Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Альбеверио, А. Ю. Хренников, В. М. Шелкович, Нелинейные сингулярные проблемы p -адического анализа: ассоциативные алгебры p -адических распределений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 2, 3–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/im632>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 17:21:38

УДК 517.982.4+511.225

С. Альбеверио, А. Ю. Хренников, В. М. Шелкович

Нелинейные сингулярные проблемы p -адического анализа: ассоциативные алгебры p -адических распределений

Предлагается алгебраический аппарат, в рамках которого можно решать как линейные, так и нелинейные сингулярные задачи p -адического анализа, связанные с теорией распределений (обобщенных функций). Строится ассоциативная алгебра p -адических обобщенных функций Коломбо–Егорова. Роль производной в этой алгебре выполняет псевдодифференциальный оператор Владимирова. Алгебра замкнута относительно операций преобразования Фурье и ассоциативной свертки. Для обобщенных функций определено значение в точке, причем обобщенная функция однозначно определяется своими точечными значениями. Также строится ассоциативная алгебра асимптотических распределений, порожденная линейной оболочкой множества присоединенных однородных p -адических распределений. Последняя алгебра вкладывается как подалгебра в алгебру Коломбо–Егорова. Кроме того, разработана новая техника построения слабых асимптотик.

Библиография: 49 наименований.

§ 1. Введение и основные результаты

1.1. p -адическая математическая физика. Традиционно в теоретической и математической физике используются вещественные и комплексные числа. Однако после того, как в [48], [49], [45] была высказана гипотеза о том, что на очень малых расстояниях порядка планковской длины ($\sim 10^{-33}$ см) геометрия пространства-времени *неархимедова*, появилось много статей, в которых рассматривались различные физические приложения поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$, определенного как пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по p -адической норме $|\cdot|_p$.

Поскольку существует p -адический анализ, связанный с отображением $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{Q}_p$, и анализ, связанный с отображением $\mathbb{Q}_p$ в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, то в соответствии с этим имеется два типа p -адических физических моделей. Одним из замечательных и впечатляющих достижений p -адического анализа явилось создание p -адической квантовой механики с комплекснозначными волновыми функциями [47], [45]. Также была построена p -адическая квантовая механика с волновыми функциями, принимающими значения в алгебраических расширениях $\mathbb{Q}_p$, например в квадратичных расширениях [22], [23].

Исследования первого и третьего авторов частично поддержаны грантом DFG Project 436 RUS 113/593/3. Статья написана при финансовой поддержке грантов Шведской академии наук о сотрудничестве с учеными бывших республик Советского Союза и The EU-Network “Quantum Probability and Applications”.

Отметим, что важную роль в решении математических и физических задач p -адического анализа играет теория p -адических распределений (обобщенных функций). Теория распределений на локально компактной группе была построена в [10], а теория распределений на локально компактном несвязном поле – в [19]. Теория p -адических $\mathbb{C}$ -значных распределений была исследована в [44], [45] и [24]; теория $\mathbb{Q}_p$ -значных распределений – в [22], [23]. Теория $\mathbb{C}$ -значных распределений на p -адических полях интенсивно использовалась в теории p -адических струн и в p -адической квантовой механике (см. [8], [17], [33], [34], [45]–[47]), в теории псевдодифференциальных и стохастических уравнений [29], в теории динамических систем [25]. В частности, p -адические однородные распределения использовались при определении квантовых амплитуд в различных моделях p -адической математической физики (например, в теории струн; см. также [26]). Теория $\mathbb{Q}_p$ -значных распределений на поле p -адических чисел также активно используется в p -адической математической физике [22], [23], [3], [4].

Очевидно, что развитие p -адического анализа имеет не только самостоятельное математическое значение, но, возможно, откроет дорогу к пониманию и решению многих физических проблем.

Имеется много неразработанных и нерешенных проблем p -адической математической физики, которые, однако, решены в стандартной ($\mathbb{C}$) математической физике. Имеется в виду $\mathbb{C}$ -случай, когда все функции и распределения являются действительно- или комплекснозначными и определены в пространстве с действительными или комплексными координатами. Хорошо известно, что в стандартной математической физике имеются задачи, при решении которых необходимо определять произведения распределений (обобщенных функций) [11], [12], [16], [20], [35]. Такие проблемы возникают в квантовой механике [9], [2], [7], в квантовой теории поля, в некоторых задачах газовой динамики, теории упругости, а также при описании ударных волн, δ -ударных волн, тайфунов. В рамках подходов, связанных с проблемой умножения распределений, развивается теория сингулярных решений нелинейных уравнений [1], [12]–[15], [39], [27], [36], [40]. Для решения этих задач требуется развитие специальных аналитических методов, построение алгебр, включающих пространство распределений, развитие техники построения сингулярных асимптотик. В силу того, что p -адическая математическая физика – молодая наука, p -адические аналоги упомянутых выше задач еще не рассматривались. Это связано с тем, что еще не разработан соответствующий математический аппарат p -адического анализа. Заметим, что и соответствующий стандартный ($\mathbb{C}$) математический аппарат еще находится в процессе становления.

В настоящей статье строится алгебраический аппарат, в рамках которого можно решать линейные и нелинейные сингулярные задачи p -адического анализа, связанные с теорией распределений. Ниже мы систематически используем обозначения и результаты книги [45].

Напомним обычные ($\mathbb{C}$) результаты, которые послужили прототипом наших исследований.

Первая нелинейная “секвенциальная” теория распределений была построена в замечательной статье Я. Б. Ливчака [32]. Пусть $\mathcal{M}$ – множество всех последовательностей $\{f_k(x)\}$ действительных измеримых функций на $\mathbb{R}^n$. Последовательность $\{f_k(x)\} \in \mathcal{M}$ называется *почти нулевой*, если существует такое k_0 , что

$f_k(x) = 0$ для всех $k \geq k_0$. Пусть $T(\mathcal{M})$ – множество почти нулевых последовательностей. Алгебра обобщенных функций Ливчака [32, §8] определяется как факторалгебра $\mathcal{L} = \mathcal{M}/T(\mathcal{M})$. В работе [32] была введена поточечная характеристика обобщенных функций, аналогичная поточечной характеристике на множестве “нестандартных чисел”, введенной в [37], [20].

Частный случай алгебры Ливчака был введен Ю. В. Егоровым [16]. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим множество последовательностей $\{f_k\}$, $f_k \in C^\infty(\Omega)$. Назовем две последовательности $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$ эквивалентными, если для любого компакта $K \Subset \Omega$ существует такое N , что $f_k(x) = g_k(x)$ для всех $k \geq N$, $x \in K$. Алгебра обобщенных функций Егорова $\hat{\mathcal{G}}(\Omega)$ вводится как множество классов эквивалентности.

Нелинейная “непрерывная” теория распределений, построенная Коломбо [11], в настоящее время является одной из наиболее широко используемых и находит много приложений в математической физике [11], [16], [20], [35], [41]. Пусть $\mathbb{N}_0 = 0 \cup \mathbb{N}$. Для каждого $q \in \mathbb{N}_0$ определим подмножества основных функций

$$\mathcal{A}_0(\Omega) = \left\{ \chi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int \chi(x) dx = 1 \right\},$$

$$\mathcal{A}_q(\Omega) = \left\{ \chi(x) \in \mathcal{A}_0(\Omega) : \int x^\alpha \chi(x) dx = 0, 1 \leq |\alpha| \leq q \right\}, \quad q = 1, 2, \dots,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ясно, что $\mathcal{D}(\Omega) \supset \mathcal{A}_0(\Omega) \supset \mathcal{A}_1(\Omega) \supset \mathcal{A}_2(\Omega) \supset \dots \supset \mathcal{A}_q(\Omega) \supset \dots$ и $\mathcal{A}_q(\Omega) \neq \emptyset$ для всех $q \in \mathbb{N}_0$.

Обозначим через $\mathcal{E}(\Omega)$ дифференциальную алгебру отображений $f: \mathcal{A}_0(\Omega) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$, элементы которой – последовательности $f(\psi, x)$, где $\psi \in \mathcal{A}_q(\Omega)$ рассматривается как параметр.

Для функции $\psi \in \mathcal{A}_0(\Omega)$ введем $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $x \in \Omega$. Обозначим через $\mathcal{E}_M(\Omega)$ дифференциальную подалгебру элементов умеренного роста $f(\psi, x) \in \mathcal{E}(\Omega)$ таких, что для любого компакта $K \Subset \Omega$ и любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $\psi \in \mathcal{A}_N(\Omega)$

$$\sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha f(\psi_\varepsilon, x)| \leq M \varepsilon^{-N} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где $M > 0$ – константа, $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число. Дифференциальный идеал $\mathcal{N}(\Omega)$ в алгебре $\mathcal{E}_M(\Omega)$ – это множество таких элементов $f(\psi, x) \in \mathcal{E}(\Omega)$, что для любого компакта $K \Subset \Omega$ и любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ существует такое $N \in \mathbb{N}_0$, при котором для всех $\psi \in \mathcal{A}_q(\Omega)$, где $q \geq N$, имеет место неравенство

$$\sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha f(\psi_\varepsilon, x)| \leq M \varepsilon^{q-N} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0);$$

здесь $M > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$.

Алгебра Коломбо определяется как факторалгебра $\mathcal{G}(\Omega) = \mathcal{E}_M(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)$, а ее элементы называются новыми обобщенными функциями Коломбо.

Заметим, что в алгебрах Коломбо, Ливчака и Егорова произведение распределений в общем случае уже не является распределением. Элементы этих алгебр

не имеют функциональной интерпретации, что существенно ограничивает возможности их приложений.

Существует другой подход к проблеме умножения распределений, связанный с именами Я. Б. Ливчака [32], Ли Банг Хе [31], В. К. Иванова [21]. Главная идея этого подхода состоит в том, что произведение распределений представляется как *слабая асимптотика* произведения аппроксимаций этих распределений, когда параметр аппроксимации стремится к нулю. При использовании этого в [12], [40] были построены ассоциативные алгебры *асимптотических распределений* и *асимптотические подалгебры* этих алгебр. Последние подалгебры оказались адекватным математическим аппаратом для изучения сингулярных решений нелинейных уравнений и гиперболических систем законов сохранения [12]–[15], [40]. В упомянутых работах была исследована динамика распространения и взаимодействия бесконечно узких солитонов, ударных волн и дельта-ударных волн.

В отличие от подхода Коломбо, в рамках которого произведение распределений в общем случае уже не является распределением, *асимптотические распределения* можно отождествить с (бесконечномерными) векторнозначными распределениями Шварца [39], [27]. Эти результаты намечают путь построения *нелинейной теории распределений* по типу стандартной теории Л. Шварца $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

1.2. Содержание статьи. В §2 приводятся некоторые факты p -адической теории распределений. В §3 дается описание класса *присоединенных однородных p -адических распределений* (в широком смысле). Впервые этот класс распределений был построен в препринте авторов [5], краткое изложение дано в [6].

Напомним, что понятие *присоединенного однородного распределения* (п. о. р.) для случая $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ было введено в [19, гл. I, §4.1] следующим определением: для всякого m распределение $f_m \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ называется *присоединенным однородным порядка m и степени λ* , если для любого $a > 0$ и любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеем

$$\left\langle f_m, \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle = a^{\lambda+1} \langle f_m, \varphi \rangle + a^{\lambda+1} \ln a \langle f_{m-1}, \varphi \rangle, \quad (1.1)$$

где f_{m-1} – п. о. р. порядка $m-1$ и степени λ , $m = 1, 2, 3, \dots$. В [43, гл. X, §8] определение п. о. р. вводится соотношением, аналогичным (1.1), где в правой части стоит $\ln^m a$ вместо $\ln a$. Определение (1.1) вводится по аналогии с определением присоединенного собственного вектора линейного преобразования.

И в книге [18, гл. I, §4.2], и в статье [43, гл. X, §8], написанной по этой книге, утверждается, что распределения $x_{\pm}^{\lambda} \ln^m x_{\pm}$, $\lambda \neq -1, -2, \dots$, и $P(x_{\pm}^{-n} \ln^{m-1} x_{\pm})$ являются п. о. р. m -го порядка и степени λ и $-n$ соответственно, $m = 1, 2, 3, \dots$. Легко проверить, что при $m = 2, 3, \dots$ упомянутые распределения не являются присоединенными однородными как в смысле определения (1.1), так и в смысле модифицированного определения из [43, гл. X, §8]. Этот факт иллюстрируется простейшим примером:

$$\ln^2(ax_{\pm}) = \ln^2 x_{\pm} + 2 \ln a \ln x_{\pm} + \ln^2 a.$$

Можно показать, что существуют только п. о. р. 1-го порядка, а при $m \geq 2$ определение (1.1) описывает пустой класс. Однако в настоящей статье мы не рассматриваем этот вопрос. Определение (1.1) нельзя “сохранить”, даже допустив, что распределение f_{m-1} в (1.1) может зависеть от a .

Построенные в §3 p -адические п. о. р. (в широком смысле) вводятся с помощью определения 3.3 и являются аналогами упомянутых выше (С-случай) распределений $x_{\pm}^{\lambda} \ln^m x_{\pm}$, $\lambda \neq -1, -2, \dots$, и $P(x_{\pm}^{-n} \ln^{m-1} x_{\pm})$. Такое п. о. р. (в широком смысле) m -го порядка, f_m , при $m \geq 2$ воспроизводится оператором подобного преобразования $U_a f(x) = f(ax)$ с точностью до линейной комбинации п. о. р. (в широком смысле) порядков $m-1, m-2, \dots, 0$ и, следовательно, строго говоря, п. о. р. не являются. Но, следуя традиции книги [19, гл. I, §4.1], и при $m \geq 2$ мы будем называть эти распределения п. о. р., опуская, как правило, слова “в широком смысле”. Можно доказать, что распределения $x_{\pm}^{\lambda} \ln^m x_{\pm}$, $P(x_{\pm}^{-n} \ln^{m-1} x_{\pm})$ являются п. о. р. (в широком смысле) в смысле этого определения, переформулированного для случая $\mathbb{R}$ (вместо $\mathbb{Q}_p$).

В §4, используя некоторые идеи приведенных выше конструкций Ливчака, Егорова и Коломбо, мы строим p -адическую алгебру обобщенных функций $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$, названную нами *алгеброй Коломбо–Егорова*. p -адическая теория наследует все “хорошие” свойства стандартных алгебр Коломбо и Егорова. Как и в стандартных теориях, имеется линейное инъективное вложение $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n) \subset \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$, причем пространство $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ является подалгеброй в алгебре $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ (теорема 4.1). Алгебра $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ также является *ассоциативной сверточной алгеброй*. Операция (дробного) частного дифференцирования и (дробного) частного интегрирования вводится с помощью псевдодифференциального оператора Владимирова.

Для обобщенных функций из $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ определено значение в точке. Напомним, что в стандартных (С) теориях Ливчака, Егорова и Коломбо обобщенная функция *не определяется однозначно* своими поточечными значениями на $\mathbb{R}^n$, однако имеет место поточечная характеристика на множестве *обобщенных точек*, которые являются аналогами “нестандартных чисел” [37], [20] (см. также [38] и замечание 4.2). Поэтому *неожиданным* результатом является теорема 4.2, согласно которой для обобщенных функций из $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ *имеет место поточечная характеристика* на $\mathbb{Q}_p^n$. Этот факт в значительной мере “стирает” разницу между p -адическими обобщенными функциями из $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ и функциями из классических функциональных пространств.

В §5 строится ассоциативная p -адическая алгебра *асимптотических распределений* $\mathcal{A}^*$, порожденная p -адическими п. о. р., введенными в §3. Алгебра $\mathcal{A}^*$ является аналогом (С-случай) алгебр, построенных авторами в [12], [40], [39], [27]. Алгебра $\mathcal{A}^*$ также является *ассоциативной сверточной алгеброй*. Каждый элемент алгебры $\mathcal{A}^*$, т. е. *асимптотическое распределение*, является слабой асимптотикой вида (5.53):

$$f^*(x) = f_0(x) + \delta(x) \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N c_{mn} p^{-\lambda_m k} \log_p^n(p^{-k}), \quad k \rightarrow \infty,$$

где $f_0(x)$ – п. о. р., $\lambda_m \in \mathbb{R}$ – возрастающая последовательность, M, N, c_{mn} – некоторые константы. Конструкция алгебры $\mathcal{A}^*$ опирается на *основную* теорему 5.1, которая дает слабые асимптотические разложения произведений регуляризаций п. о. р. При доказательстве основной теоремы (в §6.2) используется новая техника построения слабых асимптотик.

Алгебру $\mathcal{A}^*$ асимптотических распределений можно рассматривать как бесконечномерное пространство векторнозначных распределений Шварца:

$$f^*(x) = (f_{(\lambda_m, n)}(x)), \quad \lambda_m \in \mathbb{R}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0,$$

финитных слева и справа, где $\lambda_0 = 0$, $f_{(\lambda_0, 0)} \in \mathcal{A}$, $f_{(\lambda_m, n)} = c_{mn} \delta(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$. При этом векторнозначное распределение $f^*(x) \in \mathcal{A}^*$ – линейный непрерывный функционал над основным пространством $\mathcal{D}_*$ векторнозначных функций

$$\varphi_*(x) = (\varphi_{(\beta_m, n)}(x)), \quad \varphi_{(\beta_m, n)} \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p), \quad \beta_m \in \mathbb{R}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0,$$

и для всех $\varphi_*(x) \in \mathcal{D}_*$

$$\langle f^*(x), \varphi_*(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_{(\alpha_m, n)}(x), \varphi_{(-\alpha_m, -n)}(x) \rangle.$$

На $\mathcal{D}_*$ можно ввести локально выпуклую топологию полного пространства, аналогично тому, как это было сделано в случае обычной ($\mathbb{C}$ -случай) алгебры асимптотических распределений [39], [27], но в настоящей статье эта задача не рассматривается.

Алгебра асимптотических распределений $\mathcal{A}^*$ вкладывается как подалгебра в алгебру Коломбо–Егорова.

Первое естественное приложение развитого математического аппарата – изучение задач p -адической квантовой механики с сингулярными потенциалами. Именно в рамках развитого формализма мы намереемся в дальнейшем решить уравнение Шрёдингера

$$-\frac{1}{|4|_p} D_x^2 \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

с потенциалом точечного взаимодействия $V(x) = \sum_{j=1}^s a_j \delta(x - x_j)$ и потенциалом $V(x) = |x|_p^{\alpha-1}$, $\alpha < 0$. Эта известная проблема в стандартной ($\mathbb{C}$ -случай) теории была исследована во многих книгах и статьях [9], [2], [7], [42]. Такого рода исследования могут иметь значительный интерес независимо от возможности новых физических приложений, поскольку приведут к лучшему пониманию стандартной квантовой механики. Предполагается также исследовать p -адические аналоги уравнений Бюргерса и Кортевега–де Фриза.

§2. Распределения Брюа–Шварца

Полное метрическое локально компактное вполне несвязное пространство $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \cdots \times \mathbb{Q}_p$ состоит из точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_j \in \mathbb{Q}_p$, $j = 1, 2, \dots, n$, $n > 1$. На $\mathbb{Q}_p^n$ введем p -адическую норму $|x|_p = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|_p$, $x \in \mathbb{Q}_p^n$, где $|x_j|_p$ – p -адическая норма на $\mathbb{Q}_p$, $j = 1, 2, \dots, n$. Обозначим через $B_\gamma^n(a) = \{x: |x - a|_p \leq p^\gamma\}$ шар радиуса p^γ с центром в точке $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}_p^n$ и через $S_\gamma^n(a) = \{x: |x - a|_p = p^\gamma\}$ – его границу (сферу). При этом

$$B_\gamma^n(a) = B_\gamma(a_1) \times \cdots \times B_\gamma(a_n),$$

где $B_\gamma(a_j) = \{x: |x - a_j|_p \leq p^\gamma\}$ – круг радиуса p^γ с центром в точке $a_j \in \mathbb{Q}_p$, $j = 1, 2, \dots, n$. Будем записывать $B_\gamma^n(0) = B_\gamma^n$ и $S_\gamma^n(0) = S_\gamma^n$.

Известно, что на $\mathbb{Q}_p$ существует мера Хаара, т.е. положительная мера dx , инвариантная относительно сдвига $d(x+a) = dx$ и нормированная соотношением $\int_{|\xi|_p \leq 1} dx = 1$. Если f – функция, интегрируемая на $\mathbb{Q}_p$, то [19, гл. II, §2.2], [45, IV]:

$$\begin{aligned} \int_{B_N} f(x) dx &= \sum_{\gamma=-\infty}^N \int_{S_\gamma} f(x) dx, \\ \int_{S_\gamma} f(x) dx &= \int_{B_\gamma} f(x) dx - \int_{B_{\gamma-1}} f(x) dx, \\ \int_{B_\gamma} dx &= p^\gamma, \quad \int_{S_\gamma} dx = p^\gamma \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad \gamma \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Кроме того, имеет место формула замены переменной [40, IV]:

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x) dx = \int_{\mathbb{Q}_p} f\left(\frac{1}{\xi}\right) \frac{1}{|\xi|_p^2} d\xi. \quad (2.2)$$

Инвариантная мера dx на поле $\mathbb{Q}_p$ стандартным образом расширяется до инвариантной меры $d^n x = dx_1 \dots dx_n$ на $\mathbb{Q}_p^n$. Здесь и далее $\int(\cdot) dx$ обозначает несобственный интеграл $\int_{\mathbb{Q}_p^n}(\cdot) dx$.

Будем называть определенную на $\mathbb{Q}_p^n$ комплекснозначную функцию $\varphi(x)$ *локально постоянной*, если для любого $x \in \mathbb{Q}_p^n$ существует такое целое число $l(x) \in \mathbb{Z}$, что $\varphi(x+x') = \varphi(x)$, $x' \in B_{l(x)}^n$.

Пусть $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n)$ – пространство локально постоянных комплекснозначных функций на $\mathbb{Q}_p^n$ и $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ – пространство основных функций Брюа–Шварца, являющееся подпространством функций из $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n)$, имеющих компактный носитель. Если $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, согласно лемме 1 из [45, VI.1] существует такое число $l \in \mathbb{Z}$, что

$$\varphi(x+x') = \varphi(x), \quad x' \in B_l^n, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Наибольшее из таких чисел $l = l(\varphi)$ называется *параметром постоянности* функции φ . Вместо параметра постоянности можно рассматривать *вектор постоянности* $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$, где l_j – параметр постоянности функции φ по переменной x_j , $j = 1, 2, \dots, n$. В этом случае $l = \min_{1 \leq j \leq n} (l_j)$.

Обозначим через $\mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p^n)$ пространство (конечной размерности) основных функций из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, имеющих носитель в круге B_N^n с параметром постоянности не меньше l . Имеет место вложение $\mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p^n) \subset \mathcal{D}_{N'}^{l'}(\mathbb{Q}_p^n)$, $N \leq N'$, $l \leq l'$. Сходимость в $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ определяется следующим образом: $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, в $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ тогда и только тогда, когда:

- (i) $\varphi_k \in \mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p^n)$, где N и l не зависят от k ;
- (ii) $\varphi_k \xrightarrow{x \in \mathbb{Q}_p^n} 0$, $k \rightarrow \infty$, где $\Rightarrow$ обозначает равномерную сходимость.

Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ – полное локально выпуклое векторное пространство. Каждая функция $\varphi \in \mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p^n)$ представляется в виде

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{n(N-l)}} \varphi(a^\nu) \Delta_{l_1}(x_1 - a_1^\nu) \dots \Delta_{l_n}(x_n - a_n^\nu), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (2.3)$$

где точки $a^\nu = (a_1^\nu, \dots, a_n^\nu) \in B_N^n$ не зависят от φ [45, VI.5].

Обозначим через $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ пространство линейных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ и введем сходимость на $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ как слабую сходимость функционалов. Линейные функционалы из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ непрерывны. Будем записывать $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$.

Преобразование Фурье функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ определяется формулой

$$F[\varphi](\xi) = \int \chi_p(\xi x) \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (2.4)$$

где $\chi_p(\xi x) = \chi_p(\xi_1 x_1) \dots \chi_p(\xi_n x_n) = e^{2\pi i \sum_{j=1}^n \{\xi_j x_j\}_p}$ и функция $\chi_p(\xi_j x_j) = e^{2\pi i \{\xi_j x_j\}_p}$ для каждого фиксированного $\xi_j \in \mathbb{Q}_p$ является аддитивным характером поля $\mathbb{Q}_p$, $\{\xi_j x_j\}_p$ – дробная часть числа $\xi_j x_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ [45, VII.2, 3]. Преобразование Фурье $F[f]$ распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ [45, VII.3] определим соотношением $\langle F[f], \varphi \rangle = \langle f, F[\varphi] \rangle$.

При $n = 1$ для $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ имеем [45, VII, (3.3)]:

$$F[f(ax+b)](\xi) = |a|_p^{-1} \chi_p\left(-\frac{b}{a}\xi\right) F[f(x)]\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad a \neq 0, \quad x \in \mathbb{Q}_p. \quad (2.5)$$

Известно, что операция взятия частной производной не определена на $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ и соответствующую роль играет псевдодифференциальный оператор Владимирова $D_{x_j}^\alpha$ [44], [45, IX] (см. также [28]). На функциях $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ оператор Владимирова $D_{x_j}^\alpha$ определяется как свертка

$$(D_{x_j}^\alpha \varphi)(x) = f_{-\alpha}(x_j) * \varphi(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

где $f_\alpha(x_j) = \frac{|x_j|_p^{\alpha-1}}{\Gamma_p(\alpha)}$, $x_j \in \mathbb{Q}_p$, $|x_j|_p^{\alpha-1}$ – однородное распределение (см. п. 3.1) степени $\pi_\alpha(x_j) = |x_j|_p^{\alpha-1}$, $\Gamma_p(\alpha) = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p-\alpha}$ – Γ -функция. Известно [45, VIII, (2.20), IX.1], что $f_0(x_j) = \delta(x_j)$ и

$$f_\alpha(x_j) * f_\beta(x_j) = f_{\alpha+\beta}(x_j), \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq 1. \quad (2.7)$$

Соотношение (2.6) можно переписать в эквивалентном виде:

$$(D_{x_j}^\alpha \varphi)(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{Q}_p^n} |\xi_j|_p^\alpha F[\varphi](\xi) \chi_p(-\xi x) d\xi, & \alpha > -1, \\ \int_{\mathbb{Q}_p^n} |\xi_j|_p^\alpha (F[\varphi](\xi) \chi_p(-\xi x) - F[\varphi](\xi_{(\hat{j})}) \chi_p(-\xi_{(\hat{j})} x)) d\xi, & \alpha < -1, \end{cases} \quad (2.8)$$

где $\xi_{(\hat{j})} = (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, 0, \xi_{j+1}, \dots, 0)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Оператор $D_{x_j}^\alpha$ корректно определен только на таких распределениях $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$, для которых существует свертка $f_{-\alpha}(x_j) * f(x)$, $\alpha \neq -1$ [45, IX].

Оператор $D_{x_j}^\alpha$ называется при $\alpha > 0$ *оператором (дробного) частного дифференцирования порядка α по переменной x_j* ; при $\alpha < 0$ – *оператором (дробного) частного интегрирования порядка α по переменной x_j* ; при $\alpha = 0$ – *тождественным оператором* ($D_{x_j}^0 \varphi(x) = \delta(x_j) * \varphi(x) = \varphi(x)$).

§3. Присоединенные однородные (в широком смысле) p -адические распределения ($n = 1$)

3.1. Однородные распределения. Согласно [45, III.2] все мультипликативные характеры π поля $\mathbb{Q}_p$ представляются в виде

$$\pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p,$$

где $\pi(p) = p^{1-\alpha}$ и π_1 – нормированный мультипликативный характер такой, что $\pi_1(x) = \pi_1(|x|_p x)$, $\pi_1(p) = \pi_1(1) = 1$, $|\pi_1(x)| = 1$. Известно [19, гл. II, §2.3], [45, VIII.1], что если $\pi(x) \neq 1$, то

$$\int_{S_\gamma} \pi(x) dx = 0, \quad \gamma \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [19, гл. II, §2.3], [45, VIII.1]. Пусть $\pi_\alpha(x)$, $x \in \mathbb{Q}_p$ – мультипликативный характер поля $\mathbb{Q}_p$. Распределение $f \in \mathcal{D}'$ называется *однородным* степени $\pi_\alpha(x)$, если для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ и для всех $t \in \mathbb{Q}_p^*$ мы имеем

$$\left\langle f, \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle = \pi_\alpha(t) |t|_p \langle f, \varphi \rangle,$$

т. е.

$$f(tx) = \pi_\alpha(t) f(x), \quad t \in \mathbb{Q}_p^*.$$

Здесь $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ – мультипликативная группа поля $\mathbb{Q}_p$.

ТЕОРЕМА 3.1 [19, гл. II, §2.3], [45, VIII.1]. Каждое однородное распределение $f \in \mathcal{D}'$ степени $\pi_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x)$ есть:

- (а) $C\pi_\alpha$, если $\pi_1(x) \neq 1$ или $\alpha \neq 0$;
- (б) $C\delta$, если $\pi_1(x) = 1$ и $\alpha = 0$, где C – константа.

Здесь для каждого мультипликативного характера $\pi_\alpha(x) \neq \pi_0(x) = |x|_p^{-1}$, $x \neq 0$, однородное распределение $\pi_\alpha \in \mathcal{D}'$ степени $\pi_\alpha(x)$ определяется с помощью аналитического продолжения по параметру α :

$$\begin{aligned} \langle \pi_\alpha, \varphi \rangle &= \int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \\ &+ \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x) \varphi(x) dx + \varphi(0) I_0(\alpha) \end{aligned} \quad (3.2)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}$. Ввиду [45, IV, (2.5), (1.3)] для $\text{Re } \alpha > 0$ имеем

$$I_0(\alpha) = \int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } \pi_1(x) \neq 1, \\ \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}, & \text{если } \pi_1(x) \equiv 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Для остальных $\alpha \neq \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $j \in \mathbb{Z}$, интеграл $I_0(\alpha)$ определяется аналитическим продолжением по параметру α .

3.2. Присоединенные однородные (в широком смысле) распределения. В соответствии с [18, гл. I, §3.11, §4] введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Распределение $f \in \mathcal{D}'$ называется *присоединенным однородным* степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка 1, если для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ и всех $t \in \mathbb{Q}_p^*$ мы имеем

$$\left\langle f, \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle = \pi_\alpha(t)|t|_p \langle f, \varphi \rangle + \pi_\alpha(t)|t|_p \log_p |t|_p \langle f_0, \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{Q}_p,$$

где f_0 – однородное распределение степени $\pi_\alpha(x)$.

Присоединенные однородные распределения порядка нуль совпадают с однородными распределениями.

Учитывая сказанное в §1, введем понятие п. о. р. (в широком смысле) порядка не меньше 2 следующим определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Распределение $f \in \mathcal{D}'$ называется *присоединенным однородным (в широком смысле)* степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка m , $m = 2, 3, \dots$, если для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ и $t \in \mathbb{Q}_p^*$ мы имеем

$$\left\langle f, \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle = \pi_\alpha(t)|t|_p \langle f, \varphi \rangle + \sum_{j=1}^m \pi_\alpha(t)|t|_p \log_p^j |t|_p \langle f_{m-j}, \varphi \rangle,$$

где f_{m-j} – п. о. р. (в широком смысле) степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка $m - j$, $j = 1, 2, \dots, m$, т. е.

$$f(tx) = \pi_\alpha(t)f(x) + \sum_{j=1}^m \pi_\alpha(t) \log_p^j |t|_p f_{m-j}(x), \quad t \in \mathbb{Q}_p^*.$$

Как было сказано выше, мы будем называть указанные распределения п. о. р., опуская слова “в широком смысле”.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Сумма п. о. р. степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка m и присоединенных однородных распределений степени $\pi_\alpha(x)$ и низших порядков $k < m$ является снова п. о. р. степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка m .

Для каждого мультипликативного характера $\pi_\alpha(x) \neq \pi_0(x) = |x|_p^{-1}$, $x \neq 0$, и для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим распределение $\pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p \in \mathcal{D}'$ с помощью аналитического продолжения по параметру α :

$$\begin{aligned} \langle \pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p, \varphi(x) \rangle &= \int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x) \log_p^m |x|_p (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \\ &+ \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x) \log_p^m |x|_p \varphi(x) dx + \varphi(0) I_0(\alpha; m) \end{aligned} \quad (3.4)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}$. Здесь для $\operatorname{Re} \alpha > 0$

$$\begin{aligned} I_0(\alpha; m) &= \int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x) \log_p^m |x|_p dx = \sum_{\gamma=-\infty}^0 \gamma^m p^{\gamma(\alpha-1)} \int_{S_\gamma} \pi_1(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } \pi_1(x) \not\equiv 1, \\ \log_p^m e(1-p^{-1}) \frac{d^m}{d\alpha^m} \left(\frac{1}{1-p^{-\alpha}} \right), & \text{если } \pi_1(x) \equiv 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

и для $\alpha \neq \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $j \in \mathbb{Z}$, интеграл $I_0(\alpha; m)$ определяется аналитическим продолжением по параметру α . Соотношение (3.4) можно получить также дифференцированием (3.2) по α .

Для мультипликативного характера $\pi_0(x) = |x|_p^{-1}$, $x \neq 0$, распределение $P\left(\frac{1}{|x|_p}\right) \in \mathcal{D}'$ (главное значение функции $|x|_p^{-1}$) определяется по формуле [45, VIII, (1.10)]

$$\begin{aligned} \left\langle P\left(\frac{1}{|x|_p}\right), \varphi \right\rangle &= \int_{B_0} |x|_p^{-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} |x|_p^{-1} \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

По аналогии с формулой (3.6), для $m \in \mathbb{N}$ введем распределение $P\left(\frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p}\right) \in \mathcal{D}'$ формулой

$$\begin{aligned} \left\langle P\left(\frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p}\right), \varphi \right\rangle &= \int_{B_0} \frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} \frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p} \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ЛЕММА 3.1. *Распределение $\pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p$, у которого или $\pi_1(x) \neq 1$, или $\alpha \neq 0$, и распределение $P(|x|_p^{-1} \log_p^{m-1} |x|_p)$ являются п. о. р. степени $\pi_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x)$ и порядка $m \in \mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Для $\varphi \in \mathcal{D}$, $t \in \mathbb{Q}_p^*$ имеем:

(а) если $|t|_p < 1$, то

$$\begin{aligned} &\left\langle P\left(\frac{1}{|x|_p}\right), \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle \\ &= \int_{B_0} |x|_p^{-1} \left(\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \varphi(0) \right) dx + \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} |x|_p^{-1} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) dx \\ &= \int_{|\xi|_p \leq |t|_p^{-1}} |\xi|_p^{-1} (\varphi(\xi) - \varphi(0)) d\xi + \int_{|\xi|_p > |t|_p^{-1}} |\xi|_p^{-1} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \left\langle P\left(\frac{1}{|x|_p}\right), \varphi(x) \right\rangle - \varphi(0) \int_{p \leq |\xi|_p \leq |t|_p^{-1}} |\xi|_p^{-1} d\xi, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где (см. (2.1))

$$\int_{p \leq |\xi|_p \leq |t|_p^{-1}} |\xi|_p^{-1} d\xi = \sum_{\gamma=1}^{\gamma_0} \int_{S_\gamma} |\xi|_p^{-1} d\xi = (1 - p^{-1}) \sum_{\gamma=1}^{\gamma_0} 1 = (1 - p^{-1}) \gamma_0, \quad (3.9)$$

и $\sum_{\gamma=1}^{\gamma_0} 1 = \mathbf{S}_0(\gamma_0) = \gamma^0$, $|t|_p = p^{-\gamma_0}$, $\gamma_0 = -\log_p |t|_p \geq 1$;

(b) если $|t|_p = 1$, то $\langle P\left(\frac{1}{|x|_p}\right), \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \rangle = \langle P\left(\frac{1}{|x|_p}\right), \varphi(x) \rangle$;

(c) если $|t|_p > 1$, то

$$\begin{aligned} \left\langle P\left(\frac{1}{|x|_p}\right), \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle &= \\ &= \int_{|\xi|_p \leq |t|_p^{-1}} |\xi|_p^{-1} (\varphi(\xi) - \varphi(0)) d\xi + \int_{|\xi|_p > |t|_p^{-1}} |\xi|_p^{-1} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \left\langle P\left(\frac{1}{|x|_p}\right), \varphi(x) \right\rangle + \varphi(0) \int_{|t|_p^{-1} < |\xi|_p \leq 1} |\xi|_p^{-1} d\xi, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где (см. (2.1))

$$\begin{aligned} \int_{|t|_p^{-1} < |\xi|_p \leq 1} |\xi|_p^{-1} d\xi &= \sum_{\gamma=\gamma_0+1}^0 \int_{S_\gamma} |\xi|_p^{-1} d\xi \\ &= (1-p^{-1}) \sum_{\gamma=\gamma_0+1}^0 1 = -(1-p^{-1})\gamma_0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

и $\sum_{\gamma=\gamma_0+1}^0 1 = -\gamma^0 = -\mathbf{S}_0(\gamma_0)$, $|t|_p = p^{-\gamma_0}$, $\gamma_0 = -\log_p |t|_p \leq -1$.

Таким образом, из (3.8)–(3.11) мы получим

$$\begin{aligned} \left\langle P\left(\frac{1}{|x|_p}\right), \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle &= |t|_p |t|_p^{-1} \left\langle P\left(\frac{1}{|x|_p}\right), \varphi(x) \right\rangle \\ &\quad + |t|_p |t|_p^{-1} \log_p |t|_p (1-p^{-1}) \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle, \end{aligned} \quad (3.12)$$

т. е. согласно определению 3.2 $P\left(\frac{1}{|x|_p}\right)$ – п. о. р. степени $|x|_p^{-1}$ и порядка 1.

2. Для $m \in \mathbb{N}$ и всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}$, $t \in \mathbb{Q}_p^*$ из (3.7) имеем:

(a) если $|t|_p < 1$, то

$$\begin{aligned} \left\langle P\left(\frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p}\right), \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle &= \\ &= \int_{B_0} \frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p} \left(\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \varphi(0) \right) dx + \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} \frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) dx \\ &= \int_{|\xi|_p \leq |t|_p^{-1}} \frac{\log_p^m |t\xi|_p}{|\xi|_p} (\varphi(\xi) - \varphi(0)) d\xi \\ &\quad + \int_{|\xi|_p > |t|_p^{-1}} \frac{\log_p^m |t\xi|_p}{|\xi|_p} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \sum_{j=0}^m C_m^j \log_p^j |t|_p \left\{ \left\langle P\left(\frac{\log_p^{m-j} |\xi|_p}{|\xi|_p}\right), \varphi(\xi) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \varphi(0) \int_{p \leq |\xi|_p \leq |t|_p^{-1}} \frac{\log_p^{m-j} |\xi|_p}{|\xi|_p} d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $|t|_p = p^{-\gamma_0}$, $\gamma_0 = -\log_p |t|_p \geq 1$ и (см. (2.1))

$$\begin{aligned} \int_{p \leq |\xi|_p \leq |t|_p^{-1}} \frac{\log_p^{m-j} |\xi|_p}{|\xi|_p} d\xi &= \sum_{\gamma=1}^{\gamma_0} \int_{S_\gamma} \frac{\log_p^{m-j} |\xi|_p}{|\xi|_p} d\xi \\ &= (1-p^{-1}) \sum_{\gamma=1}^{\gamma_0} \gamma^{m-j}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\sum_{\gamma=1}^{\gamma_0} \gamma^{m-j} = \mathbf{S}_{m-j}(\gamma_0)$, $j = 0, 1, \dots, m$;

(b) если $|t|_p = 1$, то $\left\langle P\left(\frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p}\right), \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle = \left\langle P\left(\frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p}\right), \varphi(x) \right\rangle$;

(c) если $|t|_p > 1$, то

$$\begin{aligned} \left\langle P\left(\frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p}\right), \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle &= \\ &= \int_{|\xi|_p \leq |t|_p^{-1}} \frac{\log_p^m |t\xi|_p}{|\xi|_p} (\varphi(\xi) - \varphi(0)) d\xi \\ &\quad + \int_{|\xi|_p > |t|_p^{-1}} \frac{\log_p^m |t\xi|_p}{|\xi|_p} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \sum_{j=0}^m C_m^j \log_p^j |t|_p \left\{ \left\langle P\left(\frac{\log_p^{m-j} |\xi|_p}{|\xi|_p}\right), \varphi(\xi) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \varphi(0) \int_{|t|_p^{-1} < |\xi|_p \leq 1} \frac{\log_p^{m-j} |\xi|_p}{|\xi|_p} d\xi \right\}; \end{aligned} \quad (3.15)$$

здесь $|t|_p = p^{-\gamma_0}$, $\gamma_0 = -\log_p |t|_p \leq -1$ и (см. (2.1))

$$\begin{aligned} \int_{|t|_p^{-1} < |\xi|_p \leq 1} \frac{\log_p^{m-j} |\xi|_p}{|\xi|_p} d\xi &= \sum_{\gamma=\gamma_0+1}^0 \int_{S_\gamma} \frac{\log_p^{m-j} |\xi|_p}{|\xi|_p} d\xi \\ &= (1-p^{-1}) \sum_{\gamma=\gamma_0+1}^0 \gamma^{m-j}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Используя приведенные далее тождество (6.1) и лемму 6.1, согласно которой $\sum_{\gamma=\gamma_0+1}^0 \gamma^{m-j} = -\mathbf{S}_{m-j}(\gamma_0)$, получим из (3.13)–(3.16), что

$$\begin{aligned} \left\langle P\left(\frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p}\right), \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle &= |t|_p |t|_p^{-1} \left\langle P\left(\frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p}\right), \varphi(x) \right\rangle \\ &\quad + \sum_{j=1}^m |t|_p |t|_p^{-1} \log_p^j |t|_p \left\langle C_m^j P\left(\frac{\log_p^{m-j} |x|_p}{|x|_p}\right), \varphi(x) \right\rangle \\ &\quad + \log_p^{m+1} |t|_p \frac{1}{m+1} (1-p^{-1}) \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle + \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \sum_{j=1}^m a_j \log_p^j |t|_p \end{aligned}$$

для всех $t \in \mathbb{Q}_p^*$, где

$$\begin{aligned} a_m &= -(1 - p^{-1}) \mathbf{B}_1 \frac{C_{m+1}^1}{m+1}, \\ a_{m+1-j} &= (1 - p^{-1}) \mathbf{B}_j \frac{C_{m+1}^j}{m+1}, \quad j = 2, 3, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Итак, мы доказали, что для всех $t \in \mathbb{Q}_p^*$

$$P\left(\frac{\log_p^m |tx|_p}{|tx|_p}\right) = |t|_p^{-1} P\left(\frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p}\right) + \sum_{j=1}^{m+1} |t|_p^{-1} \log_p^j |t|_p f_{m+1-j}(x), \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} f_{m+1-j}(x) &= C_m^j P\left(\frac{\log_p^{m-j} |x|_p}{|x|_p}\right) + a_j \delta(x), \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ f_0(x) &= \frac{1}{m+1} (1 - p^{-1}) \delta(x). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Учитывая замечание 3.1, можно доказать по индукции, что $P(|x|_p^{-1} \log_p^m |x|_p)$ – п. о. р. степени $|x|_p^{-1}$ и порядка $m+1$, $m \in \mathbb{N}$.

3. Для $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $m \in \mathbb{N}$ и всех $\varphi \in \mathcal{D}$, $t \in \mathbb{Q}_p^*$ из соотношения (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \langle \pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p, \varphi(x) \rangle &= \int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x) \log_p^m |x|_p \varphi(x) dx, \\ \left\langle \pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p, \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle &= \int_{\mathbb{Q}_p} |t\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(t\xi) \log_p^m |t\xi|_p \varphi(\xi) d(t\xi) \\ &= \pi_\alpha(t) |t|_p \sum_{j=0}^m C_m^j \log_p^j |t|_p \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^{m-j} |\xi|_p \varphi(\xi) d(\xi) \\ &= \pi_\alpha(t) |t|_p \langle \pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p, \varphi(x) \rangle + \sum_{j=1}^m \pi_\alpha(t) |t|_p \log_p^j |t|_p \langle f_{m-j}(x), \varphi(x) \rangle, \end{aligned}$$

где $f_{m-j}(x) = C_m^j \pi_\alpha(x) \log_p^{m-j} |\xi|_p$, $j = 1, 2, \dots, m$, т.е. для $\operatorname{Re} \alpha > 0$ по индукции мы можем доказать, что в смысле определения 3.3 $\pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p$ – п. о. р. степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка m , $m \in \mathbb{N}$. Для других $\alpha \neq \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $j \in \mathbb{Z}$, это утверждение получается аналитическим продолжением по α .

ЛЕММА 3.2. Пусть $f_s(x)$ являются п. о. р. степени $\pi_{\alpha_s}(x) = |x|_p^{\alpha_s-1} \pi_1(x)$ и порядка m_s , $s = 1, 2, \dots, r$, где все α_s или m_s различны. Если $\sum_{s=1}^r f_s(x) = 0$, то $f_s(x) = 0$, $s = 1, 2, \dots, r$, т.е. п. о. р. различных степеней и порядков являются линейно независимыми.

Лемма доказывается подобно аналогичной лемме из [45, VIII.1] о линейной независимости однородных распределений.

Докажем теорему, позволяющую получить описание всех п. о. р.

ТЕОРЕМА 3.2. Каждое п. о. р. $f \in \mathcal{D}'$ степени $\pi_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x)$ и порядка $m \in \mathbb{N}$ есть (с точностью до п. о. р. порядка не более $m-1$):

- (а) $C\pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p$, если $\pi_\alpha(x) \neq \pi_0(x) = |x|_p^{-1}$;
- (б) $CP(|x|_p^{-1} \log_p^{m-1} |x|_p)$, если $\pi_\alpha(x) = \pi_0(x) = |x|_p^{-1}$, где C – константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $f \neq 0$ – п. о. р. степени $\pi_\alpha(x) \neq \pi_0(x) = |x|_p^{-1}$ и порядка $m \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\text{supp } f \neq \{0\}$, т. е. существует такая функция $\psi(x) \in \mathcal{D}$, $x \in \mathbb{Q}_p$, $\psi(0) = 0$, что

$$\begin{aligned} A_0 &= \langle f(x), \psi(x) \rangle, & B_0 &= \langle \pi_\alpha(\xi) \log_p^m |\xi|_p, \psi(\xi) \rangle \neq 0, \\ A_j &= \langle f_{m-j}(x), \psi(x) \rangle, & B_j &= \langle \pi_\alpha(\xi) \log_p^{m-j} |\xi|_p, \psi(\xi) \rangle \neq 0, \end{aligned}$$

$j = 1, 2, \dots, m$, и для которой в силу определения 3.3 мы имеем

$$\begin{aligned} \left\langle f(x), \psi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle &= \pi_\alpha(t) |t|_p \langle f(x), \psi(x) \rangle \\ &+ \sum_{j=1}^m \pi_\alpha(t) |t|_p \log_p^j |t|_p \langle f_{m-j}(x), \psi(x) \rangle, \quad t \in \mathbb{Q}_p^*, \end{aligned}$$

где $f_{m-j}(x)$ – п. о. р. степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка $m-j$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Следовательно, для всех $\varphi(t) \in \mathcal{D}$, $\varphi(0) = 0$, мы имеем

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \left\langle f(x), \psi\left(\frac{x}{t}\right) \right\rangle \frac{\varphi(t)}{|t|_p} dt = A_0 \langle \pi_\alpha(t), \varphi(t) \rangle + \sum_{j=1}^m A_j \langle \pi_\alpha(t) \log_p^j |t|_p, \varphi(t) \rangle. \quad (3.20)$$

Поскольку $\psi(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$, то $\psi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{\varphi(t)}{|t|_p} \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}^2)$ и из (3.20) следует, что

$$\left\langle f(x), \int_{\mathbb{Q}_p} \psi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{\varphi(t)}{|t|_p} dt \right\rangle = A_0 \langle \pi_\alpha(t), \varphi(t) \rangle + \sum_{j=1}^m A_j \langle \pi_\alpha(t) \log_p^j |t|_p, \varphi(t) \rangle. \quad (3.21)$$

Делая во внутреннем интеграле левой части (3.21) замену переменной (для $x \neq 0$) $t = \frac{x}{\xi}$, $dt = \frac{|x|_p}{|\xi|_p^2} d\xi$, используя соотношение (2.2) и принимая во внимание, что $\frac{\psi(\xi)}{|\xi|_p} \varphi\left(\frac{x}{\xi}\right) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}^2)$, будем иметь

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\psi(\xi)}{|\xi|_p} \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{\xi}\right) \right\rangle d\xi = A_0 \langle \pi_\alpha(t), \varphi(t) \rangle + \sum_{j=1}^m A_j \langle \pi_\alpha(t) \log_p^j |t|_p, \varphi(t) \rangle. \quad (3.22)$$

Используя определение 3.3, из (3.22) получим

$$\begin{aligned} &\langle \pi_\alpha(\xi), \psi(\xi) \rangle \langle f(x), \varphi(x) \rangle + \sum_{j=1}^m \langle \pi_\alpha(\xi) \log_p^j |\xi|_p, \psi(\xi) \rangle \langle f_{m-j}(x), \varphi(x) \rangle \\ &= A_0 \langle \pi_\alpha(t), \varphi(t) \rangle + \sum_{j=1}^m A_j \langle \pi_\alpha(t) \log_p^j |t|_p, \varphi(t) \rangle \end{aligned}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi(0) = 0$. Последнее соотношение можно переписать следующим образом:

$$\left\langle B_m f(x) - A_m \pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p + \sum_{j=1}^m (B_{m-j} f_{m-j}(x) - A_{m-j} \pi_\alpha(x) \log_p^{m-j} |x|_p), \varphi(x) \right\rangle = 0. \quad (3.23)$$

Из равенства (3.23) следует, что или

$$B_m f(x) - A_m \pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p + \sum_{j=1}^m (B_{m-j} f_{m-j}(x) - A_{m-j} \pi_\alpha(x) \log_p^{m-j} |x|_p) = 0, \quad (3.24)$$

или

$$B_m f(x) - A_m \pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p + \sum_{j=1}^m (B_{m-j} f_{m-j}(x) - A_{m-j} \pi_\alpha(x) \log_p^{m-j} |x|_p) = C \delta(x), \quad (3.25)$$

где C – константа.

Поскольку $\pi_\alpha(x) \neq \pi_0(x) = |x|_p^{-1}$, согласно леммам 3.1, 3.2 и теореме 3.1 соотношение (3.25) имеет место только для $C = 0$. Таким образом, имеет место соотношение (3.24).

Предположим, что каждое п.о.р. $f_{m-j}(x)$ – линейная комбинация п.о.р. $\pi_\alpha(x) \log_p^k |x|_p$, $k = 0, 1, \dots, m-j-1$, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда из (3.24) получим по индукции, что с точностью до п.о.р. порядка не более $m-1$

$$f(x) = \frac{A_m}{B_m} \pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p.$$

(b) Пусть теперь $\pi_\alpha(x) = \pi_0(x) = |x|_p^{-1}$. Ясно, что $\text{supp } f \neq \{0\}$. Повторяя приведенные выше рассуждения, мы получим

$$B_m f(x) - A_m P\left(\frac{\log_p^{m-1} |\xi|_p}{|\xi|_p}\right) + \sum_{j=1}^{m-1} \left(B_{m-j} f_{m-j}(x) - A_{m-j} P\left(\frac{\log_p^{m-1-j} |\xi|_p}{|\xi|_p}\right) \right) = C \delta(x), \quad (3.26)$$

где

$$A_1 = \langle f(x), \psi(x) \rangle, \quad B_j = \left\langle P\left(\frac{\log_p^{m-j} |\xi|_p}{|\xi|_p}\right), \psi(\xi) \right\rangle \neq 0, \\ A_{j+1} = \langle f_{m-j}(x), \psi(x) \rangle, \quad B_m = \left\langle P\left(\frac{1}{|\xi|_p}\right), \psi(\xi) \right\rangle \neq 0,$$

$j = 1, 2, \dots, m-1$, C – константа. Как и в предыдущем случае, из (3.26) получим по индукции, что с точностью до п.о.р. порядка не более $m-1$

$$f(x) = \frac{A_m}{B_m} P\left(\frac{\log_p^{m-1} |\xi|_p}{|\xi|_p}\right).$$

Теорема доказана.

ЛЕММА 3.3. *Присоединенное однородное распределение степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка m является периодической функцией по переменной α с периодом $T = \alpha_1 = \frac{2\pi i}{\ln p}$, т. е.*

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha+T}(x) \log_p^m |x|_p &= \pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p, & \pi_\alpha &\neq |x|_p^{-1}, \\ P\left(\frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p^{1+T}}\right) &= P\left(\frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p^1}\right), & m &\in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегралы в соотношениях (3.4), (3.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x) \log_p^m |x|_p (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \\ &= \sum_{\gamma=-\infty}^0 p^{\gamma(\alpha-1)} \gamma^m \int_{S_\gamma} \pi_1(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx, \\ &\int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x) \log_p^m |x|_p \varphi(x) dx = \sum_{\gamma=1}^{\infty} p^{\gamma(\alpha-1)} \gamma^m \int_{S_\gamma} \pi_1(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Поскольку $p^T = 1$, все члены в правых частях последних равенств являются T -периодическими по α , $T = \frac{2\pi i}{\ln p}$. Интеграл $I_0(\alpha; m)$, задаваемый (3.5), также является T -периодической функцией. С учетом теоремы 3.2 лемма доказана.

3.3. Преобразование Фурье п. о. р. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.3 [19, гл. II, § 2.5], [45, VII.2]. *Преобразование Фурье $F[f]$ однородного распределения $f \in \mathcal{D}'$ степени $\pi_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x)$ есть однородное распределение степени $\pi_\alpha^{-1}(x) |x|_p^{-1} = |x|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(x)$.*

Докажем теорему, дающую описание преобразования Фурье п. о. р.

ТЕОРЕМА 3.4. *Если $f \in \mathcal{D}'$ – п. о. р. степени $\pi_\alpha(x) = |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x)$ и порядка m , то его преобразование Фурье $F[f]$ – п. о. р. степени $\pi_\alpha^{-1}(x) |x|_p^{-1} = |x|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(x)$ и порядка m , $m \in \mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m = 1$, используя формулу (2.5) и определение 3.2, для всех $t \in \mathbb{Q}_p^*$ получим, что

$$\begin{aligned} F[f(x)](t\xi) &= |t|_p^{-1} F\left[f\left(\frac{x}{t}\right)\right](\xi) \\ &= |t|_p^{-1} \pi_\alpha\left(\frac{1}{t}\right) F[f(x)](\xi) + |t|_p^{-1} \pi_\alpha\left(\frac{1}{t}\right) \log_p \left|\frac{1}{t}\right|_p F[f_0(x)](\xi) \\ &= |t|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(t) F[f(x)](\xi) - |t|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(t) \log_p |t|_p F[f_0(x)](\xi), \end{aligned}$$

где f_0 – однородное распределение степени $\pi_\alpha(x)$, которое в силу теоремы 3.3 равно $F[f_0(x)](\xi) = C_0 |\xi|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(\xi)$ и является однородным распределением степени $|\xi|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(\xi)$, где C_0 – константа.

Таким образом, для $t \in \mathbb{Q}_p^*$

$$F[f(x)](t\xi) = |t|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(t) F[f(x)](\xi) - |t|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(t) \log_p |t|_p C_0 |\xi|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(\xi),$$

т. е. согласно определению 3.2 $F[f(x)](\xi)$ – п. о. р. степени $|\xi|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(\xi)$ и порядка 1.

Пусть f – п. о. р. степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка m , $m = 2, 3, \dots$. Используя формулу (2.5) и определение 4.3, для всех $t \in \mathbb{Q}_p^*$ имеем

$$\begin{aligned} F[f(x)](t\xi) &= |t|_p^{-1} F\left[f\left(\frac{x}{t}\right)\right](\xi) \\ &= |t|_p^{-1} \pi_\alpha\left(\frac{1}{t}\right) F[f(x)](\xi) + \sum_{j=1}^m |t|_p^{-1} \pi_\alpha\left(\frac{1}{t}\right) \log_p^j \left|\frac{1}{t}\right|_p F[f_{m-j}(x)](\xi) \\ &= |t|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(t) F[f(x)](\xi) + \sum_{j=1}^m |t|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(t) \log_p^j |t|_p (-1)^j F[f_{m-j}(x)](\xi), \end{aligned}$$

где $f_{m-j}(x)$ – п. о. р. степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка $m - j$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Предположим, что теорема верна для п. о. р. степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка $k = 1, 2, \dots, m - 1$. Тогда из последнего соотношения по индукции можно доказать, что $F[f](\xi)$ – п. о. р. степени $|\xi|_p^{-\alpha} \pi_1^{-1}(\xi)$ и порядка m . Таким образом, теорема доказана.

Используя теорему 3.2 и замечание 3.1, можно доказать теорему 3.4, вычисляя преобразование Фурье распределений $\pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p$, $P\left(\frac{\log_p^m |x|_p}{|x|_p}\right)$.

§4. Алгебра Коломбо–Егорова

4.1. Регуляризация распределения. Введем в $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ каноническую δ -последовательность

$$\delta_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} p^{nk} \Omega(p^k |x|_p), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

и каноническую 1-последовательность $\Delta_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega(p^{-k} |x|_p)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $x \in \mathbb{Q}_p^n$, $\Omega(t) = 1$, если $0 \leq t \leq 1$, $\Omega(t) = 0$, если $t > 1$; $\Delta_k(x)$ – характеристическая функция шара B_k^n . Последовательность $\omega_k \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ назовем δ -последовательностью, если существует такое $N \in \mathbb{Z}$, что $\omega_k(x) = \delta_k(x)$, $k \geq N$, $x \in \mathbb{Q}_p^n$. Ясно [45, VI.3, VII.1], что $\omega_k \rightarrow \delta$, $k \rightarrow \infty$, в $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ и $\Delta_k \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$, в $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n)$.

Назовем *регуляризацией* распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ последовательность

$$f_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, p^{-k}) = (f(x) * \omega_k(x)) \Delta_k(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (4.2)$$

где $*$ – свертка. Понятно, что $f_k(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$.

ЛЕММА 4.1. Пусть f_k – регуляризация распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$. Тогда $f_k \rightarrow f$, $k \rightarrow \infty$, в $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$. При этом для каждой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ при $k \geq -l$, где $l = l(\varphi)$ – параметр постоянности φ , имеет место равенство

$$\langle f_k(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$\langle f_k(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \psi_k(x) \rangle, \quad \psi_k(x) = \int p^{nk} \Omega(p^k |\xi|_p) \varphi(x - \xi) d\xi, \quad (4.3)$$

$$x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Если $l = l(\varphi)$ – параметр постоянности основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, то для всех $k \geq -l$, $x \in \mathbb{Q}_p^n$ имеем

$$\psi_k(x) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} p^{nk} \Omega(p^k |\xi|_p) \varphi(x - \xi) d\xi = \varphi(x) p^{nk} \int_{B_{-k}^n} d\xi = \varphi(x). \quad (4.4)$$

Тогда из (4.3), (4.4) получим

$$\langle f_k(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle \quad \forall k \geq -l.$$

Таким образом, для каждой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$, причем $f_k = f$ на каждом компакте $K \subset \mathbb{Q}_p^n$ для достаточно больших k .

Несложно также доказать следующую лемму.

ЛЕММА 4.2. Если $f \in C(\mathbb{Q}_p^n)$, то на любом компакте $K \subset \mathbb{Q}_p^n$ имеет место поточечная сходимость

$$f_k(x) = f(x) * \delta_k(x) \rightarrow f(x), \quad k \rightarrow \infty.$$

4.2. Основная конструкция. Рассмотрим множество $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_p^n)$ всех последовательностей $\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$, где $f_k \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$. Отметим, что в $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_p^n)$ имеются стационарные последовательности $\{f_k(x) = f(x) : k \in \mathbb{N}\}$, где f – функции из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$. Введем на $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_p^n)$ структуру алгебры, определив покомпонентно операции

$$(f_1 + f_2)_k(x) = f_{1,k}(x) + f_{2,k}(x),$$

$$(f_1 f_2)_k(x) = f_{1,k}(x) f_{2,k}(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n,$$

где $\{f_{j,k}(x) : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}_p^n)$, $j = 1, 2$. Пусть $\mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ – подалгебра таких элементов $\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}_p^n)$, что для каждого компакта $K \subset \mathbb{Q}_p^n$ существует такое число $N \in \mathbb{N}$, при котором $f_k(x) = 0$ для всех $k \geq N$, $x \in K$. Ясно, что $\mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ – идеал в алгебре $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_p^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Назовем факторалгебру

$$\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n) = \mathcal{P}(\mathbb{Q}_p^n) / \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$$

p -адической алгеброй Коломбо–Егорова. Элементы $\tilde{f}$ этой алгебры будем называть обобщенными функциями Коломбо–Егорова. Класс эквивалентности, определяющий элемент $\tilde{f}(x)$, обозначим через $\tilde{f}(x) = [f_k(x)]$.

Алгебра обобщенных функций $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ является ассоциативной и коммутативной.

ТЕОРЕМА 4.1. *Имеется инъективное вложение $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n) \subset \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$, т. е. каждое распределение на $\mathbb{Q}_p^n$ является обобщенной функцией на $\mathbb{Q}_p^n$. Более того, вложение $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n) \subset \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ является алгебраическим гомоморфизмом и пространство $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ – подалгеброй алгебры $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложим распределение $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ в $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ отображением

$$\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n) \ni f(x) \mapsto \tilde{f}(x) = \{f_k(x)\} + \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n) \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n,$$

где f_k – регуляризация (4.2) распределения f .

Докажем, что $\{f_k(x)\} \in \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$. Если $f(x) = 0$, то $f_k(x) = 0$ для всех k и $\{f_k(x)\} \in \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$. Предположим, что $\{f_k(x)\} \in \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$. Тогда в силу (4.3), (4.4) следует, что для достаточно больших k , $k \geq -l$, выполнено равенство

$$\langle f_k(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n),$$

т. е. $f(x) = 0$.

Таким образом, каждое распределение $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ определяет единственную последовательность $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$, которая определяет единственную обобщенную функцию $\tilde{f} \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$.

Поскольку $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_p^n)$ содержит стационарные последовательности $\{f_k\}$, $f_k = f \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, в силу леммы 4.2 и приведенных выше аргументов ясно, что отображение

$$\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n) \ni f(x) \mapsto \tilde{f}(x) = \{f_k(x) = f(x)\} + \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n) \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$$

является алгебраическим гомоморфизмом, который сохраняет операции сложения и умножения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В обычной (С) теории Егорова [16] вложение $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n) \subset \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ не является инъективным, и потому каждое распределение $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ определяет бесконечное множество обобщенных функций из алгебры. Для p -адической теории вложение $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ в $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ является инъективным, как и в обычной (С-случай) теории Коломбо.

4.3. Функция от обобщенных функций. Пусть $g(u_1, \dots, u_m) \in C_0(\mathbb{R}^m)$ – непрерывная функция с компактным носителем, $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ – обобщенные функции. Определим обобщенную функцию $g(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m) \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ с помощью последовательности $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$, где $g_k(x) = g(f_{1,k}(x), \dots, f_{m,k}(x))$. Поскольку $g_k \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, это определение корректно.

4.4. Ассоциированное распределение. Говорят, что обобщенная функция $\tilde{f} = [f_k] \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ ассоциирована с распределением $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$, если $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$. Этот факт мы будем записывать, используя обозначение $\tilde{f} \approx g$.

ПРИМЕР 4.1. В силу (4.1) для достаточно больших k обобщенная функция $\delta^2(x) \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p)$, $x \in \mathbb{Q}_p$, определяется последовательностью $\{p^{2k} \Omega^2(p^k |x|_p)\}$. Ясно, что $\delta^2 \notin \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$, так как слабый предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle p^{2k} \Omega^2(p^k |x|_p), \varphi \rangle$ не существует и $\delta^2(x)$ не ассоциировано ни с каким распределением.

ПРИМЕР 4.2. Имеет место соотношение, также справедливое в обычной теории Коломбо:

$$(1 + (\delta(x))^n)^{1/n} \approx 1 + \delta(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p.$$

Действительно, рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} J_k &= \int_{\mathbb{Q}_p} \{(1 + (\delta_k(x))^n)^{1/n} - 1 - \delta_k(x)\} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \{(1 + p^{nk} \Omega^n(p^k |x|_p))^{1/n} - 1 - p^k \Omega(p^k |x|_p)\} \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

где $\delta_k(x)$ – регуляризация δ -функции, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$. Используя (2.1), для достаточно больших k получим

$$J_k = \{(1 + p^{nk})^{1/n} - 1 - p^k\} \varphi(0) \int_{B_{-k}} dx = \varphi(0) \{(1 + p^{-nk})^{1/n} - 1 - p^{-k}\}.$$

Таким образом, $\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0$.

4.5. Значение в точке. Определим *обобщенные числа Коломбо–Егорова*. Пусть $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ – компактификация $\mathbb{C}$. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ всех последовательностей $\{c_k \in \overline{\mathbb{C}} : k \in \mathbb{N}\}$ и подмножество $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}$ всех таких последовательностей, при которых существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $c_k = 0$ для всех $k \geq N$. Множество классов эквивалентности

$$\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{F}/\mathcal{I}$$

назовем *обобщенными числами Коломбо–Егорова*. Ясно, что $\tilde{\mathcal{C}}$ – алгебра. Класс эквивалентности, определяющий обобщенное число $\tilde{c}$, обозначим через $\tilde{c} = [c_k]$. Поскольку множество $\tilde{\mathcal{C}}$ содержит стационарные последовательности $\tilde{c} = \{c_k = c\}$, где $c \in \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \mathbb{N}$, то имеет место вложение $\overline{\mathbb{C}} \subset \tilde{\mathcal{C}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть $\tilde{f} = [f_k] \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ – обобщенная функция. Значение $\tilde{f}(x_0)$ в точке $x_0 \in \mathbb{Q}_p^n$ определим как обобщенное число $\tilde{C}$, которое определено последовательностью $\{f_k(x_0) : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}$.

Это определение корректно, поскольку согласно определениям идеалов $\mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ и $\mathcal{I}$ если $[f_k(x)] \in \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$, то для любого представителя класса $f_k(x) \in [f_k(x)]$ имеем $f_k(x_0) \in \mathcal{I}$.

Если $\tilde{f} = [f_k]$, $\tilde{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n) \subset \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$, то согласно лемме 4.2 и теореме 4.1 “классическое” значение в точке $\tilde{f}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{Q}_p^n$, совпадает с обобщенным значением в точке $\tilde{f}(x_0)$ в смысле определения 4.2.

ТЕОРЕМА 4.2. Если $\tilde{f} = [f_k(x)]$ – обобщенная функция из $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$, то $\tilde{f} = 0$ в $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{f}(x) = 0$ в $\tilde{\mathcal{C}}$ при всех $x \in \mathbb{Q}_p^n$. Таким образом, обобщенные функции единственным образом определяются своими точечными значениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что если $\tilde{f} = [f_k(x)] = 0$ в $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$, то $\tilde{f}(x) = 0$ в каждой точке $x \in \mathbb{Q}_p^n$ в смысле определения 4.2, где $f_k(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ – локально постоянные функции.

Пусть теперь $\tilde{f}(x) = 0$ в каждой точке $x \in \mathbb{Q}_p^n$. Тогда согласно определению 4.2 если $f_k(x)$ – элемент класса эквивалентности обобщенного числа $\tilde{f}(x)$ и $x \in \mathbb{Q}_p^n$, то $f_k(x) \in \mathcal{I}$, т.е. для каждого компакта $K \subset \mathbb{Q}_p^n$ и для каждой точки $x \in K$ существует такое число $N(x) \in \mathbb{N}$, что $f_k(x) = 0$ для всех $k \geq N(x)$. Обозначим через $f_k^0(x)$, $x \in \mathbb{Q}_p^n$, такую последовательность из класса $\tilde{f}(x) = [f_k(x)]$, что для каждого компакта $K \subset \mathbb{Q}_p^n$ и для каждой точки $x \in K$ существует такое $N(x) \in \mathbb{N}$, что

$$\begin{aligned} f_k^0(x) &= 0, & k &\geq N(x), \\ f_k^0(x) &\neq 0, & 1 &\leq k \leq N(x) - 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Если $f_k(x)$ – произвольный представитель класса эквивалентности $[f_k(x)]$, то $f_k^0(x) = f_k(x)$ для всех $k \geq N(x)$. Поэтому без потери общности докажем теорему, рассматривая только последовательности $f_k^0(x) \in [f_k(x)]$.

Пусть $l_k(x)$ – параметр постоянности функции $f_k^0(x)$ в точке x . Учитывая приведенное выше замечание, мы имеем

$$f_{N(x)}^0(x + x') = f_{N(x)}^0(x) = 0, \quad x' \in B_{l_{N(x)}(x)}^n, \quad x \in K. \quad (4.6)$$

Используя лемму Гейне–Бореля (см. следствие 5 из леммы 3 в [45, I.3]), мы можем из покрытия $\{B_{l_{N(x)}(x)}^n(x)\}$, $x \in K$, компакта K выбрать конечное подпокрытие без общих точек: $\{B_{l_{N(x_j)}(x_j)}^n(x_j)\}$, $x_j \in K$, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда согласно (4.5), (4.6) имеем

$$f_k^0(x_j + x') = 0, \quad x' \in B_{l_{N(x_j)}(x_j)}^n(x_j), \quad x_j \in K, \quad \forall k \geq N(x_j).$$

Положив $N = \max_{1 \leq j \leq m} N(x_j)$, получим

$$f_k^0(x_j + x') = 0, \quad x' \in B_{l_{N(x_j)}(x_j)}^n(x_j), \quad x_j \in K, \quad \forall k \geq N.$$

Таким образом, $f_k^0(x) = 0$ для всех $x \in K$ и для всех $k \geq N$. Следовательно, так как $f_k^0(x) \in \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$, то $f_k(x) \in \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ для всех последовательностей из этого класса. Итак, $\tilde{f} = 0$ в $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В обычных (С-случай) теориях Коломбо, Егорова и Ливчака обобщенные функции *не определяются единственным образом* своими точечными значениями [11], [16], [20, 1.2.4], [35], [37]. Рассмотрим, например, обобщенную функцию $f(x) = x \cdot \delta(x) \in \mathcal{G}$. Поскольку δ -функция определяется как класс эквивалентности:

$$\delta(x) = [\delta(\psi_\varepsilon, x)], \quad \delta(\psi_\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

то $f(x) = [f(\psi_\varepsilon, x)]$, где $f(\psi_\varepsilon, x) = x \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Ясно, что $f(x) \neq 0$. С другой стороны, легко показать [11], [35], что $f(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Действительно, $f(\psi_\varepsilon, 0) = 0$, а для каждого $x_0 \neq 0$ $f(\psi_\varepsilon, x_0) \rightarrow 0$ быстрее любой степени ε (см. определение идеала Коломбо $\mathcal{N}(\Omega)$ в § 1).

В связи с отсутствием поточечной характеристики в [37, замечание 2.11], [20, 1.2.4] для элементов (С-случай) алгебр Коломбо и Егорова был введен новый тип

характеризации. Главная идея этой характеристики – введение *обобщенных точек* (аналога “нестандартных чисел”). В частности, для алгебры Егорова на множестве

$$\Omega_c = \{x_k \in \Omega : \exists K \subseteq \Omega, \exists N \in \mathbb{N} : x_k \in K \quad \forall k \geq N\}$$

было введено следующее отношение эквивалентности: $x_k \sim y_k$, если для некоторого $N \in \mathbb{N}$ имеем $x_k = y_k$ для всех $k \geq N$. Тогда множество $\Omega_{c0} = \Omega_c / \sim$ – компактификация Ω_c . В упомянутых работах была доказана следующая теорема: $f = 0$ в $\hat{\mathcal{G}}(\Omega)$, если и только если $f(z) = 0$ в $\tilde{\mathcal{C}}$ для всех $z \in \Omega_{c0}$.

В противоположность сказанному выше в p -адической теории Коломбо–Егорова согласно теореме 4.2 не требуется вводить аналоги “нестандартных чисел” (обобщенные точки), поскольку имеет место *естественная* поточечная характеристика на $\mathbb{Q}_p^n$.

ПРИМЕР 4.3. Пусть $n = 1$.

1. Для точечных значений δ -функции имеет место следующий результат: если $x_0 = 0$, то $\delta(x_0) = \tilde{c}$, и если $x_0 \neq 0$, то $\delta(x_0) = 0$, где $\tilde{c} \in \tilde{\mathcal{C}}$ – обобщенное число, определяемое последовательностью $\{c_k = p^k \Omega(0) = p^k : k \in \mathbb{N}\}$.

2. Рассмотрим обобщенную функцию $\tilde{f}(x) = |x|_p$, $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p) \subset \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p)$. В классическом смысле мы имеем $|0|_p = 0$. Поскольку обобщенная функция $\tilde{f}$ определена последовательностью функций $(|x|_p)_k = p^k \int |x - \xi|_p \Omega(p^k |\xi|_p) d\xi$, значение $\tilde{f}(0)$ – обобщенное число, определяемое числовой последовательностью

$$(|0|_p)_k = p^k \int |\xi|_p \Omega(p^k |\xi|_p) d\xi = p^k \int_{B_{-k}} |\xi|_p d\xi = \frac{p^{-k+1}}{1+p}.$$

Ясно, что $(|0|_p)_k \notin \mathcal{I}$, и поэтому эта последовательность определяет не равное нулю обобщенное число $\tilde{f}(0) \in \tilde{\mathcal{C}}$. Таким образом, для обобщенных функций $\tilde{f} \notin \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ классическое значение в точке может не совпадать с точечным значением в смысле обобщенных функций.

4.6. Преобразование Фурье. Пусть $\tilde{f}(x) = [f_k(x)]$ – обобщенная функция из $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$. Ее преобразование Фурье $\tilde{f}$ есть обобщенная функция $F[\tilde{f}](\xi) = [F[f_k(x)](\xi)]$. Это определение задает $F[\tilde{f}](\xi)$ единственным образом, так как $F[f_k(x)](\xi) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, и если $f_k(x) \in \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$, то существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $F[f_k(x)](\xi) = 0$ для всех $k \geq N$, т. е. $F[\mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)] \subset \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$.

4.7. Оператор Владимирова. Поскольку $|\xi_j|_p^\alpha$, $|\xi_j|_p^\alpha F[\varphi](\xi)$ не являются локально постоянными на $\mathbb{Q}_p^n$, в общем случае для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ имеем $D_{x_j}^\alpha \varphi(x) \notin \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$. Так как согласно лемме из [45, VII.2] для $\varphi \in \mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p^n)$ имеем $F[\varphi](\xi) \in \mathcal{D}_{-l}^{-N}(\mathbb{Q}_p^n)$, то $|\xi_j|_p^\alpha F[\varphi](\xi) \in \mathcal{D}_{-l}^{-k}(\mathbb{Q}_p^n)$ для всех $\xi \in \mathbb{Q}_p^n \setminus B_{-k}$, $B_{j;-k} = \{\xi \in \mathbb{Q} : |\xi_j|_p \leq p^{-k}\}$, $k > N$, и

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus B_{j;-k}} |\xi_j|_p^\alpha F[\varphi](\xi) \chi_p(-\xi x) d\xi \in \mathcal{D}_k^l(\mathbb{Q}_p^n), \quad k > N.$$

Поэтому, чтобы ввести оператор Владимирова на алгебре $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$, рассмотрим последовательность операторов такого же типа:

$$(D_{x_j, (k)}^\alpha \varphi)(x) = f_{-\alpha, (k)}(x_j) * \varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.7)$$

где

$$f_{\alpha,(k)}(x_j) = \frac{|x_j|_p^{\alpha-1} * v_{-k}(x_j)}{\Gamma_p(\alpha)}, \quad x_j \in \mathbb{Q}_p, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.8)$$

$v_{-k}(x_j) = F[\Upsilon_{-k}](x_j)$, $\Upsilon_{-k}(\xi_j) = 1 - \Delta_{-k}(\xi_j)$ – характеристическая функция множества $|\xi_j|_p > p^{-k}$, $\Delta_{-k}(\xi_j) = \Omega(p^k |\xi_j|_p)$ – характеристическая функция круга B_{-k} . Так как в силу [45, VII, (2.7)] $F[\Delta_{-k}](x_j) = \delta_{-k}(x_j) = p^{-k} \Omega(p^{-k} |\xi_j|_p)$, то $v_{-k}(x_j) = \delta(x_j) - \delta_{-k}(x_j)$.

Ясно, что $(\Upsilon_{-k}(\xi_j))^2 = \Upsilon_{-k}(\xi_j)$ и $v_{-k}(x_j) * v_{-k}(x_j) = v_{-k}(x_j)$. Отсюда, учитывая (2.7), получим

$$f_{\alpha,(k)}(x_j) * f_{\beta,(k)}(x_j) = f_{\alpha+\beta,(k)}(x_j), \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq 1. \quad (4.9)$$

Согласно (2.8), (4.7)–(4.9) имеем

$$\begin{aligned} (D_{x_j,(k)}^\alpha \varphi)(x) &= \\ &= \begin{cases} \int_{|\xi_j|_p > p^{-k}} |\xi_j|_p^\alpha F[\varphi](\xi) \chi_p(-\xi x) d\xi, & \alpha > -1, \\ \int_{|\xi_j|_p > p^{-k}} |\xi_j|_p^\alpha (F[\varphi](\xi) \chi_p(-\xi x) - F[\varphi](\xi_{(\hat{j})}) \chi_p(-\xi_{(\hat{j})} x)) d\xi, & \alpha < -1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\xi_{(\hat{j})} = (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, 0, \xi_{j+1}, \dots, 0)$.

В силу сказанного выше $(D_{x_j,(k)}^\alpha \varphi)(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ для каждого $k = 1, 2, \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть $\tilde{f} = [f_k]$ – обобщенная функция из $G_p(\mathbb{Q}_p^n)$. *Оператор Владимиров* от $\tilde{f}$ есть обобщенная функция $D_{x_j}^\alpha \tilde{f}$, определенная последовательностью $\{D_{x_j,(k)}^\alpha f_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Поскольку для $f_k \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ имеем $D_{x_j,(k)}^\alpha f_k \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, обобщенная функция $D_{x_j}^\alpha \tilde{f}$ определена однозначно.

ЛЕММА 4.3. Для обобщенных функций $\tilde{f} \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} D_{x_i}^\alpha D_{x_j}^\beta \tilde{f} &= D_{x_j}^\beta D_{x_i}^\alpha \tilde{f}, \quad \alpha, \beta \neq -1, \\ D_{x_j}^\alpha D_{x_j}^\beta \tilde{f} &= D_{x_j}^{\alpha+\beta} \tilde{f} = D_{x_j}^\beta D_{x_j}^\alpha \tilde{f}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq -1, \\ D_{x_j}^\alpha D_{x_j}^{-\alpha} \tilde{f} &= D_{x_j}^{-\alpha} D_{x_j}^\alpha \tilde{f} = \tilde{f}, \quad \alpha \neq \pm 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Доказательство аналогично доказательству соотношений из [45, IX, (1.5)].

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. В общем случае оператор $D_{x_j}^\alpha$ определен на распределении $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ только как обобщенная функция $D_{x_j}^\alpha f$ из $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$. Ясно, что если $D_{x_j}^\alpha f$ существует для $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ как распределение и $f = \tilde{f} \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$, то $D_{x_j}^\alpha f$ совпадает с обобщенной функцией $D_{x_j}^\alpha \tilde{f}$.

4.8. Свертка. Свертка $\tilde{f} * \tilde{g}$ обобщенных функций $\tilde{f} = [f_k]$, $\tilde{g} = [g_k]$ определяется как обобщенная функция

$$\tilde{h}(x) = (\tilde{f} * \tilde{g})(x) = [h_k(x)], \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (4.12)$$

где

$$h_k(x) = f_k(x) * g_k(x) = \int f_k(\xi) g_k(x - \xi) d\xi.$$

Определение (4.12) задает свертку $\tilde{f} * \tilde{g}$ однозначно, так как $h_k(x) = \int f_k(\xi) \times g_k(x - \xi) d\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, и если $f_k(x) \in \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ или $g_k(x) \in \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$, то $h_k(x) = \int f_k(\xi) g_k(x - \xi) d\xi \in \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p^n)$.

Свертка (4.12) превращает $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$ в ассоциативную сверточную алгебру. Ясно, что для $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p^n)$

$$D_{x_i}^\alpha (\tilde{f} * \tilde{g}) = (D_{x_i}^\alpha \tilde{f}) * \tilde{g} = \tilde{f} * (D_{x_i}^\alpha \tilde{g}), \quad \alpha \neq -1, \\ F[\tilde{f} * \tilde{g}] = F[\tilde{f}]F[\tilde{g}].$$

ПРИМЕР 4.4. Поскольку $\delta_k(x) = F[\Delta_k(\xi)](x)$ (см. [45, VII, (2.7)]) и $\delta = [\delta_k]$, $1 = [\Delta_k]$, то $1 * 1 = F[\delta^2]$.

§5. Ассоциативная алгебра p -адических асимптотических распределений ($n = 1$)

5.1. Слабые асимптотики. Пусть $\mathcal{A}$ – линейная оболочка множества п. о. р., введенных в п. 3.1, а $\mathcal{H}$ – пространство регуляризаций (последовательностей) (4.2), $f_k(x) = f(x, p^{-k})$, $x \in \mathbb{Q}_p$, распределений $f(x) \in \mathcal{A}$. Введем ассоциативную и коммутативную алгебру $\mathcal{H}^*$, порожденную пространством $\mathcal{H}$, элементы которой $f_k^*(x) = f^*(x, p^{-k})$ являются (последовательностями) конечными суммами конечных произведений элементов пространства $\mathcal{H}$.

Чтобы построить алгебру асимптотических распределений нам потребуется дать описание слабых асимптотических разложений (слабых асимптотик) элементов алгебры $f_k^*(x) \in \mathcal{H}^*$ при $k \rightarrow \infty$, т.е. асимптотических разложений $\langle f_k^*(x), \varphi(x) \rangle$, $k \rightarrow \infty$, где $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q})_p$.

Для этой цели вначале построим регуляризации (4.2) п. о. р.

Регуляризация δ -функции задается формулой (4.1).

Согласно (4.2), (3.4) регуляризация распределения $\pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p$, $m \in \mathbb{N}_0$, задается формулой

$$\pi_{\alpha; m \ k}(x) = \pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p * \delta_k(x) \\ = \langle \pi_\alpha(\xi) \log_p^m |\xi|_p, p^k \Omega(p^k |x - \xi|_p) \rangle = \sum_{j=1}^3 \pi_{\alpha; m \ k}^{(j)}(x), \quad (5.1)$$

где

$$\pi_{\alpha; m \ k}^{(1)}(x) = p^k \int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p (\Omega(p^k |x - \xi|_p) - \Omega(p^k |x|_p)) d\xi, \\ \pi_{\alpha; m \ k}^{(2)}(x) = p^k \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p \Omega(p^k |x - \xi|_p) d\xi, \quad (5.2) \\ \pi_{\alpha; m \ k}^{(3)}(x) = p^k \Omega(p^k |x|_p) \int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p d\xi.$$

Будем записывать $\pi_{\alpha; k}(x) = \pi_{\alpha; 0; k}(x)$.

Согласно (4.2), (3.7) регуляризация распределения $P(|x|_p^{-1} \log_p^m |x|_p)$, $m \in \mathbb{N}_0$, задается формулой

$$\begin{aligned} P_{m; k}(x) &= P(|x|_p^{-1} \log_p^m |x|_p) * \delta_k(x) \\ &= \langle P(|x|_p^{-1} \log_p^m |x|_p), p^k \Omega(p^k |x - \xi|_p) \rangle = \sum_{j=1}^2 P_{m; k}^{(j)}(x). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь $P_{m; k}^{(1)}(x)$, $P_{m; k}^{(2)}(x)$ определяются формулой (5.2), если положить $\alpha = 0$ и $\pi_1(\xi) = 1$. Введем обозначение $P_k(x) = P_{0; k}(x)$.

Приведем основную теорему, которая из-за большого объема вычислений доказывается далее, в п. 6.2. Эта теорема лежит в основе построения алгебры асимптотических распределений.

ТЕОРЕМА 5.1. *Каждый элемент $f_k^*(x)$ алгебры $\mathcal{H}^*$ имеет единственное представление в форме слабой асимптотики:*

$$f_k^*(x) = f_0(x) + \delta(x) \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N c_{mn} p^{-\lambda_m k} \log_p^n(p^{-k}), \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.4)$$

где $f_0(x)$ – распределение из пространства $\mathcal{A}$, $\lambda_m \in \mathbb{R}$ – возрастающая последовательность, $M, N \in \mathbb{N}_0$, c_{mn} – константы (все указанные параметры зависят от $f_k^*(x)$). При этом для каждой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ при $k \geq -l$, где $l = l(\varphi)$ – параметр постоянности φ , имеем

$$\langle f_k^*(x), \varphi(x) \rangle = \langle f_0(x), \varphi(x) \rangle + \varphi(0) \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N c_{mn} p^{-\lambda_m k} \log_p^n(p^{-k}),$$

т. е. асимптотическое представление (5.4) является равенством.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Здесь $p^{-\lambda_m k} \log_p^n(p^{-k}) = p^{-\lambda_m k} (-k)^n$, $k \rightarrow \infty$, – асимптотическая последовательность, являющаяся аналогом асимптотической последовательности $\varepsilon^{\alpha_m} \log^n \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$, которая возникает в конструкции обычной (С-случай) ассоциативной алгебры асимптотических распределений [12], [39], [27], [40]. При этом роль малого параметра ε играет p^{-k} .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Для $f_k^*(x) \in \mathcal{H}^*$ можно строить слабые асимптотики типа (5.4) от суперпозиции $g(f_k^*(x))$, $k \rightarrow \infty$, где $g(u) \in C^0(\mathbb{R})$. Например, если $g(0) = 0$, то

$$g(\delta_k(x)) = \frac{g(p^k)}{p^k} \delta(x), \quad k \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Действительно, для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle g(\delta_k(x)), \varphi(x) \rangle &= \int g(p^k \Omega(p^k |x|_p)) \varphi(x) dx \\ &= g(p^k) \int_{B_{-k}} \varphi(x) dx = g(p^k) p^{-k} \varphi(0), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

5.2. Асимптотические распределения. Пусть A^* – линейное отображение, которое каждому элементу $f_k^*(x) \in \mathcal{H}^* \setminus \mathcal{H}$ ставит в соответствие единственную (в силу теоремы 5.1) слабую асимптотику (5.4) и каждому элементу $f_k^*(x) \in \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^*$ – единственное распределение $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^*(x) \in \mathcal{A}$. Назовем образ $f^*(x) = A^*[f_k^*(x)]$, $f_k^*(x) \in \mathcal{H}^*$, *асимптотическим распределением*. Пусть

$$\mathcal{A}^* = A^*[\mathcal{H}^*] = \{f^*(x) = A^*[f_k^*(x)] : f_k^*(x) \in \mathcal{H}^*\}$$

– линейное пространство всех асимптотических распределений. Таким образом, каждое асимптотическое распределение $f^*(x) \in \mathcal{A}^*$ является слабой асимптотикой вида

$$f^*(x) = f_0(x) + \delta(x) \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N c_{mn} p^{-\lambda_m k} \log_p^n(p^{-k}), \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.6)$$

где $f_0(x) \in \mathcal{A}$, $\lambda_m \in \mathbb{R}$ – возрастающая последовательность, M, N, c_{mn} – некоторые константы, зависящие от $f^*(x)$.

Несложно показать, что если f – п. о. р. степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка m и $f_k(x) = f(x, p^{-k})$ – его регуляризация (4.2), то для $t \in \mathbb{Q}_p^*$ имеем

$$f(tx, |t|_p p^{-k}) = \pi_\alpha(t) f(x, p^{-k}) + \sum_{j=1}^m \pi_\alpha(t) \log_p^j |t|_p f_{m-j}(x, p^{-k}), \quad (5.7)$$

где $f_{m-j}(x, p^{-k}) = \langle f_{m-j}(\xi), p^k \Omega(p^k |x - \xi|_p) \rangle$ – регуляризация п. о. р. f_{m-j} степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка $m - j$, $j = 1, 2, \dots, m$. Таким образом, $f_k(x) = f(x, p^{-k})$ – присоединенная однородная функция степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка m по переменным (x, p^{-k}) . Ввиду (5.7) и определения 3.3 сформулируем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Асимптотическое распределение $f^*(x) \in \mathcal{A}^*$ называется *присоединенным однородным степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка $m \in \mathbb{N}_0$* , если правая часть разложения (5.6) является присоединенной однородной функцией степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка m по переменным (x, p^{-k}) .

В силу (5.6) каждое асимптотическое распределение $f^*(x) \in \mathcal{A}^*$ можно отождествить с векторнозначным распределением (последовательностью), которое finito слева и справа:

$$f^*(x) = (f_{(\lambda_m, n)}(x)), \quad \lambda_m \in \mathbb{R}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \quad (5.8)$$

где $\lambda_0 = 0$, $f_{(\lambda_0, 0)} = f_0(x) \in \mathcal{A}$, $f_{(\lambda_m, n)} = c_{mn} \delta(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$. При этом каждое распределение $f(x) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ отождествляется с векторнозначным распределением, у которого $f_{(\lambda_0, 0)} = f(x)$, а остальные компоненты $f_{(\lambda_m, n)} = 0$. Таким образом, пространство асимптотических распределений $\mathcal{A}^*$ можно рассматривать как бесконечномерное пространство векторнозначных распределений Шварца.

Пусть $\mathcal{D}_*$ – линейное пространство всех основных векторнозначных функций (последовательностей)

$$\varphi_*(x) = (\varphi_{(\beta_m, n)}(x)), \quad \varphi_{(\beta_m, n)} \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p), \quad \beta_m \in \mathbb{R}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Тогда *векторнозначное распределение* $f^*(x) \in \mathcal{A}^*$ является линейным непрерывным функционалом над пространством $\mathcal{D}_*$ основных функций. Для всех $\varphi_*(x) \in \mathcal{D}_*$ мы полагаем

$$\langle f^*(x), \varphi_*(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_{(\alpha_m, n)}(x), \varphi_{(-\alpha_m, -n)}(x) \rangle.$$

При этом суммы содержат конечное число слагаемых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Произведением *асимптотических (векторнозначных) распределений* $f^*(x)$ и $g^*(x)$ из $\mathcal{A}^*$ (или распределений из $\mathcal{A}$) называется асимптотическое (векторнозначное) распределение

$$h^*(x) = f^*(x) \circ g^*(x) = A^*[f_k^*(x) g_k^*(x)] \in \mathcal{A}^*, \quad (5.9)$$

где $f_k^*(x) = A^{*-1} f^*(x)$, $g_k^*(x) = A^{*-1} g^*(x) \in \mathcal{H}^*$.

Поскольку $\mathcal{H}^*$ – ассоциативная и коммутативная алгебра функций, $A^*: \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ – изоморфизм, то умножение (5.9) – ассоциативное и коммутативное.

Ясно, что если в смысле определения 5.1 $f^*(x) \in \mathcal{A}^*$ – присоединенное однородное асимптотическое распределение степени $\pi_\alpha(x)$ и порядка m и $g^*(x) \in \mathcal{A}^*$ – присоединенное однородное асимптотическое распределение степени $\pi_\beta(x)$ и порядка n , то их произведение $f^*(x) g^*(x) \in \mathcal{A}^*$ – присоединенное однородное асимптотическое распределение степени $\pi_\alpha(x) \pi_\beta(x)$ и порядка $m + n$.

ПРИМЕР 5.1. Используя предложения 6.1–6.9, найдем следующие произведения распределений:

- 1) $\delta^m(x) = \delta(x) p^{k(m-1)}$, $k \rightarrow \infty$;
- 2) $\delta^m(x) \circ \left(P\left(\frac{1}{|x|_p}\right) \right)^n = (-1)^n \delta(x) p^{(m+n-1)k} \log_p^n(p^{-k})(1-p^{-1})^n$, $k \rightarrow \infty$;
- 3) если $\alpha, \beta \neq \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $m(\alpha-1) + n(\beta-1) + 1 = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $j \in \mathbb{Z}$, и $\pi_1(x) \equiv 1$,

то

$$\pi_\alpha^m(x) \circ \pi_\beta^n(x) = P\left(\frac{1}{|x|_p}\right) + I_0^m(\alpha) I_0^n(\beta) \delta(x) - (1-p^{-1}) \log_p(p^{-k}) \delta(x), \quad k \rightarrow \infty,$$

где $m, n \in \mathbb{N}$.

4) используя формулу (5.5), для функции $g(u) \in C^0(\mathbb{R})$ определим *сингулярную суперпозицию*

$$g(\delta(x)) = g(p^k) p^{-k} \delta(x), \quad k \rightarrow \infty.$$

Согласно определению 5.1 произведения 1) и 3) являются однородными асимптотическими распределениями степеней $|x|_p^{-m}$ и $|x|_p^{m(\alpha-1)+n(\beta-1)} \pi_1^{m+n}(x)$ соответственно, а произведение 2) – присоединенным однородным асимптотическим распределением степени $|x|_p^{-m-n}$ и порядка n .

Используя асимптотики, подобные (5.5), для асимптотических распределений $f^*(x) \in \mathcal{A}^*$ можно определить сингулярную суперпозицию $g(f^*(x))$, где $g(u)$ – гладкая функция.

Заметим, что правые части приведенных выше произведений можно представить как вектор-распределения.

Преобразование Фурье асимптотического (векторнозначного) распределения (5.6) из $\mathcal{A}^*$ определим по формуле

$$g(\xi) = F[f^*](\xi) = F[f_0](\xi) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N c_{mn} p^{-\lambda_m k} \log_p^n(p^{-k}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (5.10)$$

Согласно теореме 3.4 имеем $F: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$.

5.3. $\mathcal{A}^*$ как сверточная алгебра. Определим *обобщенную свертку* асимптотических (векторнозначных) распределений $g_1^*(\xi)$, $g_2^*(\xi)$ из $\mathcal{A}^*$ (или распределений из $\mathcal{A}$) как асимптотическое (векторнозначное) распределение:

$$g^*(\xi) = g_1^*(\xi) \star g_2^*(\xi) = F^{-1}[F[g_1^*(\xi)](x) \circ F[g_2^*(\xi)](x)] \in \mathcal{A}^*. \quad (5.11)$$

Поскольку алгебра $\mathcal{A}^*$ замкнута по отношению к умножению (5.9) и преобразованию Фурье (согласно теореме 3.4), то $\mathcal{A}^*$ – ассоциативная и коммутативная сверточная алгебра. Заметим, что в общем случае обычная сверка p -адических распределений не является ассоциативной [45, IX.1].

ПРИМЕР 5.2. Из примера 5.1 и формул [45, IX, (2.4), (2.8)] следует:

- 1) $1 * 1 = p^k$, $k \rightarrow \infty$;
- 2) $1 * \left(\frac{p-1}{p \ln p} \ln |\xi|_p + \frac{1}{p}\right) = p^k \log_p(p^{-k})(1 - p^{-1})$, $k \rightarrow \infty$.

5.4. $\mathcal{A}^*$ как подалгебра алгебры $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p)$. Согласно пп. 4.1, 5.1 мы имеем

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^* \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q}_p), \quad \mathcal{H}^* \cap \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p) = 0.$$

В силу последнего соотношения ясно, что отображения

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \ni f_k(x) &\mapsto f_k(x) + \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p) \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p), \\ \mathcal{H}^* \ni f_k^*(x) &\mapsto f_k^*(x) + \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p) \in \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p) \end{aligned} \quad (5.12)$$

взаимно однозначны.

Ввиду (5.12) и того, что $A^*: \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ – изоморфизм, можно отождествить произведение $(f_k^*(x) + \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p))(g_k^*(x) + \mathcal{N}_p(\mathbb{Q}_p))$ из алгебры $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p)$ с асимптотическим распределением $A^*[f_k^*(x) g_k^*(x)]$ из $\mathcal{A}^*$. Следовательно, с помощью (5.12) определяется отображение $\mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p)$, которое является алгебраическим изоморфизмом, т. е. произведение (5.9) в алгебре $\mathcal{A}^*$ совпадает с соответствующим произведением в алгебре $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p)$.

§ 6. Приложение

6.1. Два тождества. Приведем известное тождество [30], которое неоднократно используется в наших построениях:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_s(\gamma_0) &= \sum_{\gamma=1}^{\gamma_0} \gamma^s = \frac{1}{s+1} \sum_{r=0}^s C_{s+1}^r \mathbf{B}_r \gamma_0^{s+1-r} + \gamma_0^s \\ &= \frac{1}{s+1} (\gamma_0^{s+1} - C_{s+1}^1 \mathbf{B}_1 \gamma_0^s + C_{s+1}^2 \mathbf{B}_2 \gamma_0^{s-1} + \dots + C_{s+1}^s \mathbf{B}_s \gamma_0), \quad \gamma_0 \geq 1, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где C_{s+1}^r – биномиальные коэффициенты, $r = 0, 1, \dots, s$, $s = 0, 1, 2, \dots$. Здесь числа Бернулли $\mathbf{B}_\gamma$ определяются рекуррентным соотношением

$$\mathbf{B}_0 = 1, \quad \sum_{r=0}^{\gamma-1} C_\gamma^r \mathbf{B}_r = 0. \quad (6.2)$$

В частности, $\mathbf{B}_1 = -\frac{1}{2}$, $\mathbf{B}_{2j-1} = 0$, $j = 2, 3, \dots$, $\mathbf{B}_2 = \frac{1}{6}$, $\mathbf{B}_4 = -\frac{1}{30}$.

С помощью формулы (6.1) можно рассматривать $\mathbf{S}_s(\gamma_0)$ как полином по переменной γ_0 , для которого имеет место следующее соотношение.

ЛЕММА 6.1. *Если рассматривать $\mathbf{S}_s(\gamma_0)$ как полином по переменной γ_0 , то для $\gamma_0 \leq -1$, $s = 0, 1, 2, \dots$ имеет место соотношение*

$$\sum_{\gamma=\gamma_0+1}^0 \gamma^s = -\mathbf{S}_s(\gamma_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем последнюю сумму, используя (6.1), в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=\gamma_0+1}^0 \gamma^s &= (-1)^s \sum_{\gamma=1}^{-\gamma_0-1} \gamma^s \\ &= -\frac{1}{s+1} ((\gamma_0+1)^{s+1} - (-1)C_{s+1}^1 \mathbf{B}_1(\gamma_0+1)^s \\ &\quad + C_{s+1}^2 \mathbf{B}_2(\gamma_0+1)^{s-1} + \dots + (-1)^s C_{s+1}^s \mathbf{B}_s(\gamma_0+1)). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Используя (6.2), легко видим, что в последней сумме коэффициенты при степенях γ_0^{s+1} , γ_0^s , γ_0^{s-1} соответственно равны 1, $C_{s+1}^1 + C_{s+1}^1 \mathbf{B}_1 = -C_{s+1}^1 \mathbf{B}_1$, $C_{s+1}^2 + C_{s+1}^1 \mathbf{B}_1 C_s^1 + C_{s+1}^2 \mathbf{B}_2 = C_{s+1}^2 \mathbf{B}_2$. Учитывая соотношение (6.1) и тот факт, что $\mathbf{B}_{2k-1} = 0$, $j = k, 3, \dots$, мы найдем коэффициент при γ_0^{s-j} :

$$\begin{aligned} &C_{s+1}^{s-j} + C_{s+1}^1 \mathbf{B}_1 C_s^{s-j} + C_{s+1}^2 \mathbf{B}_2 C_{s-1}^{s-j} - C_{s+1}^3 \mathbf{B}_3 C_{s-2}^{s-j} + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^j C_{s+1}^j \mathbf{B}_j C_{s-j}^{s+1-j} + (-1)^{j+1} C_{s+1}^{j+1} \mathbf{B}_{j+1} \\ &= C_{s+1}^{j+1} \sum_{r=0}^j C_{j+1}^r \mathbf{B}_r + C_{s+1}^{j+1} \mathbf{B}_{j+1} = C_{s+1}^{j+1} \mathbf{B}_{j+1}, \end{aligned}$$

$j = 2, 3, \dots, s-1$. Коэффициент при γ_0^0 есть

$$\sum_{r=0}^s C_{s+1}^r \mathbf{B}_r = 0.$$

6.2 Доказательство основной теоремы 5.1. Доказательство теоремы 5.1 сводится к построению слабой асимптотики элементов алгебры $\mathcal{H}^*$ вида

$$\delta_k^m(x) (P_{a_1 k}(x))^{n_1} \dots (P_{a_r k}(x))^{n_r} (\pi_{\alpha_1; b_1 k}(x))^{m_1} \dots (\pi_{\alpha_s; b_s k}(x))^{m_s}, \quad (6.4)$$

$$k \rightarrow \infty,$$

где $m, n_j, m_k \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, 2, \dots, r$, $k = 1, 2, \dots, s$. Упомянутая слабая асимптотика строится с использованием предложений 6.1–6.9, доказательства которых приводятся ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. В слабом смысле выполнено

$$(\delta_k(x))^s = \delta(x)p^{k(s-1)}, \quad k \rightarrow \infty, \quad s = 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (2.1) и регуляризацию δ -функции (4.1), для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ и достаточно больших k мы получим

$$\begin{aligned} \langle (\delta_k(x))^s, \varphi(x) \rangle &= p^{ks} \int \Omega^s(p^k|x|_p) \varphi(x) dx \\ &= p^{ks} \int_{B_{-k}} \varphi(x) dx = p^{ks} \varphi(0) \int_{B_{-k}} dx = p^{k(s-1)} \varphi(0), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Если $\alpha \neq \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $j \in \mathbb{Z}$, то в слабом смысле

$$\delta_k^s(x) \pi_{\alpha; m, k}^n(x) = \delta(x) p^{(-n(\alpha-1)+s-1)k} \left(\sum_{j=0}^m C_m^j I_0(\alpha; m-j) \log_p^j p^{-k} \right)^n, \quad (6.6)$$

$$k \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо для $m \in \mathbb{N}_0$, $s, n \in \mathbb{N}$ вычислить асимптотику

$$J_k = \langle \delta_k^s(x) \pi_{\alpha; m, k}^n(x), \varphi(x) \rangle, \quad k \rightarrow \infty,$$

где $\alpha \neq \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $j \in \mathbb{Z}$, и согласно (5.1) $\pi_{\alpha; m, k}(x) = \pi_{\alpha; m, k}^{(1)}(x) + \pi_{\alpha; m, k}^{(2)}(x) + \pi_{\alpha; m, k}^{(3)}(x)$.

Используя (5.1), (5.2), сначала при $r = 1, 2, \dots$ вычислим асимптотику выражения

$$\begin{aligned} J_{2, k} &= \langle \delta_k^s(x) (\pi_{\alpha; m, k}^{(2)}(x))^r, \varphi(x) \rangle \\ &= p^{(s+n)k} \int \Omega^s(p^k|x|_p) \left\{ \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p \Omega(p^k|x-\xi|_p) d\xi \right\}^n \varphi(x) dx \\ &= p^{(s+n)k} \int_{B_{-k}} \left\{ \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p \Omega(p^k|x-\xi|_p) d\xi \right\}^n \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Поскольку $|x|_p \leq \frac{1}{p^k}$ и $\xi \in \mathbb{Q}_p \setminus B_0 = \{|\xi|_p > 1\}$, то $|x-\xi|_p > \frac{1}{p^k}$. Иначе мы бы имели

$$|\xi|_p = |x - (x - \xi)|_p \leq \max(|x|_p, |x - \xi|_p) = \frac{1}{p^k}.$$

Таким образом, $\Omega(p^k|x-\xi|_p) = 0$, т.е. $J_{2k} = 0$ для достаточно больших k .

Отсюда, используя формулу бинома, получим

$$\begin{aligned}
J_k &= \langle \delta_k^s(x) (\pi_{\alpha;m}^{(1)}(x) + \pi_{\alpha;m}^{(3)}(x))^n, \varphi(x) \rangle \\
&= p^{(s+n)k} \int \Omega^s(p^k|x|_p) \left\{ \int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p (\Omega(p^k|x - \xi|_p) \right. \\
&\quad \left. - \Omega(p^k|x|_p)) d\xi + \Omega(p^k|x|_p) \int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p d\xi \right\}^n \varphi(x) dx \\
&= p^{(s+n)k} \int_{B_{-k}} \left\{ \int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p (\Omega(p^k|x - \xi|_p) - 1) d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p d\xi \right\}^n \varphi(x) dx \\
&= p^{(s+n-1)k} \varphi(0) \left\{ \int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p \Omega(p^k|\xi|_p) d\xi \right\}^n \\
&= p^{(s+n-1)k} \varphi(0) \left\{ \int_{B_{-k}} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p d\xi \right\}^n. \tag{6.7}
\end{aligned}$$

Делая замену переменной $\xi \rightarrow p^{-k}\xi$ и учитывая равенство $\pi_1(p^k\xi) = \pi_1(\xi)$ и формулы (3.3), (3.5), получим

$$\begin{aligned}
I_{-k}(\alpha; m) &= \int_{B_{-k}} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p d\xi \\
&= p^{-k\alpha} \int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m (p^{-k}|\xi|_p) d\xi \\
&= p^{-k\alpha} \sum_{j=0}^m C_m^j (-k)^j I_0(\alpha; m-j), \tag{6.8}
\end{aligned}$$

где интеграл $I_0(\alpha; m)$ определен в (3.5).

Используя (6.8), из соотношения (6.7) имеем

$$J_k = \varphi(0) p^{(s+n-n\alpha-1)k} \left(\sum_{j=0}^m C_m^j (-k)^j I_0(\alpha; m-j) \right)^n, \quad k \rightarrow \infty.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. В слабом смысле имеет место асимптотика

$$\delta_k^m(x) (P_k(x))^n = (-1)^n \delta(x) p^{(m+n-1)k} \log_p^n(p^{-k})(1-p^{-1})^n, \quad k \rightarrow \infty, \tag{6.9}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя вычисления, подобные тем, что использовались при доказательстве предложения 6.2, несложно показать, что для каждой основной функции $\varphi(x)$ и при достаточно больших k

$$\begin{aligned} \langle \delta_k^m(x) (P_k(x))^n, \varphi(x) \rangle &= p^{(m+n-1)k} \varphi(0) \left(\int_{B_0} |\xi|_p^{-1} (\Omega(p^k |\xi|_p) - 1) d\xi \right)^n \\ &= p^{(m+n-1)k} \varphi(0) \left(\sum_{\gamma=-k+1}^0 \int_{S_\gamma} |\xi|_p^{-1} d\xi \right)^n \\ &= p^{(m+n-1)k} \log_p^n(p^{-k}) (1 - p^{-1})^n (-1)^n \varphi(0). \end{aligned}$$

Повторяя вычисления, аналогичные использованным выше при доказательствах предложений 6.1–6.3, можно доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. В слабом смысле имеет место асимптотика

$$\begin{aligned} \delta_k^m(x) (\pi_{\alpha_1; a_1 k}(x))^{m_1} \dots (\pi_{\alpha_s; a_s k}(x))^{m_s} (P_{b_1 k}(x))^{n_1} \dots (P_{b_r k}(x))^{n_r} \\ = \delta(x) p^{\gamma k} R_N(\log_p p^{-k}), \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $R_N(z)$ – многочлен с вычисляемыми коэффициентами порядка $N = \sum_{j=1}^s m_j a_j + \sum_{j=1}^r n_j$ и $\gamma = m - 1 - \sum_{j=1}^s m_j (\alpha_j - 1) + \sum_{j=1}^r n_j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. Пусть $\alpha \neq \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда в слабом смысле:

(а) если $n(\alpha - 1) + 1 \neq \alpha_j$ или $\pi_1(x) \not\equiv 1$, то

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha; m k}^n(x) &= |x|_p^{n(\alpha-1)} \pi_1^n(x) \log_p^{nm} |x|_p \\ &+ p^{-(n(\alpha-1)+1)k} \left\{ \left(\sum_{j=0}^m C_m^j \log_p^j(p^{-k}) I_0(\alpha; m-j) \right)^n \right. \\ &\left. - \sum_{j=0}^{nm} C_{nm}^j \log_p^j(p^{-k}) I_0(n(\alpha-1)+1; nm-j) \right\} \delta(x), \quad k \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (6.10)$$

(б) если $n(\alpha - 1) + 1 = \alpha_j$ и $\pi_1(x) \equiv 1$, то

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha; m k}^n(x) &= P\left(\frac{\log_p^{nm} |x|_p}{|x|_p}\right) + \left\{ \left(\sum_{j=0}^m C_m^j \log_p^j(p^{-k}) I_0(\alpha; m-j) \right)^n \right. \\ &\left. - (1 - p^{-1}) S_{nm}(\log_p(p^{-k})) \right\} \delta(x), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.11)$$

В частности, при $m = 0$ имеем:

(а) если $n(\alpha - 1) + 1 \neq \alpha_j$ или $\pi_1(x) \not\equiv 1$, то

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha; k}^n(x) &= |x|_p^{n(\alpha-1)} \pi_1^n(x) \\ &+ p^{-(n(\alpha-1)+1)k} \left\{ (I_0(\alpha))^n - I_0(n(\alpha-1)+1) \right\} \delta(x), \quad k \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (6.12)$$

(b) если $n(\alpha - 1) + 1 = \alpha_j$ и $\pi_1(x) \equiv 1$, то

$$\pi_{\alpha; k}^n(x) = P\left(\frac{1}{|x|_p}\right) + \left\{ (I_0(\alpha))^n - (1 - p^{-1}) \log_p(p^{-k}) \right\} \delta(x), \quad k \rightarrow \infty. \quad (6.13)$$

Здесь интегралы $I_0(\alpha)$ и $I_0(\alpha; m - j)$ определены формулами (3.3) и (3.5) соответственно, а функция $\mathbf{S}_s(r)$ задана формулой (6.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим асимптотику от $J_k = \langle \pi_{\alpha; m-k}^n(x), \varphi(x) \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, представив его в виде суммы:

$$\begin{aligned} J_k &= \int_{B_0} \pi_{\alpha; m-k}^n(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} \pi_{\alpha; m-k}^n(x) \varphi(x) dx + \varphi(0) \int_{B_0} \pi_{\alpha; m-k}^n(x) dx. \end{aligned}$$

Поскольку $\pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p$ — непрерывная функция при $x \neq 0$, согласно лемме 4.2 при $x \neq 0$ имеем поточечную сходимость:

$$\pi_{\alpha; m-k}^n(x) \rightarrow (\pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p)^n = |x|_p^{n(\alpha-1)} \pi_1^n(x) \log_p^{nm} |x|_p, \quad k \rightarrow \infty.$$

Пусть

$$J_{1-k} = \int_{B_0} \pi_{\alpha; m-k}^n(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx, \quad J_{2-k} = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} \pi_{\alpha; m-k}^n(x) \varphi(x) dx.$$

Обозначим через $l(\varphi)$ параметр постоянности функции φ . Учитывая, что $\varphi(x) - \varphi(0) = 0$ для всех $x \in B_{l(\varphi)} \subset B_0$, в силу леммы 4.1 для каждой φ и для достаточно больших k будем иметь

$$\begin{aligned} J_{1-k} &= \int_{B_0} (\pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p)^n (\varphi(x) - \varphi(0)) dx, \\ J_{2-k} &= \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} (\pi_\alpha(x) \log_p^m |x|_p)^n \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Теперь построим асимптотику интеграла

$$J_{3-k} = \int_{B_0} \pi_{\alpha; m-k}^n(x) dx = \int_{B_0} \left(\sum_{j=1}^3 \pi_{\alpha; m-k}^{(j)}(x) \right)^n dx = J_{3,1-k} + J_{3,2-k},$$

где согласно (5.2)

$$\begin{aligned} J_{3,1-k} &= \int_{B_0} (\pi_{\alpha; m-k}^{(1)}(x) + \pi_{\alpha; m-k}^{(2)}(x))^n dx, \\ J_{3,2-k} &= \sum_{r=0}^{n-1} C_n^r \int_{B_0} (\pi_{\alpha; m-k}^{(1)}(x))^r (\pi_{\alpha; m-k}^{(3)}(x))^{n-r} dx. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Проводя вычисления, аналогичные тем, которые использовались для получения (6.7), из соотношений (6.15), (5.2), (3.5), (6.8) получим

$$\begin{aligned}
 J_{3,2\ k} &= \sum_{r=0}^{n-1} C_n^r \int_{B_0} (\pi_{\alpha;m\ k}^{(1)}(x))^r (\pi_{\alpha;m\ k}^{(3)}(x))^{n-r} dx \\
 &= p^{nk} \sum_{r=0}^{n-1} C_n^r \int_{B_0} \left(\int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p (\Omega(p^k|x-\xi|_p) - \Omega(p^k|x|_p)) d\xi \right)^r \\
 &\quad \times \Omega^{n-r}(p^k|x|_p) \left(\int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p d\xi \right)^{n-r} dx \\
 &= p^{(n-1)k} \sum_{r=0}^{n-1} C_n^r \left(\int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p (\Omega(p^k|\xi|_p) - 1) d\xi \right)^r \\
 &\quad \times \left(\int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p d\xi \right)^{n-r} \\
 &= p^{(n-1)k} \sum_{r=0}^{n-1} C_n^r \left(\int_{B_{-k}} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p d\xi \right. \\
 &\quad \left. - \int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p d\xi \right)^r \left(\int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p d\xi \right)^{n-r} \\
 &= p^{(n-1)k} \sum_{r=0}^{n-1} C_n^r \left\{ p^{-k\alpha} \sum_{j=0}^m C_m^j (-k)^j I_0(\alpha; m-j) - I_0(\alpha; m) \right\}^r \\
 &\quad \times (I_0(\alpha; m))^{n-r} = p^{-(n(\alpha-1)+1)k} \left\{ \left(\sum_{j=0}^m C_m^j (-k)^j I_0(\alpha; m-j) \right)^n \right. \\
 &\quad \left. - \left(\sum_{j=0}^m C_m^j (-k)^j I_0(\alpha; m-j) - p^{k\alpha} I_0(\alpha; m) \right)^n \right\}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

Теперь построим асимптотику интеграла $J_{3,1\ k}$. Очевидно (см. (5.2)), что при $|x|_p \leq 1$ и для достаточно больших k

$$\pi_{\alpha;m\ k}^{(2)}(x) = p^k \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p \Omega(p^k|x-\xi|_p) d\xi = 0.$$

Действительно, так как $|x|_p \leq 1$ и $\xi \in \mathbb{Q}_p \setminus B_0 = \{|\xi|_p > 1\}$, то $|x-\xi|_p > \frac{1}{p^k}$. В противном случае, предполагая, что $|x-\xi|_p \leq \frac{1}{p^k}$, мы бы имели

$$|\xi|_p = |x - (x - \xi)|_p \leq \max(|x|_p, |x - \xi|_p) = 1,$$

т. е. пришли бы к противоречию. Таким образом, $\Omega(p^k|x-\xi|_p) = 0$ и $\pi_{\alpha;m\ k}^{(2)}(x) = 0$.
Итак,

$$\begin{aligned}
 J_{3,1\ k} &= \int_{B_0} (\pi_{\alpha;m\ k}^{(1)}(x) + \pi_{\alpha;m\ k}^{(2)}(x))^n dx = \int_{B_0} (\pi_{\alpha;m\ k}^{(1)}(x))^n dx \\
 &= \int_{B_{-k}} (\pi_{\alpha;m\ k}^{(1)}(x))^n dx + \int_{B_0 \setminus B_{-k}} (\pi_{\alpha;m\ k}^{(1)}(x))^n dx, \quad k \rightarrow \infty, \quad (6.17)
 \end{aligned}$$

где согласно первой формуле из (5.2)

$$\pi_{\alpha; m \ k}^{(1)}(x) = p^k \int_{B_0} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p (\Omega(p^k |x - \xi|_p) - \Omega(p^k |x|_p)) d\xi.$$

Вычислим первый интеграл в (6.17). Пусть $|x|_p \leq p^{-k}$. Тогда, учитывая (6.8), получим

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha; m \ k}^{(1)}(x) &= -p^k \int_{p^{-k} < |\xi|_p \leq 1} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p d\xi \\ &= -p^k \sum_{\gamma=-k+1}^0 \int_{S_\gamma} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p d\xi \\ &= -p^k (I_0(\alpha; m) - I_{-k}(\alpha; m)) \\ &= -p^k \left(I_0(\alpha; m) - p^{-k\alpha} \sum_{j=0}^m C_m^j (-k)^j I_0(\alpha; m-j) \right), \end{aligned} \quad (6.18)$$

где интегралы $I_0(\alpha; s)$ и $I_{-k}(\alpha; s)$ определены формулами (3.5) и (6.8) соответственно, $\alpha \neq \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $j \in \mathbb{Z}$. Здесь последнее выражение получено аналитическим продолжением α . Используя (6.18) и (2.1), запишем первый интеграл из (6.17) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{B_{-k}} (\pi_{\alpha; m \ k}^{(1)}(x))^n dx &= (-1)^n p^{(n-1)k} \left(I_0(\alpha; m) \right. \\ &\quad \left. - p^{-k\alpha} \sum_{j=0}^m C_m^j (-k)^j I_0(\alpha; m-j) \right)^n, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Теперь вычислим второй интеграл в (6.17). Пусть $x \in B_0 \setminus B_{-k}$. Ясно, что при этом $\Omega(p^k |x - \xi|_p) = 0$. В противном случае мы бы имели

$$|x - \xi|_p \leq \frac{1}{p^k} \quad \text{и} \quad |x|_p = |\xi + (x - \xi)|_p \leq \max(|\xi|_p, |x - \xi|_p) = \frac{1}{p^k}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha; m \ k}^{(1)}(x) &= p^k \int_{p^{-k} < |\xi|_p \leq 1} |\xi|_p^{\alpha-1} \pi_1(\xi) \log_p^m |\xi|_p \Omega(p^k |x - \xi|_p) d\xi, \\ &\quad p^{-k} < |x|_p \leq 1. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Если $\pi_1(x) \neq 1$, то, учитывая (3.1), из соотношения (6.20) получим

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha; m \ k}^{(1)}(x) &= p^k \sum_{\gamma=\log_p |\xi| \in [-k+1, 0]; \xi \in B_{-k}(x)} p^{\gamma(\alpha-1)} \gamma^m \\ &\quad \times \int_{S_\gamma} \pi_1(\xi) \varphi(x) d\xi = 0, \quad p^{-k} < |x|_p \leq 1. \end{aligned} \quad (6.21)$$

В случае, когда $\pi_1(x) \equiv 1$, учитывая коммутативность свертки, перепишем (6.20) в виде

$$\begin{aligned}\pi_{\alpha;m-k}^{(1)}(x) &= p^k \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^{\alpha-1} \log_p^m |\xi|_p (1 - \Delta_{-k}(\xi)) \Delta_0(\xi) \Omega(p^k |x - \xi|_p) d\xi \\ &= (|x|_p^{\alpha-1} \log_p^m |x|_p (1 - \Delta_{-k}(x)) \Delta_0(x)) * \delta_k(x) \\ &= p^k \int_{\mathbb{Q}_p} |x - \xi|_p^{\alpha-1} \log_p^m |x - \xi|_p (1 - \Delta_{-k}(x - \xi)) \\ &\quad \times \Delta_0(x - \xi) \Omega(p^k |\xi|_p) d\xi, \quad p^{-k} < |x|_p \leq 1,\end{aligned}$$

где $(1 - \Delta_{-k}(x)) \Delta_0(x)$ — характеристическая функция множества $B_0 \setminus B_{-k}$. Аналогично формуле (4.4), учитывая, что для всех $p^{-k} < |x|_p \leq 1$ и $|\xi|_p \leq p^{-k}$ имеем $|x - \xi|_p = |x|_p$, найдем, что последний интеграл равен

$$\pi_{\alpha;m-k}^{(1)}(x) = |x|_p^{\alpha-1} \log_p^m |\xi|_p (1 - \Delta_{-k}(x)) \Delta_0(x). \quad (6.22)$$

Подставляя (6.22) во второй интеграл из (6.17), получим

$$\int_{B_0 \setminus B_{-k}} (\pi_{\alpha;m-k}^{(1)}(x))^n dx = I_1(n(\alpha - 1) + 1; nm), \quad (6.23)$$

где $I_1(n(\alpha - 1) + 1; nm) = \int_{p^{-k} < |x|_p \leq 1} |x|_p^{n(\alpha-1)} \log_p^{nm} |x|_p dx$.

Если $n(\alpha - 1) + 1 \neq \alpha_j$, то, учитывая (3.5), (6.8), будем иметь

$$\begin{aligned}I_1(n(\alpha - 1) + 1; nm) &= \int_{p^{-k} < |x|_p \leq 1} |x|_p^{n(\alpha-1)} \pi_1^n(x) \log_p^{nm} |x|_p dx \\ &= I_0(n(\alpha - 1) + 1; nm) - I_{-k}(n(\alpha - 1) + 1; nm) \\ &= I_0(n(\alpha - 1) + 1; nm) - p^{-k(n(\alpha-1)+1)} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{nm} C_{nm}^j (-k)^j I_0(n(\alpha - 1) + 1; nm - j). \quad (6.24)\end{aligned}$$

Если $n(\alpha - 1) + 1 = \alpha_j$, то, учитывая $p^{\gamma \alpha_j} = 1$, тождество (6.1) и лемму 6.1, получим

$$\begin{aligned}I_1(n(\alpha - 1) + 1; nm) &= \sum_{\gamma=-k+1}^0 \int_{S_\gamma} |x|_p^{n(\alpha-1)} \pi_1^n(x) \log_p^{nm} |x|_p dx \\ &= (1 - p^{-1}) \sum_{\gamma=-k+1}^0 p^{\gamma(-1+\alpha_j)} p^{\gamma} \gamma^{nm} = -(1 - p^{-1}) \mathbf{S}_{nm}(-k), \quad (6.25)\end{aligned}$$

где функция $\mathbf{S}_s(r)$ определена в (6.1).

Суммируя полученные результаты, из (6.14), (6.16), (6.17), (6.19), (6.23)–(6.25) будем иметь

$$\begin{aligned} J_k &= J_{1\ k} + J_{2\ k} + \varphi(0)(J_{3,1\ k} + J_{3,2\ k}) \\ &= \int_{B_0} |x|_p^{n(\alpha-1)} \pi_1^n(x) \log_p^{nm} |x|_p (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} |x|_p^{n(\alpha-1)} \pi_1^n(x) \log_p^{nm} |x|_p \varphi(x) dx + \varphi(0)C_k, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6.26)$$

где если $n(\alpha - 1) + 1 \neq \alpha_j$, то

$$\begin{aligned} C_k &= J_{3,1\ k} + J_{3,2\ k} = p^{-(n(\alpha-1)+1)k} \left(\sum_{j=0}^m C_m^j (-k)^j I_0(\alpha; m-j) \right)^n \\ &\quad + I_0(n(\alpha-1) + 1; nm) - p^{-k(n(\alpha-1)+1)} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{nm} C_{nm}^j (-k)^j I_0(n(\alpha-1) + 1; nm-j), \end{aligned} \quad (6.27)$$

и если $n(\alpha - 1) + 1 = \alpha_j$ и $\pi_1(x) \equiv 1$, то

$$C_k = J_{3,1\ k} + J_{3,2\ k} = \left(\sum_{j=0}^m C_m^j (-k)^j I_0(\alpha; m-j) \right)^n - (1-p^{-1})S_{nm}(-k). \quad (6.28)$$

Учитывая (3.4), (3.5), (3.7), выражения (6.26)–(6.28) можно переписать в слабом смысле, как (6.10), (6.11).

Аналогичным образом можно доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. 1. Если $\alpha, \beta, m(\alpha-1) + n(\beta-1) + 1 \neq \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $j \in \mathbb{Z}$, то в слабом смысле

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha\ k}^m(x) \pi_{\beta\ k}^n(x) &= \pi_{m(\alpha-1)+n(\beta-1)+1}(x) \pi_1^{m+n-1}(x) \\ &\quad + \delta(x) p^{-(m(\alpha-1)+n(\beta-1)+1)k} (I_0^m(\alpha) I_0^n(\beta) \\ &\quad - I_0(m(\alpha-1) + n(\beta-1) + 1)), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. Если $\alpha, \beta \neq \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $m(\alpha-1) + n(\beta-1) + 1 = \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$ и $\pi_1(x) \equiv 1$, то в слабом смысле

$$\pi_{\alpha\ k}^m(x) \pi_{\beta\ k}^n(x) = P\left(\frac{1}{|x|_p}\right) + (I_0^m(\alpha) I_0^n(\beta) - (1-p^{-1}) \log_p(p^{-k})) \delta(x), \quad k \rightarrow \infty.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. В слабом смысле имеет место асимптотика:

$$\begin{aligned} (P_k(x))^n &= |x|_p^{-n} + p^{(n-1)k} (\log_p^n(p^{-k}) (1-p^{-1})^n - I_0(-n+1)) \delta(x), \\ k &\rightarrow \infty, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Доказательство. Для построения асимптотики $J_k = \langle (P_k(x))^n, \varphi(x) \rangle$ используются вычисления, аналогичные тем, что использовались при доказательстве предложения 6.5. Представим последнее выражение в виде суммы

$$J_k = J_{1\ k} + J_{2\ k} + \varphi(0)J_{3\ k},$$

где

$$\begin{aligned} J_{1\ k} &= \int_{B_0} (P_k(x))^n (\varphi(x) - \varphi(0)) dx, \\ J_{2\ k} &= \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} (P_k(x))^n \varphi(x) dx, \\ J_{3\ k} &= \int_{B_0} (P_k(x))^n dx. \end{aligned}$$

Дословно повторяя доказательство соотношений (6.14), получим, что для каждой φ и для достаточно больших k выполнено

$$\begin{aligned} J_{1\ k} &= \int_{B_0} |x|_p^{-n} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx, \\ J_{2\ k} &= \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} |x|_p^{-n} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Далее, представив $J_{3\ k}$ в виде суммы:

$$J_{3\ k} = \int_{B_0} (P_k(x))^n dx = \int_{B_{-k}} (P_k^{(1)}(x))^n dx + \int_{B_0 \setminus B_{-k}} (P_k^{(1)}(x))^n dx,$$

где

$$P_k^{(1)}(x) = p^k \int_{B_0} |\xi|_p^{-1} (\Omega(p^k |x - \xi|_p) - \Omega(p^k |x|_p)) d\xi,$$

и почти дословно повторяя вычисления доказательства соотношений (6.19), (6.23), найдем

$$\begin{aligned} \int_{B_{-k}} (P_k^{(1)}(x))^n dx &= (-1)^n p^{(n-1)k} \left(\int_{p^{-k} < |\xi|_p \leq 1} |\xi|_p^{-1} d\xi \right)^n \\ &= (-1)^n p^{(n-1)k} \left(\sum_{\gamma=-k+1}^0 \int_{S_\gamma} |\xi|_p^{-1} d\xi \right)^n = (-1)^n p^{(n-1)k} k^n (1 - p^{-1})^n, \\ \int_{B_0 \setminus B_{-k}} (P_k^{(1)}(x))^n dx &= \int_{p^{-k} < |x|_p \leq 1} |x|_p^{-n} dx \\ &= \sum_{\gamma=-k+1}^0 \int_{S_\gamma} |x|_p^{-n} dx = (1 - p^{(n-1)k}) I_0(-n+1). \end{aligned}$$

Чтобы построить последнюю асимптотику, заметим, что имеет место соотношение, аналогичное (6.22):

$$(|x|_p^{-1} (1 - \Delta_{-k}(x)) \Delta_0(x)) * \delta_k(x) = |x|_p^{-1} (1 - \Delta_{-k}(x)) \Delta_0(x).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_k &= \langle (P_k(x))^n, \varphi(x) \rangle = J_{1\ k} + J_{3\ k} + \varphi(0) J_{3\ k} \\ &= \int_{B_0} |x|_p^{-n} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} |x|_p^{-n} \varphi(x) dx + \varphi(0) I_0(-n+1) \\ &\quad + \varphi(0) p^{(n-1)k} ((-k)^n (1-p^{-1})^n - I_0(-n+1)), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. 1. Если $\alpha, m(\alpha-1) - n + 1 \neq \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $j \in \mathbb{Z}$, то в слабом смысле

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha\ k}^m(x) (P_k(x))^n &= \pi_{m(\alpha-1)-n+1} \pi_1^{m-1}(x) \\ &\quad + p^{-(m(\alpha-1)-n+1)k} \{ I_0^m(\alpha) (1-p^{-1})^n \log_p^n(p^{-k}) \\ &\quad - I_0(m(\alpha-1) - n + 1) \} \delta(x), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. Если $\alpha \neq \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$, $m(\alpha-1) - n + 1 = \alpha_j = \frac{2\pi i}{\ln p} j$ и $\pi_1(x) \equiv 1$, то в слабом смысле

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha\ k}^m(x) (P_k(x))^n &= P\left(\frac{1}{|x|_p}\right) \\ &\quad + \{ I_0^m(\alpha) (1-p^{-1})^n \log_p^n(p^{-k}) - (1-p^{-1}) \log_p(p^{-k}) \} \delta(x), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Повторяя вычисления, аналогичные использованным при доказательствах предложений 6.5–6.8, можно доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. В слабом смысле имеет место асимптотика:

$$\begin{aligned} &(\pi_{\alpha_1; a_1\ k}(x))^{m_1} \dots (\pi_{\alpha_s; a_s\ k}(x))^{m_s} (P_{b_1\ k}(x))^{n_1} \dots (P_{b_r\ k}(x))^{n_r} \\ &= |x|_p^\beta \pi_1^m(x) \log_p^\alpha |x|_p + \delta(x) p^{\gamma k} R_N(\log_p p^{-k}), \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\beta = \sum_{j=1}^s m_j(\alpha_j - 1) - \sum_{j=1}^r n_j$, $m = \sum_{j=1}^s m_j$, $a = \sum_{j=1}^s m_j a_j$, $\gamma = -1 - \sum_{j=1}^s m_j(\alpha_j - 1) + \sum_{j=1}^r n_j$, $R_N(z)$ – многочлен порядка $N = \sum_{j=1}^s m_j a_j + \sum_{j=1}^r n_j$ с вычисляемыми коэффициентами.

Список литературы

1. Albeverio S., Haba Z., Russo F. Trivial solutions for a non-linear two-space-dimensional wave equation perturbed by space-time white noise // Stochastics Rep. 1996. V. 56. № 1–2. P. 127–160.
2. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёгг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
3. Albeverio S., Khrennikov A. Yu. Representation of the Weyl group in spaces of square integrable functions with respect to p -adic valued Gaussian distributions // J. of Phys. A. 1996. V. 29. P. 5515–5527.

4. *Albeverio S., Khrennikov A. Yu.* p -adic Hilbert space representation of quantum systems with an infinite number of degrees of freedom // *Int. J. of Modern Phys. B.* 1996. V. 10. P. 1665–1673.
5. *Albeverio S., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M.* Associated homogeneous p -adic distributions. Report 02133. MSI. Sweden, Växjö University, 2002.
6. *Альбеверио С., Хренников А. Ю., Шелкович В. М.* Присоединенные однородные p -адические обобщенные функции // *Докл. РАН.* 2003. Т. 393. № 3. С. 300–303.
7. *Albeverio S., Kurasov P.* Singular perturbations of differential operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
8. *Aref'eva Ya., Dragovic B. G., Volovich I. V.* On the adelic string amplitudes // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 209. № 4. P. 445–450.
9. *Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.* Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом // *ДАН СССР.* 1961. Т. 137. № 5. С. 1011–1014.
10. *Bruhat F.* Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p -adiques // *Bull. Soc. math. France.* 1961. V. 89. P. 43–75.
11. *Colombeau J. F.* Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam: North Holland, 1985.
12. *Данилов В. Г., Маслов В. П., Шелкович В. М.* Алгебры особенностей сингулярных решений квазилинейных строго гиперболических систем первого порядка // *ТМФ.* 1998. Т. 141. № 1. С. 3–55.
13. *Danilov V. G., Shelkovich V. M.* Propagation and interaction of shock waves of quasilinear equation // *Nonlinear Studies.* 2001. V. 8. № 1. P. 135–170.
14. *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Shelkovich V. M.* Weak Asymptotics Method and Interaction of Nonlinear Waves // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. Asymptotic Methods for Wave and Quantum Problems* / Ed. M. Karasev. 2003. V. 208. P. 33–165.
15. *Данилов В. Г., Шелкович В. М.* Распространение и взаимодействие δ -ударных волн гиперболических систем законов сохранения // *Докл. РАН.* 2004. Т. 394. № 1. С. 10–14.
16. *Егоров Ю. В.* К теории обобщенных функций // *УМН.* 1990. Т. 45. № 5. С. 3–40.
17. *Freund P. G. O., Witten E.* Adelic string amplitudes // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 199. P. 191–195.
18. *Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е.* Обобщенные функции // *Обобщенные функции.* Вып. 1. М.: ГИФМЛ, 1959.
19. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.* Теория представлений и автоморфные функции // *Обобщенные функции.* Вып. 6. М.: Наука, 1966.
20. *Grosser M., Kunzinger M., Oberguggenberger M., Steinbauer R.* Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity. Dordrecht: Academic Publ., 2001.
21. *Иванов В. К.* Асимптотическое приближение к произведению обобщенных функций // *Изв. вузов. Математика.* 1981. № 1. С. 19–26.
22. *Khrennikov A.* p -Adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1994.
23. *Хренников А. Ю.* Неархимедов анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
24. *Хренников А. Ю.* Фундаментальные решения над полем p -адических чисел // *СПб. матем. журн.* 1993. Т. 4. № 3. С. 248–266.
25. *Khrennikov A.* p -Adic discrete dynamical systems and their applications in physics and cognitive science // *Russian J. of math. physics.* 2004. V. 11. № 1. P. 45–70.
26. *Khrennikov A., Radyno Ya. V.* On adelic analogue of Laplacian // *Proceedings of Jangjeon Mathematical Society.* 2003. V. 6. № 1. P. 1–18.
27. *Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., Smolyanov O. G.* Locally convex spaces of vector-valued distributions with multiplicative structures // *Infinite-Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics.* 2002. V. 5. № 4. P. 1–20.
28. *Кочубей А. Н.* Оператор дифференцирования на подмножествах поля p -адических чисел // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1992. Т. 56. № 5. С. 1021–1039.

29. Kochubei A. N. Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedean fields // Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. V. 244. N.Y.: Marcel Dekker, 2001.
30. Кудрявцев В. А. Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли. М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.
31. Li Bang-He. Non-standard analysis and multiplication of distributions // Acta scientia sinica. 1978. V. 21. № 5. P. 561–585.
32. Ливчак Я. Б. К теории обобщенных функций // Тр. Рижского алгебраического семинара. Рига: Латв. гос. ун-т им. Петра Стучки, 1969. С. 98–164.
33. Marinari E., Parisi G. On the p -adic five point functions // Phys. Lett. B. 1988. V. 203. P. 52–56.
34. Parisi G. p -adic functional integral // Mod. Phys. Lett. A. 1988. V. 4. P. 369–374.
35. Oberguggenberger M. Multiplication of distributions and applications to partial differential equations. Harlow: Longman, 1992.
36. Oberguggenberger M., Russo F. Nonlinear SPDEs: Colombeau solutions and pathwise limits // Stochastic Analysis and Related Topics. V. VI. Boston: Birkhaeuser, 1998. P. 319–332.
37. Oberguggenberger M., Kunzinger M. Characterization of Colombeau generalized functions by their pointvalues // Math. Nachr. 1999. V. 203. P. 147–157.
38. Oberguggenberger M., Pilipovic S., Scarpalezos D. Local properties of Colombeau generalized functions // Math. Nachr. 2003. V. 256. P. 88–99.
39. Смолянов О. Г., Хренников А. Ю., Шелкович В. М. Мультипликативные структуры в линейном пространстве векторнозначных распределений // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 1. С. 28–31.
40. Шелкович В. М. Ассоциативно-коммутативная алгебра распределений, включающая мультипликаторы, и обобщенные решения нелинейных уравнений // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 5. С. 765–783.
41. Шелкович В. М. Теория обобщенных функций Коломбо, использующая гармонические регуляризации // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 2. С. 313–316.
42. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. ММО. 2003. Т. 64. С. 159–212.
43. Виленкин Н. Я. Обобщенные функции // Функциональный анализ: Справоч. / Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.
44. Владимиров В. С. Обобщенные функции над полем p -адических чисел // УМН. 1988. Т. 43. № 3. С. 17–53.
45. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленев Е. И. p -адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
46. Vladimirov V. S., Zapuzhak T. M. Adelic formulas for string amplitudes in fields of algebraic numbers // Lett. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 232–242.
47. Vladimirov V. S., Volovich I. V. p -Adic quantum mechanics // Commun. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 659–676.
48. Волович И. В. p -адическое пространство-время и теория струн // ТМФ. 1987. Т. 71. № 3. С. 337–340.
49. Volovich I. V. p -adic string // Class. Quant. Grav. 1987. V. 4. P. L83–L87.

E-mail: albeverio@uni-bonn.de,
 andrei.khrennikov@msi.vxu.se,
 shelkv@VS1567.spb.edu

Поступило в редакцию
 04.06.2004