Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Хэкало, Дифференциальный оператор Кэли–Лапласа на пространстве прямоугольных матриц, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 1, 195–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im631>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:36:11

УДК 517.944

С. П. Хэкало

Дифференциальный оператор Кэли–Лапласа на пространстве прямоугольных матриц

На пространстве прямоугольных вещественных матриц изучается однородный дифференциальный оператор Кэли–Лапласа. На основе потенциалов Рисса находятся фундаментальные решения этого оператора и некоторых его степеней. Устанавливается, что оператор Кэли–Лапласа удовлетворяет усиленному принципу Гюйгенса. Используя сплетающие операторы со спектральными параметрами, производим деформации оператора Кэли–Лапласа и находим достаточные условия, при которых эти деформации удовлетворяют усиленному принципу Гюйгенса.

Библиография: 36 наименований.

§ 1. Введение

В работах по иерархии гюйгенсовых дифференциальных операторов и гипотезе Адамара (см. [1], [2] и цитированную там литературу) существенное место уделено исследованию деформаций известных гюйгенсовых операторов. Одним из методов установления принципа Гюйгенса как для исходных, так и для деформированных операторов является так называемый метод ядра Рисса [2], [3]. В основе этого метода лежат естественные обобщения интегралов Римана–Лиувилля [4]–[6] и операторов Рисса в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах [7], [8], [2], [3]. Последние операторы используются в задачах многих разделов математики и, в частности, в интегральной геометрии [9], [10].

В настоящей работе, анонсированной в [11], строится аналог потенциалов Рисса в пространстве $\mathbb{R}^{n \times m}$ вещественных прямоугольных $(n \times m)$ -матриц, порожденных функцией $(\det 'xx)^{\lambda/2}$, где $'x$ – транспонированная матрица, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $n > m \geq 1$.

Пусть $\partial = (\partial/\partial x_{ij})$ – матрица символов частных производных. Дифференциальный оператор Кэли–Лапласа $\Delta_m = \det(' \partial \partial)$ не является гиперболическим, однако удовлетворяет принципу Гюйгенса в усиленной форме. При некоторых ограничениях на параметры m и n его главное фундаментальное решение сосредоточено на поверхности коразмерности большей единицы. Подобные (в смысле выполнения усиленного принципа Гюйгенса) сильно однородные дифференциальные операторы рассматривались в работах [12], [4]–[6].

Цель настоящей работы – установить выполнение усиленного принципа Гюйгенса для оператора Δ_m и его степеней на основе потенциалов Рисса в $\mathbb{R}^{n \times m}$, осуществить некоторую деформацию этих операторов, найти достаточные условия,

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке и РФФИ (проект № 05-01-00248).

при которых деформированные операторы гюйгенсовы. В целом, постановка задачи заимствована из [13], [2], [8].

Аналогичная задача изогюйгенсовой деформации операторов Гиндикина [5], связанных со специальным несамосопряженным конусом ранга три, рассмотрена в работе [14].

Кратко опишем содержание статьи. В § 2 приведены общие сведения об операторах Кэли–Лапласа. В § 3, 4 подробно изучается обобщенная функция $|x|_m^\lambda \equiv (\det 'xx)^{\lambda/2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $n > m$, введенная, но мало изученная в [15] (случай $n = m$ подробно рассмотрен в [16]). Указываются ее полюсы, преобразование Фурье и действие на нее оператора Кэли–Лапласа. В точках, являющихся полюсами для $|x|_m^\lambda$, находятся значения соответствующей нормированной обобщенной функции и описывается ее носитель. Для этого вводится дельта-функция $\delta_r(x)$, связанная с поверхностью матриц x в $\mathbb{R}^{n \times m}$, ранг r которых меньше m . В явном виде находятся фундаментальные решения операторов Δ_m^p , $p = 1, \dots, [(n-m)/2]$ ($[\cdot]$ – целая часть числа) и условие $2p \leq \min\{m-1, n-m\}$ выполнения для них принципа Гюйгенса в усиленной форме. В § 5 вводятся потенциалы Рисса и устанавливаются их свойства. Потенциалы образуют ядро Рисса (в смысле работы [3]) для оператора Δ_m в некоторой комплексной полуплоскости. В § 6, по аналогии с [17], вводятся деформации операторов Кэли–Лапласа при помощи потенциалов Лагнеше–Штельмахера [1], [2]. Методом сплетающих операторов со спектральным параметром (см., например, [8], [2]) получаются достаточные условия выполнения для них принципа Гюйгенса в усиленной форме. Для деформаций оператора Кэли–Лапласа с помощью операторов косого присоединенного действия в явном виде выписываются ядра Рисса и фундаментальные решения.

§ 2. Операторы Кэли–Лапласа

1. Определения. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{n \times m}$, $n > m \geq 1$, с группой преобразований

$$x \rightarrow gx = g_1 x g_2, \quad g_1 \in O(n), \quad g_2 \in GL(m).$$

Здесь $O(n)$ – группа ортогональных $(n \times n)$ -матриц и $GL(m)$ – группа невырожденных матриц порядка m . Очевидно, что подмножество $\mathbb{R}^{n \times m} \setminus \{x | \det 'xx = 0\}$ инвариантно относительно этих преобразований. Инвариантная мера на нем имеет следующий вид:

$$\mu(dx) = \frac{dx}{(\det 'xx)^{n/2}}, \quad dx = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m dx_{ij}.$$

Многочлен $P(x) = \det('xx)$ называется *определителем Грама* (см., например, [18, с. 212]),

$$P(x) = \det \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_1 & \dots & x_1 \cdot x_m \\ \dots & \dots & \dots \\ x_m \cdot x_1 & \dots & x_m \cdot x_m \end{pmatrix}, \quad x_j \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

(точка означает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$). Значение $P^{1/2}(x)$ задает объем параллелепипеда, построенного на векторах $x_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Пусть $\partial = (\partial/\partial x_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, – матрица частных производных. С многочленом $P(x)$ ассоциирован однородный дифференциальный оператор

$$\Delta_m = \det(' \partial \partial)$$

порядка $2m$. При $m = 1$ это обычный оператор Лапласа на $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_{11}^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{1n}^2}.$$

При $m = n$ оператор Δ_m является квадратом оператора Кэли (см. [19, с. 51]). В связи с этим оператор Δ_m естественно назвать *оператором Кэли–Лапласа*.

2. Простейшие свойства. Относительно действия группы преобразований пространства $\mathbb{R}^{n \times m}$ оператор Кэли–Лапласа обладает свойством модулярной однородности [12]:

$$\Delta_m[f(g_1 x g_2)] = (\det g_2)^2 [\Delta_m f](g_1 x g_2).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Оператор Δ_m не гиперболический.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и $P(y) \neq 0$, т.е. матрица y имеет ранг m . Тогда для нее имеется разложение

$$y = g_1 d g_2, \quad g_1 \in O(n), \quad g_2 \in O(m), \quad d = \begin{pmatrix} r & \\ & 0 \end{pmatrix},$$

$$r = \text{diag}\{r_1, \dots, r_m\}, \quad r_j \neq 0.$$

Для найденных матриц g_1, g_2 и матрицы

$$e^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

зафиксируем $x = g_1 e^- d g_2$. Тогда из равенства $P(x + \lambda y) = 0$, т.е.

$$\det((g_2' d' e^- g_1 + \lambda' g_2' d' g_1)(g_1 e^- d g_2 + \lambda g_1 d g_2)) = 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} \det(g_2' (d' e^- + \lambda' d) (e^- d + \lambda d) g_2) &= 0, \\ \det(d' e^- e^- d + \lambda' d' (e^- + e^-) d + \lambda^2 d' d) &= 0, \\ \det(d' e^- e^- d + \lambda^2 d' d) &= 0, \\ \det \left(\begin{pmatrix} r_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} r_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r_3^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_m^2 \end{pmatrix} \right) &= 0, \\ \lambda^{2(m-2)} (\lambda^2 + 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждой матрицы $y \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $P(y) \neq 0$, найдется матрица x такая, что уравнение $P(x + \lambda y) = 0$ имеет комплексный корень λ . Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Поскольку для ненулевых матриц x ранга $1 \leq r < m$, $m > 1$, имеет место равенство $P(x) = 0$, то оператор Δ_m не является эллиптическим. Для $m = 1$ оператор Δ_1 – эллиптический.

3. Радиальная часть оператора Кэли–Лапласа. Пусть функция $f(x)$ $2m$ раз дифференцируема на $\mathbb{R}^{n \times m}$ и удовлетворяет условию левой $O(n)$ -инвариантности:

$$f(g_1 x) = f(x), \quad g_1 \in O(n).$$

В силу разложения $x = \omega \rho^{1/2}$, $\omega \in U_{n,m}$, $\rho \in V_m$ [20], где V_m – конус положительно определенных симметрических $(m \times m)$ -матриц, функция f является функцией на замыкании V_m . Естественно называть ее *радиальной функцией*:

$$f(x) = f_0(\rho) = f_0('xx).$$

Далее, рассмотрим оператор Кэли на V_m :

$$\mathcal{D}_m = \det \left(\varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial \rho_{ij}} \right), \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ \frac{1}{2}, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, m.$$

В работе [4] показано, что

$$\mathcal{D}_m (\det \rho)^\lambda = \lambda \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \dots \left(\lambda + \frac{m-1}{2} \right) (\det \rho)^{\lambda-1}, \quad \rho \in V_m, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть $\mathcal{R}(\Delta_m)$ – радиальная часть оператора Кэли–Лапласа, т.е. для радиальной функции выполнено равенство

$$(\Delta_m f)(x) = (\mathcal{R}(\Delta_m) f_0)('xx).$$

Следующее предложение описывает $\mathcal{R}(\Delta_m)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [21]. *Радиальная часть оператора Кэли–Лапласа имеет вид*

$$\mathcal{R}(\Delta_m) = 4^m (\det \rho)^{(m-n+1)/2} \mathcal{D}_m (\det \rho)^{(n-m+1)/2} \mathcal{D}_m.$$

4. Δ_m -дифференцирование. В работах [21], [11] установлено важное

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Имеет место формула Δ_m -дифференцирования*

$$\Delta_m (\det 'xx)^\mu = (-1)^m (2\mu, m) (-2\mu - n + 2, m) (\det 'xx)^{\mu-1}, \quad \mu \in \mathbb{C},$$

где $(\mu, m) = \mu(\mu+1) \dots (\mu+m-1)$ – символ Похгаммера.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В случае произвольного $n \geq 2$ и $m = 2$ формулы Δ_2 -дифференцирования легко проверить непосредственно. Действительно, пусть

$$I_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^{n \times 2}} |y|_2^\lambda e^{-\text{tr}'yy'xx} dy = \frac{\pi^n}{\Gamma_2(\frac{n}{2})} \Gamma_2\left(\frac{\lambda+n}{2}\right) |x|_2^{-\lambda-n},$$

$$|x|_m^\lambda = (\det'xx)^{\lambda/2}.$$

Поскольку

$$\Delta_m(\partial_x) e^{-\text{tr}'yy'xx} = |y|_2^2 \Delta_m(\partial_z) e^{-\text{tr}'zz} \Big|_{z=x(yy)^{1/2}},$$

то

$$\Delta_m(\partial_x) e^{-\text{tr}'yy'xx} = |y|_2^2 [4n(n-1) - 8(n-1) \text{tr}'yy'xx + 16|x|_2^2 |y|_2^2] e^{-\text{tr}'yy'xx}$$

и

$$\begin{aligned} \Delta_m(\partial_x) I_\lambda(x) &= (c_\lambda^1 + c_\lambda^2 + c_\lambda^3) |x|_2^{-\lambda-n-2}, \\ c_\lambda^1 &= 4n(n-1) \frac{\pi^n}{\Gamma_2(\frac{n}{2})} \Gamma_2\left(\frac{\lambda+n+2}{2}\right), \\ c_\lambda^2 &= 16 \frac{\pi^n}{\Gamma_2(\frac{n}{2})} \Gamma_2\left(\frac{\lambda+n+4}{2}\right), \\ c_\lambda^3 &= -8(n-1) \frac{\pi^n(\lambda+n+2)}{\Gamma_2(\frac{n}{2})} \Gamma_2\left(\frac{\lambda+n+2}{2}\right). \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\Delta_m |x|_2^\lambda = \lambda(\lambda+1)(\lambda+n-2)(\lambda+n-3) |x|_2^{\lambda-2}, \quad m=2, \quad n=2, 3, 4, \dots$$

Многочлен Бернштейна [22], связанный с формулой Δ_m -дифференцирования, имеет вид

$$b_{\det'xx}(\Delta_m; \mu) = (-1)^m (2\mu+2, m)(-2\mu-n, m).$$

Из работы [23] и формулы Δ_m -дифференцирования вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Нули μ_* многочлена Бернштейна и только они должны породить полюсы дзета-функции Игузы

$$Z_{\det'xx}(\varphi, \mu) = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} (\det'xx)^\mu \varphi(x) dx$$

в точках $\mu_* - j$, $j = 0, 1, \dots$

(Здесь и всюду далее φ – основная функция, являющаяся бесконечно дифференцируемой с быстро убывающими производными или бесконечно дифференцируемой с компактным носителем.)

5. Деформации. Без ограничения общности выделим в пространстве $\mathbb{R}^{n \times m}$ переменную x_{11} . Пусть

$$P^*(x) = \det \begin{pmatrix} x_2 \cdot x_2 & \dots & x_2 \cdot x_m \\ \dots & \dots & \dots \\ x_m \cdot x_2 & \dots & x_m \cdot x_m \end{pmatrix}, \quad x_j \in \mathbb{R}^n, \quad j = 2, \dots, m.$$

Однородному многочлену $P^*(x)$ степени $2(m-1)$ от $(n-1)(m-1)$ переменных также соответствует оператор Кэли–Лапласа

$$\Delta_m^* = \det(' \partial^* \partial^*), \quad \partial^* = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_{i=2, \dots, n; j=2, \dots, m},$$

который при $m = 1$ считается тождественным.

Операторы вида

$$\mathcal{L} = \Delta_m + u(x_{11}) \circ \Delta_m^*$$

и их степени, где $u(x_{11})$ – некоторая дробно-рациональная функция по переменной x_{11} , $\circ$ – знак композиции операторов, назовем *деформациями операторов Кэли–Лапласа*.

§ 3. Обобщенная функция $|x|_m^\lambda$

1. Определение. Полюсы. В области $\operatorname{Re} \lambda > -n+m-1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, обобщенная функция $|x|_m^\lambda$ определяется равенством

$$(|x|_m^\lambda, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} (\det('xx))^{(\lambda+n)/2} \varphi(x) \mu(dx) = Z_{|x|_m}(\varphi, \lambda),$$

где φ – основная функция.

В указанной области функция $\lambda \rightarrow |x|_m^\lambda$ аналитична, так как

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} |x|_m^\lambda, \varphi \right) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} (\det('xx))^{(\lambda+n)/2} \ln(\det('xx)) \varphi(x) \mu(dx).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Функция $\lambda \rightarrow |x|_m^\lambda$ мероморфна в $\mathbb{C}$ и имеет полюсы на арифметической прогрессии $\lambda = -n+m-1, -n+m-2, \dots, -n, -n-1, \dots$*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U_{n,m}$ – многообразие Штифеля ортонормированных m -реперов в $\mathbb{R}^n$, естественным образом отождествленных с $(n \times m)$ -матрицами, и T_m^+ – множество верхних треугольных $(m \times m)$ -матриц с положительными диагональными элементами t_{ii} .

При $\operatorname{Re} \lambda > -n+m-1$ в интеграле $(|x|_m^\lambda, \varphi)$ перейдем к полярным координатам $x = \omega t$, $\omega \in U_{n,m}$, $t \in T_m^+$. Как известно [24],

$$dx = \prod_{i=1}^m (t_{ii})^{n-i} dt_{ii} dt' d\omega, \quad dt' = \prod_{i < j} dt_{ij}, \quad \int_{U_{n,m}} d\omega = 2^m \frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m(\frac{n}{2})}.$$

В результате имеем

$$(|x|_m^\lambda, \varphi) = \int_{\mathbb{R}_+^m} \prod_{i=1}^m (t_{ii})^{\lambda+n-i} f_\varphi(t_{11}, \dots, t_{mm}) dt_{11} \dots dt_{mm},$$

где

$$f_\varphi(t_{11}, \dots, t_{mm}) = \int_{\mathbb{R}^{m(m-1)/2} \times U_{n,m}} \varphi(\omega t) dt' d\omega.$$

Функция f_φ определена предыдущей формулой фактически на всем $\mathbb{R}^m$ как четная по каждому t_{ii} , $i = 1, \dots, m$. Следовательно (см. [25, лемма 5.4]), функция $h(t_{11}^2, \dots, t_{mm}^2) = f_\varphi(t_{11}, \dots, t_{mm})$ является основной по переменным t_{ii}^2 , $i = 1, \dots, m$. Таким образом,

$$\begin{aligned} (|x|_m^\lambda, \varphi) &= \frac{1}{2^m} \int_{\mathbb{R}_+^m} \prod_{i=1}^m (s_{ii})^{(\lambda+n-i-1)/2} h(s_{11}, \dots, s_{mm}) ds_{11} \dots ds_{mm} \\ &= \frac{1}{2^m} \left(\prod_{i=1}^m (s_{ii})_+^{(\lambda+n-i-1)/2}, h(s_{11}, \dots, s_{mm}) \right), \end{aligned}$$

где $(s_{ii})_+^\mu$ – обобщенная функция, отвечающая обычной функции $(s_{ii})_+^\mu$, равной s_{ii}^μ при $s_{ii} > 0$ и нулю при $s_{ii} < 0$.

Последняя формула и результаты [26] дают мероморфность функции $\lambda \rightarrow |x|_m^\lambda$ как произведения мероморфных функций $\lambda \rightarrow (s_{ii})_+^{(\lambda+n-i-1)/2}$. Кроме этого, полюсы $|x|_m^\lambda$ могут быть только лишь на серии точек $\lambda = -n + i + 1 - 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, m$.

Далее, пусть

$$\Gamma_m(\lambda) := \pi^{m(m-1)/4} \prod_{i=1}^m \Gamma\left(\lambda - \frac{i-1}{2}\right)$$

– гамма-функция конуса положительно определенных матриц [4], [5] ($\Gamma(\cdot)$ – стандартная гамма-функция Эйлера) и tr – след матрицы.

Вычисляя

$$\begin{aligned} (|x|_m^\lambda, e^{-\text{tr}'xx}) &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} (\det('xx))^{\lambda/2} e^{-\text{tr}'xx} dx \\ &= \int_{U_{n,m}} d\omega \int_{T_m^+} e^{-\Sigma_{i,j} t_{ij}^2} \prod_{i=1}^m (t_{ii})^{\lambda+n-i} dt_{ii} dt' \\ &= 2^m \frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m(\frac{n}{2})} \prod_{i=1}^m \int_0^{+\infty} v^{\lambda+n-i} e^{-v^2} dv \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv \right)^{m(m-1)/2} \\ &= \frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m(\frac{n}{2})} \Gamma_m\left(\frac{\lambda+n}{2}\right), \end{aligned}$$

получим, что $|x|_m^\lambda$ имеет полюсы во всех указанных точках. Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Причина, по которой нули

$$-1, \quad -\frac{3}{2}, \quad \dots, \quad -\frac{m+1}{2}; \quad -\frac{n}{2}, \quad -\frac{n+1}{2}, \quad \dots, \quad -\frac{n+m-2}{2}$$

многочлена Бернштейна $b_{\det 'xx}(\Delta_m; \mu)$ не дают полюсов функции $Z_{\det 'xx}(\varphi, \mu)$, по гипотезе о монодромии [34] должна объясняться топологией множества $(\det 'xx)^{-1}(0)$ вырожденных матриц в $\mathbb{R}^{n \times m}$. Для $m = 1$ ситуация ясна: если $\gamma_1(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ и $\gamma_2(x) = x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$, то для дзета-функции

$$Z_\varphi(\mu, \gamma_1) = \int_{\mathbb{R}^n} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^\mu \varphi(x) dx$$

нет полюсов в точках $-1, -2, \dots$, соответствующих корню -1 многочлена $b_{\gamma_1}(\Delta; \mu) = 4(\mu + 1)(\mu + n/2)$, в то время как для дзета-функции

$$Z_\varphi(\mu, \gamma_2) = \int_{x_2^2 - \dots - x_n^2 \leq x_1^2} (x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)^\mu \varphi(x) dx$$

с таким же многочленом Бернштейна $b_{\gamma_2}(\square; \mu) = 4(\mu + 1)(\mu + n/2)$ все полюсы $-1, -2, \dots; -n/2, -n/2 - 1, \dots$ есть [26]. Это соответствует тому, что топология конуса

$$\gamma_2^{-1}(0) = \{x \mid x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 = 0\}$$

резко отличается от топологии одноточечного множества $\gamma_1^{-1}(0) = \{0\}$.

2. Нормировка. Обобщенная функция $|x|_m^\lambda$ имеет полюсы в тех же точках и того же порядка, что и гамма-функция $\Gamma_m((\lambda + n)/2)$.

Произведем нормировку обобщенной функции $|x|_m^\lambda$, положив

$$\Phi_0^{(\lambda)}(x) = \frac{|x|_m^\lambda}{(|x|_m^\lambda, e^{-\operatorname{tr} 'xx})}.$$

В результате обобщенная функция

$$\Phi_0^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma_m(\frac{n}{2})}{\pi^{nm/2}} \frac{|x|_m^\lambda}{\Gamma_m(\frac{\lambda+n}{2})}$$

является целой по комплексному параметру λ .

Из формулы Δ_m -дифференцирования нетрудно получается

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Имеют место формулы*

$$\begin{aligned} \Delta_m \Phi_0^{(\lambda)}(x) &= 2^m (\lambda, m) \Phi_0^{(\lambda-2)}(x), \\ \Delta_m^p \Phi_0^{(\lambda)}(x) &= 2^{pm} \prod_{i=0}^{p-1} (\lambda - 2i, m) \Phi_0^{(\lambda-2p)}(x), \quad p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

3. Преобразование Фурье обобщенной функции $|x|_m^\lambda$. На основе функционального свойства дзета-функции Игузы в работах [21], [27] и [28] установлено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *При $\lambda \neq -n + m - k$, $k \in \mathbb{N}$, преобразование Фурье обобщенной функции $|x|_m^\lambda$ имеет вид*

$$\mathcal{F}(|x|_m^\lambda)(y) = 2^{(\lambda+n)m} \pi^{nm/2} \frac{\Gamma_m\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma_m\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} |y|_m^{-\lambda-n}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Ясно, что область одновременной регулярности левой и правой частей последнего равенства совпадает с множеством $-n + m - 1 < \operatorname{Re} \lambda < -m + 1$. В этой связи во многих работах (см., например, [10] и приведенные там ссылки) было отмечено, что при нахождении преобразования Фурье функционала $|x|_m^\lambda$ можно использовать равенство Парсеваля [29, с. 55, 56] лишь при $n \geq 2m - 1$. Однако, как показано в [28], можно обобщить $|x|_m^\lambda$ на случай обобщенной функции, отвечающей сложной степенной функции с многомерным комплексным параметром так, что метод работы [29] применим при всех m и $n \geq m$. Таким образом, левая и правая части соответствующего (более общего) равенства всегда имеют общую область регулярности, а указанное в предложении 3.1 равенство получается как частный случай.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *При $n \geq m$ имеем*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Phi_0^{(\lambda)})(y) &= 2^{(\lambda+n)m} \pi^{nm/2} \Phi_0^{(-\lambda-n)}(y), \\ \Phi_0^{(-n)}(x) &= \delta(x). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n \geq m$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Phi_0^{(\lambda)})(y) &= \frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{nm/2}} \frac{\mathcal{F}(|x|_m^\lambda)(y)}{\Gamma_m\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} \\ &= 2^{(\lambda+n)m} \Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right) \frac{|y|_m^{-\lambda-n}}{\Gamma_m\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} = 2^{(\lambda+n)m} \pi^{nm/2} \Phi_0^{(-\lambda-n)}(y), \\ \mathcal{F}(\Phi_0^{(-n)})(y) &= \pi^{nm/2} \Phi_0^{(0)}(y) = |y|_m^0 = 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\Phi_0^{(-n)}(x) = \delta(x).$$

§ 4. Значения $\Phi_0^{(\lambda)}$ в “особых” точках

1. Значения в точках $\lambda = -n - 2p$, $p = 0, 1, 2, \dots$. На основе преобразования Фурье мы указали, что $\Phi_0^{(-n)}$ есть дельта-функция, сосредоточенная в точке $0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$. В следующем предложении дается непосредственное доказательство этого факта, которое будет использовано для нахождения значений $\Phi_0^{(-n+r)}$, $r = 1, 2, \dots, m - 1$. Метод доказательства заимствован из работы [16], где рассмотрен случай $n = m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Имеет место равенство*

$$\Phi_0^{(-n)}(x) = \delta(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\operatorname{Re} \lambda > -n + m - 1$ в полярных координатах $x = \omega t$, $\omega \in U_{n,m}$, $t \in T_m^+$, имеем

$$\frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m(\frac{n}{2})} (\Phi_0^{(\lambda)}, \varphi) = \frac{1}{\Gamma_m(\frac{\lambda+n}{2})} \int_{T_m^+} \prod_{i=1}^m (t_{ii})^{\lambda+n-i} dt \int_{U_{n,m}} \varphi(\omega t) d\omega.$$

Тогда $\Phi_0^{(\lambda)}$ является прямым произведением обобщенных функций

$$(t_{ii})_+^{\lambda+n-i} \times 1(t_{i-1,i}) \times \cdots \times 1(t_{1i}), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

на подпространствах $\mathbb{R}^i$ переменных $t_i = (t_{1i}, \dots, t_{ii})$, $i = 1, \dots, m$, соответственно. Здесь функция

$$\int_{U_{n,m}} \varphi(\omega t) d\omega$$

является основной на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^m$.

Для упрощения запись $1(\cdot)$ будем опускать. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m(\frac{n}{2})} (\Phi_0^{(-n)}, \varphi) &= \frac{1}{\pi^{m(m-1)/4}} \left(\frac{(t_{mm})_+^{\lambda+n-m}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-m+1}{2})} \Big|_{\lambda=-n}, \right. \\ &\quad \left(\frac{(t_{m-1,m-1})_+^{\lambda+n-m+1}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-m+2}{2})} \Big|_{\lambda=-n} \cdots \left(\frac{(t_{22})_+^{\lambda+n-2}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})} \Big|_{\lambda=-n}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{(t_{11})_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})} \Big|_{\lambda=-n}, \int_{U_{n,m}} \varphi(\omega t) d\omega \right)_{\mathbb{R}} \right)_{\mathbb{R}^2} \right)_{\mathbb{R}^{m-1}} \Big|_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned}$$

В силу формулы Лежандра

$$\Gamma(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\lambda-1}} \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda + 1/2)}$$

об удвоении аргумента гамма-функции и результатов [26] имеем

$$\begin{aligned} \frac{(t_{11})_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})} \Big|_{\lambda=-n} &= \frac{2^{\lambda+n-1} \Gamma(\frac{\lambda+n+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{(t_{11})_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma(\lambda+n)} \Big|_{\lambda=-n} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}} \delta(t_{11}) = \frac{1}{2} \delta(t_{11}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$J_{-n}^{(1)} = \left(\frac{(t_{11})_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})} \Big|_{\lambda=-n}, \int_{U_{n,m}} \varphi(\omega t) d\omega \right)_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2} \int_{U_{n,m}} \varphi(0, \omega t_2, \dots, \omega t_m) d\omega,$$

где $x_1 = \omega t_1 = 0$, $x_2 = \omega t_2, \dots, x_m = \omega t_m$ — столбцы матрицы $x = \omega t$.

Найдем значение при $\lambda = -n$ обобщенной функции

$$J_{\lambda}^{(2)} = \left(\frac{(t_{22})_+^{\lambda+n-2}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})}, \frac{1}{2} \int_{U_{n,m}} \varphi(0, \omega t_2, \dots, \omega t_m) d\omega \right)_{\mathbb{R}^2}.$$

В подпространстве t_2 перейдем к полярным координатам

$$t_2 = \theta \rho, \quad \theta = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0, \dots, 0), \quad dt_2 = \rho d\rho d\alpha.$$

Ясно, что функция

$$\int_{U_{n,m}} \varphi(0, \omega \theta \rho, \omega t_3, \dots, \omega t_m) d\omega = h_2(\rho, \theta, t_3, \dots, t_m)$$

является основной на $\mathbb{R} \times [0, \pi] \times \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^m = \{(\rho, \theta, t_3, \dots, t_m)\}$ и, таким образом,

$$\begin{aligned} J_{\lambda}^{(2)} &= \int_0^{\pi} (\sin \alpha)^{\lambda+n-2} \left(\frac{\rho_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})}, \frac{1}{2} h_2(\rho, \theta, t_3, \dots, t_m) \right)_{\mathbb{R}} d\alpha \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})(\sin \alpha)^{\lambda+n-2}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})} \left(\frac{\rho_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}, \frac{1}{2} h_2(\rho, \theta, t_3, \dots, t_m) \right)_{\mathbb{R}} d\alpha. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_{-n}^{(2)} &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})(\sin \alpha)^{\lambda+n-2}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})} \Big|_{\lambda=-n} h_2(0, \theta, t_3, \dots, t_m) d\alpha \\ &= \frac{1}{4} \int_{U_{n,m}} \varphi(0, 0, \omega t_3, \dots, \omega t_m) d\omega \int_0^{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})(\sin \alpha)^{\lambda+n-2}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})} d\alpha \Big|_{\lambda=-n} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_{U_{n,m}} \varphi(0, 0, \omega t_3, \dots, \omega t_m) d\omega, \end{aligned}$$

где

$$\int_0^{\pi} (\sin \varphi)^{\lambda} d\varphi = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+2}{2})}.$$

Найдем значение при $\lambda = -n$ обобщенной функции

$$J_{\lambda}^{(3)} = \left(\frac{(t_{33})_+^{\lambda+n-3}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-2}{2})}, \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_{U_{n,m}} \varphi(0, 0, \omega t_3, \dots, \omega t_m) d\omega \right)_{\mathbb{R}^3}.$$

Перейдем к сферическим координатам в подпространстве переменной t_3 :

$$\begin{aligned} t_3 &= \theta \rho, \quad \theta = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \sin \alpha_1 \sin \alpha_2, 0, \dots, 0), \\ dt_3 &= \rho^2 \sin \alpha_1 d\rho d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что функция

$$\int_{U_{n,m}} \varphi(0, 0, \omega \rho \theta, \omega t_4, \dots, \omega t_m) d\omega = h_3(\rho, \theta, t_4, \dots, t_m)$$

основная на $\mathbb{R} \times [0, \pi] \times [0, \pi] \times \mathbb{R}^4 \times \dots \times \mathbb{R}^m = \{(\rho, \theta, t_4, \dots, t_m)\}$, имеем

$$\begin{aligned} J_{\lambda}^{(3)} &= \int_0^{\pi} (\sin \alpha_1)^{\lambda+n-2} \int_0^{\pi} (\sin \alpha_2)^{\lambda+n-3} \\ &\quad \times \left(\frac{\rho_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-2}{2})}, \frac{\sqrt{\pi}}{4} h_3(\rho^2, \theta, t_4, \dots, t_m) \right)_{\mathbb{R}} d\alpha_2 d\alpha_1 \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})(\sin \alpha_1)^{\lambda+n-2}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})} \int_0^{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})(\sin \alpha_2)^{\lambda+n-3}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-2}{2})} \\ &\quad \times \left(\frac{\rho_+^{\lambda+n-1}}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}, \frac{\sqrt{\pi}}{4} h_3(\rho, \theta, t_4, \dots, t_m) \right)_{\mathbb{R}} d\alpha_2 d\alpha_1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_{-n}^{(3)} &= \int_0^{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})(\sin \alpha_1)^{\lambda+n-2}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})} \Big|_{\lambda=-n} \\ &\quad \times \int_0^{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})(\sin \alpha_2)^{\lambda+n-3}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-2}{2})} \Big|_{\lambda=-n} \frac{\sqrt{\pi}}{8} h_3(0, \theta, t_4, \dots, t_m) d\alpha_2 d\alpha_1 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} \int_{U_{n,m}} \varphi(0, 0, 0, \omega t_4, \dots, \omega t_m) d\omega \int_0^{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})(\sin \alpha_1)^{\lambda+n-2}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})} d\alpha_1 \Big|_{\lambda=-n} \\ &\quad \times \int_0^{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})(\sin \alpha_2)^{\lambda+n-3}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-2}{2})} d\alpha_2 \Big|_{\lambda=-n} \\ &= \frac{\sqrt{\pi^3}}{8} \int_{U_{n,m}} \varphi(0, 0, 0, \omega t_4, \dots, \omega t_m) d\omega. \end{aligned}$$

Продолжая описанный итерационный процесс, получим

$$J_{-n}^{(k)} = \frac{\pi^{k(k-1)/4}}{2^k} \int_{U_{n,m}} \varphi(0, \dots, 0, \omega t_{k+1}, \dots, \omega t_m) d\omega, \quad k = 1, \dots, m.$$

В результате имеем

$$\frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m(\frac{n}{2})} (\Phi_0^{(-n)}, \varphi) = \frac{J_{-n}^{(m)}}{\pi^{m(m-1)/4}} = \frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_m(\frac{n}{2})} \varphi(0),$$

и доказательство завершено.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Имеет место формула*

$$\Phi_0^{(\lambda)}(x) \Big|_{\lambda=-n-2p} = \frac{1}{2^{pm} \prod_{i=0}^{p-1} (-n-2i, m)} \Delta_m^p \delta(x), \quad p = 1, 2, \dots$$

2. Многообразие матриц ранга r . В работе [30] частично содержатся результаты этого пункта. Однако многие технические детали там остались не рассмотренными.

Пусть $M^{(r)}$ – подмногообразие в $\mathbb{R}^{n \times m}$ матриц, имеющих ранг $r = 0, \dots, m-1$;

$$\dim M^{(r)} = nm - (n-r)(m-r) = r(n+m-r),$$

$$\overline{M^{(r)}} = \bigcup_{i=0}^r M^{(i)}.$$

Здесь $\overline{M^{(r)}}$ – замыкание множества $M^{(r)}$.

За исключением подмногообразия матриц меньшей размерности, все матрицы $x \in M^{(r)}$ имеют r первых линейно независимых столбцов. Пусть

$$U = \{x = (x^{(r)}, x^{(r)}\mu) \mid x^{(r)} \in \mathbb{R}^{n \times r}, \mu \in \mathbb{R}^{r \times (m-r)}\},$$

где μ – матрица линейной зависимости. На этом множестве действует группа преобразований

$$x \rightarrow g_1 x g_2, \quad g_1 \in O(n), \quad g_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(m),$$

$$\alpha \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad \beta \in \mathbb{R}^{r \times (m-r)}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^{(m-r) \times r},$$

$$\delta \in \mathbb{R}^{(m-r) \times (m-r)}, \quad \det(\alpha + \mu\gamma) \neq 0.$$

Покажем, что на U существует единственная (с точностью до постоянного множителя) мера $d_r x = \eta(x^{(r)}, \mu) dx^{(r)} d\mu$, удовлетворяющая условию относительной инвариантности

$$d_r(g_1 x g_2) = |\det g_2|^r d_r x.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Относительно инвариантная мера $d_r x$ в U имеет вид*

$$d_r x = \frac{c_r dx^{(r)} d\mu}{(\det 'x^{(r)} x^{(r)})^{(n-m)/2}}, \quad dx^{(r)} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^r dx_{ij}, \quad d\mu = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{m-r} d\mu_{ij}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$g_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathrm{GL}(r), \quad \beta \in \mathbb{R}^{r \times (m-r)}, \quad \delta \in \mathrm{GL}(m-r).$$

Тогда $\tilde{x} = g_1 x g_2 \in U$ и

$$\tilde{x} = (g_1 x^{(r)} \alpha, g_1 x^{(r)} (\beta + \mu\delta)), \quad \tilde{x}^{(r)} = g_1 x^{(r)} \alpha, \quad \tilde{\mu} = \alpha^{-1}(\beta + \mu\delta).$$

Таким образом,

$$d_r \tilde{x} = \eta(g_1 x^{(r)} \alpha, \alpha^{-1}(\beta + \mu\delta)) d(g_1 x^{(r)} \alpha) d(\alpha^{-1}(\beta + \mu\delta))$$

$$= |\det \alpha|^n |\det \alpha^{-1}|^{m-r} |\det \delta|^r \eta(g_1 x^{(r)} \alpha, \alpha^{-1}(\beta + \mu\delta)) dx^{(r)} d\mu$$

$$\begin{aligned}
&= |\det \alpha|^{n-m} \frac{\eta(g_1 x^{(r)} \alpha, \alpha^{-1}(\beta + \mu\delta))}{\eta(x^{(r)}, \mu)} |\det g_2|^r d_r x \\
&= |\det \alpha|^{n-m} \frac{\eta(g_1 x^{(r)} \alpha, \alpha^{-1}(\beta + \mu\delta))}{\eta(x^{(r)}, \mu)} d_r \tilde{x}
\end{aligned}$$

и

$$\eta(x^{(r)}, \mu) = |\det \alpha|^{n-m} \eta(g_1 x^{(r)} \alpha, \alpha^{-1}(\beta + \mu\delta)).$$

Положим $\beta = -\mu\delta$ и выберем α так, чтобы $g_1 x^{(r)} \alpha = \begin{pmatrix} e_r \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e^{**}$. Тогда

$$\eta(x^{(r)}, \mu) = \eta(e^{**}, 0) |\det \alpha|^{n-m}.$$

Из равенства $'(g_1 x^{(r)} \alpha)(g_1 x^{(r)} \alpha) = ' \alpha ' x^{(r)} x^{(r)} \alpha = e_r^2$ имеем $'x^{(r)} x^{(r)} = (\alpha ' \alpha)^{-1}$ и $|\det \alpha| = (\det 'x^{(r)} x^{(r)})^{-1/2}$. В результате

$$\begin{aligned}
\eta(x^{(r)}, \mu) &= c_r (\det 'x^{(r)} x^{(r)})^{(m-n)/2}, \\
d_r x &= \frac{c_r dx^{(r)} d\mu}{(\det 'x^{(r)} x^{(r)})^{(n-m)/2}}.
\end{aligned}$$

Проверим, что найденная мера относительно инвариантна относительно преобразований на U . Пусть

$$g_2^* = \begin{pmatrix} e_r & 0 \\ \gamma & e_{m-r} \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^{(m-r) \times r}, \quad \det(e_r + \mu\gamma) \neq 0.$$

Тогда для $\tilde{x} = g_1 x g_2^* \in U$ имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^{(r)} &= g_1 x^{(r)} (e_r + \mu\gamma), \quad \tilde{\mu} = (e_r + \mu\gamma)^{-1} \mu, \\
d\tilde{x}^{(r)} &= |\det(e_r + \mu\gamma)|^n dx^{(r)} + \phi(d\mu).
\end{aligned}$$

Используя метод, предложенный в [24], определим $d\tilde{\mu}$. Пусть $\mathcal{D}(\mu) = (d\mu_{ij})$ — матрица дифференциалов. Имеем

$$\begin{aligned}
\mu &= (e_r + \mu\gamma)\tilde{\mu}, \\
\mathcal{D}(\mu) &= \mathcal{D}(e_r + \mu\gamma)\tilde{\mu} + (e_r + \mu\gamma)\mathcal{D}(\tilde{\mu}), \\
\mathcal{D}(\mu) &= \mathcal{D}(\mu)\gamma\tilde{\mu} + (e_r + \mu\gamma)\mathcal{D}(\tilde{\mu}), \\
\mathcal{D}(\mu)(e_{m-r} - \gamma\tilde{\mu}) &= (e_r + \mu\gamma)\mathcal{D}(\tilde{\mu}), \\
|\det(e_{m-r} - \gamma\tilde{\mu})|^r d\mu &= |\det(e_r + \mu\gamma)|^{m-r} d\tilde{\mu}.
\end{aligned}$$

ЛЕММА 4.1. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^{n \times m}$; тогда имеет место равенство

$$\det(e_m \pm 'xy) = \det(e_n \pm y 'x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что для $((n+m) \times (n+m))$ -матриц имеет место равенство

$$\det \left[\begin{pmatrix} e_m & \pm'x \\ 0 & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_m & \mp'x \\ y & e_n \end{pmatrix} \right] = \det \left[\begin{pmatrix} e_m & \mp'x \\ y & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_m & \pm'x \\ 0 & e_n \end{pmatrix} \right].$$

В результате имеем

$$\det \begin{pmatrix} e_m \pm 'xy & 0 \\ y & e_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_m & 0 \\ y & e_n \pm y'x \end{pmatrix}, \quad \det(e_m \pm 'xy) = \det(e_n \pm y'x).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} d\tilde{\mu} &= \frac{|\det(e_{m-r} - \gamma\tilde{\mu})|^r}{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{m-r}} d\mu = \frac{|\det(e_{m-r} - \gamma(e_r + \mu\gamma)^{-1}\mu)|^r}{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{m-r}} d\mu \\ &= \frac{|\det(e_r - (e_r + \mu\gamma)^{-1}\mu\gamma)|^r}{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{m-r}} d\mu = \frac{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{-r} |\det(e_r + \mu\gamma - \mu\gamma)|^r}{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{m-r}} d\mu \\ &= \frac{d\mu}{|\det(e_r + \mu\gamma)|^m}. \end{aligned}$$

Итак, для $\tilde{x} = g_1 x g_2^*$ имеем

$$d_r \tilde{x} = \frac{c_r d\tilde{x}^{(r)} d\tilde{\mu}}{(\det \tilde{x}^{(r)} \tilde{x}^{(r)})^{(n-m)/2}} = \frac{c_r |\det(e_r + \mu\gamma)|^{n-m} dx^{(r)} d\mu}{|\det(e_r + \mu\gamma)|^{n-m} (\det 'x^{(r)} x^{(r)})^{(n-m)/2}} = d_r x.$$

В результате для $g_2 = g_{21} g_{22} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r & 0 \\ \gamma & e_{m-r} \end{pmatrix}$ имеем

$$d_r(g_1 x g_2) = d_r(g_1 x g_{21}) = |\det g_{21}|^r d_r x = |\det g_2|^r d_r x.$$

Доказательство завершено.

3. Дельта-функции $\delta_r(x)$, $r = 1, \dots, m-1$. Для выяснения значений функции $\Phi_0^{(\lambda)}(x)$ в точках $\lambda = -n + r$, $r = 1, \dots, m-1$, нам потребуются обобщенные функции, сосредоточенные на подмногообразиях матриц ранга, меньшего m .

ЛЕММА 4.2. Пусть $\varphi(x)$ – основная на $\mathbb{R}^{n \times m}$ функция. Тогда интеграл

$$\int_U \varphi(x) d_r x = c_r \int_{\mathbb{R}^{n \times r} \times \mathbb{R}^{r \times (m-r)}} \frac{\varphi(x^{(r)}, \mu x^{(r)})}{(\det 'x^{(r)} x^{(r)})^{(n-m)/2}} dx^{(r)} d\mu$$

функции $\varphi(x)$ по многообразию U абсолютно сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки сходимости указанного интеграла достаточно сходимости повторного интеграла

$$I = \int_{\mathbb{R}^{n \times r}} \frac{dx^{(r)}}{(\det {}'x^{(r)} x^{(r)})^{(n-m)/2}} \int_{\mathbb{R}^r \times (m-r)} |\varphi(x^{(r)}, \mu x^{(r)})| d\mu$$

(см., например, [31, с. 365]).

Поскольку функция φ быстро убывает на $\mathbb{R}^{n \times m}$, то неотрицательная функция

$$\psi(x^{(r)}) = \int_{\mathbb{R}^r \times (m-r)} |\varphi(x^{(r)}, \mu x^{(r)})| d\mu$$

будет быстро убывающей на $\mathbb{R}^{n \times r}$. Переходя в $\mathbb{R}^{n \times r}$ к треугольным координатам $x^{(r)} = \omega^{(r)} t^{(r)}$, $\omega^{(r)} \in U_{n,r}$, $t^{(r)} \in T_r^+$, получим

$$I = \int_{T_r^+ \times U_{n,r}} \prod_{i=1}^r (t^{(r)})_{ii}^{m-i} \psi(\omega^{(r)} t^{(r)}) dt^{(r)} d\omega^{(r)}.$$

Интеграл

$$\int_{U_{n,r}} d\omega^{(r)} \int_{T_r^+} \prod_{i=1}^r (t^{(r)})_{ii}^{m-i} \psi(\omega^{(r)} t^{(r)}) dt^{(r)}$$

сходится в силу быстрого убывания функции

$$\prod_{i=1}^r (t^{(r)})_{ii}^{m-i} \psi(\omega^{(r)} t^{(r)}) \geq 0$$

по $t^{(r)}$ при фиксированном $\omega^{(r)}$ и непрерывности по $\omega^{(r)}$ внутреннего интеграла. Последнее влечет сходимость интеграла I .

ЛЕММА 4.3. Если выполнено равенство

$$\int_U e^{-\text{tr} {}'x x} d_r x = 1,$$

$$\text{то } c_r = \pi^{r(r-m-n)/2} \frac{\Gamma_r(\frac{n}{2})}{\Gamma_r(\frac{r}{2})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$I = \int_U e^{-\text{tr} {}'x x} d_r x = c_r \int_{\mathbb{R}^{n \times r} \times \mathbb{R}^r \times (m-r)} \frac{e^{-\text{tr}({}'x^{(r)} x^{(r)} + {}'\mu {}'x^{(r)} x^{(r)} \mu)}}{(\det {}'x^{(r)} x^{(r)})^{(n-m)/2}} dx^{(r)} d\mu.$$

Далее, в полярных координатах [20] $x^{(r)} = \omega^{(r)} \rho^{1/2}$, $dx^{(r)} = 2^{-r} (\det \rho)^{(n-r-1)/2} \times d\rho d\omega^{(r)}$, $\rho = {}^t x^{(r)} x^{(r)}$, $\omega^{(r)} \in U_{n,r}$, получаем

$$\begin{aligned} I &= c_r 2^{-r} \int_{\{\rho > 0\} \times U_{n,r} \times \mathbb{R}^{r \times (m-r)}} e^{-\operatorname{tr}(\rho + {}^t \mu \rho \mu)} (\det \rho)^{(m-r-1)/2} d\rho d\omega^{(r)} d\mu \\ &= c_r \frac{\pi^{nr/2}}{\Gamma_r(\frac{n}{2})} \int_{\rho > 0} e^{-\operatorname{tr} \rho} (\det \rho)^{(m-r-1)/2} d\rho \int_{\mathbb{R}^{r \times (m-r)}} e^{-\operatorname{tr} {}^t \mu \rho \mu} d\mu \\ &= c_r \frac{\pi^{nr/2}}{\Gamma_r(\frac{n}{2})} \int_{\rho > 0} e^{-\operatorname{tr} \rho} (\det \rho)^{-1/2} d\rho \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2} da \right)^{r(m-r)} \\ &= c_r \pi^{r(n+m-r)/2} \frac{\Gamma_r(\frac{r}{2})}{\Gamma_r(\frac{n}{2})} = 1. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

На карте U можно ввести полярные треугольные координаты

$$U \ni x = (\omega^{(r)}, 0) \begin{pmatrix} t^{(r)} & t^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{(r)} \in U_{n,r}, \quad t^{(r)} \in T_r^+, \quad t^* \in \mathbb{R}^{r \times (m-r)}.$$

При этом равенства

$$x^{(r)} = \omega^{(r)} t^{(r)}, \quad \mu = (t^{(r)})^{-1} t^*$$

показывают, что по $x \in U$ матрицы $\omega^{(r)}$, $t^{(r)}$ и t^* определяются однозначно.

ЛЕММА 4.4. *В координатах $t^{(r)}$, t^* и $\omega^{(r)}$ мера на $M^{(r)}$ определяется равенством*

$$d_r x = c_r \prod_{i=1}^r (t_{ii})^{r-i} dt^{(r)} dt^* d\omega^{(r)}, \quad c_r = \pi^{r(r-m-n)/2} \frac{\Gamma_r(\frac{n}{2})}{\Gamma_r(\frac{r}{2})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно имеем

$$\begin{aligned} d_r x &= \frac{c_r}{(\det({}^t t^{(r)} t^{(r)}))^{(n-m)/2}} d(\omega^{(r)} t^{(r)}) d((t^{(r)})^{-1} t^*) \\ &= c_r (\det t^{(r)})^{m-n} \prod_{i=1}^r (t_{ii})^{n-i} (\det(t^{(r)})^{-1})^{m-r} dt^{(r)} dt^* d\omega^{(r)} \\ &= c_r \prod_{i=1}^r (t_{ii})^{r-i} dt^{(r)} dt^* d\omega^{(r)}. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Лемма об абсолютной сходимости интеграла по многообразию матриц ранга $1 \leq r < m$ позволяет корректно определить дельта-функцию поверхности матриц ранга r .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Дельта-функцией δ_r , $r = 1, \dots, m-1$, связанной с поверхностью $M^{(r)}$, назовем линейный непрерывный функционал

$$(\delta_r, \varphi) = \int_{M^{(r)}} \varphi(x) d_r x \equiv \int_U \varphi(x) d_r x.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Справедлива формула

$$(\delta_r, \varphi) = c_r \int_{T_r^+ \times \mathbb{R}^r \times (m-r)} \prod_{i=1}^r (t_{ii})^{r-i} dt^{(r)} dt^* \int_{U_{n,r}} \varphi(\omega^{(r)} t^{(r)}, \omega^{(r)} t^*) d\omega^{(r)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Определение дельта-функции поверхности матриц ранга r можно дать в эквивалентной форме (см. [10, лемма 3.2]):

$$(\delta_r, \varphi) = \frac{1}{\pi^{mr/2}} \int_{\mathbb{R}^r \times m} dz \int_{\text{SO}(n)} \varphi\left(\gamma \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}\right) d\gamma.$$

4. Значения в точках $\lambda = -n + r$, $r = 1, 2, \dots, m-1$. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Для $r = 1, 2, \dots, m-1$ выполнены равенства

$$\Phi_0^{(\lambda)}(x)|_{\lambda=-n+r} = \delta_r(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В полярных треугольных координатах

$$x = \omega t, \quad \omega \in U_{n,m}, \quad t = \begin{pmatrix} t^{(r)} & t^* \\ 0 & \tilde{t} \end{pmatrix}, \quad \tilde{t} \in T_{m-r}^+,$$

имеем

$$\begin{aligned} (\Phi_0^\lambda, \varphi) &= \frac{\Gamma_m(\frac{n}{2})}{\pi^{m(2n+m-1)/4}} \int_{T_r^+ \times \mathbb{R}^r \times (m-r)} \prod_{i=1}^r \frac{(t_{ii})^{\lambda+n-i}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-i+1}{2})} dt^{(r)} dt^* \\ &\times \int_{T_{m-r}^+} \prod_{i=r+1}^m \frac{(t_{ii})^{\lambda+n-i}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-i+1}{2})} d\tilde{t} \int_{U_{n,m}} \varphi\left(\omega \begin{pmatrix} t^{(r)} & t^* \\ 0 & \tilde{t} \end{pmatrix}\right) d\omega. \end{aligned}$$

Далее, функцию

$$\int_{U_{n,m}} \varphi(\omega t) d\omega$$

рассмотрим как основную функцию по переменным блока $\tilde{t}$, к которой применяется обобщенная функция

$$\prod_{i=r+1}^m \frac{(t_{ii})^{\lambda+n-i}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-i+1}{2})} \Big|_{\lambda=-n+r}$$

в пространстве T_{m-r}^+ .

Поступая так же, как и при нахождении значения $\Phi_0^{(-n)}$, имеем

$$\begin{aligned}
 (\Phi_0^{(-n+r)}, \varphi) &= \frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{m-r}\pi^{(2m(r+n)-r(r+1))/4}} \\
 &\quad \times \int_{T_r^+ \times \mathbb{R}^r \times (m-r)} \prod_{i=1}^r \frac{(t_{ii})^{r-i}}{\Gamma\left(\frac{r-i+1}{2}\right)} dt^{(r)} dt^* \int_{U_{n,m}} \varphi\left(\omega \begin{pmatrix} t^{(r)} & t^* \\ 0 & \tilde{0} \end{pmatrix}\right) d\omega \\
 &= \frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{m-r}\pi^{(2m(r+n)-r(r+1))/4}} \int_{U_{n-r,m-r}} d\tilde{\omega} \\
 &\quad \times \int_{T_r^+ \times \mathbb{R}^r \times (m-r)} \prod_{i=1}^r \frac{(t_{ii})^{r-i}}{\Gamma\left(\frac{r-i+1}{2}\right)} dt^{(r)} dt^* \int_{U_{n,r}} \varphi(\omega^{(r)} t^{(r)}, \omega^{(r)} t^*) d\omega^{(r)} \\
 &= \frac{\pi^{r(r-m)/2} \Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma_{m-r}\left(\frac{n-r}{2}\right) \Gamma_r\left(\frac{n}{2}\right)} (\delta_r, \varphi) = (\delta_r, \varphi).
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что

$$\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right) = \pi^{r(m-r)/2} \Gamma_r\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma_{m-r}\left(\frac{n-r}{2}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Для $p = 1, 2, \dots$ и $n > m$ имеем

$$\Phi_0^{(-n-2p+1)}(x) = \frac{1}{2^{pm} \prod_{i=0}^{p-1} (-n-2i+1, m)} \Delta_m^p \delta_1(x).$$

Пусть $\text{supp } f$ – носитель обобщенной функции f . Следующее предложение полностью описывает носитель обобщенной функции $\Phi_0^{(\lambda)}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Для натурального p имеем

$$\text{supp } \Phi_0^{(\lambda)} = \begin{cases} \{0\}, & \lambda = -n, -n-2, \dots, -n-2p+2, \dots, \\ \overline{M^{(1)}}, & \lambda = -n+1, -n-1, \dots, -n-2p+3, \dots, \\ \overline{M^{(r)}}, & \lambda = -n+r, \quad r = 1, 2, \dots, m-1, \\ \mathbb{R}^{n \times m} & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

5. Однородность функционалов δ_r и $\Phi_0^{(\lambda)}$. Действие

$$x \rightarrow gx = g_1 x g_2, \quad g_1 \in O(n), \quad g_2 \in \text{GL}(m),$$

группы преобразований на пространстве $\mathbb{R}^{n \times m}$ задает понятие однородности в пространстве обобщенных функций на $\mathbb{R}^{n \times m}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Обобщенная функция f в $\mathbb{R}^{n \times m}$ называется *однородной степени λ* , если имеет место равенство

$$(f, g\varphi) = |\det g_2|^{\lambda+n} (f, \varphi),$$

где $g\varphi(x) \equiv \varphi(g^{-1}x) = \varphi(g_1' x g_2^{-1})$.

ПРИМЕР 4.1. Дельта-функция δ_r является однородной степени $r - n$. В самом деле,

$$\begin{aligned} (\delta_r, g\varphi) &= \int_{M(r)} \varphi(g_1 x g_2^{-1}) d_r x \\ &= \int_{M(r)} \varphi(g_1 x g_2^{-1}) |\det g_2|^r d_r (g_1 x g_2^{-1}) = |\det g_2|^r (\delta_r, \varphi). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4.2. Обобщенная функция $\Phi_0^{(\lambda)}$ является однородной степени λ . Действительно,

$$\begin{aligned} (\Phi_0^{(\lambda)}(x), g\varphi) &= \frac{\Gamma_m(\frac{n}{2})}{\pi^{nm/2} \Gamma_m(\frac{\lambda+n}{2})} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |x|_m^{\lambda+n} \varphi(g_1 x g_2^{-1}) \mu(dx) \\ &= \frac{\Gamma_m(\frac{n}{2})}{\pi^{nm/2} \Gamma_m(\frac{\lambda+n}{2})} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |g_1 y g_2|_m^{\lambda+n} \varphi(y) \mu(dy) \\ &= \frac{\Gamma_m(\frac{n}{2})}{\pi^{nm/2} \Gamma_m(\frac{\lambda+n}{2})} |\det g_2|^{\lambda+n} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |y|_m^{\lambda+n} \varphi(y) \mu(dy) \\ &= |\det g_2|^{\lambda+n} (\Phi_0^{(\lambda)}, \varphi). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Однородность дельта-функции δ_r очевидным образом следует из однородности обобщенной функции $\Phi_0^{(\lambda)}$ и равенства

$$\Phi_0^{(-n+r)} = \delta_r, \quad r = 1, \dots, m-1.$$

6. Фундаментальные решения операторов Δ_m^p , $2 \leq 2p \leq n-m$. Формула Δ_m^p -дифференцирования

$$\Delta_m^p \Phi_0^{(\lambda)}(x) = 2^{pm} \prod_{i=0}^{p-1} (\lambda - 2i, m) \Phi_0^{(\lambda-2p)}(x)$$

и значение

$$\Phi_0^{(-n)}(x) = \delta(x)$$

позволяют при $2p \leq n - m$ найти фундаментальные решения $\mathcal{E}_0^{(p)}(x)$ операторов Δ_m^p , $p = 1, 2, \dots$:

$$\mathcal{E}_0^{(p)}(x) = \frac{1}{2^{pm} \prod_{i=0}^{p-1} (2p - n - 2i, m)} \Phi_0^{(-n+2p)}(x).$$

При этом если $2p \leq m - 1$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^{(p)}(x) &= \frac{1}{2^{pm} \prod_{i=0}^{p-1} (2p - n - 2i, m)} \delta_{2p}(x), \\ \text{supp } \mathcal{E}_0^{(p)}(x) &= \overline{M^{(2p)}}, \quad \dim M^{(2p)} = 2p(n + m - 2p) < nm. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Оператор Δ_m^p удовлетворяет усиленному принципу Гюйгенса, если

$$p \leq \frac{1}{2} \min\{m-1, n-m\}.$$

§ 5. Потенциалы Рисса

В этом параграфе на $\mathbb{R}^{n \times m}$ вводятся и изучаются потенциалы Рисса. (На $\mathbb{R}^{n \times 1}$ потенциалы Рисса изучены, например, в работах [7] и [29].)

1. Потенциалы Рисса $\mathcal{I}^\lambda \varphi$, $\lambda \neq n - m + k$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим обобщенную функцию

$$\mathcal{R}_0^{(\lambda)} = \frac{|x|_m^{\lambda-n}}{H_{n,m}(\lambda)}, \quad H_{n,m}(\lambda) = 2^{\lambda m} \pi^{nm/2} \frac{\Gamma_m(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma_m(\frac{n-\lambda}{2})},$$

с полюсами в тех же точках и того же порядка, что и у функции $\Gamma_m((n-\lambda)/2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Для $\lambda \neq n - m + k$, $k \in \mathbb{N}$, обобщенная функция $\mathcal{R}_0^{(\lambda)}$ порождает ядро Рисса для оператора Δ_m :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x)|_{\lambda=0} &= \delta(x), \\ \Delta_m^p \mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x) &= (-1)^{mp} \mathcal{R}_0^{(\lambda-2p)}(x), \\ \text{supp } \mathcal{R}_0^{(\lambda)} &\subset \mathbb{R}^{n \times m}. \end{aligned}$$

Пусть $*$ – операция свертки. Введем потенциалы Рисса

$$\mathcal{I}^\lambda \varphi(x) \equiv (\mathcal{R}_0^{(\lambda)} * \varphi)(x) = \frac{1}{H_{n,m}(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |x-y|_m^{\lambda-n} \varphi(y) dy$$

в области $\text{Re } \lambda > m-1$, $\lambda \neq n - m + k$, $k \in \mathbb{N}$. При этом $\mathcal{I}^\lambda \varphi(x)$ аналитически продолжается как мероморфная функция на всю комплексную плоскость с полюсами в тех же точках и того же порядка, что и у функции $\Gamma_m((n-\lambda)/2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Справедлива формула $\mathcal{I}^0 \varphi(x) = \varphi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma_m(\frac{n-\lambda}{2})}{2^{\lambda m} \Gamma_m(\frac{n}{2})} \Phi_0^{(\lambda-n)}(x),$$

то

$$\mathcal{I}^0 \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} \Phi_0^{(\lambda-n)}(x-y)|_{\lambda=0} \varphi(y) dy = (\delta(x-y), \varphi(y)) = \varphi(x).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. При $\lambda \neq n - m + k$, $k \in \mathbb{N}$, имеет место формула дифференцирования

$$\mathcal{I}^\lambda \Delta_m \varphi(x) = \Delta_m \mathcal{I}^\lambda \varphi(x) = (-1)^m \mathcal{I}^{\lambda-2} \varphi(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области абсолютной сходимости интеграла $\mathcal{I}^{\lambda-2}\varphi(x)$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta_m \mathcal{I}^\lambda \varphi(x) &= \Delta_m \mathcal{R}_0^{(\lambda)} * \varphi(x) = \mathcal{R}_0^{(\lambda)} * \Delta_m \varphi(x) \\ &= \Delta_m \mathcal{R}_0^{(\lambda)} * \varphi(x) = \frac{\Gamma_m\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)}{2^{\lambda m} \Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)} \Delta_m \Phi_0^{(\lambda-n)} * \varphi(x) \\ &= \frac{\Gamma_m\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)(\lambda-n, m)}{2^{(\lambda-1)m} \Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)} \Phi_0^{(\lambda-n-2)} * \varphi(x) \\ &= (-1)^m \frac{\Gamma_m\left(\frac{n-\lambda+2}{2}\right)}{2^{(\lambda-2)m} \Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)} \Phi_0^{(\lambda-n-2)} * \varphi(x) = (-1)^m \mathcal{I}^{\lambda-2} \varphi(x).\end{aligned}$$

2. Полугрупповое свойство. Пусть $\rho > 0$ – положительно определенная $(m \times m)$ -матрица. Рассмотрим интеграл Гаусса–Вейерштрасса (или интеграл Пуассона)

$$\begin{aligned}(W_\rho \varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} h_\rho(x-y) \varphi(y) dy, \\ h_\rho(x) &= (4\pi)^{-\frac{nm}{2}} (\det \rho)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4} \text{tr} \rho^{-1} 'xx}.\end{aligned}$$

Следующая теорема устанавливает связь между интегралами Гаусса–Вейерштрасса и потенциалами Рисса.

ТЕОРЕМА 5.1 [21]. Пусть $m-1 < \text{Re } \lambda < n-m+1$, $n \geq 2m-1$. Тогда

$$\mathcal{I}^\lambda \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma_m(\lambda/2)} \int_{\rho > 0} (\det \rho)^{(\lambda-m-1)/2} (W_\rho \varphi)(x) d\rho.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1 [11], [21]. Для любой основной функции на $\mathbb{R}^{n \times m}$, $n \geq 3m-2$, в области $\text{Re } \lambda, \text{Re } \mu > m-1$, $\text{Re}(\lambda + \mu) < n-m+1$, справедлива формула

$$\mathcal{I}^\lambda \mathcal{I}^\mu \varphi(x) = \mathcal{I}^{\lambda+\mu} \varphi(x).$$

3. Бета-функция пространства $\mathbb{R}^{n \times m}$, $n \geq 3m-2$. Пусть, как и ранее,

$$e^* = \begin{pmatrix} e_m \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad e_m = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Бета-функцией, связанной с пространством $\mathbb{R}^{n \times m}$, $n \geq 3m-2$, назовем интеграл

$$B_{n,m}(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |e^* - x|_m^{\lambda-n} |x|_m^{\mu-n} dx.$$

Очевидно, что $B_{n,m}(\lambda, \mu) = B_{n,m}(\mu, \lambda)$ в области его сходимости.

ЛЕММА 5.1. Пусть w удовлетворяет условию $|w|_m = 1$. Тогда имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |w - x|_m^{\lambda-n} |x|_m^{\mu-n} dx = B_{n,m}(\lambda, \mu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|w|_m = 1$; тогда для $g_1 \in O(n)$, $g_2 \in O(m)$ имеем

$$w = g_1 d g_2, \quad d = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = \text{diag}\{r_1, \dots, r_m\},$$

$$r_1 > r_2 > \dots > r_m, \quad \prod_{i=1}^m r_i = 1,$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |w - x|_m^{\lambda-n} |x|_m^{\mu-n} dx &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |g_1^{-1}(w - x)g_2^{-1}|_m^{\lambda-n} |x|_m^{\mu-n} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |g_1^{-1}w g_2^{-1} - g_1^{-1}x g_2^{-1}|_m^{\lambda-n} \\ &\quad \times |g_1^{-1}x g_2^{-1}|_m^{\mu-n} d(g_1^{-1}x g_2^{-1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |g_1^{-1}w g_2^{-1} - x|_m^{\lambda-n} |x|_m^{\mu-n} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |d - x|_m^{\lambda-n} |x|_m^{\mu-n} dx. \end{aligned}$$

Пусть $x = yr$; тогда $dx = dy$, $|x|_m = |y|_m$ и

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |d - x|_m^{\lambda-n} |x|_m^{\mu-n} dx &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |d - yr|_m^{\lambda-n} |y|_m^{\mu-n} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |(e^* - y)r|_m^{\lambda-n} |y|_m^{\mu-n} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |e^* - y|_m^{\lambda-n} |y|_m^{\mu-n} dy. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. В области $\text{Re } \lambda, \text{Re } \mu > m - 1$, $\text{Re}(\lambda + \mu) < n - m + 1$, $n \geq 3m - 2$, интеграл $B_{n,m}(\lambda, \mu)$ абсолютно сходится и имеет место равенство

$$B_{n,m}(\lambda, \mu) = \frac{H_{n,m}(\lambda)H_{n,m}(\mu)}{H_{n,m}(\lambda + \mu)}, \quad H_{n,m}(\lambda) = 2^{\lambda m} \pi^{nm/2} \frac{\Gamma_m(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma_m(\frac{n-\lambda}{2})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_0(x) \geq 0$. Тогда из равенства $\mathcal{I}^\lambda \mathcal{I}^\mu \varphi_0(x) = \mathcal{I}^{\lambda+\mu} \varphi_0(x)$, $\text{Re } \lambda, \text{Re } \mu > m - 1$, $\text{Re}(\lambda + \mu) < n - m + 1$, следует сходимость повторного интеграла $\mathcal{I}^\lambda \mathcal{I}^\mu \varphi_0(x)$. Таким образом, по теореме Фубини [31] сходится двойной интеграл

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\lambda \mathcal{I}^\mu \varphi_0(x) &= \frac{1}{H_{n,m}(\lambda)H_{n,m}(\mu)} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |x - z|_m^{\lambda-n} |z - y|_m^{\mu-n} \varphi_0(y) dy dz \\ &= \frac{1}{H_{n,m}(\lambda)H_{n,m}(\mu)} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} \varphi_0(y) dy \left(\int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |x - z|_m^{\lambda-n} |z - y|_m^{\mu-n} dz \right) \\ &= \frac{1}{H_{n,m}(\lambda)H_{n,m}(\mu)} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} J_{n,m}^{\lambda,\mu}(x - y) \varphi_0(y) dy, \end{aligned}$$

где

$$J_{n,m}^{\lambda,\mu}(x-y) = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |x-z|_m^{\lambda-n} |z-y|_m^{\mu-n} dz.$$

Положим $z = y + |x-y|_m^{1/m} v$; тогда $dz = |x-y|_m^n dv$ и

$$\begin{aligned} J_{n,m}^{\lambda,\mu}(x-y) &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |x-y - |x-y|_m^{1/m} v|_m^{\lambda-n} ||x-y|_m^{1/m} v|_m^{\mu-n} |x-y|_m^n dv \\ &= |x-y|_m^{\lambda+\mu-n} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |w-v|_m^{\lambda-n} |v|_m^{\mu-n} dv, \end{aligned}$$

где

$$w = \frac{x-y}{|x-y|_m^{1/m}} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad |w|_m = 1.$$

Таким образом, по предыдущей лемме

$$J_{n,m}^{\lambda,\mu}(x-y) = B_{n,m}(\lambda, \mu) |x-y|_m^{\lambda+\mu-n}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\lambda \mathcal{I}^\mu \varphi_0(x) &= \frac{B_{n,m}(\lambda, \mu)}{H_{n,m}(\lambda) H_{n,m}(\mu)} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |x-y|_m^{\lambda+\mu-n} \varphi_0(y) dy \\ &= \frac{B_{n,m}(\lambda, \mu) H_{n,m}(\lambda + \mu)}{H_{n,m}(\lambda) H_{n,m}(\mu)} \mathcal{I}^{\lambda+\mu} \varphi_0(x) \equiv \mathcal{I}^{\lambda+\mu} \varphi_0(x). \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. При доказательстве полугруппового свойства можно воспользоваться приемом из монографии [29, с. 58, 59]. Пусть функция $\psi_0(x)$ такова, что ее преобразование Фурье $\mathcal{F}\psi_0(y)$ обращается в нуль вместе со всеми своими производными на матрицах ранга $r < m$. (При $m = 1$ функция $\psi_0(x)$ принадлежит пространству Семянистого [9] функций, ортогональных ко всем полиномам; при $m > 1$ – его обобщению [32].) Далее, для обобщенной функции $\mathcal{I}^\mu \psi_0$, отвечающей обычной функции $\mathcal{I}^\mu \psi_0(x)$ при $\operatorname{Re} \mu > m - 1$, имеем

$$(\mathcal{F}(\mathcal{I}^\mu \psi_0), \psi) = (\mathcal{F}(\mathcal{R}^{(\mu)} * \psi_0), \psi) = (|y|_m^{-\mu} \mathcal{F}(\psi_0), \psi).$$

Таким образом, при $\operatorname{Re} \mu < n - m + 1$ обобщенная функция $|y|_m^{-\mu} \mathcal{F}(\psi_0)$ регулярна, и в области $m - 1 < \operatorname{Re} \mu < n - m + 1$ имеет место равенство (в смысле обычных функций)

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}^\mu \psi_0)(x) = |y|_m^{-\mu} \mathcal{F}(\psi_0)(x).$$

Тогда в области $\operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Re} \mu > m - 1$, $\operatorname{Re}(\lambda + \mu) < n - m + 1$ справедлива формула

$$\mathcal{I}^\lambda \mathcal{I}^\mu \psi_0(x) = \mathcal{I}^{\lambda+\mu} \psi_0(x).$$

Последнее равенство влечет соотношение для бета-функции и, следовательно, может быть обобщено на случай произвольной основной функции.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. При $n \geq 3m - 2$ в области $\operatorname{Re} \lambda > m - 1$, $\operatorname{Re} \mu > m - 1$, $\operatorname{Re}(\lambda + \mu) < n - m + 1$ определена сверточная алгебра Рисса

$$\mathcal{R}_0^{(0)}(x) = \delta(x), \quad (\mathcal{R}_0^{(\lambda)} * \mathcal{R}_0^{(\mu)})(x) = \mathcal{R}_0^{(\lambda+\mu)}(x).$$

4. Потенциалы Рисса $\mathcal{I}^\lambda \varphi$, $\lambda = n - m + k$, $k \in \mathbb{N}$. Для определения потенциалов Рисса в точках $\lambda = n - m + k$, $k \in \mathbb{N}$, требуется сузить пространство основных функций (случай $m = 1$ см., например, в [9], [33]).

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и положим

$$\mathcal{S}_q \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |x - y|_m^{k-m} (\ln |x - y|_m)^q \varphi(y) dy, \quad q = 0, 1, \dots$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Если $k > -n + 2m - 1$, то для любой основной функции φ интеграл $\mathcal{S}_q \varphi(x)$ абсолютно сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\lambda \rightarrow |x - y|_m^{k-m+\lambda}$ аналитична в области $\operatorname{Re} \lambda > -n + 2m - k - 1$, которой в силу условия принадлежит точка $\lambda = 0$. Таким образом,

$$\mathcal{S}_q \varphi(x) = \left(\frac{\partial^q}{\partial \lambda^q} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |x - y|_m^{k-m+\lambda} |\varphi(y)| dy \right) \Big|_{\lambda=0} < \infty.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. Потенциал Рисса $\mathcal{I}^{n-m+k} \varphi(x)$, $\mathbb{N} \ni k > -n + 2m - 1$, конечен, если и только если $\mathcal{S}_0 \varphi = \dots = \mathcal{S}_{s-1} \varphi = 0$. При этом

$$\mathcal{I}^{n-m+k} \varphi(x) = \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^s \Gamma_m \left(\frac{m-k-\varepsilon}{2} \right)}{s! 2^{(n-m+k)m} \pi^{nm/2} \Gamma_m \left(\frac{n-m+k}{2} \right)} \cdot \mathcal{S}_s \varphi(x).$$

Здесь $s = [(k+1)/2]$ при $k < m - 1$, $s = [(m+1)/2]$ при $k \geq m - 1$, если k и m нечетные, и $s = [m/2]$ в остальных случаях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость. Пусть $\mathcal{I}^{n-m+k} \varphi(x) < \infty$; тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{n-m+k} \varphi(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma_m \left(\frac{m-k-\varepsilon}{2} \right)}{2^{(n-m+k+\varepsilon)m} \pi^{nm/2}} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} \frac{|x - y|_m^{k-m+\varepsilon}}{\Gamma_m \left(\frac{n-m+k+\varepsilon}{2} \right)} \varphi(y) dy \\ &= \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^s \Gamma_m \left(\frac{m-k-\varepsilon}{2} \right)}{2^{(n-m+k)m} \pi^{nm/2} \Gamma_m \left(\frac{n-m+k}{2} \right)} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} \frac{|x - y|_m^{k-m+\varepsilon}}{\varepsilon^s} \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Таким образом, необходимо, чтобы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} \frac{|x - y|_m^{k-m+\varepsilon}}{\varepsilon^s} \varphi(y) dy < \infty.$$

В результате, учитывая неравенство $k > -n + 2m - 1$, имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^q}{\partial \varepsilon^q} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |x - y|_m^{k-m+\varepsilon} \varphi(y) dy = \mathcal{S}_q \varphi(x) = 0, \quad q = 0, 1, \dots, s-1,$$

и необходимость доказана.

Докажем достаточность:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}^{n-m+k} \varphi(x) &= c(n, m, k) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} \frac{|x - y|_m^{k-m+\varepsilon}}{\varepsilon^s} \varphi(y) dy \\
 &= \frac{c(n, m, k)}{s!} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^s}{\partial \varepsilon^s} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |x - y|_m^{k-m+\varepsilon} \varphi(y) dy \\
 &= \frac{c(n, m, k)}{s!} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |x - y|_m^{k-m} (\ln |x - y|_m)^s \varphi(y) dy \\
 &= \frac{c(n, m, k)}{s!} \mathcal{S}_s \varphi(x) < \infty,
 \end{aligned}$$

что и доказывает предложение.

§ 6. Изогюйгенсовы деформации оператора Кэли–Лапласа потенциалами Лагнеше–Штельмахера

В этом параграфе будут осуществлены изогюйгенсовы деформации оператора Δ_m на основе методов работ [8], [1], [14], [17].

1. Потенциалы и деформации. Для параметра $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathbb{R}^k$ рассмотрим функции $Q_k(y) \equiv Q_k(y + \gamma_1; \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ по переменной $y \in \mathbb{R}$, которые определяются как решения рекуррентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Q'_{k+1} Q_{k-1} - Q_{k+1} Q'_{k-1} = (2k+1) Q_k^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad Q_0 := 1, \quad Q_1 := y.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной y , а $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathbb{R}^k$ – векторный параметр интегрирования.

Введенные функции есть так называемые многочлены Бурчналла–Чаунди, степень которых равна $k(k+1)/2$ [1], [2].

Далее рассмотрим потенциалы Лагнеше–Штельмахера, задаваемые формулой

$$u_k(y, \gamma) = 2\partial_y^2 \ln |Q_k(y)|.$$

Эти потенциалы, например, используются при построении изогюйгенсовой деформации волнового оператора методом Дарбу (см., например, [34, с. 109] или [2]).

Рассмотрим деформацию оператора Кэли–Лапласа при помощи потенциала Лагнеше–Штельмахера:

$$\mathcal{L}_k = \Delta_m + u_k(x_{11}, \gamma) \circ \Delta_m^*.$$

Например, при $m = 1$ и $\gamma = 0$ мы имеем деформацию оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{11}^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{1n}^2} - \frac{k(k+1)}{x_{11}^2}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Для всех n и m операторы $\mathcal{L}_k$ и Δ_m не эквивалентны относительно элементарных преобразований: невырожденной замены переменных, умножения оператора слева или справа на ненулевую функцию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что операторы $\mathcal{L}_k$ и Δ_m эквивалентны. Применим к ним преобразование Фурье по всем переменным, за исключением x_{11} . Тогда

$$\begin{aligned}\Delta_m &\rightarrow \tilde{\Delta}_m = A\partial_{11}^2 + B\partial_{11} + C, \\ \mathcal{L}_k &\rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_k = \tilde{\Delta}_m + u_k(x_{11}, \gamma)A,\end{aligned}$$

где A, B и C – многочлены по переменным $x_{12}, \dots, x_{nm}$. При этом операторы $\tilde{\mathcal{L}}_k$ и $\tilde{\Delta}_m$ эквивалентны при любых A, B и C . Таким образом, операторы ∂_{11}^2 и $\partial_{11}^2 + u_k(x_{11}, \gamma)$ эквивалентны, и их инварианты Коттона $\mathcal{H}(\cdot)$ [34, с. 94, 109] отличаются на ненулевой множитель. Однако $\mathcal{H}(\partial_{11}^2) = 0$, $\mathcal{H}(\partial_{11}^2 + u_k(x_{11}, \gamma)) = u_k(x_{11}, \gamma) \neq 0$, что противоречит эквивалентности операторов. Доказательство завершено.

Пусть

$$K = \begin{cases} \frac{k(k+1)}{2}, & \text{если } \gamma \neq 0, \\ k, & \text{если } \gamma = 0. \end{cases}$$

Для $p = 1, 2, \dots, [(n-m)/2] - K$ мы также рассмотрим степени $\mathcal{L}_k^p$ оператора $\mathcal{L}_k$.

2. Сплетающие операторы. Пусть для трех произвольных операторов A, B и C оператор

$$\text{ad}_{A,B} C = A \circ C - C \circ B, \quad \text{ad}_{A,B}^k C = \text{ad}_{A,B}(\text{ad}_{A,B}^{k-1} C), \quad k = 1, 2, \dots,$$

является оператором косоприсоединенного действия. Положим

$$G_k(y) = \begin{cases} Q_k(y), & \text{если } \gamma \neq 0, \\ y^k, & \text{если } \gamma = 0. \end{cases}$$

В работе [21] показано, что для трех операторов A, B и C , не зависящих от переменной y и коммутирующих между собой, операторы

$$T_0 = \partial_y^2 \circ A + \partial_y \circ B + C, \quad T_k = T_0 + u_k(y, \gamma) \circ A$$

являются K -калибровочно эквивалентными (в смысле работы [3]), т. е.

$$\text{ad}_{T_k, T_0}^{K+1} G_k(y) = 0.$$

При $A = 1, B = C = 0$ этот результат можно найти, например, в [8]. В случае обыкновенных дифференциальных операторов обобщение этого результата можно найти, например, в [35], а в случае операторов в частных производных – в [36].

Таким образом, для спектрального параметра $t \in \mathbb{R}$ и оператора

$$\mathcal{D} = \frac{1}{G_k(\xi_{11})} \sum_{j=0}^K \frac{(-1)^j}{j!} (\text{ad}_{\mathcal{L}_k, \Delta_m}^j G_k(x_{11})) \circ \frac{\partial^j}{\partial t^j}, \quad \xi_{11} \in \mathbb{R},$$

имеет место сплетающее соотношение

$$(\mathcal{L}_k - t)^p \circ \mathcal{D} = \mathcal{D} \circ (\Delta_m - t)^p, \quad p = 1, 2, \dots$$

Для $\xi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и достаточно большого N рассмотрим многочлен по переменной t с коэффициентами из ядра Рисса оператора Δ_m :

$$\mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x - \xi, t) = \sum_{j=0}^N c_j(\lambda) \mathcal{R}_0^{(2\lambda+2j)}(x - \xi) t^j,$$

где

$$c_j(\lambda) = (-1)^{(\lambda+j)m} \frac{\Gamma(\lambda+j)}{j! \Gamma(\lambda)}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Положим

$$\mathcal{R}_k^{(\lambda)}(x, \xi) = \mathcal{D}\mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x - \xi, t)|_{t=0}.$$

ТЕОРЕМА 6.1. Семейство обобщенных функций $\mathcal{R}_k^{(\lambda)}(x, \xi)$ порождает ядро Рисса оператора $\mathcal{L}_k$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k \mathcal{R}_k^{(\lambda)}(x, \xi) &= \mathcal{R}_k^{(\lambda-1)}(x, \xi), \\ \mathcal{R}_k^{(0)}(x, \xi) &= \delta(x - \xi). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k \mathcal{R}_k^{(\lambda)}(x, \xi) &= (\mathcal{L}_k - t) \mathcal{D}\mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x - \xi, t)|_{t=0} = \mathcal{D}(\Delta_m - t) \mathcal{R}_0^{(\lambda)}(x - \xi, t)|_{t=0} \\ &= \frac{1}{G_k(\xi_{11})} \sum_{j=0}^K (-1)^{j+m} c_j(\lambda) (\text{ad}_{\mathcal{L}_k, \Delta_m}^j G_k(x_{11})) \mathcal{R}_0^{(2\lambda+2j-2)}(x - \xi) \\ &\quad - \frac{1}{G_k(\xi_{11})} \sum_{j=1}^K (-1)^j c_{j-1}(\lambda) (\text{ad}_{\mathcal{L}_k, \Delta_m}^j G_k(x_{11})) \mathcal{R}_0^{(2\lambda+2j-2)}(x - \xi) \\ &= (-1)^{(\lambda+1)m} \frac{G_k(x_{11})}{G_k(\xi_{11})} \mathcal{R}_0^{(2\lambda-2)}(x - \xi) \\ &\quad + \frac{1}{G_k(\xi_{11})} \sum_{j=1}^K (-1)^j ((-1)^m c_j(\lambda) - c_{j-1}(\lambda)) \\ &\quad \times (\text{ad}_{\mathcal{L}_k, \Delta_m}^j G_k(x_{11})) \mathcal{R}_0^{(2\lambda+2j-2)}(x - \xi). \end{aligned}$$

Нетрудно проверяется, что для $j = 1, 2, \dots$ справедливы следующие равенства:

$$(-1)^m c_j(1) = c_{j-1}(1), \quad (-1)^m c_j(\lambda) - c_{j-1}(\lambda) = c_j(\lambda - 1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k \mathcal{R}_k^{(\lambda)}(x, \xi) &= \frac{1}{G_k(\xi_{11})} \sum_{j=0}^K (-1)^j c_j(\lambda - 1) (\text{ad}_{\mathcal{L}_k, \Delta_m}^j G_k(x_{11})) \mathcal{R}_0^{(2\lambda+2j-2)}(x - \xi) \\ &= \mathcal{D}\mathcal{R}_0^{(\lambda-1)}(x - \xi, t)|_{t=0} = \mathcal{R}_k^{(\lambda-1)}(x, \xi), \end{aligned}$$

и при $\lambda = 1$

$$\mathcal{L}_k \mathcal{R}_k^{(1)}(x, \xi) = \mathcal{R}_k^{(0)}(x, \xi) = \frac{G_k(x_{11})}{G_k(\xi_{11})} \delta(x - \xi) = \delta(x - \xi).$$

3. Фундаментальные решения операторов $\mathcal{L}_k^p$, $p = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor - K$.

ТЕОРЕМА 6.2. *Фундаментальные решения итерированных операторов $\mathcal{L}_k^p$, $p = 1, 2, \dots, \lfloor (n-m)/2 \rfloor - K$, имеют вид*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k^{(p)}(x, \xi) &= \frac{(-1)^{pm}}{(p-1)! G_k(\xi_{11})} \sum_{j=0}^K \frac{(-1)^{(m+1)j} (p+j-1)!}{j!} \\ &\quad \times (\text{ad}_{\mathcal{L}_k, \Delta_m}^j G_k(x_{11})) \mathcal{R}_0^{(2p+2j)}(x - \xi). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{E}_k^{(p)}(x, \xi) = \mathcal{R}_k^{(p)}(x, \xi).$$

Тогда

$$\mathcal{L}_k^p \mathcal{E}_k^{(p)}(x, \xi) = \mathcal{L}_k^p \mathcal{R}_k^{(p)}(x, \xi) = \mathcal{R}_k^{(0)}(x, \xi) = \delta(x - \xi).$$

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Операторы $\mathcal{L}_k^p$ удовлетворяют усиленному принципу Гюйгенса, если*

$$p \leq \frac{1}{2} \min\{m-1, n-m\} - K.$$

Список литературы

1. Берест Ю. Ю., Веселов А. П. Принцип Гюйгенса и интегрируемость // УМН. 1994. Т. 49. № 6(300). С. 8–78.
2. Berest Y. Hierarchies of Huygens' Operators and Hadamard's Conjecture // Acta Appl. Math. 1998. V. 53. P. 125–185.
3. Berest Y. Y., Loutsenko I. M. Huygens' Principle in Minkowski Spaces and Soliton Solutions of the Korteweg–de Vries Equation // Commun. Math. Phys. 1997. V. 190. P. 113–132.
4. Gårding L. The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic differential equations by means of Riesz integrals // Ann. Math. 1947. V. 48. № 4. P. 785–826.
5. Вайнберг Б. Р., Гиндикин С. Г. Об усиленном принципе Гюйгенса для одного класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 151–180.
6. Гиндикин С. Г. Анализ в однородных областях // УМН. 1964. Т. 19. № 4(118). С. 3–92.
7. Riesz M. L'integrale de Riemann–Liouville et le probleme de Cauchy // Acta Math. 1949. V. 81. P. 1–223.
8. Berest Y., Molchanov Y. Fundamental solution for partial differential equations with reflection group invariance // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 8. P. 4324–4339.
9. Семянистый В. И. Некоторые интегральные преобразования и интегральная геометрия в эллиптическом пространстве // Тр. сем. по вект. и тенз. ан. Т. 12. М.: Изд-во МГУ, 1963. С. 397–441.
10. Ournycheva E., Rubin B. An analogue of the Fuglede formula in integral geometry on matrix space. Preprint № 1. Math.FA/0401127, 2004. P. 1–20.
11. Хэкало С. П. Потенциалы Рисса в пространстве прямоугольных матриц и изогюйгенсова деформация оператора Кэли–Лапласа // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 2. С. 168–170.
12. Гиндикин С. Г. Задача Коши для сильно однородных дифференциальных операторов // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 181–208.
13. Габриелов А. М., Паламодов В. П. Принцип Гюйгенса и его обобщения // Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. Избранные труды. М.: Наука, 1968. С. 449–456.

14. Хэкало С. П. Изогюйгенсовы деформации однородных дифференциальных операторов, связанных со специальным конусом ранга 3 // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 6. С. 927–940.
15. Петров Е. Е. Преобразование Радона в пространстве матриц // Тр. сем. по вект. и тенз. ан. Т. 15. М.: Изд-во МГУ, 1970. С. 299–315.
16. Петров Е. Е. Вычеты обобщенной функции $|\det x|^\lambda \operatorname{sgn}^\nu(\det x)$ // Изв. вузов. Математика. 1991. Т. 3. С. 83–86.
17. Хэкало С. П. Изогюйгенсовы деформации оператора Кэли общим потенциалом Лагнеше–Штельмахера // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 4. С. 189–212.
18. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматгиз, 1988.
19. Спрингер Т. Теория инвариантов. М.: Мир, 1981.
20. Herz C. Bessel function of matrix argument // Ann. of Math. 1955. V. 61. № 3. P. 474–523.
21. Rubin B. Zeta integrals and integral geometry in the space of rectangular matrices. Preprint / The Hebrew Univ. of Jerusalem, 2004.
22. Денеф Ж. О локальной дзета-функции Игузы // Тр. сем. Н. Бурбаки за 1991 г. М.: Мир, 1998. С. 300–330.
23. Бернштейн И. Н. Аналитическое продолжение обобщенных функций по параметру // Функц. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 4. С. 26–40.
24. Hua Loo Keng. Harmonic analysis of functions of many complex variables in the classical domains. Providence: AMS, 1963.
25. Трев Ж. Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1965.
26. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1. М.: Физматгиз, 1958.
27. Faraut J., Koranyi A. Analysis on symmetric cones. Oxford: Clarendon Press, 1994.
28. Хэкало С. П. Дзета-функция Игузы, ассоциированная со сложной степенной функцией на пространстве прямоугольных матриц. Препринт № 10 / ПОМИ, 2004.
29. Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.
30. Шибасов Л. П. Интегральные задачи в пространстве матриц, связанные с функционалом $X_{n,m}^\lambda$ // Изв. вузов. Математика. 1973. Т. 8. С. 101–112.
31. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматгиз, 1989.
32. Samko G. S. Hypersingular integrals and their applications // Analytical Methods and Special Functions. V. 5. London: Taylor and Francis, 2002.
33. Rubin B. Inversion of k -plane transforms via continuous wavelet transforms // J. of Math. Anal. and Appl. 1998. V. 220. P. 187–203.
34. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Физматгиз, 1983.
35. Wilson G. Bispectral commutative ordinary differential operators // J. reine angew. Math. 1993. V. 442. P. 177–204.
36. Khekalov S. The gauge related differential operators // International seminar Day on diffraction'2003. Saint-Petersburg: PDMI, 2003. P. 43–45.

Санкт-Петербургское отделение
 Математического института им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: khekalov@pdmi.ras.ru, fmf@kolomna.ru

Поступило в редакцию
 25.05.2004