Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Соловьев, Теоремы разложения и теоремы о ядре для одного класса функциональных пространств, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 5, 199–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im633>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:38:58

УДК 517.98

М. А. Соловьев

Теоремы разложения и теоремы о ядре для одного класса функциональных пространств

Доказаны новые теоремы о свойствах обобщенных функций, определенных на пространствах S^β Гельфанда–Шилова с индексом $0 \leq \beta < 1$. Каждому открытому конусу $U \subset \mathbb{R}^d$ сопоставляется родственное $S^\beta(\mathbb{R}^d)$ пространство $S^\beta(U)$, состоящее из целых аналитических функций, быстро убывающих в U и экспоненциально растущих с порядком $\leq 1/(1 - \beta)$ вне этого конуса. Такие пучки пространств возникают естественным образом в нелокальной квантовой теории поля, что и мотивировало данное исследование. Доказана полнота и ядерность пространств $S^\beta(U)$ и установлена теорема разложения, следствием которой является существование у каждого непрерывного функционала, заданного на $S^\beta(\mathbb{R}^d)$, наименьшего замкнутого несущего конуса в $\mathbb{R}^d$. Доказаны теоремы о ядре для пространств над открытыми и замкнутыми конусами и выяснена связь между несущими конусами полилинейных форм и порождаемых ими обобщенных функций.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение

В настоящей статье исследуется свойство угловой локализуемости обобщенных функций класса S'^β , $0 \leq \beta < 1$, обнаруженное при использовании их в нелокальной квантовой теории поля. Пространства S^β и S'_α Гельфанда–Шилова [1] с индексом $\beta < 1$ состоят из целых функций, и определенные на них непрерывные функционалы аналитичны в том смысле, что допускают разложение в ряд Тейлора, сходящееся по топологии (слабой и сильной) сопряженных пространств S'^β , S'_α .

При построении нелокальной теории поля необходимо рассматривать, наряду с S^β и S'_α , родственные им пространства, ассоциированные с конусами в $\mathbb{R}^d$. Ключевым оказывается наличие у аналитических функционалов наименьшего несущего конуса, вытекающее из теорем разложения для пространств над конусами. Для случая пространств с двумя индексами анализ, выполненный в [2], существенным образом использует их принадлежность хорошо изученному классу пространств DFS, дуальных пространствам FS (Фреше–Шварца), обзор свойств которых имеется, например, в работе [3]. Топологическая структура пространств $S^\beta(U)$, где U – открытый конус в $\mathbb{R}^d$, сложнее, чем пространств $S'_\alpha(U)$. Они не являются пространствами DFS, и даже доказательство их полноты оказывается нетривиальной задачей. При $\beta = 0$ вывод теорем

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-01049) и программы “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-4401.2006.2).

разложения связан с дополнительными трудностями, для преодоления которых оказываются полезными методы теории гиперфункций. Именно этот предельный случай представляет наибольший интерес, поскольку пространство S^0 фурье-изоморфно пространству Шварца $\mathcal{D}$ гладких функций с компактным носителем. Существование наименьших несущих конусов у элементов сопряженного пространства S'^0 можно установить обходным путем [4], рассматривая их ограничения на S_α^0 . Однако одного этого результата недостаточно для приложений, и желательно систематическое исследование свойств таких функциональных пространств. Особое внимание в статье уделяется распространению теории на полилинейные формы, включая вывод соответствующих теорем о ядре для пространств $S^\beta(U)$ и для пространств над замкнутыми конусами, которые строятся из пространств над открытыми конусами посредством индуктивного предела.

Отметим, что пространства типа S^β над конусами возникают естественным образом при построении теории преобразования Фурье–Лапласа аналитических функционалов, в частности при обобщении на них теоремы Пэли–Винера–Шварца [5], [6]. Принадлежащий В. С. Владимирову [5] вариант этой теоремы устанавливает изоморфизм между пространством распределений умеренного роста с носителями в заданном замкнутом остром конусе K и алгеброй аналитических функций в некоторой трубчатой области, имеющих рост не быстрее полиномиального. Если мы ослабим ограничение на рост функций на бесконечности и зададимся вопросом, каким функционалам соответствует такая расширенная алгебра, то с неизбежностью придем к пространствам $S'^\beta(K)$, а если снимем это ограничение совсем, то придем к $S'^0(K)$.

Работа организована следующим образом. В § 2 даны основные определения и излагаются необходимые предварительные сведения об используемых функциональных пространствах. В § 3 с помощью критерия Паламодова [7] доказана их полнота. В § 4, 5 доказана основная теорема разложения для пространств над конусами, из которой следует, что соответствие $K \rightarrow S^\beta(K)$ является решеточным (анти)гомоморфизмом. При $\beta > 0$ доказательство проще и использует нетривиальность пространства $S_{1-\beta}^\beta$. Вывод этой теоремы при $\beta = 0$, излагаемый в § 5, основан на применении оценок Хёрмандера [8]. Поскольку весовые функции в этих оценках являются плюрисубгармоническими, в приложении 1 развита общая схема аппроксимации такими функциями индикаторных функций, задающих рассматриваемые пространства. В § 6 доказано наличие у каждого элемента из $S'^\beta(\mathbb{R}^d)$ наименьшего замкнутого несущего конуса. В § 7 установлена ядерность пространств над открытыми и замкнутыми конусами и указаны ее следствия. В § 8 для этих пространств доказаны теоремы о ядре, позволяющие отождествлять заданные на них полилинейные отдельно непрерывные формы с линейными функционалами. Предлагаемый метод доказательства применим и к другим пространствам аналитических функций. В § 9 показано, что при рассмотрении аналитических функционалов, порождаемых полилинейными формами, естественно пользоваться понятием строго несущего конуса. Его отличие от понятия несущего конуса продемонстрировано в приложении 2. В § 10 получена теорема типа Пэли–Винера–Шварца, которая дает точное описание свойств преобразования Лапласа функционалов класса S'^β с острым строго несущим конусом.

Используемые ниже сведения из теории топологических векторных пространств содержатся в [9]–[11]. Основные факты из теории плюрисубгармонических функций изложены в монографии [5].

§ 2. Основные определения и предварительные сведения

Пусть $0 \leq \beta < 1$ и U – открытый конус в $\mathbb{R}^d$. Определим пространство $S^{\beta,b}(U)$ как пересечение (проективный предел) гильбертовых пространств $H_N^{\beta,B}(U)$, $B > b$, $N = 0, 1, 2, \dots$, состоящих из целых функций на $\mathbb{C}^d$ и снабженных скалярными произведениями

$$\langle f, g \rangle_{U,B,N} = \int \overline{f(z)} g(z) \prod_{j=1}^d (1 + |x_j|)^{2N} \exp \{ -2d(Bx, U)^{1/(1-\beta)} - 2|By|^{1/(1-\beta)} \} d\lambda, \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $d(x, U) = \inf_{\xi \in U} |x - \xi|$ – расстояние от x до U и $d\lambda = dx dy$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Заметим, что $d(Bx, U) = Bd(x, U)$, поскольку U – конус. Из определения следует, что $S^{\beta,b}(U)$ является пространством Фреше, т. е. полным и метризуемым. Пространство $S^{\beta}(U)$ есть объединение пространств $S^{\beta,b}(U)$, $b > 0$, снабженное топологией индуктивного предела. Оно не зависит от выбора нормы $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^d$, поскольку все эти нормы эквивалентны. В дальнейшем мы используем либо евклидову норму, либо $l^{1/(1-\beta)}$ -норму

$$\left(\sum_{j=1}^d |y_j|^{1/(1-\beta)} \right)^{1-\beta}, \quad (2)$$

которая удобна при рассмотрении полилинейных форм на $S^0(\mathbb{R}^{d_1}) \times \dots \times S^0(\mathbb{R}^{d_n})$, поскольку тогда весовая функция в (1) мультипликативна. Именно, если обозначить

$$\rho_{U,B,N}(z) = -N \sum_j \ln(1 + |x_j|) + d(Bx, U)^{1/(1-\beta)} + |By|^{1/(1-\beta)}, \quad (3)$$

то функция, задающая пространство $S^0(U_1 \times \dots \times U_n)$, где $U_k \subset \mathbb{R}^{d_k}$, выражается через функции, задающие $S^0(U_k)$, по формуле

$$\exp\{-\rho_{U_1 \times \dots \times U_n, B, N}(z)\} = \prod_{k=1}^n \exp\{-\rho_{U_k, B, N}(z_k)\}. \quad (4)$$

Пространство $S^{\beta,b}(U)$ можно рассматривать и как пересечение банаховых пространств $E_N^{\beta,B}(U)$ целых функций с нормами

$$\|f\|'_{U,B,N} = \sup_{z \in \mathbb{C}^d} |f(z)| e^{-\rho_{U,B,N}(z)}. \quad (5)$$

Таким и было первоначальное определение в работе [12], но для анализа большинства рассматриваемых далее вопросов более удобна формулировка в терминах гильбертовых пространств. Из представления

$$S^{\beta,b}(U) = \bigcap_{B>b, N \geq 0} E_N^{\beta,B}(U)$$

видно, что $S^{\beta}(\mathbb{R}^d)$ совпадает с пространством S^{β} Гельфанда–Шилова и с пространством W^{Ω} Гуревича, где $\Omega(y) = y^{1/(1-\beta)}$. Однако в монографии [1] эти

пространства не наделались топологией, а определялась сходимость в них последовательностей. В §3 показано, что такой упрощенный “секвенциальный” подход полностью согласуется с указанной выше естественной топологией. Отметим еще, что $S^{\beta,b}(U)$ можно считать счетно-нормированным пространством $Z(M_p)$, задаваемым $M_p = \exp\{-\rho_{U,b+1/p,p}\}$, если исключить из определения [1] этого класса пространств условие $M_p(z) \geq C(y)$. Эквивалентность системы норм (5) системе $\|f\|_{U,B,N}$, определяемой скалярными произведениями (1), устанавливается с помощью интегральной формулы Коши, согласно которой

$$|f(z)| \leq C\|f\|_{L^2(B)},$$

где B – любая ограниченная окрестность точки z в $\mathbb{C}^d$. Взяв $B = \{\zeta: |z - \zeta| < 1\}$ и применяя неравенство треугольника к каждому члену в правой части (3), получаем, что при $\zeta \in B$ и любом $B' < B$ соблюдается неравенство $\rho_{U,B',N}(\zeta) \leq \rho_{U,B,N}(z) + C_{B,B',N}$. Поэтому

$$|f(z)|^2 e^{-2\rho_{U,B,N}(z)} \leq C' \int_B |f(\zeta)|^2 e^{-2\rho_{U,B',N}(\zeta)} d\lambda \leq C' \|f\|_{U,B',N}^2. \quad (6)$$

С другой стороны, ясно, что $\|f\|_{U,B,N} \leq C'' \|f\|'_{U,B',N+d+1}$.

Каждому замкнутому конусу $K \subset \mathbb{R}^d$ мы также сопоставляем пространство $S^\beta(K)$, определяя его как индуктивный предел пространств $S^\beta(U)$ по открытым конусам U , в которых K компактен, что обозначается посредством $^1 K \Subset U$. Все эти пространства непрерывно вложены в пространство $S^\beta(\{0\})$, соответствующее вырожденному замкнутому конусу, состоящему из одной точки – начала координат. Его составляют целые аналитические функции порядка роста $1/(1-\beta)$ с конечным типом, а также порядка $< 1/(1-\beta)$. Отметим, что о конусах мы говорим для наглядности, а фактически имеем дело с пучком пространств над сферой, компактифицирующей $\mathbb{R}^d$. Конус $\{0\}$, хотя и замкнут в $\mathbb{R}^d$, соответствует пустому подмножеству сферы, которое и замкнуто, и открыто. В соответствии с этим пространство $S^\beta(\{0\})$ и его топологию можно определить, исходя непосредственно из формулы (1) при $d(x, 0) = |x|$. В §5 будет показано, что эта топология совпадает с индуктивной относительно вложений $S^\beta(U) \rightarrow S^\beta(\{0\})$, где U пробегает все открытые конусы в $\mathbb{R}^d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть v – линейный непрерывный функционал на $S^\beta(\mathbb{R}^d)$. Мы говорим, что замкнутый конус $K \subset \mathbb{R}^d$ является для него *несущим*, если v допускает непрерывное продолжение на $S^\beta(K)$.

Такое продолжение, когда оно существует, единственно в силу следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Существует константа λ (зависящая лишь от d и β) такая, что для любого открытого конуса $U \subset \mathbb{R}^d$ и для любого $b > 0$ пространство $S^{\beta,\lambda b}(\mathbb{R}^d)$ плотно в $S^{\beta,b}(U)$ по топологии $S^{\beta,\lambda b}(U)$. Как следствие, $S^\beta(\mathbb{R}^d)$ секвенциально плотно в $S^\beta(U)$ и в любом пространстве $S^\beta(K)$, где K – замкнутый конус.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\beta > 0$ можно воспользоваться нетривиальностью пространства $S_{1-\beta}^\beta$. Согласно [1] существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что при

¹Для пары произвольных конусов V_1, V_2 включение $V_1 \Subset V_2$ означает, что $\overline{V_1} \setminus \{0\} \subset V_2$. Черта над множеством здесь и далее означает его замыкание.

любом $A > 0$ в $S_{1-\beta}^\beta(\mathbb{R}^d)$ найдется нетривиальная и неотрицательная функция g_0 , удовлетворяющая оценке

$$|g_0(z)| \leq C \exp \left\{ - \left| \frac{x}{A} \right|^{1/(1-\beta)} + \left| \frac{\gamma y}{A} \right|^{1/(1-\beta)} \right\}. \quad (7)$$

Пусть $f \in S^{\beta,b}(U)$. Нормируем g_0 условием $\int g_0(x) dx = 1$ и положим $f_\nu = f\sigma_\nu$, где $\sigma_\nu(z)$ – последовательность римановых сумм для интеграла $\int g_0(z - \xi) d\xi$, или, более явно,

$$\sigma_\nu(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n, |k| < \nu^2} g_0\left(z - \frac{k}{\nu}\right) \nu^{-n}.$$

Ясно, что $f_\nu \in S^\beta(\mathbb{R}^d)$, если $A < 1/b$. Последовательность σ_ν сходится к 1 в $\mathbb{R}^d$, и $|\sigma_\nu(z)| \leq C' \exp\{|\gamma y/A|^{1/(1-\beta)}\}$, поскольку интегральные суммы для $\exp\{-|x/A|^{1/(1-\beta)}\}$ ограничены. Следовательно, $\sigma_\nu(z) \rightarrow 1$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}^d$ по теореме Витали. Кроме того, последовательность f_ν ограничена по любой норме $|\cdot|'_{U,B,N}$, где $B > b + \gamma/A$. Значит, $f_\nu \rightarrow f$ по топологии пространства $S^{b+\gamma/A}(U)$, так как оно является монтелиевским². Таким образом, в данном случае теорема 1 соблюдается с любым $\lambda > 1 + \gamma$.

При $\beta = 0$ такая аргументация неприменима из-за тривиальности S_1^0 , но теорема 1 легко сводится к аналогичной теореме для $S_\alpha^0(U)$, доказанной в [2] другим способом, с использованием L^2 -оценок Хёрмандера. Пространство $S_\alpha^0(U)$, $\alpha > 1$, является объединением банаховых пространств целых функций $E_{\alpha,A}^{0,B}(U)$ с нормами

$$\|f\|_{\alpha,U,A,B} = \sup_{z \in \mathbb{C}^d} |f(z)| \exp \left\{ \left| \frac{x}{A} \right|^{1/\alpha} - d(Bx, U) - |By| \right\}. \quad (8)$$

Покажем, что $S_\alpha^0(U)$ плотно в $S^0(U)$. Пусть $f \in S^{0,b}(U)$. Множества вида $\{\tilde{f}: \|f - \tilde{f}\|'_{U,B,N} \leq \delta\}$, где $\delta > 0$, $B > b$, $N = 0, 1, \dots$, образуют базис окрестностей f в $S^{0,b}(U)$. Возьмем любую функцию $g \in E_{\alpha,1}^{0,1}(\mathbb{R}^d)$ со свойством $g(0) = 1$ и рассмотрим последовательность $f_\nu(z) = f(z)g(z/\nu)$. Если $\nu > 1/(B - b)$, то $f_\nu \in E_{\alpha,\nu}^{0,B}(U)$. Пусть $b < B' < B$. Тогда

$$\|f - f_\nu\|'_{U,B,N} \leq \|f\|'_{U,B',N+1} \sup_z \left| 1 - g\left(\frac{z}{\nu}\right) \right| (1 + |x|)^{-1} e^{-\epsilon|y|},$$

где $\epsilon = B - B' > 0$. Если $\nu > 2/\epsilon$, то $|1 - g(z/\nu)| \leq C \exp\{\epsilon|y|/2\}$. По любому $\delta > 0$ можно выбрать R так, чтобы

$$C \|f\|'_{U,B',N+1} \sup_{|z| \geq R} (1 + |x|)^{-1} e^{-\epsilon|y|/2} < \delta.$$

Взяв затем ν настолько большим, чтобы $\|f\|'_{U,B',N+1} \sup_{|z| < R} |1 - g(z/\nu)| < \delta$, получаем $\|f - f_\nu\|'_{U,B,N} < \delta$. Пусть теперь $\alpha' > \alpha$. Ясно, что $f_\nu \in E_{\alpha',A}^{0,B}(U)$

²В книге [1] счетно-нормированные монтелиевские пространства называются *совершенными* и доказано, что пространства $Z(M_p)$ совершенны. Это свойство вытекает также из ядерности $S^b(U)$; см. ниже.

при любом $A > 0$. Теорема 5 в [2] показывает, что при $\mu > 2ed$ функция f_ν может быть сколь угодно точно приближена элементами из $E_{\alpha',1}^{0,\mu B}(\mathbb{R}^d)$ по норме $\|\cdot\|_{\alpha',U,1,\mu B}$. Эта норма сильнее, чем $\|\cdot\|_{U,\mu B,N}$. Значит, в данном случае теорема соблюдается при любом $\lambda > 2ed$, поскольку тогда найдутся $\mu > 2ed$ и $B > b$ такие, что $\mu B < \lambda b$. Теорема доказана.

Отметим, что если конус K является несущим для $v \in S'^\beta$, то он будет несущим и для ограничения v на S^{β_1} , $\beta_1 < \beta$. Однако обратное, вообще говоря, неверно. Для дальнейшего важно, что к пространствам типа S^β над конусами применима теорема об открытом отображении в форме Гротендика [9] (или в еще более общей форме Райкова, излагаемой в приложении 1 к русскому изданию книги [10]), поскольку все эти пространства, являясь отдельными индуктивными пределами последовательностей пространств Фреше, принадлежат классу³ $\mathcal{LF}$ и в то же время являются ультраборнологическими (пространствами типа (β) в терминологии [9]). В [13] показано, что лишь $S^\beta(\{0\})$ являются пространствами DFS, а у всех остальных пространств $S^\beta(U)$, $S^\beta(K)$ сопряженные пространства неметризуемы.

§ 3. Теорема о полноте

Полнота пространств $S^\beta(U)$ установлена в работе [14] на основе другого определения, данного в терминах вещественных переменных. Для замкнутости изложения приведем здесь альтернативное доказательство, исходя из норм (5).

ТЕОРЕМА 2. *Индуктивный спектр, образованный пространствами Фреше $S^{\beta,b}(U)$, $b = 1, 2, \dots$, ацикличесен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U}_b$ – окрестность нуля в пространстве $S^{\beta,b}(U)$ вида $\|f\|'_{U,b+1/2,0} < 1/2$. Очевидно, $\mathcal{U}_{b_0} \subset \mathcal{U}_b$ при любом $b > b_0$. Согласно [7, теорема 6.1] достаточно убедиться, что топология на $\mathcal{U}_{b_0}$, индуцируемая из $S^{\beta,b}(U)$, $b > b_0$, не зависит от b . Пусть $f_0 \in \mathcal{U}_{b_0}$ и $B > b$. Обозначим через $\mathcal{V}_{B,N,\epsilon}$ след на $\mathcal{U}_{b_0}$ окрестности функции f_0 в $S^{\beta,b}(U)$ вида $\|f - f_0\|_{U,B,N} < \epsilon$ и покажем, что для всяких $B > B_1 > B_0 = b_0 + 1/2$ и любых N_1, ϵ_1 найдутся числа N, ϵ такие, что

$$\mathcal{V}_{B,N,\epsilon} \subset \mathcal{V}_{B_1,N_1,\epsilon_1}. \quad (9)$$

Это будет означать, что топология, индуцируемая на $\mathcal{U}_{b_0}$ из $S^{\beta,b}(U)$, не слабее, чем индуцируемая из $S^{\beta,b_1}(U)$, где $b_1 < b$; обратное очевидно. Далее для простоты считаем $\beta = 0$, а замечание о случае $\beta > 0$ сделаем в конце. Если $f \in \mathcal{V}_{B,N,\epsilon}$, то для функции $f_1 = f - f_0$ справедливы две оценки:

$$|f_1(x)| < e^{B_0 d(x,U) + B_0 |y|}, \quad (10)$$

$$|f_1(x)| < \epsilon (1 + |x|)^{-N} e^{B d(x,U) + B |y|}. \quad (11)$$

Надо показать, что при должном выборе N и ϵ отсюда следует

$$|f_1(x)| < \epsilon_1 (1 + |x|)^{-N_1} e^{B_1 d(x,U) + B_1 |y|}. \quad (12)$$

Введем обозначения $\varepsilon(x) = \epsilon (1 + |x|)^{-N}$, $\varepsilon_1(x) = \epsilon_1 (1 + |x|)^{-N_1}$ и определим число $R(x)$ уравнением

$$e^{B_0 R} = \varepsilon_1 e^{B_1 R}. \quad (13)$$

³Заметим, что Гротендик не включал в определение этого класса требование, чтобы индуктивный предел был строгим, налагаемое, например, в [11].

В области переменных $d(x, U) + |y| \geq R(x)$ неравенство (12) вытекает из оценки (10). В остальной области оно вытекает из (11) в том случае, если

$$\varepsilon e^{BR} = \varepsilon_1 e^{B_1 R} \quad (14)$$

и, тем более, если $\varepsilon e^{BR} < \varepsilon_1 e^{B_1 R}$. Из уравнений (13), (14) получаем $\varepsilon = \varepsilon_1^A$, где $A = (B - B_0)/(B_1 - B_0)$. Значит, требуемое включение (9) будет обеспечено, если взять $\varepsilon \leq \varepsilon_1^A$ и $N \geq AN_1$. Распространение доказательства на $\beta > 0$ сводится к очевидным переобозначениям, и мы приходим к тому же заключению с модифицированным $A = (\tilde{B} - \tilde{B}_0)/(\tilde{B}_1 - \tilde{B}_0)$, где $\tilde{B} = B^{1/(\beta-1)}$.

Согласно [7] ацикличность обеспечивает справедливость следующих утверждений.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пространство $S^\beta(U)$ отделимо и полно. Множество $\mathcal{B} \subset S^\beta(U)$ является ограниченным в том и только в том случае, если оно целиком содержится в некотором пространстве $S^{\beta, B}(U)$ и ограничено по каждой из его норм.*

Впрочем, отделимость $S^\beta(U)$ очевидна, поскольку его топология мажорирует топологию равномерной сходимости. Отметим еще, что непрерывность линейного отображения $S^\beta(U)$ (как и любого борнологического пространства) в произвольное локально выпуклое пространство равносильна ограниченности этого отображения на всех ограниченных множествах, что, в свою очередь, эквивалентно секвенциальной непрерывности (см. [11]).

§ 4. Вывод теоремы разложения при $\beta > 0$

Здесь и в § 5 мы будем пользоваться евклидовой нормой в $\mathbb{R}^d$. Напомним, что проекцией конуса V , обозначаемой $\text{pr } V$, называют его пересечение со сферой единичного радиуса.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть U, U_1, U_2 – такие открытые конусы в $\mathbb{R}^d$, что выполнено $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 \Subset U$. Тогда любая функция $f \in S^\beta(U)$, $\beta \geq 0$, допускает разложение вида $f = f_1 + f_2$, где $f_i \in S^\beta(U \cup U_i)$, $i = 1, 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\beta > 0$ можно воспользоваться той же функцией $g_0 \in S_{1-\beta}^\beta$, что и при выводе теоремы 1. Для упрощения формул будем считать, что f удовлетворяет оценке

$$|f(z)| \leq C_N (1 + |x|)^{-N} \exp\{d(x, U)^{1/(1-\beta)} + |y|^{1/(1-\beta)}\}, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

что не ограничивает общность ввиду инвариантности участвующих пространств относительно операции растяжения $f(x) \rightarrow f(\lambda x)$, $\lambda > 0$. Из условия $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 \Subset U$ следует, что замкнутые конусы $V_1 = \bar{U}_1 \setminus U$, $V_2 = \bar{U}_2 \setminus U$ пересекаются лишь в нуле, поэтому расстояние от $\text{pr } V_1$ до V_2 положительно, как и расстояние от $\text{pr } V_2$ до V_1 . В случае евклидовой метрики эти два числа совпадают. Действительно, если первое расстояние достигается в точках $x_1 \in \text{pr } V_1$, $x_2 \in V_2$, то из равенства $|x_1 - x_2|^2 = ||x_2|x_1 - |x_2|^{-1}x_2|^2$ следует, что $d(\text{pr } V_1, V_2) \geq d(\text{pr } V_2, V_1)$, а по симметрии верно и обратное. Это расстояние мы обозначим через θ .

Введем вспомогательный открытый конус

$$W = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d : d(\xi, V_2) < \frac{\theta}{2} |\xi| \right\}$$

и определим $g(z)$ формулой

$$g(z) = \int_W g_0(z - \xi) d\xi. \quad (16)$$

Покажем, что если константа A в (7) достаточно мала, то $gf \in S^\beta(U \cup U_1)$, т. е.

$$|(gf)(z)| \leq C'_N (1 + |x|)^{-N} \exp\{d(Bx, U \cup U_1)^{1/(1-\beta)} + |By|^{1/(1-\beta)}\} \quad (17)$$

при некотором $B > 0$. Пусть $W_1 = \{x \in \mathbb{R}^d: d(x, V_2) \geq 3\theta|x|/4\}$. Тогда

$$|x - \xi| \geq \frac{\theta}{4} |x| \quad \text{при всех } x \in W_1, \quad \xi \in W. \quad (18)$$

Действительно, если это не так, то найдутся точки $x \in W_1$ и $\xi \in W$ такие, что $|x| = 1$, $|x - \xi| < \theta/4$ и $|\xi| \leq 1$. Найдется также точка $x_2 \in V_2$ такая, что $|\xi - x_2| < \theta/2$, и тогда $|x - x_2| < 3\theta/4$ в силу неравенства треугольника, что противоречит определению W_1 . Из оценки (7) и неравенства (18) следует, что

$$|g(z)| \leq C_{A'} \exp\left\{-\left|\frac{\theta x}{4A'}\right|^{1/(1-\beta)} + \left|\frac{\gamma y}{A}\right|^{1/(1-\beta)}\right\} \quad (19)$$

при любом $A' > A$. Поскольку $d(x, U) \leq |x|$, мы видим, что при $A < \theta/4$ функция gf убывает в конусе W_1 , и в нем неравенство (17) выполнено с любым $B > 1 + \gamma/A$. С другой стороны,

$$d(x, V_1) \geq \frac{\theta}{4} |x| \quad \text{при } x \notin W_1 \quad (20)$$

снова в силу неравенства треугольника. Значит, в этой области $d(x, V_1) \geq \theta d(x, U)/4$. Учитывая, что $d(x, U \cup U_1) = \min\{d(x, U), d(x, U_1 \setminus U)\}$ и $U_1 \setminus U \subset V_1$, мы заключаем, что при дополнительном условии $B \geq 4/\theta$ неравенства (17) выполнены всюду.

Далее, из условия $\int g_0(\xi) d\xi = 1$ вытекает, что

$$(1 - g)(z) = \int_{\mathbb{C}W} g_0(z - \xi) d\xi.$$

Полагая $W_2 = \{x \in \mathbb{R}^d: d(x, V_2) \leq \theta|x|/4\}$, мы находим, что $|x - \xi| \geq \theta|x|/4$ при $x \in W_2$, $\xi \in \mathbb{C}W$. С другой стороны,

$$d(x, V_2) \geq \frac{\theta}{4} |x| \quad \text{при } x \notin W_2. \quad (21)$$

Отсюда следует, что $(1 - g)f \in S^\beta(U \cup U_2)$ при том же выборе $A < \theta/4$, что завершает доказательство для случая $\beta > 0$.

§ 5. Использование оценок Хёрмандера

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 при $\beta = 0$. Мы выполним сначала разложение в классе гладких функций с соблюдением ограничений, налагаемых на поведение функций на бесконечности, которым должны удовлетворять элементы из $S^0(U \cup U_i)$, а затем восстановим аналитичность. Пусть W , W_1 и W_2 — те же

вспомогательные конусы, что и в § 4. Возьмем любую неотрицательную функцию $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ с единичным интегралом и с носителем в шаре единичного радиуса и положим

$$\chi(x) = \int_W \chi_0(x - \xi) d\xi.$$

Используя соображения, изложенные в § 4, нетрудно убедиться в том, что

$$|\chi(x)|e^{d(x,U)} \leq C e^{bd(x,U \cup U_1)}, \quad (22)$$

$$|1 - \chi(x)|e^{d(x,U)} \leq C e^{bd(x,U \cup U_2)}, \quad (23)$$

$$\left| \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \right| e^{d(x,U)} \leq C e^{bd(x,U \cup U_1 \cup U_2)}, \quad j = 1, \dots, d, \quad (24)$$

где в качестве b можно взять $4/\theta$. Ситуация даже несколько проще, чем прежде, поскольку $\text{supp } \chi$ содержится в 1-окрестности W и $\chi(x) = 0$ во всех точках W_1 вне шара достаточно большого радиуса R . Внутри шара неравенство (22) соблюдается с константой $C = e^R$ и любым b , а вне W_1 – с константой $C = 1$ и $b \geq 4/\theta$ ввиду (20). Аналогично, неравенство (23) вытекает из того, что $1 - \chi(x) = 0$ для всех точек $x \in W_2$ вне шара большого радиуса. Производные функции χ равномерно ограничены, и их носители содержатся в 1-окрестности границы W . В точках этих носителей вне шара большого радиуса справедливы оба неравенства (20), (21), что влечет (24).

Положим

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(z) = f(z)\chi(x), \quad f_2(z) = f(z)(1 - \chi(x)).$$

Из неравенств (22) и (23) следует, что

$$\|f_1\|_{U \cup U_1, b, N} \leq C \|f\|_{U, 1, N}, \quad \|f_2\|_{U \cup U_2, b, N} \leq C \|f\|_{U, 1, N}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Чтобы получить аналитическое разложение, мы запишем

$$f = f'_1 + f'_2, \quad f'_1 = f_1 - \psi, \quad f'_2 = f_2 + \psi$$

и подчиним ψ уравнениям

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_j} = \eta_j, \quad (26)$$

где

$$\eta_j \stackrel{\text{def}}{=} f \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} f \frac{\partial \chi}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, d. \quad (27)$$

В силу неравенства (6) (которое в случае $\beta = 0$ верно и при $B' = B$) функции $\eta_j(z)$ удовлетворяют оценке

$$|\eta_j(z)| \leq C_N \|f\|_{U, 1, N} e^{\rho_{U \cup U_1 \cup U_2, b, N}(z)}. \quad (28)$$

Остается доказать, что существует решение системы уравнений (26) с должным поведением на бесконечности. Это достигается с помощью L^2 -оценок Хёрмандера, но поскольку участвующие в них весовые функции представляются экспонентами плюрисубгармонических функций, а индикаторные функции (3) таковыми не являются, нам понадобится следующая лемма, доказательство которой изложено в приложении 1.

ЛЕММА 1. Пусть V – открытый конус в $\mathbb{R}^d$ и $B > 2edb$. Для любой функции $\eta(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющей оценке

$$|\eta(z)| \leq C_N e^{\rho_{V,b,N}(z)}, \quad (29)$$

найдется плюрисубгармоническая функция $\varrho(z)$ со значениями в $(-\infty, +\infty)$ такая, что

$$|\eta(z)| \leq e^{\varrho(z)} \leq C'_N e^{\rho_{V,B,N}(z)}. \quad (30)$$

В рассматриваемом случае $V = U \cup U_1 \cup U_2$ и лемму 1 надо применить к $\eta = \max |\eta_j|$. Положим

$$\tilde{\varrho}(z) = 2\varrho(z) + (d+1) \ln(1 + |z|^2).$$

Тогда функции η_j принадлежат $L^2(\mathbb{C}^d, e^{-\tilde{\varrho}} d\lambda)$. По их определению (27) выполнены условия совместности $\partial\eta_j/\partial\bar{z}_k = \partial\eta_k/\partial\bar{z}_j$, и согласно [8, теорема 15.1.2] система уравнений (26) имеет решение ψ такое, что

$$2 \int |\psi|^2 e^{-\tilde{\varrho}} (1 + |z|^2)^{-2} d\lambda \leq \int \sum_j |\eta_j|^2 e^{-\tilde{\varrho}} d\lambda. \quad (31)$$

Отсюда и из неравенств (30) следует, что

$$\psi \in L^2(\mathbb{C}^d, e^{-2\rho_{V,B,N-d-3}} d\lambda)$$

при любом N . Вместе с оценками (25) это дает $f'_1 \in S^0(U \cup U_1)$ и $f'_2 \in S^0(U \cup U_2)$, что и завершает доказательство теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства теоремы 3 ясно, что если $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \{0\}$, то любой элемент $f \in S^\beta(\{0\})$ допускает разложение вида $f = f_1 + f_2$, где $f_i \in S^\beta(U_i)$, $i = 1, 2$. Этот простой, но особый случай охватывается теоремой 3, если чуть изменить ее формулировку, заменив слова “открытые конусы” на “конусы с открытыми проекциями”. Применяя теорему об открытом отображении, мы видим, что топология $S^\beta(\{0\})$, определяемая нормами $\|\cdot\|_{\{0\},B,N}$ при $d(x, 0) = |x|$, совпадает с индуктивной топологией относительно пары вложений $S^\beta(U_i) \rightarrow S^\beta(\{0\})$, $i = 1, 2$, и относительно всех вложений $S^\beta(U) \rightarrow S^\beta(\{0\})$, где U пробегает открытые конусы в $\mathbb{R}^d$.

§ 6. Существование наименьших несущих конусов

ТЕОРЕМА 4. Для каждого линейного непрерывного функционала на $S^\beta(\mathbb{R}^d)$, $\beta \geq 0$, существует наименьший замкнутый несущий конус $K \subset \mathbb{R}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3 имеем

$$S^\beta(K_1 \cap K_2) = S^\beta(K_1) + S^\beta(K_2) \quad (32)$$

для любой пары замкнутых конусов в $\mathbb{R}^d$. Действительно, если $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, то применимо замечание 1, поскольку тогда существуют открытые конусы U_i такие, что $K_i \subseteq U_i$ и $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \{0\}$. Если же $K_1 \cap K_2 \neq \{0\}$ и $f \in S^\beta(U)$, $U \supseteq K_1 \cap K_2$, то найдутся U_i , удовлетворяющие условию $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 \subseteq U$.

Покажем, что из (32) вытекает следующее дуальное соотношение:

$$S'^\beta(K_1 \cap K_2) = S'^\beta(K_1) \cap S'^\beta(K_2), \quad (33)$$

где все пространства рассматриваются как подпространства $S'^\beta(\mathbb{R}^d)$. Нетривиальная часть соотношения (33) состоит в том, что если конусы K_1 и K_2 являются несущими для $v \in S'^\beta(\mathbb{R}^d)$, то и конус $K_1 \cap K_2$ является для v несущим. Пусть v_i – непрерывные продолжения v на $S^\beta(K_i)$ и $f \in S^\beta(K_1 \cap K_2)$. Используя разложение $f = f_1 + f_2$, $f_i \in S^\beta(K_i)$, определим продолжение v на $S^\beta(K_1 \cap K_2)$ формулой $\hat{v}(f) = v_1(f_1) + v_2(f_2)$. Это определение корректно. Действительно, если $f = f'_1 + f'_2$ – другое разложение, то

$$f_1 - f'_1 = f'_2 - f_2 \in S^\beta(K_1) \cap S^\beta(K_2) = S^\beta(K_1 \cup K_2),$$

и, значит, $v_1(f_1 - f'_1) = v_2(f'_2 - f_2)$, поскольку $S^\beta(\mathbb{R}^d)$ плотно в $S^\beta(K_1 \cup K_2)$ по теореме 1. Функционал $\hat{v}$ очевидно непрерывен по индуктивной топологии $\mathcal{T}$ относительно вложений $S^\beta(K_i) \rightarrow S^\beta(K_1 \cap K_2)$, $i = 1, 2$, а в силу теоремы об открытом отображении [9] эта топология совпадает с собственной топологией τ пространства $S^\beta(K_1 \cap K_2)$. Действительно, τ не сильнее топологии $\mathcal{T}$, и $(S^\beta(K), \mathcal{T})$ входит в класс $\mathcal{LF}$, что вытекает из принадлежности этому классу каждого пространства $S^\beta(K_i)$ и из представления $\mathcal{T}$ как фактортопологии внешней суммы $S^\beta(K_1) \oplus S^\beta(K_2)$ по замкнутому подпространству (см. [10, гл. V, предложение 28]).

Из соотношения (33) вытекает аналогичная формула для пересечения любого конечного числа замкнутых конусов, и теперь наличие у каждого $v \in S'^\beta(\mathbb{R}^d)$ наименьшего замкнутого конуса устанавливается обычными соображениями компактности. Действительно, пусть K – пересечение всех его несущих конусов и U – любой открытый конус, в котором K компактен. Проекции конусов, дополнительных к несущим, покрывают компакт $\text{pr } \mathbb{C}U$, и из этого открытого (в топологии единичной сферы) покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\text{pr } \mathbb{C}K_j$. Тогда $\bigcap_j K_j \in U$. Следовательно, функционал v непрерывен по топологии $S^\beta(U)$, и конус K является для него несущим, что завершает доказательство теоремы.

Вместе с очевидной формулой

$$S^\beta(K_1 \cup K_2) = S^\beta(K_1) \cap S^\beta(K_2)$$

соотношение (32) означает, что отображение $K \rightarrow S^\beta(K)$ является решеточным (анти)гомоморфизмом из решетки замкнутых конусов в $\mathbb{R}^d$ в решетку векторных подпространств пространства $S^\beta(\{0\})$. Эквивалентно, это означает точность последовательности

$$0 \longrightarrow S^\beta(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{i} S^\beta(K_1) \oplus S^\beta(K_2) \xrightarrow{s} S^\beta(K_1 \cap K_2) \longrightarrow 0, \quad (34)$$

где отображение s сопоставляет паре функций $f_{1,2} \in S^\beta(K_{1,2})$ разность их ограничений на $K_1 \cap K_2$. Как только что показано, в члене $S^\beta(K_1 \cap K_2)$ последовательность (34) является топологически точной. Однако мы не можем утверждать, что она топологически точна в члене $S^\beta(K_1 \cup K_2)$, т. е. что собственная топология этого пространства совпадает с проективной топологией относительно естественных вложений его в $S^\beta(K_i)$, $i = 1, 2$. В этом заключается существенное отличие от случая DFS-пространств $S^\beta_\alpha(K)$, рассматривавшегося в [2], где топологическая точность аналогичной последовательности обеспечивается тем, что сумма пространств DFS и замкнутое подпространство пространства DFS также принадлежат этому классу, и поэтому применима теорема об открытом отображении. Следует, однако, отметить, что последовательность (34) топологически точна в том важном случае, когда $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, поскольку

$S^\beta(\{0\})$ является пространством DFS. Теорема 5 из [14] показывает, что в результате этого любой функционал $v \in S'^\beta$ с несущим конусом $K_1 \cup K_2$, где $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, допускает разложение в сумму функционалов $v_i \in S'^\beta(K_i)$, $i = 1, 2$.

§ 7. Свойство ядерности

ЛЕММА 2. *При любых $B < B'$, $N > N'$ естественное вложение $H_N^{\beta,B}(U) \rightarrow H_{N'}^{\beta,B'}(U)$ является отображением Гильберта–Шмидта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы воспользуемся тем, что голоморфные функции являются плюригармоническими и удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta f = 0$, где $\Delta = \sum_j (\partial^2/\partial x_j^2 + \partial^2/\partial y_j^2)$. Как и прежде, обозначаем через $L^2(\mathbb{C}^d, e^{-2\rho} d\lambda)$ гильбертово пространство комплекснозначных функций на $\mathbb{C}^d$, квадратично интегрируемых с весом $\exp\{-2\rho_{U,B,N}\}$, где функция $\rho_{U,B,N}$ определена формулой (3). Индексы U, B, N для краткости не выписываем, а такую же функцию с параметрами U, B', N' обозначим через ρ' . Пространство $H_N^{\beta,B}(U)$ является замкнутым подпространством $L^2(\mathbb{C}^d, e^{-2\rho} d\lambda)$ и поэтому, в частности, сепарабельно. Нам понадобится вспомогательная функция из пространства $S_\alpha^{1-\alpha}$, где $\alpha > \beta$. Если $\beta < 1/2$, то в качестве этой функции можно взять $e^{-t^2} \in S_{1/2}^{1/2}$. Как доказано в [1, гл. 4, § 8], в любом пространстве $S_\alpha^{1-\alpha}(\mathbb{R})$, $1/2 < \alpha < 1$, содержится элемент вида $\psi(t^2)$, где $\psi \not\equiv 0$ – целая функция, имеющая экспоненциальный рост порядка $1/(2\alpha)$ в комплексной плоскости и экспоненциальное убывание такого же порядка на полуоси $t > 0$. Мы будем считать, что $\psi(0) = 1$. Пусть $p \in \mathbb{R}^d$, $q \in \mathbb{R}^d$ и $\Psi(p, q) = \psi(p^2 + q^2)$. Согласно [1, гл. 4, § 9] $\Psi \in S_\alpha^{1-\alpha}(\mathbb{R}^{2d})$ и

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int e^{-ipx - iqu} \Psi(p, q) dp dq \in S_{1-\alpha}^\alpha(\mathbb{R}^{2d}).$$

В частности, для Φ справедлива оценка

$$|\Phi(x, y)| \leq C \exp\{-|x/A|^{1/(1-\alpha)} - |y/A|^{1/(1-\alpha)}\}$$

с некоторым $A > 0$. Поэтому если $\alpha > \beta$, то существует свертка $\Phi * f$ с любой функцией $f \in L^2(\mathbb{C}^d, e^{-2\rho} d\lambda)$. Пусть $\rho_1 = \rho_{U,B_1,N}$, где $B_1 > B$. Применяя неравенство треугольника к каждому из составляющих ρ членов, мы находим, что

$$\int |\Phi(x', y')|^2 e^{2\rho(x-x', y-y')} d\lambda' \leq C' e^{2\rho_1(x, y)}. \quad (35)$$

Используя затем неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получаем

$$|(\Phi * f)(x, y)| \leq C' \|f\|_{U,B,N} e^{\rho_1(x, y)}.$$

Взяв $B_1 < B'$, мы видим, что соответствие $f \rightarrow \Phi * f$ есть непрерывное отображение из $L^2(\mathbb{C}^d, e^{-2\rho} d\lambda)$ в $L^2(\mathbb{C}^d, e^{-2\rho'} d\lambda)$. Более того, оно является отображением Гильберта–Шмидта. Действительно, умножение на $e^{-\rho}$ есть изометрия из $L^2(\mathbb{C}^d, e^{-2\rho} d\lambda)$ на $L^2(\mathbb{C}^d)$, и принадлежность рассматриваемого отображения классу Гильберта–Шмидта равносильна принадлежности ему интегрального оператора на $L^2(\mathbb{C}^d)$ с ядром $e^{-\rho'(x', y')} \Phi(x - x', y - y') e^{\rho(x, y)}$, т. е. квадратичной интегрируемости этого ядра, которая вытекает из той же оценки (35).

С другой стороны, отображение $f \rightarrow \Phi * f$ можно отождествить с дифференциальным оператором бесконечного порядка $\psi(-\Delta) = 1 + \sum_{k \geq 1} c_k \Delta^k$, если рассматривать f как обобщенную функцию на подходящих пробных функциях. Согласно [1] такой оператор корректно определен на любом пространстве $S_{1-\beta'}^{\beta'}(\mathbb{R}^{2d})$, где $\beta' < \alpha$. Если $\beta' > \beta$, то элементы $L^2(\mathbb{C}^d, e^{-2\rho} d\lambda)$ интегрируемы с пробными функциями из этого пространства. При таком выборе β' имеем цепочку равенств

$$(f, \psi(-\Delta)\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f, \left(1 + \sum_{k=1}^n c_k \Delta^k \right) \varphi \right) = (2\pi)^{-2d} (\tilde{f}, \Psi \tilde{\varphi}) = (f, \Phi * \varphi),$$

где φ – любой элемент из пространства $S_{1-\beta'}^{\beta'}(\mathbb{R}^{2d})$. В частности, $(\Phi * f, \varphi) = (f, \varphi)$ для всех $f \in H_N^{\beta, B}(U)$. Поскольку $S_{1-\beta'}^{\beta'}(\mathbb{R}^{2d})$ имеет достаточный запас функций (см. [1]), отсюда следует $\Phi * f = f$, что завершает доказательство леммы.

ТЕОРЕМА 5. *Пространства $S^{\beta, b}(U)$ и $S^\beta(U)$ ядрны для любого открытого конуса $U \subset \mathbb{R}^d$. Пространства $S^\beta(K)$ над замкнутыми конусами также ядрны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение для $S^{\beta, b}(U)$ прямо следует из леммы 2, поскольку суперпозиция двух отображений Гильберта–Шмидта является ядерным отображением, а проективный предел последовательности гильбертовых пространств со связующими ядерными отображениями есть ядерное пространство Фреше. Утверждение для $S^\beta(U)$ и $S^\beta(K)$ вытекает из того, что индуктивные пределы счетных семейств ядерных пространств наследуют это свойство (см. [11]).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пространства $S^{\beta, b}(U)$ и $S^\beta(U)$ рефлексивны и, более того, являются монтелевскими.*

Действительно, они полны и бочечны, а всякое ядерное пространство с этими свойствами является монтелевским (см. [11, с. 248]). Вопрос о наличии этих свойств у пространств $S^\beta(K)$ над замкнутыми конусами остается открытым, но их пополнения ими обладают.

§ 8. Теоремы о ядре

Если E_1, E_2 – локально выпуклые пространства (ЛВП), то через $E_1 \otimes_\pi E_2$ обозначается (алгебраическое) тензорное произведение, снабженное проективной топологией τ_π , а через $E_1 \otimes_i E_2$ – оно же с индуктивной топологией τ_i . Если пространства E_1, E_2 гильбертовы, то через $E_1 \otimes_H E_2$ мы обозначим тензорное произведение, снабженное каноническим скалярным произведением. Пополнение каждого из этих пространств обозначается “крышкой” над знаком тензорного произведения.

ЛЕММА 3. *Пусть U_i – открытые конусы в $\mathbb{R}^{d_i}$, $i = 1, 2$. Имеется канонический изоморфизм*

$$H_N^{\beta, B}(U_1) \hat{\otimes}_H H_N^{\beta, B}(U_2) \simeq H_N^{\beta, B}(U_1 \times U_2),$$

определяемый отождествлением $f_1 \otimes f_2$ с функцией $f_1(z_1)f_2(z_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теми же соображениями, что и в случае пространств квадратично суммируемых функций, рассматриваемом, например, в [15]. Благодаря свойству (4) функции вида $f_1(z_1)f_2(z_2)$, $f_1 \in H_N^{\beta,B}(U_1)$, $f_2 \in H_N^{\beta,B}(U_2)$, принадлежат пространству $H_N^{\beta,B}(U_1 \times U_2)$, а их линейная оболочка отождествима с $H_N^{\beta,B}(U_1) \otimes H_N^{\beta,B}(U_2)$. Скалярное произведение на тензорном произведении гильбертовых пространств определяется формулой

$$\langle f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes g_2 \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle \langle f_2, g_2 \rangle$$

с продолжением ее по линейности. В данном случае оно, очевидно, совпадает со скалярным произведением, индуцируемым из $H_N^{\beta,B}(U_1 \times U_2)$. Если $\{f_j\}$, $\{g_k\}$ – базисы в перемножаемых пространствах, то $\{f_j(z_1)g_k(z_2)\}$ является ортонормированной системой в $H_N^{\beta,B}(U_1 \times U_2)$, а с помощью теоремы Фубини о кратном интегрировании легко проверяется, что она тотальна в этом пространстве. Следовательно, пополнение тензорного произведения совпадает с ним.

ЛЕММА 4. Пусть $h_1: E_1 \rightarrow F_1$, $h_2: E_2 \rightarrow F_2$ – отображения Гильберта–Шмидта гильбертовых пространств. Тогда отображение

$$E_1 \otimes_H E_2 \xrightarrow{h_1 \otimes h_2} F_1 \otimes_\pi F_2$$

является непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем все пространства сепарабельными, поскольку именно к таким пространствам лемма применяется ниже, хотя она верна и в общем случае. Принадлежность $h: E \rightarrow F$ классу Гильберта–Шмидта означает, что

$$\|h\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_j \|he_j\|^2 \right)^{1/2} < +\infty$$

для некоторого (и тогда для любого) ортонормированного базиса $\{e_j\}$ в E . Согласно [11, § III.6.3] проективная топология на $F_1 \otimes F_2$ порождается нормой $\|\cdot\|_\pi$, являющейся тензорным произведением норм пространств F_1 и F_2 , причем норма $\|\cdot\|_\pi$ обладает кросс-свойством $\|f_1 \otimes f_2\|_\pi = \|f_1\| \|f_2\|$ и является сильнее любой кросс-нормы, определяемой скалярным произведением. Пусть $\{e_j^1\}$ и $\{e_k^2\}$ – ортонормированные базисы в E_1 и E_2 . Тогда $\{e_j^1 \otimes e_k^2\}$ служит ортонормированным базисом в пространстве $E_1 \hat{\otimes}_H E_2$ и любой его вектор g можно записать в виде $g = \sum \lambda_{jk} e_j^1 \otimes e_k^2$. Используя кросс-свойство $\|\cdot\|_\pi$ и неравенство Коши–Буняковского–Шварца, а затем применяя равенство Парсеваля $\|g\|^2 = \sum |\lambda_{jk}|^2$, получаем

$$\left\| (h_1 \otimes h_2) \left(\sum_{j,k \leq n} \lambda_{jk} e_j^1 \otimes e_k^2 \right) \right\|_\pi \leq \sum_{j,k \leq n} |\lambda_{jk}| \|h_1(e_j^1)\| \|h_2(e_k^2)\| \leq \|g\| \|h_1\|_2 \|h_2\|_2.$$

Это показывает, что семейство $\lambda_{jk} h_1(e_j^1) \otimes h_2(e_k^2)$ элементов банахова пространства $F_1 \hat{\otimes}_\pi F_2$ абсолютно суммируемо и тем самым определено некоторое непрерывное отображение $E_1 \hat{\otimes}_H E_2 \rightarrow F_1 \hat{\otimes}_\pi F_2$. Оно совпадает с $h_1 \otimes h_2$ на элементах базиса, а значит, и на любом элементе пространства $E_1 \otimes E_2$, поскольку каноническое билинейное отображение $F_1 \times F_2$, в $F_1 \otimes_\pi F_2$ непрерывно. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пространство $S^{\beta,b}(U_1) \otimes S^{\beta,b}(U_2)$ плотно в $S^{\beta,b}(U_1 \times U_2)$ для любой пары открытых конусов $U_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$, $i = 1, 2$, и при любых $0 \leq \beta < 1$, $b > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < \alpha < 2$ и g – любая целая функция на $\mathbb{C}^{d_1+d_2}$, удовлетворяющая неравенству

$$|g(z)| \leq C \exp \left\{ - \sum_j |x_j|^{1/\alpha} + |by|^{1/(1-\beta)} \right\}$$

и такая, что $g(0) = 1$. Взяв $f \in S^{\beta,b}(U_1 \times U_2)$, рассмотрим последовательность $f_\nu(z) = f((1 - 1/\nu)z)g(z/(2\nu))$, $\nu = 1, 2, \dots$. Полагая $\epsilon = 1/\nu$, $p = 1/(1 - \beta)$ и учитывая неравенства $1 \geq (1 - \epsilon)^p + \epsilon^p > (1 - \epsilon)^p + (\epsilon/2)^p$, нетрудно проверить, что f_ν ограничена по каждой из норм $S^{\beta,b}(U_1 \times U_2)$. Значит, $f_\nu \rightarrow f$ по топологии этого пространства, поскольку оно монтелиевское и его топология сильнее топологии поточечной сходимости. Обозначим через $H_{1/2}(U)$ гильбертово пространство целых функций, принадлежащих $L^2(\mathbb{C}^d, e^{-2\rho_{1/2}} d\lambda)$, где $\rho_{1/2} = \exp \left\{ - \sum_j |x_j|^{1/2} + d(bx, U)^{1/(1-\beta)} + |by|^{1/(1-\beta)} \right\}$. Очевидно, оно непрерывно вложено в $S^{\beta,b}(U)$. Все функции f_ν принадлежат пространству $H_{1/2}(U_1 \times U_2)$. Действительно, если $B > b$ и достаточно близко к b , то имеет место неравенство

$$\|f_\nu\|_{1/2} \leq C_\nu \|f\|_{U_1 \times U_2, B, 0}.$$

Значит, каждую функцию f_ν можно аппроксимировать элементами тензорного произведения по метрике, которая сильнее метрики $S^{\beta,b}(U_1 \times U_2)$. По той же аргументации, которая используется в доказательстве леммы 3, $H_{1/2}(U_1) \otimes H_{1/2}(U_2)$ плотно в $H_{1/2}(U_1 \times U_2)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть U_i – открытые конусы в $\mathbb{R}^{d_i}$, $i = 1, 2$. Существуют канонические изоморфизмы

$$S^{\beta,b}(U_1) \hat{\otimes}_l S^{\beta,b}(U_2) \simeq S^{\beta,b}(U_1 \times U_2), \quad (36)$$

$$S^\beta(U_1) \hat{\otimes}_l S^\beta(U_2) \simeq S^\beta(U_1 \times U_2). \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для тензорных произведений пространств Фреше топологии τ_l и τ_π совпадают (см. [11, § III.6.5]), а леммы 2–4 показывают, что топология τ_π на $S^{\beta,b}(U_1) \otimes S^{\beta,b}(U_2)$ совпадает с индуцируемой из $S^{\beta,b}(U_1 \times U_2)$, поскольку системы норм, определяющие эти топологии, эквивалентны. В силу леммы 5 каноническая инъекция $S^{\beta,b}(U_1) \otimes_l S^{\beta,b}(U_2) \rightarrow S^{\beta,b}(U_1 \times U_2)$ продолжается, причем единственным образом, на пополнение тензорного произведения до изоморфизма. Тем самым соотношение (36) установлено. Соотношение (37) вытекает из него с учетом двух фактов. Во-первых, если E_ν и F_ν – инъективные последовательности ЛВП с отделимыми индуктивными пределами⁴, то

$$(\varinjlim E_\nu) \otimes_l (\varinjlim F_\nu) = \varinjlim (E_\nu \otimes_l F_\nu). \quad (38)$$

Во-вторых, если G_ν – инъективная последовательность ЛВП и предел $\varinjlim \widehat{G}_\nu$ их пополнений отделим, то

$$\widehat{\varinjlim G_\nu} = \varinjlim \widehat{G}_\nu. \quad (39)$$

Положим $E_\nu = S^{\beta,\nu}(U_1)$, $F_\nu = S^{\beta,\nu}(U_2)$, $G_\nu = E_\nu \otimes_l F_\nu$ и применим последовательно (38), (39), (36). Учитывая затем полноту $S^\beta(U_1 \times U_2)$, получаем (37).

⁴В определение локально выпуклого пространства обычно включают требование отделимости, но это свойство может утрачиваться при взятии индуктивного предела.

Формула (38) фактически содержится в [9, гл. I, предложение 14]. Отметим, что топология τ_ℓ на тензорном произведении ЛВП отделима, поскольку она сильнее топологии τ_π , которая имеет это свойство согласно [10, гл. VII, предложение 8]. Доказательство формулы (38) сводится к использованию определения топологии τ_ℓ как топологии равномерной сходимости на раздельно равномерно непрерывных множествах билинейных форм и к замечанию, что множество билинейных форм на $(\varinjlim E_\nu) \times (\varinjlim F_\nu)$ раздельно равномерно непрерывно в том и только в том случае, если множества ограничений этих форм на каждое из $E_\nu \times F_\nu$ являются таковыми. Для вывода формулы (39) заметим, прежде всего, что непрерывные инъекции $u_{\mu\nu}: G_\mu \rightarrow G_\nu$, $\nu > \mu$, порождают непрерывные отображения $\hat{u}_{\mu\nu}: \hat{G}_\mu \rightarrow \hat{G}_\nu$, причем с сохранением цепного правила $\hat{u}_{\nu\mu} \circ \hat{u}_{\mu\lambda} = \hat{u}_{\nu\lambda}$. Поэтому пространство $\varinjlim \hat{G}_\nu$ корректно определено. Для каждого ν имеем непрерывное отображение $G_\nu \rightarrow \varinjlim \hat{G}_\nu$, которое взаимно однозначно, ибо при любом $\mu > \nu$ инъективно ограничение $\hat{u}_{\mu\nu}$ на G_ν . Эти вложения порождают непрерывную инъекцию

$$\varinjlim G_\nu \rightarrow \varinjlim \hat{G}_\nu. \quad (40)$$

В частности, если пространство $\varinjlim \hat{G}_\nu$ отделимо, то и пространство $\varinjlim G_\nu$ отделимо. С другой стороны, вложения $G_\nu \rightarrow \varinjlim \hat{G}_\nu$ продолжаются до отображений $\hat{G}_\nu \rightarrow \widehat{\varinjlim G_\nu}$ и порождают непрерывное отображение

$$\varinjlim \hat{G}_\nu \rightarrow \widehat{\varinjlim G_\nu},$$

суперпозиция которого с (40) есть каноническое вложение пространства $\varinjlim G_\nu$ в его пополнение. Поэтому топология $\varinjlim G_\nu$ совпадает с индуцируемой из $\varinjlim \hat{G}_\nu$. Поскольку образ $\varinjlim G_\nu$ является плотным в $\varinjlim \hat{G}_\nu$, инъекция (40) продолжается до изоморфизма, что завершает доказательство теоремы.

Сопоставим теперь каждому замкнутому конусу в $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$, имеющему структуру произведения $K_1 \times K_2$, где $K_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$, пространство

$$S^\beta(K_1, K_2) = \varinjlim_{U_1, U_2} S^\beta(U_1 \times U_2), \quad (41)$$

где U_i – открытые конусы в $\mathbb{R}^{d_i}$ такие, что $U_i \ni K_i$, $i = 1, 2$.

Наличие канонических вложений $S^\beta(U_1 \times U_2) \rightarrow S^\beta(\{0\})$ позволяет понимать индуктивный предел (41) в смысле определения, принятого в [9], [10]. Отметим, что если один из конусов K_i вырожден (или они оба вырождены), то семейство открытых конусов, по которому берется предел, не является направленным (фильтрующимся). В ряде случаев работать с направленными семействами удобнее и этого легко достичь, взяв индуктивный предел не по открытым конусам в $\mathbb{R}^{d_i}$, а по конусам с открытыми проекциями, иначе говоря, добавив к множеству открытых конусов в каждом $\mathbb{R}^{d_i}$ конус $\{0\}$, что согласуется со сказанным в § 2. Пространства, соответствующие относительно открытым конусам $U_1 \times \{0\}$ и $\{0\} \times U_2$, определяются так же, как и соответствующие открытым, и теорема 6 (как и теорема 1) распространяется на них непосредственным образом. В частности, если $\{0\}$ – вырожденный конус в $\mathbb{R}^{d_1}$, то

$$S^\beta(\{0\}) \hat{\otimes}_\ell S^\beta(U_2) \simeq S^\beta(\{0\} \times U_2).$$

Такого типа унификация использована в [16], где аналог определения (41) введен для DFS-пространств S^β_α . Отметим, что индуктивный предел (41) не зависит от того, добавлен или не добавлен $\{0\}$ к множеству открытых конусов. Пусть, например, $K_1 = \{0\}$. Возьмем любые два открытых конуса в $\mathbb{R}^{d_1}$ с дизъюнктивными замыканиями, например положительный и отрицательный ортанты U_+ и U_- . Теорема 3 показывает, что каждый элемент пространства $S^\beta(\{0\} \times U_2)$ можно разложить в сумму функций из $S^\beta(U_+ \times V_2)$ и $S^\beta(U_- \times V_2)$, где $U_2 \ni V_2 \ni K_2$. Применяя теорему об открытом отображении, заключаем, что индуктивная топология на $S^\beta(\{0\}, K_2)$ относительно семейства подпространств $S^\beta(U_1 \times U_2)$, $U_i \ni K_i$, совпадает со взятой относительно подсемейства $S^\beta(U_\pm \times U_2)$, $U_2 \ni K_2$, и с топологией индуктивного предела относительно возрастающего семейства $S^\beta(\{0\} \times U_2)$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть K_i – замкнутые конусы в $\mathbb{R}^{d_i}$, $i = 1, 2$. Каждая билинейная раздельно непрерывная форма w на $S^\beta(K_1) \times S^\beta(K_2)$ однозначным образом представима в виде

$$w(f, g) = (v, f \otimes g),$$

где v – линейный непрерывный функционал на $S^\beta(K_1, K_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду изоморфизма (37) ограничение w на $S^\beta(U_1) \times S^\beta(U_2)$, где $K_i \subseteq U_i$, определяет однозначным образом линейный непрерывный функционал на $S^\beta(U_1 \times U_2)$. Если оба конуса K_1, K_2 невырождены, то семейство окрестностей $U_1 \times U_2$ является убывающим и тем самым определен линейный функционал на $S^\beta(K_1, K_2)$, который непрерывен по смыслу индуктивной топологии. В случае вырождения рассуждение такое же, если использовать указанную унификацию определения (41) и соответствующее обобщение теоремы 6. Альтернативный способ состоит в применении теоремы 3. Если $v_\pm$ – функционалы, порождаемые w на $S^\beta(U_\pm \times V_2)$, и $f = f_+ + f_-$, $f_\pm \in S^\beta(U_\pm \times V_2)$, то мы можем определить v формулой $v(f) = v_+(f_+) + v_-(f_-)$. Такое определение корректно, поскольку v_+ и v_- совпадают на $S^\beta(U_+ \times V_2) \cap S^\beta(U_- \times V_2) = S^\beta((U_+ \cup U_-) \times V_2)$ снова в силу (37).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пространство всех билинейных раздельно непрерывных форм на $S^\beta(K_1) \times S^\beta(K_2)$ может быть отождествлено с пространством $S'^\beta(K_1, K_2)$, сопряженным к $S^\beta(K_1, K_2)$.

§ 9. Несущие конусы полилинейных форм

Рассмотрим теперь вопрос о несущих конусах функционалов, порождаемых полилинейными формами на $S^\beta(\mathbb{R}^{d_1}) \times \dots \times S^\beta(\mathbb{R}^{d_n})$ с заданными несущими конусами по их аргументам. Нам придется рассматривать продолжения таких форм на более широкие пространства. Общая теория продолжения полилинейных форм [11] основана на понятии гипонепрерывности, однако в нашем случае достаточно воспользоваться следующей простой леммой.

ЛЕММА 6. Если L – секвенциально плотное подпространство локально выпуклого пространства E_1 и пространство E_2 является бочечным, то любая билинейная раздельно непрерывная форма w на $L \times E_2$ имеет единственное продолжение на $E_1 \times E_2$, которое билинейно и раздельно непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом фиксированном $g \in E_2$ форма $w(f, g)$ имеет единственное продолжение на E_1 по непрерывности. Обозначим его через $\hat{w}$. Необходимо убедиться в том, что этот функционал линеен и непрерывен по g

при каждом фиксированном $f \in E_1$. Выберем последовательность $f_\nu \in L$, сходящуюся к f , и обозначим через $\mathbf{f}_\nu$ соответствующие элементы в E'_2 , определяемые формулой $\mathbf{f}_\nu(g) = w(f_\nu, g)$. Как известно (см. [10] или [11]), если E_2 бочечно, то из поточечной сходимости последовательности $\mathbf{f}_\nu \in E'_2$ следует, что и ее предел $\mathbf{f}$ принадлежит E'_2 , т.е. линеен и непрерывен. В данном случае $\mathbf{f}(g) = \widehat{w}(f, g)$, и тем самым лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть w – раздельно непрерывная полилинейная форма на $S^\beta(\mathbb{R}^{d_1}) \times \dots \times S^\beta(\mathbb{R}^{d_n})$, и пусть $K = K_1 \times \dots \times K_n$, где K_j – замкнутые конусы в $\mathbb{R}^{d_j}$. Мы называем K *несущим конусом* формы w , если каждый конус K_j является несущим для всех линейных функционалов на $S^\beta(\mathbb{R}^{d_j})$, определяемых $w(f_1, \dots, f_n)$ при фиксированных $f_i \in S^\beta(\mathbb{R}^{d_i})$, $i \neq j$.

ТЕОРЕМА 8. Если конус $K = K_1 \times \dots \times K_n$, $K_j \subset \mathbb{R}^{d_j}$, является несущим для раздельно непрерывной полилинейной формы w на $S^\beta(\mathbb{R}^{d_1}) \times \dots \times S^\beta(\mathbb{R}^{d_n})$, то он является несущим и для функционала $v \in S'^\beta(\mathbb{R}^{d_1+\dots+d_n})$, порождаемого этой формой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты обозначений полагаем $d_j = d$ при всех j . Достаточно показать, что каждый конус $\mathbb{R}^{d(j-1)} \times K_j \times \mathbb{R}^{d(n-j)}$ является несущим для v , поскольку тогда и их пересечение является несущим согласно теореме 4. Не теряя общности, можно считать, что $j = 1$. Пусть $n = 2$ и U_1 – открытый конус в $\mathbb{R}^d$ такой, что $K_1 \subseteq U_1$. По теореме 1 каждый элемент $f \in S^\beta(U_1)$ можно приблизить элементами $S^\beta(\mathbb{R}^d)$ по метрике некоторого $S^{\beta,b}(U_1)$ (где b зависит от f). Значит, применима лемма 6, и w продолжается до билинейной раздельно непрерывной формы на $S^\beta(U_1) \times S^\beta(\mathbb{R}^d)$. По теореме 6 она, в свою очередь, определяет непрерывный линейный функционал на $S^\beta(U_1 \times \mathbb{R}^d)$, который является продолжением v ввиду плотности $S^\beta(\mathbb{R}^d) \otimes S^\beta(\mathbb{R}^d)$ в $S^\beta(\mathbb{R}^{2d})$. Тем самым теорема доказана для случая билинейных форм, поскольку пересечение конусов $\bar{U}_1 \times \mathbb{R}^d$ есть $K_1 \times \mathbb{R}^d$.

Далее используем индукцию по n . Рассмотрим n -линейную форму w ($n > 2$) как билинейную на $L \times E_2$, где $L = \bigotimes_{i=1}^{n-1} S^\beta(\mathbb{R}^d)$, $E_2 = S^\beta(\mathbb{R}^d)$. По предположению индукции она раздельно непрерывна при снабжении L топологией, индуцируемой из $E_1 = S^\beta(U_1 \times \mathbb{R}^{d(n-1)})$. Плотность L в E_1 является секвенциальной, ибо каждый элемент $S^\beta(U_1 \times \mathbb{R}^{d(n-1)})$ можно приблизить элементами некоторого $S^{\beta,b}(\mathbb{R}^{dn})$ по метрике $S^{\beta,b}(U_1 \times \mathbb{R}^{d(n-1)})$, а их, в свою очередь, элементами $\bigotimes_{i=1}^{n-1} S^{\beta,b}(\mathbb{R}^d)$ по (более сильной) метрике $S^{\beta,b}(\mathbb{R}^{dn})$. Снова применяя лемму 6, заключаем, что v имеет непрерывное продолжение на $S^\beta(U_1 \times \mathbb{R}^{d(n-1)})$, что завершает доказательство теоремы.

Теоремы 7 и 8 ставят вопрос о соотношении пространств $S^\beta(K_1 \times K_2)$ и $S^\beta(K_1, K_2)$. Справедливо включение

$$S^\beta(K_1 \times K_2) \subset S^\beta(K_1, K_2).$$

Действительно, если $U \ni K_1 \times K_2$, то $U \supset U_1 \times U_2$, где $U_i = U \cap \mathbb{R}^{d_i}$, если $K_i \neq \{0\}$, и $U_i = \{0\}$ в противном случае. Как правило, это включение является строгим.

ТЕОРЕМА 9. Пространства $S^\beta(K_1 \times K_2)$ и $S^\beta(K_1, K_2)$ совпадают лишь в двух случаях: если $K_1 = \mathbb{R}^{d_1}$ и $K_2 = \mathbb{R}^{d_2}$ или если оба эти конуса вырождены. Во всех остальных случаях не совпадают не только они сами, но и сопряженные к ним пространства.

Доказательство теоремы 9 приведено в приложении 2. Оно полезно тем, что дает наглядное представление о запасе функций в S^β , обеспечивающем возможность угловой локализации функционалов. Очевидным обобщением определения (41) служит

$$S^\beta(K_1, \dots, K_n) = \lim_{U_1, \dots, U_n} S^\beta(U_1 \times \dots \times U_n), \quad (42)$$

где $K_j \subseteq U_j$. Если функционал $v \in S'^\beta(\mathbb{R}^{d_1+\dots+d_n})$ допускает непрерывное продолжение на пространство (42), то мы называем $K_1 \times \dots \times K_n$ его *строго несущим конусом*. Это в точности те функционалы, которые порождаются полилинейными формами с несущим конусом $K_1 \times \dots \times K_n$. Чтобы в этом убедиться, понадобится еще одна теорема разложения.

ТЕОРЕМА 10. Пусть K_j – замкнутые конусы в $\mathbb{R}^{d_j}$, $j = 1, \dots, n$. Любая функция $f \in S^\beta(K_1, \dots, K_n)$ допускает разложение вида $f = f_1 + \dots + f_n$, где $f_j \in S^\beta(\mathbb{R}^{d_1+\dots+d_{j-1}}, K_j, \mathbb{R}^{d_{j+1}+\dots+d_n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 3 в [16] для пространств $S^\beta_\alpha(K_1, \dots, K_n)$. Пусть вначале $n = 2$. Если K_1 и K_2 невырождены, то найдутся открытые конусы V_1, V_2 такие, что $f \in S^\beta(V_1 \times V_2)$, а в случае вырождения функция f является суммой элементов таких пространств. Достаточно рассмотреть первый случай. Возьмем открытые конусы V'_j такие, что $V_j \supseteq V'_j \supseteq K_j$, и обозначим $U = V_1 \times V_2$, $U_1 = V'_1 \times \mathbb{C}\bar{V}_2$, $U_2 = \mathbb{C}\bar{V}_1 \times V'_2$. Тогда $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \{0\}$ и по теореме 3 имеем $f = f_1 + f_2$, где $f_{1,2} \in S^\beta(U \cup U_{1,2})$.

Далее, $\bar{U} \cup \bar{U}_1 = (\bar{V}_1 \times \bar{V}_2) \cup \bar{U}_1 \supset V'_1 \times \mathbb{R}^{d_2}$. Поскольку включение $\bar{W} \supset W'$ влечет $S^\beta(W) \subset S^\beta(W')$, мы заключаем, что $f_1 \in S^\beta(V'_1 \times \mathbb{R}^{d_2}) \subset S^\beta(K_1, \mathbb{R}^{d_2})$. Аналогично, $f_2 \in S^\beta(\mathbb{R}^{d_1}, K_2)$. Остается заметить, что по той же аргументации любой элемент $S^\beta(V_1 \times \dots \times V_n)$, где m конусов $V_j \supseteq K_j$ отличны от $\mathbb{R}^{d_j}$, представим в виде суммы двух функций из пространств $S^\beta(V'_1 \times \dots \times V'_n)$, где $V_j \supseteq V'_j \supseteq K_j$ и $m-1$ конусов V'_j отличны от $\mathbb{R}^{d_j}$. Действительно, будем считать, что конусы $V_j \neq \mathbb{R}^{d_j}$ стоят первыми, для остальных полагаем $V'_j = V_j = \mathbb{R}^{d_j}$ и на сей раз обозначаем $U = V_1 \times \dots \times V_n$, $U_1 = V'_1 \times \mathbb{C}\bar{V}_2 \times V'_3 \times \dots \times V'_n$, $U_2 = \mathbb{C}\bar{V}_1 \times V'_2 \times V'_3 \times \dots \times V'_n$. Тогда $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 \subseteq U$ и снова применима теорема 3.

ТЕОРЕМА 11. Пусть K_j – замкнутые конусы в $\mathbb{R}^{d_j}$, $j = 1, \dots, n$. Конус $K_1 \times \dots \times K_n$ является строго несущим для функционала $v \in S'^\beta(\mathbb{R}^{d_1+\dots+d_n})$ в том и только в том случае, если v порожден раздельно непрерывной полилинейной формой на $S^\beta(\mathbb{R}^{d_1}) \times \dots \times S^\beta(\mathbb{R}^{d_n})$, для которой этот конус является несущим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in S'^\beta(K_1, \dots, K_n)$, $U_j \supseteq K_j$ и $f_j \in S^\beta(U_j)$. В силу формулы (4) очевидна непрерывность отображения

$$f_j \rightarrow f_1 \otimes \dots \otimes f_j \otimes \dots \otimes f_n$$

из $S^\beta(U_j)$ в $S^\beta(\mathbb{R}^{d(j-1)} \times U_j \times \mathbb{R}^{d(n-j)})$, поэтому конус $K_1 \times \dots \times K_n$ заведомо является несущим для соответствующей v полилинейной формы. При доказательстве обратной импликации снова для простоты полагаем $d_j = d$. В случае вырождения каких-либо из конусов K_j здесь удобно использовать унификацию определений (41), (42), указанную в § 8. При выводе теоремы 8 мы видели, что $v \in S'^\beta(\mathbb{R}^{d(j-1)}, K_j, \mathbb{R}^{d(n-j)})$ при любом j . Покажем, что существует непрерывное продолжение $\hat{v}$ и на $E = S^\beta(K_1, K_2, \mathbb{R}^{d(n-2)})$. Согласно теореме 10 это пространство есть сумма своих подпространств $L_1 = S^\beta(K_1, \mathbb{R}^{d(n-1)})$

и $L_2 = S^\beta(\mathbb{R}^d, K_2, \mathbb{R}^{d(n-2)})$. Если $f = f_1 + f_2$, мы полагаем $\hat{v}(f) = v_1(f_1) + v_2(f_2)$. Такое определение корректно, поскольку v_1 и v_2 совпадают на $L_1 \cap L_2$. Действительно, это пересечение есть индуктивный предел направленного семейства пространств $S^\beta(U)$, где U – объединение конусов вида $U_1 \times \mathbb{R}^{d(n-1)}$ и $\mathbb{R}^d \times U_2 \times \mathbb{R}^{d(n-2)}$, $U_1 \ni K_1$, $U_2 \ni K_2$. Пространство $S^\beta(\mathbb{R}^{dn})$ плотно в нем по теореме 1, а топология пересечения сильнее топологии каждого из пространств L_1, L_2 . Функционал $\hat{v}$, очевидно, непрерывен по индуктивной топологии относительно вложений $L_i \rightarrow E$, $i = 1, 2$, а в силу теоремы об открытом отображении она совпадает с собственной топологией E . Применяя эти же соображения к тройке $E = S^\beta(K_1, K_2, K_3, \mathbb{R}^{d(n-3)})$, $L_1 = S^\beta(K_1, K_2, \mathbb{R}^{d(n-2)})$, $L_2 = S^\beta(\mathbb{R}^{2d}, K_3, \mathbb{R}^{d(n-3)})$ и так далее, мы через конечное число шагов закончим доказательство.

§ 10. Теорема типа Пэли–Винера–Шварца

Пусть V – открытый конус в $\mathbb{R}^d$ и $V^* = \{x: x\eta \geq 0 \forall \eta \in V\}$ – дуальный ему конус. В работе [12] показано, что преобразование Лапласа переводит пространство $S'^\beta(V^*)$, $\beta > 0$, в алгебру аналитических функций, определенных в трубчатой области $T^V = \mathbb{R}^{dn} + iV$ и удовлетворяющих некоторым ограничениям на рост вблизи вещественной границы области аналитичности и на бесконечности. В [4] аналогичная теорема доказана для более сложного случая функционалов класса S'^0 . Теорема 11 позволяет распространить эти результаты на функциональные пространства $S'^\beta(V_1^*, \dots, V_n^*)$.

Пусть $\beta > 0$ и V_j – открытые конусы в $\mathbb{R}^{d_j}$, $j = 1, \dots, n$. Пусть $V = V_1 \times \dots \times V_n$. Обозначим через $\mathcal{A}_\beta(V_1, \dots, V_n)$ пространство функций, аналитических в области $T^V = \mathbb{R}^{dn} + iV$ и удовлетворяющих оценке

$$|\mathbf{u}(\zeta)| \leq C_{\epsilon, W_1, \dots, W_n} \prod_{j=1}^n |\operatorname{Im} \zeta_j|^{-N} \exp\{\epsilon |\operatorname{Re} \zeta_j|^{1/\beta}\}, \quad \operatorname{Im} \zeta_j \in W_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (43)$$

при любом $\epsilon > 0$, любых конусах $W_j \in V_j$ и некотором N , зависящем от ϵ и этих конусов. Если $\beta = 0$, мы определяем $\mathcal{A}_0(V_1, \dots, V_n)$ как пространство функций, аналитических в той же области и удовлетворяющих ограничению

$$|\mathbf{u}(\zeta)| \leq C_{R, W_1, \dots, W_n} \prod_{j=1}^n |\operatorname{Im} \zeta_j|^{-N}, \quad \operatorname{Im} \zeta_j \in W_j, \quad |\zeta_j| \leq R, \quad j = 1, \dots, n, \quad (44)$$

где N зависит от $R > 0$ и конусов W_j . Очевидно, введенные пространства являются алгебрами по умножению.

ТЕОРЕМА 12. Преобразование Лапласа $\mathcal{L}: v \rightarrow (v, e^{iz\zeta})$ устанавливает изоморфизм между пространством $S'^\beta(V_1^*, \dots, V_n^*)$, $0 \leq \beta < 1$, и алгеброй $\mathcal{A}_\beta(V_1, \dots, V_n)$. Аналитическая функция $(\mathcal{L}v)(\zeta)$ стремится к фурье-образу $\hat{v}$ функционала v по сильной топологии $S'_\beta(\mathbb{R}^{dn})$ при $\operatorname{Im} \zeta \rightarrow 0$ внутри любого фиксированного конуса $W_1 \times \dots \times W_n$, где $W_j \in V_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $S'^0(V_1^*, \dots, V_n^*) \subset S'^0(V^*)$, мы можем воспользоваться теоремой 4 из [12] при $\beta > 0$ и теоремой 2 из [4] при $\beta = 0$. Их формулировки получаются из формулировки теоремы 12 при $n = 1$, и они показывают, в частности, что любой функционал из $S'^\beta(V^*)$ имеет преобразование Лапласа, аналитическое в области T^V , граничным значением которого

служит $\tilde{v}$. Ограничения (43), (44) сильнее, чем установленные в работах [12], [4] для произвольного элемента из $S'^{\beta}(V^*)$, но благодаря свойству мультипликативности (4) они выводятся по той же схеме, исходя из оценки

$$|\mathcal{L}v(\zeta)| = |(v, e^{iz\zeta})| \leq \|v\|'_{U,B,N} \|e^{iz\zeta}\|'_{U,B,N} \quad (45)$$

по нормам (5). Здесь $U = U_1 \times \dots \times U_n$, U_j – любые конусы с открытыми проекциями такие, что $V_j^* \subseteq U_j$, B сколь угодно велико и N зависит, вообще говоря, от B и U . Конусы U_j , а также вспомогательные конусы U'_j следует выбрать так, чтобы $V_j^* \subseteq U_j \subseteq U'_j \subseteq \text{Int } W_j^*$ (здесь $\text{Int } W_j^*$ – внутренность W_j^*). Это возможно, поскольку $W_j \subseteq V_j$ влечет $V_j^* \subseteq \text{Int } W_j^*$. Пусть $\beta = 0$ и $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда

$$\|e^{iz\zeta}\|'_{U,B,N} = \sup_{x,y} \exp\{-x\eta - y\xi + N \ln(1 + |x|) - Bd(x, U) - B|y|\}. \quad (46)$$

Экспонента факторизуется, и все сомножители оцениваются одинаковым образом. Именно, считая, что $|\xi_j| \leq R < B$, можно пренебрегать членами, зависящими от y_j . Если $x_j \notin U'_j$, то $d(x_j, U_j) > \theta|x_j|$ при некотором $\theta > 0$, и при $|\eta_j| \leq R < \theta B$ выражение в экспоненте мажорируется константой. Если $x_j \in U'_j$, то из включения $U'_j \subseteq \text{Int } W_j^*$ следует, что найдется $\theta' > 0$ такое, что $x_j \eta_j \geq \theta'|x_j||\eta_j|$ при всех $x_j \in U'_j$, $\eta_j \in W_j$. Подставляя это неравенство в (46), пренебрегая членом $d(x_j, U_j)$ и вычисляя экстремум, мы приходим к (44) с константой $C_{R,W_1,\dots,W_n}$, пропорциональной $\|v\|'_{U,B,N}$. Изменения в выкладке при $\beta > 0$ очевидны.

Нетривиальная часть теоремы состоит в том, что любая функция из алгебры $\mathcal{A}_\beta(V_1, \dots, V_n)$ есть преобразование Лапласа некоторого элемента $S'^{\beta}(V_1^*, \dots, V_n^*)$. Пусть u – граничное значение функции $\mathbf{u}$ со свойством (44), которое существует в пространстве распределений Шварца $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{dn}) = S'_0(\mathbb{R}^{dn})$ согласно [6, теорема 3.1.15]. Применяя теперь теорему 4 из [12], мы видим, что при более сильном ограничении (43) распределение u принадлежит $S'_\beta(\mathbb{R}^{dn})$. Рассмотрев его на пробных функциях вида $g_1 \otimes \dots \otimes g_n$, где $g_j \in S_\beta(\mathbb{R}^d)$, и используя эту же теорему при $\beta > 0$ и теорему 2 из [4] при $\beta = 0$, мы заключаем, что конус $V_1^* \times \dots \times V_n^*$ является несущим для полилинейной формы, определяемой обратным преобразованием Фурье функционала u . Применение теоремы 11 завершает доказательство.

Отметим, что поскольку дуальный V конус совпадает с дуальным конусом его выпуклой оболочки $\text{ch } V$, из теоремы 12 следует, что $\mathcal{A}_\beta(V_1, \dots, V_2) = \mathcal{A}_\beta(\text{ch } V_1, \dots, \text{ch } V_n)$.

Приложение 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Покажем вначале, что при любом $\sigma > 2$ существует последовательность функций $\varphi_n \in S^0(\mathbb{R})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условиям:

$$|\varphi_n(z)| \leq A_N(1 + |x|)^{-N} e^{\sigma|y|}, \quad (\text{a1})$$

$$\ln |\varphi_n(iy)| \geq |y|, \quad (\text{a2})$$

$$\ln |\varphi_n(z)| \leq \sigma|y| - n \ln^+ \left(\frac{|x|}{n} \right) + A, \quad (\text{a3})$$

где $\ln^+ r = \max(0, \ln r)$ и константы A_N и A не зависят от n . (Здесь подразумевается, что $n \ln^+ (|x|/n) = 0$ при $n = 0$.)

Такую последовательность можно построить с помощью итерационной процедуры, используемой в теории квазианалитических классов и излагаемой, например, в [6, § 1.3]. Пусть $a_0 \geq a_1 \geq \dots$ – последовательность положительных чисел, и пусть $H_a(t) = a^{-1}$ при $-a/2 < t < a/2$ и $H_a(t) = 0$ в остальных точках. Положим

$$\omega_n = H_{a_0} * \dots * H_{a_n}. \quad (\text{a4})$$

Очевидно, ω_n является четной неотрицательной функцией с носителем в интервале $|t| \leq (a_0 + \dots + a_n)/2$ и единичным интегралом, поскольку $\int (u * v) dt = \int u dt \int v dt$. Из формулы

$$(u * H_a)'(t) = \frac{u(t + \frac{a}{2}) - u(t - \frac{a}{2})}{a},$$

где функция u считается непрерывной, ясно, что $\omega_n^{(k)}$ записывается в виде суммы 2^k членов, каждый из которых есть функция $H_{a_k} * \dots * H_{a_n} / (a_0 \dots a_{k-1})$, подвергнутая некоторому сдвигу. Учитывая неравенство $|u * v| \leq \sup |u| \int |v| dt$, получаем

$$|\omega_n^{(k)}| \leq \frac{2^k}{a_0 \dots a_k}, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (\text{a5})$$

Отметим, что $\omega_n \in C_0^{n-1}$ и старшая производная $\omega_n^{(n)}$ лишь кусочно непрерывна, но оценка (a5) верна и в этом случае. Положим $a_0 = 2$, $a_1 = \dots = a_n = 2/n$. Тогда

$$|\omega_n^{(k)}| \leq \frac{1}{2} n^k, \quad k \leq n, \quad \int \omega_n dt = 1, \quad \text{supp } \omega_n \subset [-2, 2].$$

Составим свертку $\psi_n = \omega_n * \omega$, где $\omega \in C_0^\infty$ – любая гладкая неотрицательная четная функция с носителем в сегменте $[-\delta, \delta]$ и единичным интегралом. Для преобразования Лапласа функции ψ_n справедлива оценка

$$|x^k \tilde{\psi}_n(z)| \leq \int_{-2-\delta}^{2+\delta} \left| e^{izt} \psi_n^{(k)}(t) \right| dt \leq \begin{cases} C_k e^{(2+\delta)|y|} & \text{при всех } k, \\ \frac{1}{2} n^k e^{(2+\delta)|y|} & \text{при } k \leq n. \end{cases} \quad (\text{a6})$$

С другой стороны, $\int_{|t| > 1-\delta} \psi_n(t) dt \geq \delta$, так как $\psi_n \leq 1/2$ и $\int \psi_n(t) dt = 1$. Учитывая, что функция ψ_n неотрицательная и четная, мы получаем

$$|\tilde{\psi}_n(iy)| = \int e^{-yt} \psi_n(t) dt \geq \int_{t > 1-\delta} e^{|y|t} \psi_n(t) dt \geq \frac{\delta}{2} e^{(1-\delta)|y|}. \quad (\text{a7})$$

Таким образом, последовательность $\varphi_n(z) = (2/\delta) \tilde{\psi}_n(z/(1-\delta))$ обладает требуемыми свойствами (a1)–(a3), если δ настолько мало, что $(2+\delta)/(1-\delta) < \sigma$.

Эта последовательность и будет основным инструментом доказательства леммы 1. Достаточно убедиться в ее справедливости при $b = 1$. Введем вспомогательную функцию

$$H(\xi) = \sup_y \{ \ln |\eta(\xi + iy)| - |y| \}, \quad (\text{a8})$$

которая ввиду (29) удовлетворяет неравенству

$$H(\xi) \leq \ln C_N - N \ln(1 + |\xi|) + d(\xi, V). \quad (\text{a9})$$

Рассмотрим сначала простейший одномерный случай, когда $V = \mathbb{R}_-$ и $d(\xi, V) = \vartheta(\xi)|\xi|$, где $\vartheta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Пусть $\Phi_n(z) = \ln |\varphi_n(ez)|$. Функция Φ_n субгармоническая согласно [5, § П.9.12]. В качестве кандидата на искомую функцию ϱ рассмотрим верхнюю огибающую семейства $\Phi_n(z - \xi) + H(\xi)$, допуская при этом, что индекс n может зависеть от точки $\xi \in \mathbb{R}$. Поскольку функции из этого семейства локально равномерно ограничены сверху, их верхняя огибающая тоже является субгармонической функцией (см. [5, § П.9.6]) и она заведомо мажорирует $\ln |\eta(z)|$. Действительно, из (a2), (a8) следует

$$\sup_{\xi} \{\Phi_n(z - \xi) + H(\xi)\} \geq \Phi_n(iy) + H(x) \geq \ln |\eta(z)|. \quad (\text{a10})$$

Покажем, что $n(\xi)$ можно выбрать так, чтобы обеспечить соблюдение и второго неравенства в (30). При $\xi < 0$, когда $d(\xi, \mathbb{R}_-) = 0$, можно положить $n(\xi) = 0$, ибо благодаря свойству (a1) и элементарному неравенству

$$-\ln(1 + |x - \xi|) - \ln(1 + |\xi|) \leq -\ln(1 + |x|) \quad (\text{a11})$$

мы имеем

$$\sup_{\xi < 0} \{\Phi_0(z - \xi) + H(\xi)\} \leq A'_N + e\sigma|y| - N \ln(1 + |x|).$$

Заметим, что ввиду (a11) при любом $\kappa > 0$ и всех ξ справедлива также оценка

$$\kappa \Phi_0(z - \xi) - N \ln(1 + |\xi|) \leq A''_N + \kappa e\sigma|y| - N \ln(1 + |x|), \quad (\text{a12})$$

которая показывает, что нетривиальность задачи связана лишь с линейно растущим членом $d(\xi, V)$ в формуле (a9).

Пусть $\xi \geq 0$ и, значит, $d(\xi, \mathbb{R}_-) = \xi$. Пусть, кроме того, $e|x - \xi| > n$. Тогда

$$n \ln \frac{e|x - \xi|}{n} + ed(x, \mathbb{R}_-) \geq n \ln \frac{e\xi}{n}. \quad (\text{a13})$$

При $|x - \xi| > \xi$ это очевидно, а при $|x - \xi| \leq \xi$ достаточно воспользоваться неравенством $\vartheta(x)x \geq \xi - |x - \xi|$ и заметить, что функция $n \ln(\lambda/n) - \lambda$ монотонно убывает при $\lambda \in [n, e\xi]$. Применяя (a3) и (a13), получаем

$$\Phi_n(z - \xi) + \xi \leq A + \sigma e|y| + ed(x, \mathbb{R}_-) - n \ln \frac{e\xi}{n} + \xi.$$

Возьмем в качестве $n(\xi)$ целую часть числа ξ . Тогда $n \ln(e\xi/n) \geq n > \xi - 1$ и

$$\Phi_{n(\xi)}(z - \xi) + \xi \leq A' + \sigma e|y| + ed(x, \mathbb{R}_-). \quad (\text{a14})$$

Аналогичное неравенство соблюдается и при $e|x - \xi| \leq n$, когда $\ln^+(e|x - \xi|/n)$ равно нулю. Действительно, тогда $\xi \leq \vartheta(x)|x| + |x - \xi| \leq \vartheta(x)|x| + \xi/e$, и поэтому $\xi \leq ed(x, \mathbb{R}_-)$. Итак, неравенство (a14) (с подходящей константой в правой части) справедливо при всех $\xi \geq 0$. Объединяя его с оценкой (a12) и взяв в этой оценке $\kappa = B/(e\sigma) - 1$, мы заключаем, что верхняя огибающая

$$\varrho(z) = \overline{\lim_{z' \rightarrow z}} \sup_{\xi} \{\kappa \Phi_0(z' - \xi) + \Phi_{n(\xi)}(z' - \xi) + H(\xi)\} \quad (\text{a15})$$

удовлетворяет всем требуемым условиям⁵.

⁵Взятие верхнего предела обеспечивает полунепрерывность сверху результирующей функции и входит в определение верхней огибающей (см. [5]).

В случае нескольких переменных и произвольного открытого конуса $V \subset \mathbb{R}^d$ полагаем $\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^d \ln |\varphi_n(e\sqrt{d}z_j)|$. Неравенство (a10), очевидно, сохраняет силу, а аналогом оценки (a12) будет

$$\varkappa \Phi_0(z - \xi) - N \ln(1 + |\xi|) \leq A_N''' + \varkappa ed\sigma|y| - N \ln(1 + |x|), \quad (\text{a16})$$

поскольку $\sum_{j=1}^d |y_j| \leq \sqrt{d}|y|$. При $x \notin V$ и $e|x - \xi| > n$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^d n \ln \left(\frac{e\sqrt{d}}{n} |x_j - \xi_j| \right) + ed(x, V) \geq n \ln \left(\frac{e}{n} d(\xi, V) \right).$$

Чтобы в этом убедиться, надо учесть, что

$$\sum_{j=1}^d \ln^+ |x_j| \geq \ln^+ \frac{|x|}{\sqrt{d}}, \quad d(\xi, V) = \inf_{\xi' \in V} |\xi' - \xi| \leq d(x, V) + |x - \xi|.$$

Взяв в качестве $n(\xi)$ целую часть числа $d(\xi, V)$, получаем вместо (a14) неравенство

$$\Phi_{n(\xi)}(z - \xi) + d(\xi, V) \leq A'' + \sigma ed|y| + ed(x, V),$$

справедливое при всех x . Объединяя его с оценкой (a16), заключаем, что плюрисубгармоническая функция, определяемая формулой (a15) при $\xi \in \mathbb{R}^d$ и $\varkappa = B/(e\sigma d) - 1$, удовлетворяет условиям (30). Лемма 1 доказана.

Приложение 2

Пусть $1 < \alpha' < \alpha$. Положим теперь в (a4) $a_0 = a_1 = 1$ и $a_k = (k-1)^{(k-1)\alpha'}/k^{k\alpha'}$ при $k > 1$. Поскольку $(k-1)^{k-1}/k^k \leq 1/k$, ряд $\sum a_k$ сходится, и согласно [6, теорема 1.3.5] последовательность (a4) стремится при $n \rightarrow \infty$ к гладкой неотрицательной четной функции с компактным носителем, k -я производная которой не превосходит $2^k k^{k\alpha'}$. Масштабным преобразованием из нее можно получить функцию γ со свойствами

$$|\gamma^{(k)}| \leq C_\epsilon \epsilon^k k^{k\alpha}, \quad \text{supp } \gamma \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

где ϵ сколь угодно мало. Пусть $g_\alpha(x) = \tilde{\gamma}^2(x)$, где $\tilde{\gamma}$ – преобразование Лапласа функции γ . Тогда

$$|g_\alpha(x + iy)| \leq e^{-2|x|^{1/\alpha} + |y|}, \quad g_\alpha(x) \geq 0, \quad g_\alpha(0) > 0. \quad (\text{a17})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Рассмотрим сначала частный случай замкнутой полуплоскости $\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_-$ в $\mathbb{R}^2$, к которому, как мы увидим, общий случай легко сводится. Используя g_α , нетрудно построить функции $f_1 \in S^0(\mathbb{R})$ и $f_2 \in S^0(\mathbb{R}_-)$ такие, что $f_1 \otimes f_2 \in S^0(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_-) = S^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-)$ и $f_1 \otimes f_2 \notin S^\beta(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_-)$ при любом $0 \leq \beta < 1$. Положим

$$f_1(x) = \int e^{-|\xi|^{1/\alpha}} g_\alpha(x - \xi) d\xi.$$

Эта свертка допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C}$ и принадлежит $S^0_\alpha(\mathbb{R})$. Действительно, с помощью неравенства треугольника для метрики $|x - \xi|^{1/\alpha}$ получаем

$$|f_1(x + iy)| \leq \int e^{-|x-\xi|^{1/\alpha} - 2|\xi|^{1/\alpha} + |y|} d\xi \leq C e^{-|x|^{1/\alpha} + |y|},$$

где $C = \int e^{-|\xi|^{1/\alpha}} d\xi$. Кроме того, имеем следующую оценку снизу:

$$f_1(x) \geq \int_{-1}^{+1} e^{-|x-\xi|^{1/\alpha}} g_\alpha(\xi) d\xi \geq e^{-(|x|+1)^{1/\alpha}} \int_{-1}^{+1} g_\alpha(\xi) d\xi \geq c e^{-|x|^{1/\alpha}}. \quad (\text{a18})$$

Далее, пусть $1 < \alpha' < \alpha$ и

$$f_2(x) = \int_0^\infty e^{\xi^{1/\alpha'}} g_{\alpha'}(x - \xi) d\xi.$$

Столь же простым образом получаем

$$|f_2(x + iy)| \leq C' e^{|x|^{1/\alpha'} + |y|}. \quad (\text{a19})$$

При $x > 1$ справедлива оценка

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^x e^{(x-\xi)^{1/\alpha'}} g_{\alpha'}(\xi) d\xi \geq e^{(x-1)^{1/\alpha'}} \int_{-1}^{+1} g_{\alpha'}(\xi) d\xi \geq c' e^{x^{1/\alpha'}}. \quad (\text{a20})$$

Если $x < 0$ и $\xi > 0$, то $|x - \xi| = |x| + |\xi|$, и, используя неравенство $2(|x| + |\xi|)^{1/\alpha'} \geq |2x|^{1/\alpha'} + |2\xi|^{1/\alpha'}$, мы видим, что

$$|f_2(x + iy)| \leq C'' e^{-|2x|^{1/\alpha'} + |y|}, \quad x \in \mathbb{R}_-. \quad (\text{a21})$$

Из оценок (a19), (a21) следует, что $f_2 \in S^0(\mathbb{R}_-)$, и поэтому

$$(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \in S^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-).$$

С другой стороны, оценки снизу (a18) и (a20) показывают, что функция $f_1 \otimes f_2$ неограниченно растет на любом вещественном луче, лежащем в полуплоскости $x_2 > 0$, и поэтому она не принадлежит ни одному из пространств $S^\beta(U)$, где $U \ni \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_-$. Простым примером функционала, принадлежащего $S'^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_-)$ и не принадлежащего $S'^0(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_-)$, служит

$$(v, f) = \int_1^\infty f(x_1, x_1^{\alpha'/\alpha}) dx_1.$$

Построенная выше функция $f_1 \otimes f_2$ больше некоторой положительной константы всюду на кривой интегрирования $x_2 = x_1^{\alpha'/\alpha}$, $x_1 > 1$, и поэтому v не имеет непрерывного продолжения на $S^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-)$ и, тем более, на $S^\beta(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-)$, $\beta > 0$. Действительно, мы можем аппроксимировать $f_1 \otimes f_2$ (по топологии $S^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-)$) положительными функциями $f_\nu = f_1 \otimes (g_\nu f_2) \in S^0_\alpha(\mathbb{R}^2)$, где $g_\nu(x_2) = g_{\alpha''}(x_2/\nu)$, $\alpha'' < \alpha'$, и предполагается, что $g_{\alpha''}(0) = 1$. Очевидно, что $(v, f_\nu) \rightarrow \infty$ при $\nu \rightarrow \infty$, т. е. непрерывного продолжения не существует.

Пусть теперь K_1 и K_2 – замкнутые конусы в $\mathbb{R}^{d_1}$ и $\mathbb{R}^{d_2}$, $d_1 \geq 1$, $d_2 \geq 1$, и пусть $K_1 \neq \{0\}$, $K_2 \neq \mathbb{R}^{d_2}$. Покажем, что $S^\beta(K_1 \times K_2)$ не покрывает не только $S^0(K_1, K_2)$, но даже $S^0(\mathbb{R}^{d_1}, K_2)$. Будем считать, что координатный орт e_1^1 в $\mathbb{R}^{d_1}$ принадлежит K_1 , а орт e_2^1 в $\mathbb{R}^{d_2}$ не принадлежит K_2 . Заменим в предыдущей конструкции f_1 на $f_1 \otimes h_1$, где h_1 – любая функция из $S_\alpha^0(\mathbb{R}^{d_1-1})$ такая, что $h_1(0) \neq 0$. Тогда $f_1 \otimes h_1 \in S_\alpha^0(\mathbb{R}^{d_1})$. Функцию f_2 заменим на $f_2 \otimes h_2$, где $h_2 \in S_{\alpha'}^0(\mathbb{R}^{d_2-1})$ и $h_2(0) \neq 0$. Нетрудно видеть, что $f_2 \otimes h_2 \in S_{\alpha'}^0(U)$, где U – открытый конус в $\mathbb{R}^{d_2}$, определяемый неравенством $(1 + \theta)x_2^1 < |x_2|$, в котором при достаточно малом $\theta > 0$ содержится $K_2 \setminus \{0\}$. Поэтому функция $f_1 \otimes h_1 \otimes f_2 \otimes h_2$ принадлежит $S_\alpha^0(\mathbb{R}^{d_1} \times U)$, а из (a18), (a20) следует, что она не принадлежит ни одному из пространств $S^\beta(K_1 \times K_2)$, $0 \leq \beta < 1$. Аналогично предыдущему определим функционал v интегрированием пробной функции по кривой $x_2^1 = (x_1^1)^{\alpha'/\alpha}$, $x_1^1 > 1$, в плоскости $\{e_1^1, e_2^1\}$. Его несущим конусом служит луч $\{\lambda e_1^1 \mid \lambda \geq 0\}$, лежащий на границе $K_1 \times K_2$, но v не принадлежит ни $S'^\beta(K_1, K_2)$, ни даже пространствам $S'^\beta(\mathbb{R}^{d_1}, K_2)$, что завершает доказательство.

Список литературы

1. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е., *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, М., 1958.
2. Soloviev M. A., “An extension of distribution theory and of the Paley–Wiener–Schwartz theorem related to quantum gauge theory”, *Commun. Math. Phys.*, **184**:3 (1997), 579–596.
3. Жаринов В. В., “Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS”, *УМН*, **34**:4 (1979), 97–131.
4. Соловьев М. А., “О двух классах обобщенных функций, используемых в нелокальной теории поля”, *ТМФ*, **143**:2 (2005), 195–210.
5. Владимиров В. С., *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.
6. Хёрмандер Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, Мир, М., 1986.
7. Паламодов В. П., “Гомологические методы в теории локально выпуклых пространств”, *УМН*, **26**:1 (1971), 3–65.
8. Хёрмандер Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 2, Мир, М., 1986.
9. Grothendieck A., “Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **16** (1955), 140 p.
10. Робертсон А., Робертсон В., *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967.
11. Шефер Х., *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971.
12. Fainberg V. Ya., Soloviev M. A., “Non-localizability and asymptotic commutativity”, *ТМФ*, **93**:3 (1992), 514–528.
13. Soloviev M. A., *Carrier cones of analytic functionals*, arXiv: math-ph/0507011.
14. Соловьев М. А., “Лоренц-ковариантные ультрасраспределения, гиперфункции и аналитические функционалы”, *ТМФ*, **128**:3 (2001), 492–514.
15. Хелемский А. Я., *Лекции по функциональному анализу*, МЦНМО, М., 2004.
16. Smirnov A. G., “Towards Euclidean theory of infrared singular quantum fields”, *J. Math. Phys.*, **44**:5 (2003), 2058–2076.