon) \log b \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \log C_{11} + (2 - (m + 1)\varepsilon) \log(C|a|) \right) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{\eta_1 \log(2q)}{(1 + t\varepsilon) \log b + \log C_{11}} \cdot \frac{(1 + t\varepsilon) \log b + \log C_{11}}{\eta_1} \right\} = \frac{1}{2} q^{-1}, \end{aligned}$$

откуда

$$\varphi_{M+tn} \psi'_n b^{M+tn} |P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)| \cdot |r| \geq \frac{1}{2}.$$

С помощью оценок (2.12), выбора (2.13) и неравенства (2.14) получаем

$$|r| \geq \frac{1}{2} \exp \left\{ -M \cdot ((1 + t\varepsilon) \log b + \log C_{11}) \right\} > q^{-\eta}.$$

Последнее неравенство завершает доказательство теоремы.

§ 3. Рациональные приближения обобщенных полилогарифмов

Рассматриваются функции

$$f_l(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{(\nu + \lambda)^l}, \quad l = 1, \dots, m, \quad \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\} \quad (3.1)$$

(обобщенные полилогарифмы).

ЛЕММА 3.1. *Функции (3.1) алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения проводится с помощью так называемого “арифметического” метода (см. [8, гл. 8]). Пусть $\lambda = a/b$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ – взаимно простые числа. Обозначим через t произвольное натуральное число. По теореме Дирихле в арифметической прогрессии $\{a + b\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ содержится бесконечное множество простых чисел. Поэтому можно выбрать натуральное $\mu > \max\{t, -2a/b\}$ такое, что число $a + b\mu$ является простым. Тогда точные знаменатели чисел

$$\frac{1}{(\mu + \lambda)^l} = \frac{b^{\mu}}{(a + b\mu)^l}, \quad l = 1, \dots, m,$$

содержат простое число $a + b\mu$ в степенях l , $l = 1, \dots, m$, соответственно, и в то же время знаменатели чисел

$$\frac{1}{(\nu + \lambda)^l} = \frac{b^{\nu}}{(a + b\nu)^l}, \quad \nu = 0, 1, \dots, \mu - 1, \quad l = 1, \dots, m,$$

не делятся на число $a + b\mu$ в силу его простоты и поскольку $a + b\mu > |a + b\nu|$ для всех $\nu = 0, 1, \dots, \mu - 1$. Полагая в лемме 1 [8, гл. 8] $u = 0$, $\varphi_0(z) = z$, $v = m$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, получаем, что функции $z, f_1(z), \dots, f_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Для взаимно простых $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$ через D_n обозначим наименьшее общее кратное чисел

$$a + b\mu, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_n}{n} \leq \rho(b),$$

где функция $\rho(b)$ определяется равенством (0.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого факта мы заимствуем из работы [11] (см. доказательство теоремы 7.1). Не ограничивая общности, считаем $a > 0$, поскольку утверждение леммы можно доказывать с заменой a на $a + b\nu > 0$ для некоторого фиксированного $\nu \in \mathbb{N}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и разложение D_n на простые множители имеет вид

$$D_n = \prod p^{\tau_p},$$

где, очевидно, с некоторым μ , $1 \leq \mu \leq n$, выполнено

$$\tau_p \leq \frac{\log(a + b\mu)}{\log p} \leq \frac{\log(a + bn)}{\log p}.$$

Поэтому

$$D_n \leq \prod p^{\log(a + bn)/\log p} \leq (a + bn)^{N_n},$$

где N_n есть количество простых p , делящих $a + b\mu$ для некоторого μ , $1 \leq \mu \leq n$. Следовательно,

$$N_n = \sum_{1 \leq j \leq b} N_{n,j} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq b \\ (j,b)=1}} N_{n,j} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq b \\ (j,b)>1}} N_{n,j}, \quad (3.2)$$

где $N_{n,j}$ есть количество простых p , удовлетворяющих сравнению $p \equiv j \pmod{b}$ и делящих $a + b\mu$ для некоторого μ , $1 \leq \mu \leq n$. Пусть простое p удовлетворяет последним двум условиям. Если $(j, b) > 1$, то из сравнения $p \equiv j \pmod{b}$ вытекает, что $(p, b) > 1$, т.е. p является делителем числа b , и равенство (3.2) можно записать в виде

$$N_n = \sum_{\substack{1 \leq j \leq b \\ (j,b)=1}} N_{n,j} + O(1),$$

где значение постоянной $O(1)$ не превосходит количества делителей числа b . Если $(j, b) = 1$, то для некоторых натуральных u, v выполнено $p - j = ub$ и $pv = a + b\mu$. Тогда $ju \equiv a \pmod{b}$ и, значит, $v \geq i_j$, где i_j – единственное целое решение сравнения $ji_j \equiv a \pmod{b}$ в интервале $1 \leq i_j \leq b$. Следовательно,

$$p = \frac{a + b\mu}{v} \leq \frac{a + bn}{i_j}$$

и

$$N_{n,j} \leq \pi((a + bn)/i_j, b, j),$$

где $\pi(x, b, j)$ обозначает число простых p , не превосходящих x , таких, что выполнено $p \equiv j \pmod{b}$. По теореме о распределении простых чисел в арифметической прогрессии имеем

$$\pi((a + bn)/i_j, b, j) \sim \frac{(a + bn)/i_j}{\varphi(b) \log((a + bn)/i_j)} \sim \frac{b}{i_j \varphi(b)} \cdot \frac{n}{\log(a + bn)}$$

при $n \rightarrow \infty$. Окончательно получаем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_n}{n} \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq b \\ (j, b) = 1}} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{n,j} \log(a + bn)}{n} \leq \frac{b}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leq j \leq b \\ (j, b) = 1}} \frac{1}{i_j}.$$

Осталось заметить, что когда j пробегает полную систему вычетов по модулю b , соответствующие i_j также пробегают эту систему вычетов.

ЛЕММА 3.3. *Совокупность обобщенных полилогарифмических функций (3.1) принадлежит классу $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, 1, e^{m\rho(\text{den } \lambda)})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Радиус сходимости степенных рядов (3.1) равен 1. Если $\lambda = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ для заданных a, b взята из леммы 3.2, то

$$\frac{D_n^m}{(\nu + \lambda)^l} \in \mathbb{Z}, \quad l = 1, \dots, m, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Осталось воспользоваться оценкой леммы 3.2.

Совокупность функций (3.1) удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-z} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{z} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{z} & -\frac{\lambda}{z} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{z} & -\frac{\lambda}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Поэтому матрица $S = (S_{jl}(z))_{j,l=1,\dots,m}$ системы линейных дифференциальных уравнений (0.3) имеет вид $S = \frac{1}{z}\Lambda$, где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

— числовая матрица.

ЛЕММА 3.4. Пусть матрица системы линейных дифференциальных уравнений (0.3) имеет вид $S = \frac{1}{z}\Lambda$, где Λ – числовая матрица. Тогда для матриц

$$S^{[n]} = \left(S_{jl}^{[n]}(z) \right)_{j,l=1,\dots,m}, \quad n \in \mathbb{N},$$

систем линейных дифференциальных уравнений (0.4) справедливо представление

$$S^{[n]} = \frac{1}{z^n} \Lambda (\Lambda - E) (\Lambda - 2E) \dots (\Lambda - (n-1)E), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

где E – единичная матрица размера m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать требуемое утверждение индукцией по $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ его истинность непосредственно вытекает из условия. Пусть представление (3.5) выполнено для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Согласно рекуррентным соотношениям (0.6) имеем

$$\begin{aligned} S^{[n+1]} &= \frac{d}{dz} S^{[n]} + S^{[n]} \cdot S = -\frac{n}{z^{n+1}} \Lambda (\Lambda - E) (\Lambda - 2E) \dots (\Lambda - (n-1)E) \\ &\quad + \frac{1}{z^{n+1}} \Lambda (\Lambda - E) (\Lambda - 2E) \dots (\Lambda - (n-1)E) \cdot \Lambda \\ &= \frac{1}{z^{n+1}} \Lambda (\Lambda - E) (\Lambda - 2E) \dots (\Lambda - (n-1)E) (\Lambda - nE), \end{aligned}$$

что доказывает утверждение леммы для $n+1$, а значит, и для всех натуральных n .

Определим целозначный многочлен

$$\Delta_n(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Согласно лемме 3.4 выполнено

$$\frac{z^n S^{[n]}}{n!} = \Delta_n(\Lambda), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

где матрица Λ определяется равенством (3.4).

ЛЕММА 3.5. Пусть матрица Λ определяется равенством (3.4). Тогда

$$\Delta_n(\Lambda) = \begin{pmatrix} \varkappa_{0,n}(\lambda) & \varkappa_{1,n}(\lambda) & \varkappa_{2,n}(\lambda) & \dots & \varkappa_{m-1,n}(\lambda) \\ 0 & \varkappa_{0,n}(\lambda) & \varkappa_{1,n}(\lambda) & \dots & \varkappa_{m-2,n}(\lambda) \\ 0 & 0 & \varkappa_{0,n}(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \varkappa_{1,n}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varkappa_{0,n}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\varkappa_{j,n}(\lambda) = \frac{(-1)^j}{j!} \Delta_n^{(j)}(\lambda), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad n \in \mathbb{N},$$

а дифференцирование ведется по переменной λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем многочлен $\Delta_n(\lambda)$ в виде

$$\Delta_n(\lambda) = \sum_{\nu=1}^n r_{\nu,n} \lambda^\nu, \quad n \in \mathbb{N},$$

и воспользуемся этим разложением с заменой λ на Λ :

$$\Delta_n(\Lambda) = \sum_{\nu=1}^n r_{\nu,n} \Lambda^\nu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку матрица (3.4) имеет “почти жорданову” форму, ее степени выглядят достаточно просто, а именно

$$\Lambda^\nu = \begin{pmatrix} \tau_{0,\nu}(\lambda) & \tau_{1,\nu}(\lambda) & \tau_{2,\nu}(\lambda) & \dots & \tau_{m-1,\nu}(\lambda) \\ 0 & \tau_{0,\nu}(\lambda) & \tau_{1,\nu}(\lambda) & \dots & \tau_{m-2,\nu}(\lambda) \\ 0 & 0 & \tau_{0,\nu}(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \tau_{1,\nu}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_{0,\nu}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

где

$$\tau_{j,\nu}(\lambda) = \begin{cases} (-1)^j \binom{\nu}{j} \lambda^{\nu-j}, & \text{если } j \leq \nu, \\ 0, & \text{если } j > \nu, \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, матрица $\Delta_n(\Lambda)$ имеет треугольный вид, указанный в формулировке леммы 3.5, причем

$$\begin{aligned} \varkappa_{j,n} &= \sum_{\nu=1}^n r_{\nu,n} \tau_{j,\nu}(\lambda) = \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{\nu=\max\{1,j\}}^n r_{\nu,n} \frac{\nu!}{(\nu-j)!} \lambda^{\nu-j} \\ &= \frac{(-1)^j}{j!} \Delta_n^{(j)}(\lambda), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

ЛЕММА 3.6. Для $\lambda = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$, через E_n обозначим наименьший общий знаменатель чисел

$$\frac{b^\mu \Delta_\mu^{(j)}(\lambda)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad \mu = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log E_n}{n} \leq \chi(b) + m - 1,$$

где функция $\chi(b)$ определяется равенством (0.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в теореме работы [12] $L = H = n$, $Q = b$, $x = -a$, $M = m - 1$, $\Lambda = 1$, получаем, что E_n делит число

$$\prod_{p|b} p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]} \cdot D_n^{m-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$. Учитывая, что

$$\prod_{p|b} p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]} \leq e^{n\chi(b)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_n}{n} \leq \rho(1) = 1$$

согласно лемме 3.2, получаем требуемое.

ЛЕММА 3.7. Система однородных линейных дифференциальных уравнений, сопряженная к однородной части системы (3.3), принадлежит классу $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, e^{\chi(\text{den } \lambda) + m - 1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения непосредственно следует из равенства (3.6), результатов лемм 3.5, 3.6 и того факта, что $T_*(z) = \text{den } \lambda \cdot z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2 получается теперь подстановкой результатов лемм 3.3, 3.7, неравенств (0.8) и $t = 1$ в основную теорему для функции $f_m(z)$.

Список литературы

1. Siegel C. L. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1929–1930. № 1. P. 1–70.
2. Нурмагомедов М. С. Об арифметических свойствах значений G -функций // Матем. сб. 1971. Т. 85 (127). № 3 (7). С. 339–365.
3. Нурмагомедов М. С., Чирский В. Г. Об арифметических свойствах значений некоторых функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механика. 1973. № 1. С. 19–26; № 2. Р. 38–45.
4. Галочкин А. И. Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса // Матем. сб. 1974. Т. 95 (137). № 3 (11). С. 396–417.
5. Галочкин А. И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых G -функций // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 4. С. 541–552.
6. Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V. Applications of Padé approximations to Diophantine inequalities in values of G -functions // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1135. P. 9–51.
7. André Y. G -functions and Geometry. Aspects of Mathematics. V. E13. Braunschweig: Vieweg, 1989.
8. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
9. Chudnovsky G. V. On some applications of diophantine approximations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1984. V. 81. March. P. 1926–1930.
10. Зудилин В. В. О рациональных приближениях значений одного класса целых функций // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 4. С. 89–124.
11. Hata M. On the linear independence of the values of polylogarithmic functions // J. de Mathématiques pures et appliquées. 1990. V. 69. № 2. P. 133–173.
12. Матвеев Е. М. Об арифметических свойствах значений обобщенных биномиальных многочленов // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 4. С. 76–81.