Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гадыльшин, О собственных значениях “гантели с тонкой ручкой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 2, 45–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/im634>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 10:43:48

УДК 517.956

Р. Р. Гадыльшин

О собственных значениях “гантели с тонкой ручкой”

Рассмотрена краевая задача Неймана о нахождении асимптотик по малому параметру собственных значений и собственных функций для оператора Лапласа в сингулярно возмущенной области, представляющей собой две ограниченные области, соединенные тонкой “ручкой”. Малым параметром является диаметр сечения соединения. Показано, что при стремлении малого параметра к нулю эти собственные значения сходятся либо к собственным значениям соединяемых областей, либо к собственным значениям задачи Дирихле для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке, к которому сжимается тонкое соединение. Основным содержанием работы является построение полных степенных асимптотик по малому параметру собственных значений и соответствующих собственных функций и вывод явных формул для первых членов асимптотик. Рассмотрены критические случаи, порождаемые как выбором места присоединения тонкой “ручки”, так и кратностью собственных значений соединяемых областей.

Библиография: 39 наименований.

§ 1. Введение

Исследованию возмущения спектра задачи Неймана для оператора Лапласа в областях с тонкими отростками и соединениями, восходящему, по-видимому, к статье [1], посвящено достаточно много работ (см., например, [2]–[18]). В настоящей работе рассматривается краевая задача Неймана о нахождении собственных значений оператора $-\Delta$ в области Ω_ε , представляющей собой две ограниченные области, соединенные тонкой “ручкой”.

Всюду далее $\Omega^{\text{in}}, \Omega^{\text{ex}}$ – односвязные ограниченные области в $\mathbb{R}^3$, $\overline{\Omega^{\text{in}}} \cap \overline{\Omega^{\text{ex}}} = \emptyset$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $h > 0$, Ω^{in} совпадает с полупространством $x_3 > 0$ в окрестности начала координат, Ω^{ex} совпадает с полупространством $x_3 < -h$ в некоторой окрестности точки $x_0^{\text{ex}} = (0, 0, -h)$, интервал $(-h, 0)$ оси Ox_3 не имеет общих точек с областью $\overline{\Omega^{\text{in}}} \cup \overline{\Omega^{\text{ex}}}$, ω – двумерная односвязная ограниченная область, содержащая начало координат, $\partial\omega \in C^\infty$, $x' = (x_1, x_2)$, $\omega_\varepsilon = \{x': x'\varepsilon^{-1} \in \omega\}$, $\mathcal{K}_\varepsilon = \omega_\varepsilon \times [-h, 0]$. В этих обозначениях “гантель с тонкой ручкой” имеет вид

$$\Omega_\varepsilon = \Omega^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_\varepsilon \cup \Omega^{\text{ex}}$$

(см. рис. 1).

В работе рассматривается поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ собственных значений задачи Неймана для оператора Лапласа в Ω_ε :

$$-\Delta \psi^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \psi^\varepsilon \quad \text{при } x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega_\varepsilon, \quad (1.1)$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 02-01-00768) и программ “Научная школа” (НШ-1446.2003.1) и “Университеты России” (УР.04.01.484).

Рис. 1

где ν – внешняя нормаль, $\partial\Omega_\varepsilon$ – граница области Ω_ε . Краевая задача (1.1) понимается в обобщенном смысле [19], [20]. Поэтому от геометрии областей Ω^{in} и Ω^{ex} будем требовать (помимо упомянутых выше ограниченности и уплощенности в окрестности соединений с тонкой “ручкой” $\mathcal{K}_\varepsilon$) только то, чтобы пространство $W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$ компактно вкладывалось в $L_2(\Omega^{\text{in(ex)}})$. Выполнение этого условия является довольно слабым ограничением на гладкость границ областей Ω^{in} и Ω^{ex} (см., например, [21]–[23]).

Обозначим через Σ_ε множество собственных значений краевой задачи (1.1), через Σ^{in} (через Σ^{ex}) – множество собственных значений задачи Неймана для оператора $-\Delta$ в Ω^{in} (в Ω^{ex}) и положим

$$\Sigma_0 = \Sigma^{\text{in}} \cup \Sigma^{\text{ch}} \cup \Sigma^{\text{ex}},$$

где

$$\Sigma^{\text{ch}} = \left\{ \left(\frac{\pi m}{h} \right)^2 \right\}_{m=1}^{\infty}.$$

Будем говорить, что число $\lambda_0 \in \Sigma_0$ имеет кратность (n_1, n_2, n_3) , если оно является собственным значением кратности n_1 задачи Неймана в Ω^{in} , кратности n_3 задачи Неймана в Ω^{ex} , и $n_2 = 1$, если $\lambda_0 \in \Sigma^{\text{ch}}$. Равенство $n_1 = 0$ ($n_2 = 0$, $n_3 = 0$) означает, что $\lambda_0 \notin \Sigma^{\text{in}}$ ($\lambda_0 \notin \Sigma^{\text{ch}}$, $\lambda_0 \notin \Sigma^{\text{ex}}$).

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ – достаточно малое фиксированное число, λ^{ε_0} – какое-нибудь собственное значение краевой задачи (1.1), ψ^{ε_0} – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega_{\varepsilon_0})$ собственная функция. Из регулярной теории возмущений [24] следует, что собственное значение λ^ε непрерывно по ε при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, а соответствующую нормированную в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственную функцию ψ^ε (продолженную нулем вне Ω_ε) можно выбрать так, что она будет непрерывной по норме $L_2(\Omega_{\varepsilon_0})$. Всюду далее собственные функции краевой задачи (1.1) будут пониматься выбранными именно таким образом.

В следующем параграфе будет доказана

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть кратность $\lambda_0 \in \Sigma_0$ равна (n_1, n_2, n_3) , $\{\psi_i^{\text{in}}\}_{i=1}^{n_1}$, $\{\psi_i^{\text{ex}}\}_{i=1}^{n_3}$ – ортонормированные в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ и $L_2(\Omega^{\text{ex}})$ собственные функции краевых задач Неймана для $-\Delta$ в Ω^{in} и Ω^{ex} , соответствующие λ_0 ,

$$\psi_m^{\text{ch}, \varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} \sqrt{\frac{2}{|\omega|h}} \sin\left(\frac{\pi m}{h} x_3\right) \quad \text{в } \mathcal{K}^\varepsilon = \omega_\varepsilon \times (-h, 0).$$

Тогда совокупная кратность собственных значений возмущенной задачи (1.1), сходящихся к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, равна $n = n_1 + n_2 + n_3$, а для соответствующих этим собственным значениям $\lambda^{\varepsilon, i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, ортонормированных в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственных функций ψ_i^ε имеют место сходимости

$$\left\| \psi_i^\varepsilon - \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{i,j}^{\text{in},\varepsilon} \psi_j^{\text{in}} \right\|_{W_2^1(\Omega^{\text{in}})} + \left\| \psi_i^\varepsilon - \sum_{j=1}^{n_3} \alpha_{i,j}^{\text{ex},\varepsilon} \psi_j^{\text{ex}} \right\|_{W_2^1(\Omega^{\text{ex}})} + \left\| \psi_i^\varepsilon \right\|_{W_2^1(\mathcal{X}^\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n_2 = 0, \quad (1.2)$$

$$\left\| \psi_i^\varepsilon - \sum_{j=1}^{n_1} \beta_{i,j}^{\text{in},\varepsilon} \psi_j^{\text{in}} \right\|_{W_2^1(\Omega^{\text{in}})} + \left\| \psi_i^\varepsilon - \sum_{j=1}^{n_3} \beta_{i,j}^{\text{ex},\varepsilon} \psi_j^{\text{ex}} \right\|_{W_2^1(\Omega^{\text{ex}})} + \left\| \psi_i^\varepsilon - \beta_i^{\text{ch},\varepsilon} \psi_m^{\text{ch},\varepsilon} \right\|_{W_2^1(\mathcal{X}^\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda_0 = \left(\frac{\pi m}{h} \right)^2, \quad (1.3)$$

где нормирующие множители непрерывны при $\varepsilon > 0$ и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{i,j}^{\text{in},\varepsilon} \alpha_{k,j}^{\text{in},\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n_3} \alpha_{i,j}^{\text{ex},\varepsilon} \alpha_{k,j}^{\text{ex},\varepsilon} = \delta_k^i, \quad (1.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} \beta_{i,j}^{\text{in},\varepsilon} \beta_{k,j}^{\text{in},\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n_3} \beta_{i,j}^{\text{ex},\varepsilon} \beta_{k,j}^{\text{ex},\varepsilon} + \beta_i^{\text{ch},\varepsilon} \beta_k^{\text{ch},\varepsilon} = \delta_k^i;$$

здесь δ_k^i – символ Кронекера.

Отметим, что приводимое ниже доказательство переносится на d -мерные гантели для любого $d \geq 2$. Кроме этого, как легко будет видеть из доказательства теоремы 1.1, условие бесконечной дифференцируемости границы области ω (а следовательно, и $\partial\omega_\varepsilon$) не является необходимым. Заметим, что в случае, когда граница области Ω_ε является гладкой (т. е. в случае отсутствия ребер), аналогичные сходимости были установлены в [4], [15].

При $n = 1$ из теоремы 1.1 (так же, как и из [4], [15] в случае гладкой границы Ω_ε) следует, что

$$\begin{aligned} \left\| \psi_1^\varepsilon - \psi_1^{\text{in}} \right\|_{W_2^1(\Omega^{\text{in}})} + \left\| \psi_1^\varepsilon \right\|_{W_2^1(\Omega^{\text{ex}})} + \left\| \psi_1^\varepsilon \right\|_{W_2^1(\mathcal{X}^\varepsilon)} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{в случае } (1, 0, 0), \\ \left\| \psi_1^\varepsilon - \psi_1^{\text{ex}} \right\|_{W_2^1(\Omega^{\text{ex}})} + \left\| \psi_1^\varepsilon \right\|_{W_2^1(\Omega^{\text{in}})} + \left\| \psi_1^\varepsilon \right\|_{W_2^1(\mathcal{X}^\varepsilon)} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{в случае } (0, 0, 1), \\ \left\| \psi_1^\varepsilon \right\|_{W_2^1(\Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}})} + \left\| \psi_1^\varepsilon - \psi_m^{\text{ch},\varepsilon} \right\|_{W_2^1(\mathcal{X}^\varepsilon)} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{в случае } (0, 1, 0). \end{aligned}$$

Однако при $n \geq 2$ ни из теоремы 1.1, ни из [4], [15] не следует, что нормирующие множители $\alpha_{i,j}^{\text{in(ex)},\varepsilon}$, $\beta_{i,j}^{\text{in(ex)},\varepsilon}$ и $\beta_i^{\text{ch},\varepsilon}$ имеют пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$ (т. е., в частности, не следует, что собственная функция ψ_i^ε сходится к каким-то конкретным собственным функциям предельных краевых задач в Ω^{in} и в Ω^{ex}). Кроме этого, теорема 1.1 (так же, как и аналогичные утверждения в [4], [15]) не содержит никаких утверждений о расщеплении таких кратных λ_0 при рассматриваемом возмущении (за исключением очевидного расщепления собственного значения $\lambda_0 = 0$, имеющего кратность $(1, 0, 1)$). При $\lambda_0 = 0$ асимптотический анализ, проведенный в [7]

(в случае, когда ω – круг) и в [9], показал, что вторая собственная частота $\lambda^{\varepsilon,2}$ (первая, очевидно, равна нулю) имеет асимптотику

$$\lambda^{\varepsilon,2} = \varepsilon^2 \frac{|\omega|}{h} \left(\frac{1}{|\Omega^{\text{in}}|} + \frac{1}{|\Omega^{\text{ex}}|} \right) + o(\varepsilon^2),$$

а для соответствующей нормированной собственной функции имеет место сходимость

$$\psi_2^\varepsilon - (+) \sqrt{\frac{|\Omega^{\text{ex(in)}}|}{(|\Omega^{\text{in}}| + |\Omega^{\text{ex}}|) |\Omega^{\text{in(ex)}}|}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{в } \Omega^{\text{in(ex)}}.$$

В случае, когда ω – круг, в [11] для кратностей $(n_1, 0, n_2)$ было доказано, что главные члены асимптотики собственных значений имеют вид

$$\lambda^{\varepsilon,i} = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_2^{(i)} + o(\varepsilon^2), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

где коэффициенты $\lambda_2^{(i)}$ удовлетворяют некоторым алгебраическим уравнениям. Анализ этих уравнений показывает, что для кратностей $(n_1, 0, 0)$ и $(0, 0, n_3)$ при $n_1, n_3 \geq 2$ существует не более одного собственного значения, для которого первый член теории возмущений $\lambda_2^{(i)}$ в (1.5) не равен нулю, а для кратности $(n_1, 0, n_3)$ при $n_1 + n_3 \geq 2$ существует не более двух собственных значений, для которых $\lambda_2^{(i)} \neq 0$. Оставлен также открытым вопрос о предельных значениях соответствующих собственных функций возмущенной задачи (1.1) в этих случаях.

Основной целью настоящей работы является, во-первых, построение полных степенных асимптотик собственных значений и соответствующих собственных функций возмущенной задачи (1.1) при $n \leq 3$ без требования симметричности сечения “ручки” $\mathcal{K}_\varepsilon$ и равенства $n_2 = 0$, а во-вторых, получение явных формул для главных членов асимптотик собственных функций возмущенной задачи (т. е. пределов для нормирующих множителей в (1.2) и (1.3)) и для первых (в смысле теории возмущений) ненулевых членов асимптотик собственных значений. В частности, будет показано, что даже для кратностей $(n_1, 0, 0)$, рассмотренных в § 5–8, коэффициент $\lambda_2^{(i)}$ в (1.5) равен нулю в трех из четырех случаев (§ 6–8). Результаты работы частично анонсированы в [25].

Асимптотики будут строиться методом согласования асимптотических разложений [26] в § 5–12. Для этого в § 3, 4 исследуются некоторые вспомогательные модельные краевые задачи для внешнего и внутреннего асимптотических разложений (в терминах применяемого метода).

В заключение заметим, что краевая задача для уравнения Пуассона в области с тонкими отростками и граничными условиями Дирихле на торцах отростков и граничными условиями Неймана на остальной части границы рассматривалась в [27], а спектральные задачи в областях с тонкими отростками и соединениями в случае граничных условий Дирихле исследовались в [1], [3], [8], [10], [12], [28]–[35].

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

Решения как возмущенной краевой задачи

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + f_\varepsilon \quad \text{при } x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega_\varepsilon, \quad (2.1)$$

так и краевых задач Неймана в Ω^{in} и Ω^{ex}

$$\begin{aligned} -\Delta u_0^{\text{in(ex)}} &= \lambda u_0^{\text{in(ex)}} + f_0^{\text{in(ex)}} \quad \text{при } x \in \Omega^{\text{in(ex)}}, \\ \frac{\partial u_0^{\text{in(ex)}}}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega^{\text{in(ex)}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

понимаются в обобщенном смысле [19], [20]. Обозначим через $(\cdot, \cdot)_G$ – скалярное произведение в $L_2(G)$. Пусть $f_\varepsilon \in L_2(\Omega_\varepsilon)$. Под решением краевой задачи (2.1) понимается элемент $u_\varepsilon \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$, удовлетворяющий интегральному равенству

$$(\nabla u_\varepsilon, \nabla \eta)_{\Omega_\varepsilon} = \lambda(u_\varepsilon, \eta)_{\Omega_\varepsilon} + (f_\varepsilon, \eta)_{\Omega_\varepsilon} \quad (2.3)$$

для любого $\eta \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$. При $f_0^{\text{in(ex)}} \in L_2(\Omega^{\text{in(ex)}})$ под решением краевой задачи (2.2) понимается элемент $u_0^{\text{in(ex)}} \in W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$, удовлетворяющий интегральному равенству

$$(\nabla u_0^{\text{in(ex)}}, \nabla \eta^{\text{in(ex)}})_{\Omega^{\text{in(ex)}}} = \lambda(u_0^{\text{in(ex)}}, \eta^{\text{in(ex)}})_{\Omega^{\text{in(ex)}}} + (f_0^{\text{in(ex)}}, \eta^{\text{in(ex)}})_{\Omega^{\text{in(ex)}}} \quad (2.4)$$

для любого $\eta^{\text{in(ex)}} \in W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$. Аналогично, под собственным значением и собственной функцией возмущенной краевой задачи (1.1) понимаются число λ^ε и функция $\psi^\varepsilon \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ такие, что интегральное равенство

$$(\nabla \psi^\varepsilon, \nabla \eta)_{\Omega_\varepsilon} = \lambda^\varepsilon (\psi^\varepsilon, \eta)_{\Omega_\varepsilon} \quad (2.5)$$

выполняется для любого $\eta \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$, а под собственным значением и собственной функцией краевой задачи

$$\begin{aligned} -\Delta \psi_0^{\text{in(ex)}} &= \lambda_0 \psi_0^{\text{in(ex)}} \quad \text{при } x \in \Omega^{\text{in(ex)}}, \\ \frac{\partial \psi_0^{\text{in(ex)}}}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega^{\text{in(ex)}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

понимаются число λ_0 и функция $\psi_0^{\text{in(ex)}} \in W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$ такие, что интегральное равенство

$$(\nabla \psi_0^{\text{in(ex)}}, \nabla \eta^{\text{in(ex)}})_{\Omega^{\text{in(ex)}}} = \lambda_0 (\psi_0^{\text{in(ex)}}, \eta^{\text{in(ex)}})_{\Omega^{\text{in(ex)}}} \quad (2.7)$$

выполняется для любого $\eta^{\text{in(ex)}} \in W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$.

Прежде чем перейти к непосредственному доказательству теоремы 1.1, получим некоторые априорные оценки для решений краевой задачи (2.1) и докажем вспомогательные утверждения. Подставляя $\eta = u_\varepsilon$ в (2.3), получаем первую из оценок:

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C(\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}), \quad (2.8)$$

равномерную по $\varepsilon > 0$ и по λ , принадлежащему любому компактному на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Обозначим $\omega_\varepsilon(t) = (\omega_\varepsilon \times \{-t\}) \cup (\omega_\varepsilon \times \{-h+t\})$.

ЛЕММА 2.1. Пусть K – произвольный компакт в $\mathbb{C}$. Тогда:

а) если $K \cap \Sigma^{\text{ch}} = \emptyset$, то для решения краевой задачи (2.1) справедлива равномерная по $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in K$ оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon)} \leq C(\|f_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{L_2(\omega_\varepsilon(0))}); \quad (2.9)$$

б) если $K \cap \Sigma^{\text{ch}} = \{(N\pi/h)^2\}$, то для решения краевой задачи (2.1) справедлива равномерная по $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in K$ оценка

$$\|u_\varepsilon - (u_\varepsilon, \psi_N^{\text{ch}, \varepsilon})_{\mathcal{K}^\varepsilon} \psi_N^{\text{ch}, \varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon)} \leq C(\|f_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{L_2(\omega_\varepsilon(0))}). \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $0 \leq t \leq \frac{h}{3}$ обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\varepsilon(t) &= \omega_\varepsilon \times (-h+t, -t), \\ \psi_{ij}^{\varepsilon, t}(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \alpha_j^t(x_3) \varphi_i\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right), \quad 0 < i+1, j \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\varphi_i(x')$ – ортонормированные в $L_2(\omega)$ собственные функции задачи Неймана в ω , соответствующие собственным значениям $\tilde{\lambda}_i$ (и, в частности, $\varphi_0 \equiv |\omega|^{-1/2}$, $\tilde{\lambda}_0 = 0$),

$$\alpha_j^t(s) = \sqrt{\frac{2}{h-2t}} \sin\left(\frac{\pi j(s+t)}{h-2t}\right) \quad (2.12)$$

– ортонормированные в $L_2((-h+t, -t))$ собственные функции задачи Дирихле для оператора $-\frac{d^2}{ds^2}$ на интервале $(-h+t, -t)$, соответствующие собственным значениям

$$\hat{\lambda}_j(t) = \left(\frac{\pi j}{h-2t}\right)^2. \quad (2.13)$$

Заметим, что в силу определений $\mathcal{K}^\varepsilon(0) = \mathcal{K}^\varepsilon$, $\psi_{0j}^{\varepsilon, 0} = \psi_j^{\text{ch}, \varepsilon}$, а функции $\psi_{ij}^{\varepsilon, t}$ являются ортонормированными в $L_2(\mathcal{K}^\varepsilon(t))$ собственными функциями краевой задачи для $-\Delta$ в цилиндре $\mathcal{K}^\varepsilon(t)$ с граничными условиями Неймана на боковой поверхности и граничными условиями Дирихле на основаниях, соответствующими собственным значениям

$$\Lambda_{ij}^{\varepsilon, t} = \hat{\lambda}_j(t) + \varepsilon^{-2} \tilde{\lambda}_i. \quad (2.14)$$

Функции $\{\psi_{ij}^{\varepsilon, t}\}_{i=0, j=1}^\infty$, $\{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$ и $\{\alpha_j^t\}_{j=1}^\infty$ образуют ортонормированные базисы в $L_2(\mathcal{K}^\varepsilon(t))$, $L_2(\omega)$ и $L_2((-h+t, -t))$ соответственно.

Обозначим

$$\varphi_i^\varepsilon(x') = \frac{1}{\varepsilon} \varphi_i(x' \varepsilon^{-1}).$$

Пусть $t > 0$. Поскольку в этом случае в силу теорем о повышении гладкости решений краевых задач для $-\Delta$ (см., например, [19], [20]) $u_\varepsilon, \psi_{ij}^{\varepsilon, t} \in W_2^2(\mathcal{K}^\varepsilon(t))$, то, интегрируя по частям левую часть равенства

$$-(\Delta + \lambda)u_\varepsilon, \psi_{ij}^{\varepsilon, t})_{\mathcal{K}^\varepsilon(t)} = (f_\varepsilon, \psi_{ij}^{\varepsilon, t})_{\mathcal{K}^\varepsilon(t)},$$

в силу (2.11), (2.12) последовательно получаем, что

$$(\Lambda_{ij}^{\varepsilon,t} - \lambda)(u_\varepsilon, \psi_{ij}^{\varepsilon,t})_{\mathcal{K}^\varepsilon(t)} + \pi j \sqrt{\frac{2}{(h-2t)^3}} (u_\varepsilon, \varphi_i^\varepsilon)_{\omega_\varepsilon(t)} = (f_\varepsilon, \psi_{ij}^{\varepsilon,t})_{\mathcal{K}^\varepsilon(t)}, \quad (2.15)$$

$$|\Lambda_{ij}^{\varepsilon,t} - \lambda| |(u_\varepsilon, \psi_{ij}^{\varepsilon,t})_{\mathcal{K}^\varepsilon(t)}| \leq C_1 (|(f_\varepsilon, \psi_{ij}^{\varepsilon,t})_{\mathcal{K}^\varepsilon(t)}| + j |(u_\varepsilon, \varphi_i^\varepsilon)_{\omega_\varepsilon(t)}|), \quad (2.16)$$

где постоянная C_1 не зависит от ε и t . Так как функции $\{\varphi_i^\varepsilon\}_{i=0}^\infty$ и $\{\psi_{ij}^{\varepsilon,t}\}_{i=0,j=1}^\infty$ образуют ортонормированные базисы в $L_2(\omega_\varepsilon)$ и $L_2(\mathcal{K}^\varepsilon(t))$ соответственно, то в силу (2.13)–(2.16) при $t < h/3$ получаем, что если $K \cap \Sigma^{\text{ch}} = \emptyset$, то

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon(t))} \leq C (\|f_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon(t))} + \|u_\varepsilon\|_{L_2(\omega_\varepsilon(t))}), \quad (2.17)$$

и если $K \cap \Sigma^{\text{ch}} = \{(N\pi/h)^2\}$, то

$$\|u_\varepsilon - (u_\varepsilon, \psi_{0N}^{\varepsilon,t})_{\mathcal{K}^\varepsilon(t)} \psi_{0N}^{\varepsilon,t}\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon(t))} \leq C (\|f_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon(t))} + \|u_\varepsilon\|_{L_2(\omega_\varepsilon(t))}), \quad (2.18)$$

где постоянная C не зависит от t , ε и $\lambda \in K$. Переходя в (2.17) и (2.18) к пределу при $t \rightarrow 0$, получаем оценки (2.9) и (2.10) соответственно. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть K – произвольный компакт в $\mathbb{C}$ такой, что $K \cap \Sigma_0 = \emptyset$, u_0^{in} и u_0^{ex} – решения краевых задач (2.2). Тогда:

а) существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $K \cap \Sigma_\varepsilon = \emptyset$ при любом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, и при любом $\lambda \in K$ существует решение краевой задачи (2.1) и для него справедлива равномерная по ε и λ оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}; \quad (2.19)$$

б) если, кроме того, $\|f_\varepsilon - f_0^{\text{in(ex)}}\|_{L_2(\Omega^{\text{in(ex)}})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, то

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_0^{\text{in(ex)}} \quad \text{сильно в } L_2(\Omega^{\text{in(ex)}}) \text{ и слабо в } W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}}); \quad (2.20)$$

в) если, кроме того, $\|f_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, то

$$\|u_\varepsilon - u_0^{\text{in}}\|_{W_2^1(\Omega^{\text{in}})} + \|u_\varepsilon - u_0^{\text{ex}}\|_{W_2^1(\Omega^{\text{ex}})} + \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\mathcal{K}^\varepsilon)} \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость утверждений п. а). Поскольку для краевой задачи (2.1) справедливы альтернативы Фредгольма, то для ее разрешимости достаточно доказать единственность решения (2.1) (см., например, [19], [20]). В свою очередь, для единственности достаточно показать справедливость оценки (2.19). Рассуждая от противного, допустим, что оценка (2.19) неверна. Следовательно существуют последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $f^{(k)} \in L_2(\Omega_{\varepsilon_k})$, $\lambda^{(k)} \in K$ такие, что при $\varepsilon = \varepsilon_k$, $\lambda = \lambda^{(k)}$ и $f_\varepsilon = f^{(k)}$ для решений (2.1) имеет место неравенство

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{W_2^1(\Omega_{\varepsilon_k})} > k \|f^{(k)}\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon_k})}. \quad (2.21)$$

Поскольку краевая задача (2.1) линейная, то, не ограничивая общности, будем считать, что $\|u_{\varepsilon_k}\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon_k})} = 1$. Тогда из (2.8) и (2.21) следует, что при $k \rightarrow \infty$

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{W_2^1(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq 2C, \quad (2.22)$$

$$\|f^{(k)}\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon_k})} \rightarrow 0. \quad (2.23)$$

Так как K – компакт, ограниченное множество в $W_2^1(\Omega^{\text{in}})$ (в $W_2^1(\Omega^{\text{ex}})$) слабо компактно и $W_2^1(\Omega^{\text{in}})$ ($W_2^1(\Omega^{\text{ex}})$) компактно вкладывается в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ (в $L_2(\Omega^{\text{ex}})$), то существует подпоследовательность $\varepsilon_{k_l} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ такая, что, во-первых,

$$\lambda^{(k_l)} \rightarrow \lambda_* \in K \quad (2.24)$$

и, во-вторых, из (2.22) следует, что

$$u_{\varepsilon_{k_l}} \rightarrow u_*^{\text{in(ex)}} \text{ сильно в } L_2(\Omega^{\text{in(ex)}}) \text{ и слабо в } W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}}). \quad (2.25)$$

Пусть $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t > 2$ и тождественно равная нулю при $t < 1$,

$$\chi_{\varepsilon,j}^{\text{in}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(|x|j\varepsilon^{-1/2}), \quad \chi_{\varepsilon,j}^{\text{ex}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(|x - x_0^{\text{ex}}|j\varepsilon^{-1/2}). \quad (2.26)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что ω лежит в круге единичного радиуса с центром в начале координат. Для функции $\eta^{\text{in}} \in W_2^1(\Omega^{\text{in}})$ (функции $\eta^{\text{ex}} \in W_2^1(\Omega^{\text{ex}})$) обозначим через $\eta_{\varepsilon}^{\text{in}} \in W_2^1(\Omega_{\varepsilon})$ (через $\eta_{\varepsilon}^{\text{ex}} \in W_2^1(\Omega_{\varepsilon})$) функцию, равную $\eta^{\text{in}} \chi_{\varepsilon,1}^{\text{in}}$ в Ω^{in} (равную $\eta^{\text{in}} \chi_{\varepsilon,1}^{\text{ex}}$ в Ω^{in}) и продолженную нулем вне Ω^{in} (вне Ω^{ex}). Из определения этих функций следует, что

$$\begin{aligned} \eta_{\varepsilon}^{\text{in(ex)}} &\rightarrow \eta^{\text{in(ex)}} \text{ в } W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}}), \\ (\nabla u_{\varepsilon}, \nabla \eta_{\varepsilon}^{\text{in(ex)}})_{\Omega_{\varepsilon}} &= (\nabla u_{\varepsilon}, \nabla \eta_{\varepsilon}^{\text{in(ex)}})_{\Omega^{\text{in(ex)}}}, \\ (u_{\varepsilon}, \eta_{\varepsilon}^{\text{in(ex)}})_{\Omega_{\varepsilon}} &= (u_{\varepsilon}, \eta_{\varepsilon}^{\text{in(ex)}})_{\Omega^{\text{in(ex)}}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Переходя к пределу в (2.3) при $u_{\varepsilon} = u_{\varepsilon_{k_l}}$, $\lambda = \lambda^{(k_l)}$, $f_{\varepsilon} = f^{(k_l)}$, в силу (2.24)–(2.27) получаем

$$(\nabla u_*^{\text{in(ex)}}, \nabla \eta^{\text{in(ex)}})_{\Omega^{\text{in(ex)}}} = \lambda_* (u_*^{\text{in(ex)}}, \eta^{\text{in(ex)}})_{\Omega^{\text{in(ex)}}}$$

для любого $\eta^{\text{in(ex)}} \in W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$. Поскольку $\lambda_* \notin \Sigma_0$, то в силу определения (2.7) собственных значений и собственных функций краевых задач (2.6) получаем, что

$$u_*^{\text{in(ex)}} = 0 \text{ в } \Omega^{\text{in(ex)}}. \quad (2.28)$$

Из соотношений (2.25) и (2.28) следует, что

$$\|u_{\varepsilon}\|_{L_2(\omega_{\varepsilon}(0))} \rightarrow 0 \quad (2.29)$$

при $\varepsilon = \varepsilon_{k_l} \rightarrow 0$. Из (2.23), (2.29) и леммы 2.1 (а именно, из (2.8)) следует, что

$$\|u_{\varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{K}^{\varepsilon})} \rightarrow 0 \quad (2.30)$$

при $\varepsilon = \varepsilon_{k_l} \rightarrow 0$. В силу (2.25), (2.28) и (2.30)

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon = \varepsilon_{k_l} \rightarrow 0,$$

что противоречит нормировке $\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = 1$. Из полученного противоречия следует оценка (2.19).

Покажем справедливость утверждений б) и в). Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ – произвольная последовательность, сходящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$. В силу оценки (2.19), слабой компактности ограниченного множества в $W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$, компактности вложения $W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$ в $L_2(\Omega^{\text{in(ex)}})$ следует, что существует подпоследовательность $\varepsilon_{k_l} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ такая, что имеют место сходимости (2.25). Далее, принимая во внимание (2.27) (и следуя доказательству п. а)), получаем, что $u_*^{\text{in(ex)}} \in W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$ удовлетворяет (2.4) при любом $\eta^{\text{in(ex)}} \in W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$. Следовательно,

$$u_*^{\text{in(ex)}} = u_0^{\text{in(ex)}}. \quad (2.31)$$

Но тогда в силу (2.25) и (2.31) и произвольности выбора последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ имеет место сходимость (2.20).

В свою очередь, из (2.20) вытекает (2.29) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из (2.29), условия п. в) (т. е. из сходимости $\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0$) и леммы 2.1 следует сходимость (2.30) при $\varepsilon \rightarrow 0$, а равенства (2.3) и (2.4) соответственно при $\eta = u_\varepsilon$ и $\eta^{\text{in(ex)}} = u_0^{\text{in(ex)}}$ приобретают вид

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \lambda \|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 + (f_\varepsilon, u_\varepsilon)_{\Omega_\varepsilon}, \\ \|\nabla u_0^{\text{in(ex)}}\|_{L_2(\Omega^{\text{in(ex)}})}^2 &= \lambda \|u_0^{\text{in(ex)}}\|_{L_2(\Omega^{\text{in(ex)}})}^2 + (f_0^{\text{in(ex)}}, u_0^{\text{in(ex)}})_{\Omega^{\text{in(ex)}}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Из (2.32), (2.30) и (2.20) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^{\text{in}})}^2 + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^{\text{ex}})}^2) \leq \|\nabla u_0^{\text{in}}\|_{L_2(\Omega^{\text{in}})}^2 + \|\nabla u_0^{\text{ex}}\|_{L_2(\Omega^{\text{ex}})}^2. \quad (2.33)$$

С другой стороны, из неравенства

$$\|\nabla(u_\varepsilon - u_0^{\text{in(ex)}})\|_{L_2(\Omega^{\text{in(ex)}})}^2 \geq 0$$

и сходимости (2.20) очевидным образом следует оценка

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^{\text{in(ex)}})}^2 \geq \|\nabla u_0^{\text{in(ex)}}\|_{L_2(\Omega^{\text{in(ex)}})}^2. \quad (2.34)$$

Из (2.33) и (2.34) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^{\text{in(ex)}})}^2 = \|\nabla u_0^{\text{in(ex)}}\|_{L_2(\Omega^{\text{in(ex)}})}^2. \quad (2.35)$$

В свою очередь, из (2.20) и (2.35) вытекает сходимость

$$\|u_\varepsilon - u_0^{\text{in(ex)}}\|_{W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.36)$$

И наконец, из (2.29), (2.32), (2.36) следует, что

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\mathcal{K}^\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.37)$$

Из (2.36), (2.37) вытекает справедливость утверждения в). Лемма доказана.

Обозначим $\Sigma' = \Sigma^{\text{in}} \cup \Sigma^{\text{ex}}$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\lambda_0 \in \Sigma'$, $\{\psi_j^{\text{in}}\}_{j=1}^{n_1}$ и $\{\psi_j^{\text{ex}}\}_{j=1}^{n_3}$ – соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ и $L_2(\Omega^{\text{ex}})$ собственные функции задач (2.7). Тогда существует собственное значение $\lambda^\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, сходящееся к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для любой последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, существуют подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_l}\}$ и числа α_j^{in} и α_j^{ex} (вообще говоря, зависящие от подпоследовательности $\{\varepsilon_{k_l}\}$) такие, что на этой подпоследовательности для собственной функции ψ^ε , соответствующей собственному значению λ^ε , имеют место сходимости

$$\psi^\varepsilon \rightarrow \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j^{\text{in}} \psi_j^{\text{in}}, \quad \psi^\varepsilon \rightarrow \sum_{j=1}^{n_3} \alpha_j^{\text{ex}} \psi_j^{\text{ex}}, \quad (2.38)$$

слабые в $W_2^1(\Omega^{\text{in}})$ и $W_2^1(\Omega^{\text{ex}})$ и сильные в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ и $L_2(\Omega^{\text{ex}})$ соответственно, причем

$$\begin{aligned} \|\psi^\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon)} &\rightarrow 0 \quad \text{при } n_2 = 0, \\ \|\psi^\varepsilon - (\psi^\varepsilon, \psi_N^{\text{ch}, \varepsilon})_{\mathcal{K}^\varepsilon} \psi_N^{\text{ch}, \varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon)} &\rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda_0 = \left(\frac{\pi N}{h}\right)^2 \in \Sigma' \cap \Sigma^{\text{ch}}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что $\lambda_0 \in \Sigma^{\text{in}}$. Положим $f_\varepsilon = f_0^{\text{in}} = \psi_1^{\text{in}}$ в Ω^{in} , $f_\varepsilon = 0$ в $\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega^{\text{in}}}$, $f_0^{\text{ex}} = 0$. Обозначим через $S(t, z)$ открытый круг на комплексной плоскости радиуса t с центром в точке z . Поскольку множество Σ_0 не имеет конечных точек накопления (см., например, [19], [20]), то существует $T > 0$ такое, что $\overline{S(t, \lambda_0)} \cap \Sigma_0 = \{\lambda_0\}$ при любых $0 < t \leq T$. Тогда в силу п. б) леммы 2.2

$$\int_{\partial S(t, \lambda_0)} u_\varepsilon(x, \lambda) d\lambda \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial S(t, \lambda_0)} u_0^{\text{in}}(x, \lambda) d\lambda \quad (2.40)$$

в $L_2(\Omega^{\text{in}})$, причем так как $f_0^{\text{in}} = \psi_1^{\text{in}}$, то правая часть в (2.40) не равна нулю. Следовательно, в силу (2.40) существует собственное значение λ^ε краевой задачи (1.1), лежащее в $S(t, \lambda_0)$. Отсюда в силу произвольности выбора t следует, что $\lambda^\varepsilon \rightarrow \lambda_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть ψ^ε – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственная функция. Подставляя $\eta = \psi^\varepsilon$ в (2.5), получаем

$$\|\psi^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C. \quad (2.41)$$

Из оценки (2.41) следует, что для любой последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_l}\}$ такая, что на этой подпоследовательности имеют место сходимости

$$\psi^\varepsilon \rightarrow \psi_*^{\text{in}}, \quad \psi^\varepsilon \rightarrow \psi_*^{\text{ex}}, \quad (2.42)$$

слабые в $W_2^1(\Omega^{\text{in}})$ и $W_2^1(\Omega^{\text{ex}})$ и сильные в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ и $L_2(\Omega^{\text{ex}})$ соответственно. Из (2.42) и леммы 2.1 следуют сходимости (2.39). Используя соотношения (2.27), (2.42), аналогично лемме 2.2 легко показать, что $\psi_*^{\text{in(ex)}}$ либо являются собственными функциями краевых задач (2.6), либо тождественно равны нулю. Следовательно, справедливы и сходимости (2.38).

ЛЕММА 2.4. Пусть $\lambda_0 = \left(\frac{\pi N}{h}\right)^2$. Тогда существует собственное значение $\lambda^\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, сходящееся к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, а для собственной функции ψ^ε , соответствующей собственному значению λ^ε , имеет место сходимость

$$\|\psi^\varepsilon - (\psi^\varepsilon, \psi_N^{\text{ch}, \varepsilon})_{\mathcal{H}^\varepsilon} \psi_N^{\text{ch}, \varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{H}^\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad (2.43)$$

причем если, кроме того, $\lambda_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma'$, то

$$\psi^\varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.44)$$

слабо в $W_2^1(\Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}})$ и сильно в $L_2(\Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку существование собственного значения $\lambda^\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, сходящегося к $\lambda_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \cap \Sigma'$, доказано в лемме 2.3, то достаточно рассмотреть случай $\lambda_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma'$. Положим $f_\varepsilon = \psi_N^{\text{ch}, \varepsilon}$ в $\mathcal{H}^\varepsilon$ и $f_\varepsilon \equiv 0$ в $\Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}}$. Переходя в (2.15) к пределу при $t \rightarrow 0$, $j = N$, $i = 0$ и учитывая (2.13), (2.14) и определения f_ε и $\psi_N^{\text{ch}, \varepsilon}$, получаем

$$(\lambda_0 - \lambda)(u_\varepsilon, \psi_N^{\text{ch}, \varepsilon})_{\mathcal{H}^\varepsilon} + \pi N \sqrt{\frac{2}{h^3}} (u_\varepsilon, \varphi_0^\varepsilon)_{\omega_\varepsilon(0)} = 1. \quad (2.45)$$

Пусть $\lambda \in \partial S(t, \lambda_0)$, где t выбрано таким, как в предыдущей лемме. Тогда в силу (2.19) для любой последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_l}\}$ такая, что на этой подпоследовательности

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_*^{\text{in(ex)}} \quad \text{слабо в } W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}}).$$

Отсюда в силу произвольности выбора последовательности вытекает, что

$$(u_\varepsilon, \varphi_0^\varepsilon)_{\omega_\varepsilon(0)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.46)$$

Из (2.45), (2.46) следует, что

$$(u_\varepsilon, \psi_N^{\text{ch}, \varepsilon})_{\mathcal{H}^\varepsilon} = (\lambda_0 - \lambda)^{-1} (1 + o(1)) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.47)$$

Из (2.47) и произвольности выбора t следует, что существует собственное значение $\lambda^\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, сходящееся к λ_0 . Доказательство сходимостей (2.43) и (2.44) полностью аналогично доказательству сходимостей (2.38), (2.39) в лемме 2.2. Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 2.3, 2.4 и ортогональности в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственных функций краевой задачи (1.1) вытекает

ЛЕММА 2.5. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда существует хотя бы одно собственное значение $\lambda^{\varepsilon,i}$ возмущенной задачи (1.1), сходящееся к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, а из любой последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, можно выделить подпоследовательность $\varepsilon_{k_l} \rightarrow 0$, $l \rightarrow \infty$, такую, что для соответствующих ортонормированных в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственных функций ψ_i^ε на этой подпоследовательности имеют место сходимости

$$\psi_i^\varepsilon \rightarrow \sum_{j=1}^{n_1(n_3)} \alpha_{i,j}^{\text{in(ex)}} \psi_j^{\text{in(ex)}} \quad \text{сильно в } L_2(\Omega^{\text{in(ex)}}) \text{ и слабо в } W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}}), \quad (2.48)$$

причем

$$\begin{aligned} \|\psi_i^\varepsilon\|_{L_2(\varkappa^\varepsilon)} &\rightarrow 0 \quad \text{при } n_2 = 0, \\ \|\psi_i^\varepsilon - \beta_i^{\text{ch}} \psi_N^{\text{ch},\varepsilon}\|_{L_2(\varkappa^\varepsilon)} &\rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda_0 = \left(\frac{\pi N}{h}\right)^2, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где нормирующие множители, вообще говоря, зависят от подпоследовательности $\varepsilon_{k_l} \rightarrow 0$, $l \rightarrow \infty$, и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{i,j}^{\text{in}} \alpha_{k,j}^{\text{in}} + \sum_{j=1}^{n_3} \alpha_{i,j}^{\text{ex}} \alpha_{k,j}^{\text{ex}} &= \delta_k^i \quad \text{при } n_2 = 0, \\ \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{i,j}^{\text{in}} \alpha_{k,j}^{\text{in}} + \sum_{j=1}^{n_3} \alpha_{i,j}^{\text{ex}} \alpha_{k,j}^{\text{ex}} + \beta_i^{\text{ch}} \beta_k^{\text{ch}} &= \delta_k^i \quad \text{при } \lambda_0 = \left(\frac{\pi N}{h}\right)^2, \end{aligned}$$

если такое собственное значение $\lambda^{\varepsilon,i}$ не одно (с учетом его кратности).

Таким образом, из леммы 2.5 следует, что для окончательного доказательства теоремы 1.1 осталось, во-первых, доказать более сильные (нежели (2.48), (2.49)) сходимости (1.2), (1.3), а во-вторых, показать, что совокупная кратность собственных значений $\lambda^{\varepsilon,i} \in \Sigma_\varepsilon$ краевой задачи (1.1), сходящихся к $\lambda_0 \in \Sigma_0$, равна $n = n_1 + n_2 + n_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Покажем вначале справедливость (1.2), (1.3). Положим

$$\begin{aligned} \psi_i^{\varepsilon,0} &= \chi_{\varepsilon,1}^{\text{in}} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{i,j}^{\text{in}} \psi_j^{\text{in}} \quad \text{в } \Omega^{\text{in}}, \quad \psi_i^{\varepsilon,0} = \chi_{\varepsilon,1}^{\text{ex}} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{i,j}^{\text{ex}} \psi_j^{\text{ex}} \quad \text{в } \Omega^{\text{ex}}, \\ \psi_i^{\varepsilon,0} &= 0 \quad \text{в } \varkappa_\varepsilon \text{ при } n_2 = 0, \quad \psi_i^{\varepsilon,0} = \beta_i^{\text{ch}} \psi_N^{\text{ch},\varepsilon} \quad \text{в } \varkappa_\varepsilon \text{ при } \lambda_0 = \left(\frac{\pi N}{h}\right)^2, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где $\chi_{\varepsilon,1}^{\text{in}}$ и $\chi_{\varepsilon,1}^{\text{ex}}$ — срезающие функции, определенные в (2.26). Из (2.50) и (2.26) следует, что $\psi_i^{\varepsilon,0} \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ и

$$\left\| \psi_i^{\varepsilon,0} - \sum_{j=1}^{n_1(n_3)} \alpha_{i,j}^{\text{in(ex)}} \psi_j^{\text{in(ex)}} \right\|_{W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})} \rightarrow 0, \quad (2.51)$$

$$\|\nabla \psi_i^{\varepsilon,0}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 - \lambda_0 \|\psi_i^{\varepsilon,0}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \rightarrow 0. \quad (2.52)$$

Из (2.48)–(2.51) следует, что

$$\|\psi_i^\varepsilon - \psi_i^{\varepsilon,0}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \rightarrow 0. \quad (2.53)$$

Подставляя $\psi^\varepsilon = \psi_i^\varepsilon$, $\lambda^\varepsilon = \lambda^{\varepsilon,i}$ и последовательно $\eta = \psi_i^\varepsilon$ и $\eta = \psi_i^{\varepsilon,0}$ в (2.5) и учитывая вещественность ψ_i^ε , $\lambda^{\varepsilon,i}$ и $\psi_i^{\varepsilon,0}$, получаем

$$\begin{aligned} \|\nabla(\psi_i^\varepsilon - \psi_i^{\varepsilon,0})\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \lambda^{\varepsilon,i} \|\psi_i^\varepsilon - \psi_i^{\varepsilon,0}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ &+ \|\nabla\psi_i^{\varepsilon,0}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 - \lambda^{\varepsilon,i} \|\psi_i^{\varepsilon,0}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Из (2.52)–(2.54) следует, что

$$\|\psi_i^\varepsilon - \psi_i^{\varepsilon,0}\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \rightarrow 0. \quad (2.55)$$

И наконец, из (2.50), (2.51) и (2.55) вытекают сходимости (1.2), (1.3).

Существует $T > 0$ такое, что $\overline{S(t, \lambda_0)} \cap \Sigma_0 = \{\lambda_0\}$ при любых $0 < t \leq T$. Следовательно, в силу п. а) леммы 2.2 $\partial S(t, \lambda_0) \cap \Sigma_\varepsilon = \emptyset$ при достаточно малых $\varepsilon < \varepsilon_0$, а в силу регулярности возмущения при $0 < \varepsilon$ (см., например, [24]) получаем, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\lambda \in \overline{S(T, \lambda_0)}$ для решения краевой задачи (2.1) справедливо представление

$$u_\varepsilon = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\psi_i^\varepsilon}{\lambda^{\varepsilon,i} - \lambda} \int_{\Omega_\varepsilon} \psi_i^\varepsilon f_\varepsilon dx + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (2.56)$$

где $\lambda^{\varepsilon,i}$ – собственные значения краевой задачи (1.1), сходящиеся к λ_0 (с учетом их кратности), ψ_i^ε – соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(\Omega_\varepsilon)$, а $\tilde{u}_\varepsilon(\cdot; \lambda)$ – голоморфная функция (по λ со значениями в $W_2^1(\Omega_\varepsilon)$), ортогональная ψ_i^ε в $L_2(\Omega_\varepsilon)$. Таким образом, осталось показать, что

$$\tilde{n} = n. \quad (2.57)$$

Из соотношений (1.2)–(1.4) и ортонормированности в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственных функций ψ_i^ε следует, что

$$\tilde{n} \leq n. \quad (2.58)$$

Обозначим $n' = n_1 + n_3$,

$$\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i,1}^{\text{in}}, \dots, \alpha_{i,n_1}^{\text{in}}, \alpha_{i,1}^{\text{ex}}, \dots, \alpha_{i,n_3}^{\text{ex}}), \quad 1 \leq i \leq \tilde{n}.$$

Покажем, что среди n' -мерных векторов $\vec{\alpha}_i$ имеется не меньше чем n' линейно независимых векторов. Допустим противное. Тогда имеется ненулевой вектор

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1^{\text{in}}, \dots, \alpha_{n_1}^{\text{in}}, \alpha_1^{\text{ex}}, \dots, \alpha_{n_3}^{\text{ex}}),$$

ортогональный всем $\vec{\alpha}_i$. Положим

$$f_\varepsilon = \sum_{j=1}^{n_1(n_3)} \alpha_j^{\text{in(ex)}} \psi_j^{\text{in(ex)}} \quad \text{в } \Omega^{\text{in(ex)}}, \quad f_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \mathcal{K}_\varepsilon.$$

В силу определения

$$(f_\varepsilon, \psi_i^\varepsilon)_{\Omega_\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{при } 1 \leq i \leq \tilde{n}. \quad (2.59)$$

Из (2.56), (2.59) следует, что

$$\left\| \int_{\partial S(t, \lambda_0)} u_\varepsilon(x, \lambda) d\lambda \right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.60)$$

С другой стороны, в силу леммы 2.2

$$\int_{\partial S(t, \lambda_0)} u_\varepsilon(x, \lambda) d\lambda \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi i \sum_{j=1}^{n_1(n_3)} \alpha_j^{\text{in(ex)}} \psi_j^{\text{in(ex)}} \quad \text{в } L_2(\Omega^{\text{in(ex)}}), \quad (2.61)$$

что противоречит (2.60). Следовательно,

$$n' \leq \tilde{n}. \quad (2.62)$$

Заметим, что $n = n'$ при $\lambda_0 \in \Sigma_0 \setminus \Sigma^{\text{ch}}$, и в этом случае из (2.58), (2.62) следует равенство (2.57).

Таким образом, осталось доказать равенство (2.57) для случая $\lambda_0 = \left(\frac{\pi N}{h}\right)^2$. Обозначим

$$\vec{\beta}_i = (\alpha_{i,1}^{\text{in}}, \dots, \alpha_{i,n_1}^{\text{in}}, \alpha_{i,1}^{\text{ex}}, \dots, \alpha_{i,n_3}^{\text{ex}}, \beta_i^{\text{ch}}), \quad 1 \leq i \leq \tilde{n}.$$

Покажем, что среди n -мерных векторов $\vec{\beta}_i$ имеется не меньше чем n линейно независимых векторов. Допустим противное. Тогда имеется ненулевой вектор

$$\vec{\beta} = (\alpha_1^{\text{in}}, \dots, \alpha_{n_1}^{\text{in}}, \alpha_1^{\text{ex}}, \dots, \alpha_{n_3}^{\text{ex}}, \beta^{\text{ch}}),$$

ортогональный всем $\vec{\beta}_i$. Положим

$$f_\varepsilon = \sum_{j=1}^{n_1(n_3)} \alpha_j^{\text{in(ex)}} \psi_j^{\text{in(ex)}} \quad \text{в } \Omega^{\text{in(ex)}}, \quad f_\varepsilon = \beta^{\text{ch}} \psi_N^{\text{ch}, \varepsilon} \quad \text{в } \mathcal{K}_\varepsilon.$$

В силу определения f_ε по-прежнему имеет место сходимость (2.59), а следовательно, и сходимость (2.60). С другой стороны, в силу леммы 2.2 имеет место сходимость (2.61). Из (2.60) и (2.61) вытекает, что все $\alpha_j^{\text{in(ex)}} = 0$. Следовательно, $\beta^{\text{ch}} \neq 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\beta^{\text{ch}} = 1$, т.е.

$$f_\varepsilon \equiv 0 \quad \text{в } \Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}}, \quad f_\varepsilon = \psi_N^{\text{ch}, \varepsilon} \quad \text{в } \mathcal{K}_\varepsilon.$$

Но тогда легко видеть, что (2.47) противоречит (2.60). Следовательно, $n \leq \tilde{n}$, что вместе с (2.58) приводит к равенству (2.57). Теорема 1.1 доказана полностью.

В заключение приведем утверждение, которое вытекает непосредственно из представления (2.56), равенства (2.57) и оценки (2.19) и которое понадобится при обосновании строящихся в дальнейшем асимптотик собственных значений и собственных функций.

ЛЕММА 2.6. Пусть $\lambda_0 \in \Sigma_0$ имеет кратность n . Тогда для любого λ , близкого к λ_0 , для решения возмущенной краевой задачи (2.1) справедлива равномерная оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \frac{\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}}{\prod_{i=1}^n |\lambda^{\varepsilon,i} - \lambda|}. \quad (2.63)$$

Если u_ε ортогонально в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственной функции, соответствующей $\lambda^{\varepsilon,j}$, то имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \frac{\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}}{\prod_{i \neq j} |\lambda^{\varepsilon,i} - \lambda|}. \quad (2.64)$$

§ 3. Асимптотики функций Грина предельных задач

Обозначим через $G^{\text{in}}(x, y, \lambda)$ и $G^{\text{ex}}(x, y, \lambda)$ функции Грина краевых задач (2.2) в Ω^{in} и в Ω^{ex} соответственно, через $\mathcal{A}^{\text{in(ex)}}$ – подмножество функций из $W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$ таких, что они принадлежат $C^\infty(\overline{\Omega'_{\text{in(ex)}}})$ для любой области $\Omega'_{\text{in(ex)}} \Subset \Omega^{\text{in(ex)}}$, и положим $x_0^{\text{in}} = (0, 0, 0)$, $x^{\text{in}} = x$, $x^{\text{ex}} = (x_1, x_2, -x_3 - h)$, $r_{\text{in(ex)}} = |x^{\text{in(ex)}}|$, $S^{\text{in(ex)}}(t)$ – шар радиуса t с центром в $x_0^{\text{in(ex)}}$, где, напомним, $x_0^{\text{ex}} = (0, 0, -h)$, $S_+^{\text{in}}(t) = S^{\text{in}}(t) \cap \{x: x_3 > 0\}$, $S_-^{\text{ex}}(t) = S^{\text{ex}}(t) \cap \{x: x_3 < -h\}$,

$$P_m(D_t) = \sum_{i=0}^m a_{m,i} \frac{\partial^m}{\partial t_1^i \partial t_2^{m-i}}, \quad a_{m,i} \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$$P_m(D_x) \psi_i^{\text{in(ex)}}(x_0^{\text{in(ex)}}) \stackrel{\text{def}}{=} P_m(D_x) \psi_i^{\text{in(ex)}}(x) \Big|_{x=x_0^{\text{in(ex)}}},$$

$$P_m(D_y) F(x, x_0^{\text{in(ex)}}, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} P_m(D_y) F(x, y, \lambda) \Big|_{y=x_0^{\text{in(ex)}}}.$$

ЛЕММА 3.1. Пусть $\lambda_0 \in \Sigma^{\text{in(ex)}}$ имеет кратность $n_1(n_3)$. Тогда при λ , близких к λ_0 , для функций Грина и их производных справедливы представления

$$\begin{aligned} P_j(D_y) G^{\text{in(ex)}}(x, x_0^{\text{in(ex)}}, \lambda) &= (1 - \delta_{n_1(n_3)}^0) \frac{\sum_{i=1}^{n_1(n_3)} \psi_i^{\text{in(ex)}}(x) P_j(D_x) \psi_i^{\text{in(ex)}}(x_0^{\text{in(ex)}})}{(\lambda_0 - \lambda)} \\ &+ \frac{1}{2\pi} (-1)^j P_j(D_x) \left(\frac{\cos(\sqrt{\lambda} r_{\text{in(ex)}})}{r_{\text{in(ex)}}} \right) + g_j^{\text{in(ex)}}(x, \lambda), \end{aligned}$$

где $g_j^{\text{in(ex)}}(\cdot, \lambda)$ являются:

а) голоморфными функциями со значениями в $W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$, коэффициенты разложения которых (в ряд по $\lambda - \lambda_0$) принадлежат $\mathcal{A}^{\text{in(ex)}}$;

б) голоморфными функциями со значениями в $C^m(S_{+(-)}^{\text{in(ex)}}(t))$ для любого m и достаточно малого $t > 0$ и удовлетворяют граничным условиям $\partial g_j^{\text{in}} / \partial x_3 = 0$ при $x_3 = 0$ и $\partial g_j^{\text{ex}} / \partial x_3 = 0$ при $x_3 = -h$ в окрестности точек x_0^{in} и x_0^{ex} соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что доказательство достаточно провести для функции G^{in} . Также (для сокращения обозначений) будем опускать индекс соответствия “in”. Известно, что при λ , близких к λ_0 , и $y \in \Omega$ для функции Грина справедливо представление

$$G(x, y, \lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \psi_i(x) \psi_i(y)}{(\lambda_0 - \lambda)} + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}|x - y|)}{4\pi|x - y|} + g(x, y, \lambda), \quad (3.2)$$

где функция g не имеет особенностей по переменным x и λ , и если λ_0 не является собственным значением (т.е. если $n_1 = 0$), то первая сумма в правой части отсутствует. Так как в окрестности начала координат область Ω совпадает с полупространством $x_3 > 0$, то существует $a > 0$ такое, что $S_+(2a) \cap \Omega = S_+(2a)$, $S_-(2a) \cap \Omega = \emptyset$. Обозначим $y_* = (y_1, y_2, -y_3)$ и для $y \in S_+(a)$ представим функцию Грина в виде

$$G(x, y, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\cos(\sqrt{\lambda}|x - y|)}{|x - y|} + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}|x - y_*|)}{|x - y_*|} \right) \left(1 - \chi\left(\frac{2r}{a}\right) \right) + \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \psi_i(x) \psi_i(y)}{(\lambda_0 - \lambda)} + \tilde{G}(x, y, \lambda). \quad (3.3)$$

Поскольку в силу теорем о повышении гладкости $\psi_i \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{S_+(a)})$, то из (3.2) и (3.3) следует, что функция $\tilde{G}_j(x, \lambda) = P_j(D_y)\tilde{G}(x, 0, \lambda)$ является решением краевой задачи

$$-\Delta \tilde{G}_j = \lambda \tilde{G}_j + F_j \quad \text{при } x \in \Omega, \quad \frac{\partial \tilde{G}_j}{\partial \nu} = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \quad (3.4)$$

где $F_j(\cdot, \lambda)$ – голоморфная функция со значениями в $L_2(\Omega) \cap W_2^m(S_+(a))$ для любого m . В силу отсутствия полюса у функции $\tilde{G}_j$ она является голоморфной функцией со значениями в $W_2^1(\Omega)$. Тогда справедливость утверждения а) вытекает из (3.3) и теорем о повышении гладкости.

Обозначим

$$\tilde{\chi}_{k,a}(r) = 1 - \chi\left(\frac{r2^{k+2}}{a} - 2^k\right).$$

Из определения следует, что $\tilde{\chi}_{k,a}(r)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $r < a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+2}}\right)$ и нулю при $r > a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}\right)$. Пусть $\Omega(a, k)$ – семейство областей с бесконечно дифференцируемыми границами таких, что

$$S_+\left(a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right) \subset \Omega(a, k) \subset S_+\left(a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}\right)\right).$$

Тогда в силу (3.4) функция $G_j^{(k)} = \tilde{\chi}_{k,a} \tilde{G}_j$ является решением краевой задачи

$$-\Delta G_j^{(k)} = \lambda G_j^{(k)} + F_j^{(k)} \quad \text{в } \Omega(a, k), \quad \frac{\partial G_j^{(k)}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega(a, k), \quad (3.5)$$

$$F_j^{(k)} = \tilde{\chi}_{k,a} F_j - \tilde{G}_j \Delta \tilde{\chi}_{k,a} - \nabla \tilde{G}_j \nabla \tilde{\chi}_{k,a} \quad (3.6)$$

при $k = 0$. Так как F_j и $\tilde{G}_j$ – голоморфные функции со значениями в $W_2^m(S_+(a))$ и $W_2^1(S_+(a))$ соответственно, то $F_j^{(0)}$ – голоморфная функция со значениями в $L_2(\Omega(a, k))$ в силу (3.6). Представляя резольвенту для задачи (3.5) в виде ряда Неймана, получаем, что $G_j^{(0)}$ – голоморфная функция со значениями в $W_2^2(\Omega(a, k))$. Поскольку $\tilde{G}_j = G_j^{(0)}$ в $S_+(\frac{3a}{4})$, то $\tilde{G}_j$ – голоморфная функция со значениями в $W_2^2(S_+(\frac{3a}{4}))$.

Применяя последовательно те же рассуждения к функциям $G_j^{(1)}, G_j^{(2)}, \dots$, получаем, что $\tilde{G}_j$ – голоморфная функция со значениями в $W_2^{k+2}(S_+(a(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k+1})))$. В силу произвольности выбора k и теорем вложения получаем, что $\tilde{G}_j$ является голоморфной функцией со значениями из $C^m(\overline{S(\frac{a}{2})})$ для любого m . Из (3.3) и определения $\tilde{G}_j$ вытекает справедливость утверждений леммы.

§ 4. Внутреннее разложение

В этом параграфе будет удобно обозначать пространственную переменную как $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Целью настоящего параграфа является изучение растущих при $\rho = |\xi| \rightarrow \infty$ решений краевых задач

$$\Delta V = F \text{ в } \gamma, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\gamma, \quad (4.1)$$

где F также растет при $\rho \rightarrow \infty$. Здесь и всюду далее $\gamma = \mathbb{R}_+^3 \cup (\omega \times [0, -\infty))$, $\mathbb{R}^3 = \{\xi: \xi_3 > 0\}$. Не ограничивая общности, будем считать, что ω лежит в круге единичного радиуса с центром в начале координат.

Обозначим $\Pi = \omega \times (-\infty, 0)$, $\omega^0 = \omega \times \{0\}$, $\Gamma = \partial\omega \times (-\infty, 0)$. Будем искать решение (4.1) в классе растущих на бесконечности функций в виде суперпозиции решения краевой задачи (4.1) с финитной правой частью и решений следующих краевых задач в $\mathbb{R}_+^3$ и Π :

$$\Delta V_+ = G_+ \text{ в } \mathbb{R}_+^3, \quad \frac{\partial V_+}{\partial \xi_3} = 0 \text{ при } \xi_3 = 0, \quad (4.2)$$

$$\Delta V_- = G_- \text{ в } \Pi, \quad \frac{\partial V_-}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad V_- = 0 \text{ на } \omega^0. \quad (4.3)$$

Рассмотрим краевую задачу (4.2). При целых q обозначим через $\tilde{\mathcal{F}}_q$ множество рядов вида

$$\sum_{j=-q}^{\infty} H_{-j}(\xi),$$

где $H_j \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3} \setminus \{0\})$ – однородные функции порядка j , удовлетворяющие граничному условию $\frac{\partial H_j}{\partial \xi_3} = 0$ при $\xi_3 = 0$, $\xi \neq 0$, а через $\mathcal{F}_q$ обозначим подмножество функций из $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3})$, имеющих на бесконечности дифференцируемые асимптотики из $\tilde{\mathcal{F}}_q$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $G_+ \in \mathcal{F}_q$, а ряд $\tilde{V}_+ \in \tilde{\mathcal{F}}_{q+2}$ является асимптотическим (при $\rho \rightarrow \infty$) решением уравнения $\Delta \tilde{V}_+ = G_+$. Тогда существует решение

$V_+ \in \mathcal{F}_{q+2}$ краевой задачи (4.2), имеющее при $\rho \rightarrow \infty$ дифференцируемую асимптотику

$$V_+(\xi) = \tilde{V}_+(\xi) + \sum_{i=0}^{\infty} P_i(D_\xi) \left(\frac{1}{\rho} \right). \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представляя V_+ в виде

$$V_+ = V_N^+ \chi + V_{+,N}, \quad (4.5)$$

где V_N^+ – частичная сумма ряда $\tilde{V}_+$ (до членов порядка ρ^{-N} включительно), получаем краевую задачу для $V_{+,N}$:

$$\Delta V_{+,N} = G_{+,N} \text{ в } \mathbb{R}_+^3, \quad \frac{\partial V_{+,N}}{\partial \xi_3} = 0 \text{ при } \xi_3 = 0, \quad (4.6)$$

где функция $G_{+,N} \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3})$ имеет асимптотику $G_{+,N}(\xi) = O(\rho^{-N-3})$ при $\rho \rightarrow \infty$. Известно (см., например, [36]), что существует единственное решение $V_{+,N} \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3})$ краевой задачи (4.6), убывающее на бесконечности, и оно представимо в виде

$$V_{+,N}(\xi) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}_+^3} \left(\frac{1}{|\xi - t|} + \frac{1}{|\xi - t_*|} \right) G_{+,N}(t) dt, \quad (4.7)$$

где $t = (t_1, t_2, t_3)$, $t_* = (t_1, t_2, -t_3)$. Из соотношений (4.7) и (4.5) следует, что

$$V_+(\xi) = V_N^+(\xi) + \sum_{i=0}^{N-1} P_i(D_\xi) \left(\frac{1}{\rho} \right) + O(\rho^{-N-1}) \text{ при } \rho \rightarrow \infty, \quad (4.8)$$

причем в силу единственности решения задачи Неймана в $\mathbb{R}_+^3$ в классе убывающих функций коэффициенты P_i и функция V_+ не зависят от N . В свою очередь, в силу произвольности выбора N из (4.8) следует (4.4).

Перейдем к краевой задаче (4.3). Положим $\mu_1 = \sqrt{\tilde{\lambda}_1}$, где, напомним, $\tilde{\lambda}_1$ – первое отличное от нуля собственное значение задачи Неймана для $-\Delta$ в ω . Обозначим через $\mathcal{H}_m$ множество функций G_- , определенных на Π и представимых в виде

$$G_-(\xi) = R_m(\xi_3) + g_-(\xi),$$

где R_m – многочлен m -й степени, а $e^{-\mu \xi_3} g_- \in W_2^1(\Pi) \cap C^\infty(\overline{\Pi} \setminus (\partial\omega \times \{0\}))$ для любого $\mu < \mu_1$. Многочлен R_m будем называть *степенной асимптотикой* функции G_- . Подмножество функций из $\mathcal{H}_0$, степенная асимптотика которых равна нулю, обозначим через $\mathcal{H}_{-1}$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $G_- \in \mathcal{H}_m$, R_m – степенная асимптотика функции G_- и $R_{m+2}'' = R_m$. Тогда существует решение $V_- \in \mathcal{H}_{m+2}$ краевой задачи (4.3), степенная асимптотика которой равна

$$R_{m+2} + R_0, \quad (4.9)$$

где R_0 – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представляя V_- в виде

$$V_-(\xi) = R_{m+2}(\xi_3) + v_-(\xi), \quad (4.10)$$

получаем для v_- следующую краевую задачу:

$$\Delta v_- = g_- \text{ в } \Pi, \quad \frac{\partial v_-}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad V_- = 0 \text{ на } \omega^0, \quad (4.11)$$

где $e^{-\mu\xi_3}g_- \in L_2(\Pi) \cap C^\infty(\bar{\Pi} \setminus (\partial\omega \times \{0\}))$ для любого $\mu < \mu_1$. Известно [27], что существует решение этой краевой задачи, представимое в виде

$$v_-(\xi) = R_0 + \widehat{v}_-(\xi), \quad (4.12)$$

где R_0 – некоторая постоянная, а $e^{-\mu\xi_3}\widehat{v}_- \in W_2^1(\Pi)$ для любого $\mu < \mu_1$. Из теорем о повышении гладкости следует, что $v_- \in C^\infty(\bar{\Pi} \setminus (\partial\omega \times \{0\}))$. Отсюда и из (4.10), (4.12) вытекает справедливость утверждения доказываемой леммы.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $G_- \in \mathcal{H}_{-1}$. Тогда существует решение $V_- \in \mathcal{H}_0$ краевой задачи (4.3).

Обозначим через $\mathcal{B}_m^q$ подмножество функций V из $W_{2,\text{loc}}^1(\gamma) \cap C^\infty(\bar{\gamma} \setminus (\partial\omega \times \{0\}))$ таких, что сужение $\chi(\rho)V(\xi)$ на $\mathbb{R}_+^3$ принадлежит $\mathcal{F}_q$, а $\chi(-\xi_3)V(\xi) \in \mathcal{H}_m$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $F \in \mathcal{B}_m^q$, R_m – ее степенная асимптотика при $\xi_3 < 0$, $\rho \rightarrow \infty$, $R_{m+2}'' = R_m$, $\tilde{V}_+ \in \mathcal{F}_{q+2}$ – асимптотическое решение при $\rho \rightarrow \infty$, $\xi_3 > 0$ уравнения $\Delta \tilde{V}_+ = F$. Тогда существует решение $V \in \mathcal{B}_{m+2}^{q+2}$ краевой задачи (4.1), имеющее на бесконечности асимптотику (4.4) при $\xi_3 \geq 0$ и степенную асимптотику (4.9) при $\xi_3 < 0$, где R_0 – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_+(\xi)$ – сужение $\chi(\rho)F(\xi)$ на $\mathbb{R}_+^3$, а $G_-(\xi) = \chi(-\xi_3)F(\xi)$. Тогда $G_+ \in \mathcal{F}_q$, $G_- \in \mathcal{H}_m$. В силу леммы 4.1 существует решение $V_+ \in \mathcal{F}_{q+2}$ краевой задачи (4.2), имеющее на бесконечности асимптотику (4.4), а в силу леммы 4.2 существует решение $V_- \in \mathcal{H}_{m+2}$, имеющее степенную асимптотику (4.9). Представляя V в виде

$$V(\xi) = \chi(\rho)V_+(\xi) + \chi(-\xi_3)V_-(\xi) + v(\xi), \quad (4.13)$$

для v получаем следующую краевую задачу:

$$\Delta v = f \text{ в } \gamma, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\gamma,$$

где $f \in W_2^1(\gamma) \cap C^\infty(\bar{\gamma} \setminus (\partial\omega \times \{0\}))$ имеет конечный носитель. Известно [27], что существует решение этой краевой задачи такое, что $\nabla v, (1+\rho)^{-1}v \in L_2(\gamma)$, причем в силу теорем о повышении гладкости $v \in C^\infty(\bar{\gamma} \setminus (\partial\omega \times \{0\}))$. Однако тогда $v_-(\xi) = \chi(-\xi_3)v(\xi)$ является решением (4.11), где $g_- \in \mathcal{H}_{-1}$ и, следовательно, $v_- \in \mathcal{H}_0$ в силу следствия 4.1. Аналогично, в силу краевой задачи Неймана в $\mathbb{R}_+^3$ для $v_+(\xi) = \chi(\rho)v(\xi)$ и леммы 4.1 получаем, что $v_+(\xi) \in F_{-1}$ имеет на бесконечности асимптотику (4.4) при $\tilde{V}_+ = 0$. Отсюда и из (4.13) следует справедливость утверждения леммы.

ЛЕММА 4.4. *Существуют гармонические в γ функции $Y \in \mathcal{B}_1^0$, $X_1, X_2 \in \mathcal{B}_0^1$, удовлетворяющие однородному граничному условию Неймана на $\partial\gamma$ (вне ребра) и имеющие при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотики*

$$Y(\xi) = \frac{c_\omega}{\rho} + \sum_{t=1}^2 c_{0t}(\omega) \frac{\partial}{\partial \xi_t} \frac{1}{\rho} + O(\rho^{-3}),$$

$$X_j(\xi) = \xi_j + \frac{c_{j0}}{\rho} + \sum_{t=1}^2 c_{jt}(\omega) \frac{\partial}{\partial \xi_t} \frac{1}{\rho} + O(\rho^{-3})$$

при $\xi_3 \geq 0$ и степенные асимптотики

$$Y(\xi) \sim \xi_3 + q_\omega, \quad X_j(\xi) \sim q_\omega^{(j)}$$

при $\xi_3 < 0$, где:

- а) $c_\omega = -\frac{|\omega|}{2\pi}$, $c_{j0} = 0$, (2×2) -матрица $C(\omega) = (c_{ij}(\omega))_{i,j=1}^2$ симметрична;
- б) собственные значения матрицы $C(\omega)$ положительны;
- в) $q_\omega < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.3 достаточно показать справедливость утверждений а)–в).

Обозначим $\gamma(R) = S_+(R) \cup \Pi_{-R}$, где $\Pi_{-R} = \omega \times (-R, 0]$, $S_+(R) = \{\xi: \rho < R, \xi_3 > 0\}$. Интегрируя по частям левые части равенств

$$\int_{\gamma(R)} \Delta Y \, d\xi = 0, \quad \int_{\gamma(R)} \Delta X_j \, d\xi = 0, \quad \int_{\gamma(R)} X_1 \Delta X_2 \, d\xi = 0$$

и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем справедливость утверждений п. а). Заметим, что интегрирование по частям как выше, так и всюду ниже (в этом параграфе) возможно в силу известного поведения интегрируемых функций в окрестности ребра $\partial\omega \times \{0\}$ (см., например, [37]).

Поскольку $c_{12} = c_{21}$, то при доказательстве справедливости утверждения, не ограничивая общности, можно считать, что $c_{12} = c_{21} = 0$, и, следовательно, достаточно показать, что $c_{ii} > 0$. Обозначим $\tilde{X}_i(\xi) = X_i(\xi) - \xi_i$. Интегрируя по частям левые части равенств

$$\int_{S_+(R)} \tilde{X}_i \Delta \tilde{X}_i \, d\xi = 0, \quad \int_{S_+(R)} \xi_i \Delta \tilde{X}_i \, d\xi = 0, \quad \int_{\Pi_{-R}} X_i \Delta X_i \, d\xi = 0$$

и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем равенства

$$\int_{\omega^0} \tilde{X}_i \frac{\partial \tilde{X}_i}{\partial \xi_3} \, d\xi_1 \, d\xi_2 = -\|\nabla \tilde{X}_i\|_{L_2(\mathbb{R}_+^3)}^2, \quad 2\pi c_{ii} = \int_{\omega^0} \xi_i \frac{\partial \tilde{X}_i}{\partial \xi_3} \, d\xi_1 \, d\xi_2,$$

$$\int_{\omega^0} \xi_i \frac{\partial \tilde{X}_i}{\partial \xi_3} \, d\xi_1 \, d\xi_2 + \int_{\omega^0} \tilde{X}_i \frac{\partial \tilde{X}_i}{\partial \xi_3} \, d\xi_1 \, d\xi_2 = \|\nabla X_i\|_{L_2(\Pi)}^2,$$

из которых следует, что

$$c_{ii} = \frac{1}{2\pi} (\|\nabla X_i\|_{L_2(\Pi)}^2 + \|\nabla(X_i - \xi_i)\|_{L_2(\mathbb{R}_+^3)}^2) > 0.$$

Аналогично доказываем справедливость утверждения в). Обозначим $\tilde{Y}(\xi) = Y(\xi) - \xi_3$. Поскольку $\tilde{Y} = Y$ и $\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \xi_3} = \frac{\partial Y}{\partial \xi_3} - 1$ на ω^0 , то, интегрируя по частям левые части равенств

$$\int_{\Pi_{-R}} \tilde{Y} \Delta \tilde{Y} d\xi = 0, \quad \int_{\Pi_{-R}} \xi_3 \Delta \tilde{Y} d\xi = 0, \quad \int_{S_+(R)} Y \Delta Y d\xi = 0$$

и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем равенства

$$\begin{aligned} \int_{\omega^0} \tilde{Y} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \xi_3} d\xi_1 d\xi_2 &= \|\nabla \tilde{Y}\|_{L_2(\Pi)}^2, \quad q_\omega |\omega| = \int_{\omega^0} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \xi_3} d\xi_1 d\xi_2, \\ \int_{\omega^0} \tilde{Y} d\xi_1 d\xi_2 &= -\left(\|\nabla Y\|_{L_2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \int_{\omega^0} \tilde{Y} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \xi_3} d\xi_1 d\xi_2 \right), \end{aligned}$$

из которых следует, что

$$q_\omega = -\frac{1}{|\omega|} \left(\|\nabla Y\|_{L_2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \|\nabla(Y - \xi_3)\|_{L_2(\Pi)}^2 \right) < 0.$$

ЛЕММА 4.5. Пусть Z_2 – произвольный однородный гармонический многочлен 2-го порядка такой, что $\frac{\partial Z_2}{\partial \xi_3} = 0$ на ω^0 . Тогда существует гармоническая в γ функция $\hat{Y} \in \mathcal{B}_0^2$, удовлетворяющая однородному граничному условию Неймана на $\partial\gamma$ (вне ребра) и имеющая при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотики

$$\begin{aligned} \hat{Y}(\xi) &= Z_2(\xi) + \frac{\hat{c}}{\rho} + O(\rho^{-2}) \quad \text{при } \xi_3 \geq 0, \\ \hat{Y}(\xi) &\sim \hat{q} \quad \text{при } \xi_3 < 0, \end{aligned}$$

где $\hat{c} = 0$.

ЛЕММА 4.6. Пусть $F \equiv 1$. Тогда существует решение $Y^{-1} \in \mathcal{B}_2^2$ краевой задачи (4.1), имеющее при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотики

$$\begin{aligned} Y^{-1}(\xi) &= \frac{\rho^2}{6} + \frac{\tilde{c}}{\rho} + O(\rho^{-2}) \quad \text{при } \xi_3 \geq 0, \\ \hat{Y}(\xi) &\sim \frac{\xi_3^2}{2} + \tilde{q} \quad \text{при } \xi_3 < 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{c} = 0$.

Справедливость утверждений лемм 4.5 и 4.6, за исключением равенств $\hat{c} = \tilde{c} = 0$, вытекает из леммы 4.3. Справедливость последних равенств доказывается интегрированием по частям левых частей равенств

$$\int_{\gamma(R)} \Delta \hat{Y} d\xi = 0, \quad \int_{\gamma(R)} \Delta Y^{-1} d\xi = 0$$

с последующим переходом к пределу при $R \rightarrow \infty$.

§ 5. Асимптотики для кратности $(1, 0, 0)$. Невырожденный случай

Всюду далее $k_0 = \sqrt{\lambda_0}$, $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$, $\mathbf{X}$ – вектор-функция с компонентами X_1 и X_2 , $\mathbf{q}_\omega$ – вектор с компонентами $q_\omega^{(1)}$ и $q_\omega^{(2)}$, где $q_\omega^{(j)}$ – постоянные из асимптотик функций $X_j(\xi)$ при $\xi_3 \rightarrow -\infty$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и ∇' – скалярное произведение и градиент в $\mathbb{R}^2$ соответственно,

$$R_i^{\text{in(ex)}}(D_y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^i P_n^{\text{in(ex)},i}(D_y), \quad [u] \stackrel{\text{def}}{=} u(x)|_{x=x_0^{\text{in(ex)}}$$

для функций $u(x)$, определенных на $\Omega^{\text{in(ex)}}$. Обозначим через $\mathcal{A}_j^{\text{in(ex)}}$ множество функций, определенных на $\Omega^{\text{in(ex)}}$, принадлежащих $W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}} \setminus \overline{S^{\text{in(ex)}}(t)}) \cap C^\infty(\overline{\Omega'_{\text{in(ex)}}})$ для любого t и любой области $\Omega'_{\text{in(ex)}} \Subset \Omega^{\text{in(ex)}}$ и имеющих особенность $O(r_{\text{in(ex)}}^{-j})$ при $r_{\text{in(ex)}} \rightarrow 0$. Напомним также, что $G^{\text{in}}(x, y, \lambda)$ и $G^{\text{ex}}(x, y, \lambda)$ – функции Грина краевых задач (2.2) в Ω^{in} и в Ω^{ex} соответственно, $x_0^{\text{in}} = (0, 0, 0)$, $x_0^{\text{ex}} = (0, 0, -h)$, $x^{\text{in}} = x$, $x^{\text{ex}} = (x_1, x_2, -x_3 - h)$, $r_{\text{in(ex)}} = |x^{\text{in(ex)}}|$, $S^{\text{in(ex)}}(t)$ – шар радиуса t с центром в $x_0^{\text{in(ex)}}$, а однородные дифференциальные полиномы $P_n^{\text{in(ex)},i}$ определяются равенством (3.1).

Целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть кратность λ_0 равна $(1, 0, 0)$, $\psi = \psi_1^{\text{in}}$ – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ собственная функция задачи Неймана в Ω^{in} и выполнено условие невырожденности

$$\psi(0) \cos(k_0 h) \neq 0. \quad (5.1)$$

Тогда:

а) асимптотики собственного значения λ^ε краевой задачи (1.1), сходящегося к λ_0 , и соответствующей собственной функции Ψ^ε имеют вид

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_j, \quad (5.2)$$

$$\Psi^\varepsilon(x) = \psi(x) + \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j^{\text{in}}(x) \quad \text{в } \Omega^{\text{in}} \setminus S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi_j^{\text{in}} \in \mathcal{A}_{j-1}^{\text{in}}, \quad (5.3)$$

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j^{\text{ex}}(x) \quad \text{в } \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi_j^{\text{ex}} \in \mathcal{A}_{j-1}^{\text{ex}}, \quad (5.4)$$

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j(x_3) \quad \text{в } \mathcal{K}^\varepsilon \setminus (S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2})), \quad w_j \in C^\infty([-h, 0]), \quad (5.5)$$

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j^{\text{in(ex)}} \left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{\varepsilon} \right) \quad \text{в } S^{\text{in(ex)}}(2\varepsilon^{1/2}) \cap \Omega_\varepsilon, \quad v_j^{\text{in(ex)}} \in \mathcal{B}_j^j, \quad v_0^{\text{ex}} \equiv 0 \quad (5.6)$$

по норме W_2^1 ;

б) для главных членов асимптотик справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \psi^2(0)k_0|\omega| \operatorname{ctg}(k_0h), \quad v_0^{\text{in}} \equiv \psi(0), \quad v_1^{\text{ex}} = -\frac{k_0\psi(0)}{\sin(k_0h)}Y, \\ \psi_2^{\text{ex}} &= \frac{k_0\psi(0)|\omega|}{\sin(k_0h)} G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda_0), \quad w_0(t) = \frac{\psi(0)}{\sin(k_0h)} \sin(k_0(t+h)). \end{aligned} \quad (5.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Из (5.7) следует, что величина λ_2 не является знакоопределенной и ее знак зависит от длины h тонкой “ручки”. Легко также видеть, что при невыполнении условия невырожденности (5.1) формулы (5.7) становятся некорректными.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В (5.3)–(5.6) приведены асимптотики собственной функции, нормированной “в главном”, т. е. Ψ^ε отличается от нормированной в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственной функции ψ^ε на скалярный множитель, стремящийся к единице при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому главные члены асимптотик нормированной собственной функции ψ^ε также определяются равенствами (5.7).

Обозначим

$$\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\lambda_0 - \lambda) R_i^{\text{in(ex)}}(D_y) G^{\text{in(ex)}}(x, x_0^{\text{in(ex)}}, \lambda). \quad (5.8)$$

Из определения $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$ и леммы 3.1 вытекает справедливость следующих двух утверждений.

ЛЕММА 5.1. Коэффициенты ряда (5.8) удовлетворяют уравнению $(\Delta + \lambda)U = 0$ в $\Omega^{\text{in(ex)}}$ и однородному граничному условию Неймана на $\partial\Omega^{\text{in(ex)}} \setminus \{x_0^{\text{in(ex)}}\}$.

ЛЕММА 5.2. Если $\lambda(\varepsilon)$ имеет асимптотику вида (5.2), то ряд $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \lambda(\varepsilon))$ представим в виде (5.4), причем

$$\psi_2^{\text{ex}}(x) = -\lambda_2 R_0^{\text{ex}} G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda_0). \quad (5.9)$$

Если, кроме того,

$$R_0^{\text{in}} \psi(0) = 1, \quad [R_i^{\text{in}} \psi] = 0, \quad i \geq 1, \quad (5.10)$$

то ряд $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \lambda(\varepsilon))$ представим в виде (5.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Далее будет удобно асимптотические разложения собственной функции в $\Omega^{\text{in(ex)}}$ строить в виде $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))$, что в силу леммы 5.2 влечет (при выполнении условий этой леммы) асимптотические представления (5.3), (5.4). Легко видеть, что выполнение лишь первого равенства и второго при $i = 1$ являются необходимыми и достаточными для того, чтобы ряд $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \lambda(\varepsilon))$ был

представим в виде (5.3). Требование выполнения остальных равенств в (5.10), вообще говоря, непринципиально и носит вспомогательный характер, но будет удобно ниже при построении искомых асимптотик. Эти же замечания относятся и ко всем аналогам леммы 5.2, приведенным в других параграфах.

Подставляя ряды (5.2) и (5.5) в (1.1) и учитывая, что коэффициенты ряда (5.5) зависят только от одной переменной x_3 , получаем следующую рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w_j(t)$:

$$w_j'' + \lambda_0 w_j + \sum_{i \geq 1} \lambda_i w_{j-i} = 0 \quad \text{при } -h < t < 0. \quad (5.11)$$

Очевидно, что функции

$$w_j(t) = -\frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^j \lambda_i \int_{-h}^t \sin(k_0(t-s)) w_{j-i}(s) ds + a_j \sin(k_0 t) + b_j \cos(k_0 t) \quad (5.12)$$

принадлежат $C^\infty([-h, 0])$ и являются решениями (5.11) при любых значениях постоянных a_j и b_j .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Поскольку в (5.2) отсутствует член λ_1 , то, строго говоря, суммирование в (5.11) и (5.12) должно начинаться с двух. Однако для возможности использования этих формул в следующих параграфах будет удобнее пользоваться приведенной выше записью (и в некоторых других формулах ниже, например в (5.13)), считая нулем члены с несуществующими индексами.

Краевые задачи для коэффициентов рядов (5.6) получаются стандартным для метода согласования способом. Подставляем ряды (5.2) и (5.6) в (1.1) и переходим к переменным $\xi = x^{\text{in(ex)}} \varepsilon^{-1}$. Затем выписываем отдельно равенства при одинаковых степенях ε и переходим к формальному пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получаем следующие рекуррентные системы краевых задач в переменных ξ :

$$\begin{aligned} \Delta v_j^{\text{in(ex)}} &= -\lambda_0 v_{j-2}^{\text{in(ex)}} - \sum_{i \geq 1} \lambda_i v_{j-i-2}^{\text{in(ex)}}, \quad \xi \in \gamma, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} v_j^{\text{in(ex)}} &= 0, \quad \xi \in \partial \gamma. \end{aligned} \quad (5.13)$$

На суммах $U(x, \varepsilon)$ вида (5.5), (5.8), где $\lambda(\varepsilon)$ – произвольная функция, имеющая асимптотику (5.2), определим операторы “переразложения” $K_q^{\text{in(ex)}}$ следующим стандартным для метода согласования образом. Разложим коэффициенты $U(x, \varepsilon)$ в ряды при $r_{\text{in(ex)}} \rightarrow 0$ и перейдем к переменным $\xi = x^{\text{in(ex)}} \varepsilon^{-1}$ (в случае $U(x, \varepsilon) = \psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))$ функция $\lambda(\varepsilon)$ заменяется на ее асимптотический ряд). В полученном таким образом двойном ряде возьмем сумму членов $\varepsilon^j \Phi(\xi)$ при $j \leq q$. Эту сумму и обозначим $K_q^{\text{in(ex)}}(U(x, \varepsilon))$.

Обозначим через $w^\varepsilon(x)$ ряд (5.5), (5.12). Из лемм 3.1, 5.1, определений $K_q^{\text{in(ex)}}$ и w^ε вытекает

ЛЕММА 5.3. Пусть $\lambda(\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$, $w^\varepsilon(x)$ имеют асимптотики (5.2), (5.8), (5.5), (5.12). Тогда:

а) для любого целого $N \geq 0$ справедливы равенства

$$K_N^{\text{in(ex)}}(\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i V_i^{\text{in(ex)}}(\xi),$$

$$K_N^{\text{in(ex)}}(w^\varepsilon(x)) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i W_i^{\text{in(ex)}}(\xi_3),$$

где $V_i^{\text{in(ex)}} \in \tilde{\mathcal{F}}_i$, а $W_i^{\text{in(ex)}}$ – многочлены i -го порядка;

б) справедливы представления

$$W_k^{\text{in}}(\xi_3) = \widetilde{W}_k^{\text{in}}(\xi_3) + b_k, \quad W_k^{\text{ex}}(\xi_3) = \widetilde{W}_k^{\text{ex}}(\xi_3) + b_k \cos(k_0 h) - a_k \sin(k_0 h),$$

$$\widetilde{W}_0^{\text{in}}(\xi_3) = \widetilde{W}_0^{\text{ex}}(\xi_3) \equiv 0, \quad \widetilde{W}_1^{\text{in}}(\xi_3) = a_0 k_0 \xi_3,$$

$$\widetilde{W}_1^{\text{ex}}(\xi_3) = -k_0(b_0 \sin(k_0 h) + a_0 \cos(k_0 h))\xi_3,$$

где $\widetilde{W}_i^{\text{in(ex)}}$ не зависят от λ_{q-1} , a_q и b_q при $q \geq i$,

$$V_0^{\text{ex}} \equiv 0, \quad V_1^{\text{in(ex)}} = \widetilde{V}_1^{\text{in(ex)}} - \frac{\lambda_2}{2\pi} \Pi_0^{\text{in(ex)}}, \quad \widetilde{V}_1^{\text{ex}} \equiv 0,$$

$$V_k^{\text{in(ex)}} = \widetilde{V}_k^{\text{in(ex)}} - \frac{1}{2\pi} (\lambda_{k+1} \Pi_0^{\text{in(ex)}} + \lambda_2 \Pi_{k-1}^{\text{in(ex)}}), \quad k \geq 2,$$

$$\Pi_i^{\text{in(ex)}} = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{in(ex), t+i}}(D_\xi) \rho^{-1};$$

если, кроме того, имеют место равенства (5.10), то

$$V_0^{\text{in}} \equiv \psi(0), \quad \widetilde{V}_1^{\text{in}}(\xi) = \langle \xi', [\nabla' \psi] \rangle,$$

а $\widetilde{V}_i^{\text{in(ex)}}$ не зависят от λ_{q+1} и $\Pi_{q-1}^{\text{in(ex)}}$ при $q \geq i$;

в) ряды $V_i^{\text{in(ex)}}$ (а следовательно, и ряды $\widetilde{V}_i^{\text{in(ex)}} \in \mathcal{F}_i$) являются формальными асимптотическими решениями краевых задач (5.13) при $\rho \rightarrow \infty$, $\xi_3 \geq 0$, где функции $v_q^{\text{in(ex)}}$ заменены на $V_q^{\text{in(ex)}}$, а многочлены $W_i^{\text{in(ex)}}$ (а следовательно, и $\widetilde{W}_i^{\text{in(ex)}}$) являются формальными асимптотическими решениями краевых задач (5.13) при $\rho \rightarrow \infty$, $\xi_3 < 0$, где функции $v_q^{\text{in(ex)}}$ заменены на $W_q^{\text{in(ex)}}$.

Таким образом, для согласования рядов (5.3)–(5.6) нужно показать существование решений краевых задач (5.13), имеющих на бесконечности асимптотики, равные $V_i^{\text{in(ex)}}$ при $\xi_3 \geq 0$, и степенные асимптотики, равные $W_i^{\text{in(ex)}}$ при $\xi_3 < 0$.

Обозначим через $v_{\varepsilon, N}^{\text{in(ex)}}$ частичные суммы рядов (5.6) и перейдем к доказательству ключевого утверждения настоящего параграфа.

ЛЕММА 5.4. *Существуют функция $\lambda(\varepsilon)$, имеющая асимптотику (5.2), и ряды (5.8), (5.5), (5.12), (5.6) такие, что:*

а) *коэффициенты $v_i^{\text{in(ex)}}$ являются решениями рекуррентной системы краевых задач (5.13) и для любого целого $N \geq 0$ справедливы дифференцируемые асимптотические равенства*

$$K_N^{\text{in(ex)}}(\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))) = v_{\varepsilon, N}^{\text{in(ex)}}(\xi), \quad \xi_3 \geq 0, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (5.14)$$

$$K_N^{\text{in(ex)}}(w^\varepsilon(x)) = v_{\varepsilon, N}^{\text{in(ex)}}(\xi), \quad \xi_3 < 0, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (5.15)$$

с точностью до экспоненциально малых членов;

б) *для коэффициентов этих рядов имеют место равенства (5.10) и*

$$\begin{aligned} v_0^{\text{in}} &\equiv b_0 = \psi(0), & b_0 \cos(k_0 h) - a_0 \sin(k_0 h) &= 0, \\ v_1^{\text{ex}} &= -k_0(b_0 \sin(k_0 h) + a_0 \cos(k_0 h))Y, & \lambda_2 \psi^{-1}(0) - a_0 k_0 |\omega| &= 0, \\ & & \lambda_2 R_0^{\text{ex}} + k_0(b_0 \sin(k_0 h) + a_0 \cos(k_0 h))|\omega| &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$ – ряды вида (5.8), причем коэффициенты ряда $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \lambda)$ удовлетворяют условиям (5.10). Ясно, что существует бесконечное множество таких рядов. Одной из наших задач будет однозначное определение их. Положив b_0, v_0^{in} в соответствии с первым соотношением в (5.16), в силу леммы 5.3 добиваемся выполнения равенств (5.15) и (5.14) при индексе “in” и $N = 0$. Далее, определяя a_0 из второго равенства в (5.16), получаем, что $W_0^{\text{ex}} \equiv 0$ в силу леммы 5.3, и добиваемся выполнения равенств (5.15) и (5.14) при индексе “ex” и $N = 0$. “Нулевой” шаг индукции завершен.

На следующем (первом) шаге, полагая

$$v_1^{\text{in}} = \langle [\nabla' \psi], \mathbf{X} \rangle + a_0 k_0 Y$$

и определяя v_1^{ex} в соответствии с (5.16), в силу лемм 4.4 и 5.3 и первого равенства в (5.10) получаем, что $v_1^{\text{in(ex)}} \in \mathcal{B}_1^1$ являются решениями краевых задач (5.13) и при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} v_1^{\text{in}}(\xi) - V_1^{\text{in}}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} (\lambda_2 \psi^{-1}(0) - a_0 k_0 |\omega|) \rho^{-1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left((-1)^j \frac{\lambda_2}{2\pi} P_j^{\text{in}, j}(D_\xi) + P_j^{\text{in}}(D_\xi) \right) \rho^{-1}, \\ v_1^{\text{ex}}(\xi) - V_1^{\text{ex}}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} (\lambda_2 R_0^{\text{ex}} + k_0(b_0 \sin(k_0 h) + a_0 \cos(k_0 h))|\omega|) \rho^{-1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left((-1)^j \frac{\lambda_2}{2\pi} P_j^{\text{ex}, j}(D_\xi) + P_j^{\text{ex}}(D_\xi) \right) \rho^{-1}, \quad \xi_3 \geq 0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где $P_j^{\text{ex}}(D_\xi)$, $P_j^{\text{in}}(D_\xi)$ – вполне определенные дифференциальные полиномы, и

$$\begin{aligned} v_1^{\text{in}}(\xi) - W_1^{\text{in}}(\xi_3) &= \langle [\nabla' \psi], \mathbf{q}_\omega \rangle + a_0 k_0 q_\omega - b_1, \\ v_1^{\text{ex}}(\xi) - W_1^{\text{ex}}(\xi_3) &= -k_0 q_\omega (b_0 \sin(k_0 h) + a_0 \cos(k_0 h)) - b_1 \cos(k_0 h) \\ &\quad + a_1 \sin(k_0 h), \quad \xi_3 < 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

с точностью до экспоненциально малых членов. Приравнивая нулю правые части в (5.17), во-первых, получаем два последних соотношения в (5.16), из которых последовательно находим λ_2 и $R_0^{\text{ex}} = P_0^{\text{ex},0}$, причем $\lambda_2 \neq 0$ в силу (5.16), во-вторых, определяем $P_j^{\text{in(ex)},j}$ при $j \geq 1$ (т.е. определяем $\Pi_0^{\text{in(ex)}}$ и, в частности, $\mathbf{P}_1^{\text{in},1}$) и, в-третьих, добиваемся равенств (5.14) для $N = 1$. Аналогично, приравнивая нулю правые части в (5.18), во-первых, последовательно определяем b_1 и a_1 , а во-вторых, добиваемся равенств (5.15) для $N = 1$. Первый шаг индукции завершен. Заметим, что, определив $\mathbf{P}_1^{\text{in},1}$, из (5.10) определяем $P_0^{\text{in},1}$ и, в частности, окончательно находим R_1^{in} .

На n -м шаге в силу лемм 4.3 и 5.3 получаем, что существуют решения $v_n^{\text{in(ex)}} \in \mathcal{B}_n^n$ краевых задач (5.13) и решение w_n уравнения (5.11) вида (5.12) такие, что при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства

$$v_n^{\text{in(ex)}}(\xi) - V_n^{\text{in(ex)}}(\xi) = \frac{1}{2\pi} (\Pi^{\text{in(ex)}} + \lambda_{n+1} \Pi_0^{\text{in(ex)}} + \lambda_2 \Pi_{n-1}^{\text{in(ex)}}) \quad (5.19)$$

для $\xi_3 \geq 0$, где

$$\Pi^{\text{in(ex)}} = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{in(ex)}}(D_\xi) \rho^{-1},$$

а $P_j^{\text{ex}}(D_\xi)$, $P_j^{\text{in}}(D_\xi)$ – вполне определенные дифференциальные полиномы, и

$$\begin{aligned} v_n^{\text{in}}(\xi) - W_n^{\text{in}}(\xi_3) &= b - b_n, \\ v_n^{\text{ex}}(\xi) - W_n^{\text{ex}}(\xi_3) &= a - b_n \cos(k_0 h) + a_n \sin(k_0 h) \end{aligned} \quad (5.20)$$

при $\xi_3 < 0$ с точностью до экспоненциально малых членов, где a и b – вполне определенные числа. Причем член $P_0^{\text{in},n-1}$ в Π_{n-1}^{in} определен на предыдущем шаге (см. первый шаг, который заканчивался определением $P_0^{\text{in},1}$). Тогда, приравнивая в (5.19) и (5.20) правые части нулю, во-первых, последовательно определяем λ_{n+1} , остальные члены в $\Pi_{n-1}^{\text{in(ex)}}$, b_n и a_n и, во-вторых, добиваемся выполнения равенств (5.14), (5.15) для $N = n$. Заметим, что, определив $P_1^{\text{in},n}$, из (5.10) определяем $P_0^{\text{in},n}$ и, в частности, окончательно находим R_n^{in} . Лемма доказана.

Согласование асимптотических разложений (5.3)–(5.6) закончено. Перейдем к строгому обоснованию построенных асимптотик.

Обозначим через $\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$ и $w_{\varepsilon,N}(x_3)$ частичные суммы рядов $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$ и (5.5).

ЛЕММА 5.5. Пусть функция $\lambda(\varepsilon)$ и ряды (5.8), (5.5), (5.12), (5.6) такие, что их коэффициенты удовлетворяют утверждениям леммы 5.4. Тогда для любых $0 < C_1 < C_2 < \infty$ при $C_1 \varepsilon^{1/2} < r_{\text{in(ex)}} < C_2 \varepsilon^{1/2}$ (или, что то же самое, при $C_1 \varepsilon^{-1/2} < \rho < C_2 \varepsilon^{-1/2}$) справедливы дифференцируемые равенства

$$\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon)) = v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(\xi) + O(\varepsilon^{N+1} r_{\text{in(ex)}}^{-N-1}), \quad \xi_3 \geq 0, \quad (5.21)$$

$$w_{\varepsilon,N}(x_3) = v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(\xi) + O(r_{\text{in(ex)}}^{N+1}), \quad \xi_3 < 0. \quad (5.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений K_N и $\psi_{\varepsilon}^{\text{in(ex)}}$ следует, что

$$\begin{aligned} K_N(\psi_{\varepsilon}^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon)) - \psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))) &= \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \sum_{j=0}^{\infty} H_{i-j-N-2}^{\text{in(ex)}}(\xi), \\ K_N(\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))) &= \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \sum_{j=0}^{N+1} H_{i-j}^{\text{in(ex)}}(\xi), \end{aligned} \quad (5.23)$$

где (напомним) $H_j^{\text{in(ex)}}$ – однородные функции порядка j . Аналогично получаем, что

$$\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon)) - K_N(\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))) = O(r_{\text{in(ex)}}^{N+1} + \varepsilon^N r_{\text{in(ex)}}), \quad r_{\text{in(ex)}} \rightarrow 0. \quad (5.24)$$

Из соотношений (5.14), (5.23) и (5.24) следует справедливость (5.21). Аналогично показывается справедливость (5.22). Лемма доказана.

Обозначим

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon,N}(x; t) &= \psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, \lambda(\varepsilon)) \chi\left(\frac{r}{t\varepsilon^{1/2}}\right) + \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, \lambda(\varepsilon)) \chi\left(\frac{r_{\text{ex}}}{t\varepsilon^{1/2}}\right) \\ &\quad + w_{\varepsilon,N}(x_3) \chi\left(-\frac{x_3}{t\varepsilon^{1/2}}\right) \chi\left(\frac{x_3 + h}{t\varepsilon^{1/2}}\right) + v_{\varepsilon,N}^{\text{in}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(1 - \tilde{\chi}\left(\frac{x}{t\varepsilon^{1/2}}\right)\right) \\ &\quad + v_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}\left(\frac{x^{\text{ex}}}{\varepsilon}\right) \left(1 - \tilde{\chi}\left(\frac{x^{\text{ex}}}{t\varepsilon^{1/2}}\right)\right), \end{aligned} \quad (5.25)$$

где срезающая функция $\tilde{\chi}(x)$ равна $\chi(r)$ при $x_3 > 0$ и $\chi(-x_3)$ при $x_3 < 0$, а $t > 0$ – пока произвольное фиксированное число.

ЛЕММА 5.6. Пусть функция $\lambda(\varepsilon)$ и ряды (5.8), (5.5), (5.6) удовлетворяют утверждениям леммы 5.4 и справедливо равенство (5.10). Тогда функция $u_{\varepsilon,N} \in W_2^1(\Omega_{\varepsilon})$ является решением (2.1) при $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ и $f_{\varepsilon} = F_{\varepsilon,N}$, причем при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|u_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon})} = 1 + o(1), \quad (5.26)$$

$$\|F_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon})} = O(\varepsilon^{N_1}), \quad (5.27)$$

где $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений $\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}$, $v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}$, $w_{\varepsilon,N}$ и равенства (5.10) следует, что $u_{\varepsilon,N} \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ удовлетворяет однородному граничному условию Неймана на $\partial\Omega_\varepsilon$ и

$$\begin{aligned} |\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, \lambda) - \psi(x)| &\leq C \left(\varepsilon + |\lambda - \lambda_0| \sum_{i=0}^N \left(\frac{\varepsilon}{r} \right)^i \right), \\ |\psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, \lambda)| &\leq C \left(|\lambda - \lambda_0| \sum_{i=0}^N \left(\frac{\varepsilon}{r_{\text{ex}}} \right)^i \right), \\ \|w_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon)} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad \|v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon \cap S^{\text{in(ex)}}(2t\varepsilon^{1/2}))} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Из соотношений (5.25) и (5.28) следует (5.26).

В силу (5.25) функция $F_{\varepsilon,N} = -(\Delta + \lambda(\varepsilon))u_{\varepsilon,N}$ представима в виде

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon,N} &= F_{\varepsilon,N}^{\text{in}} + F_{\varepsilon,N}^{\text{ex}} + F_{\varepsilon,N}^{\text{ch}} + F_{\varepsilon,N}^{\text{match}}, \\ F_{\varepsilon,N}^{\text{match}} &= \sum_{i=1}^4 F_{\varepsilon,N}^{\text{match},i}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x) &= -\left(1 - \tilde{\chi}\left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{t\varepsilon^{1/2}}\right)\right)(\Delta + \lambda(\varepsilon))v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}\left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{\varepsilon}\right), \\ F_{\varepsilon,N}^{\text{ch}}(x) &= -\chi\left(-\frac{x_3}{t\varepsilon^{1/2}}\right)\chi\left(\frac{x_3 + h}{t\varepsilon^{1/2}}\right)\left(\frac{d^2}{dx_3^2} + \lambda(\varepsilon)\right)w_{\varepsilon,N}(x_3), \\ F_{\varepsilon,N}^{\text{match},1(2)} &= \left(v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}\left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{\varepsilon}\right) - \psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))\right)\Delta\chi\left(\frac{r_{\text{in(ex)}}}{t\varepsilon^{1/2}}\right) \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}\left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{\varepsilon}\right) - \psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \chi\left(\frac{r_{\text{in(ex)}}}{t\varepsilon^{1/2}}\right), \\ F_{\varepsilon,N}^{\text{match},3} &= \left(v_{\varepsilon,N}^{\text{in}}\left(\frac{x^{\text{in}}}{\varepsilon}\right) - w_{\varepsilon,N}(x_3)\right)\frac{d^2}{dx_3^2}\chi\left(-\frac{x_3}{t\varepsilon^{1/2}}\right) \\ &\quad + 2\frac{\partial}{\partial x_3} \left(v_{\varepsilon,N}^{\text{in}}\left(\frac{x^{\text{in}}}{\varepsilon}\right) - w_{\varepsilon,N}(x_3)\right) \frac{d}{dx_3} \chi\left(-\frac{x_3}{t\varepsilon^{1/2}}\right), \\ F_{\varepsilon,N}^{\text{match},4} &= \left(v_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}\left(\frac{x^{\text{ex}}}{\varepsilon}\right) - w_{\varepsilon,N}(x_3)\right)\frac{d^2}{dx_3^2}\chi\left(\frac{x_3 + h}{t\varepsilon^{1/2}}\right) \\ &\quad + 2\frac{\partial}{\partial x_3} \left(v_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}\left(\frac{x^{\text{ex}}}{\varepsilon}\right) - w_{\varepsilon,N}(x_3)\right) \frac{d}{dx_3} \chi\left(\frac{x_3 + h}{t\varepsilon^{1/2}}\right). \end{aligned}$$

Поскольку коэффициенты частичных сумм $w_{\varepsilon,N}$ и $v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}$ являются решениями (5.11) и (5.13), то

$$F_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x) = \varepsilon^{N-1} \left(1 - \tilde{\chi}\left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{t\varepsilon^{1/2}}\right)\right) \sum_{i=0}^N \alpha_i(\varepsilon) v_i^{\text{in(ex)}}\left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{\varepsilon}\right), \quad (5.30)$$

$$F_{\varepsilon,N}^{\text{ch}}(x) = \varepsilon^{N+1} \chi\left(-\frac{x_3}{t\varepsilon^{1/2}}\right) \chi\left(\frac{x_3 + h}{t\varepsilon^{1/2}}\right) \sum_{i=1}^N \beta_i(\varepsilon) w_i(x_3), \quad (5.31)$$

где α_i и β_i ограничены при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как $F_{\varepsilon,N}^{\text{ch}} = 0$ в $\Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}}$, а $w_i \in C^\infty([-h, 0])$, то из (5.31) следует, что

$$\|F_{\varepsilon,N}^{\text{ch}}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{N+2}). \quad (5.32)$$

Аналогично, так как $v_i^{\text{in(ex)}}(\xi) \in \mathcal{B}_i^i$, то

$$\|F_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{\frac{N}{2}-\frac{1}{4}}) \quad (5.33)$$

в силу (5.30).

Далее, поскольку носители функций $F_{\varepsilon,N}^{\text{match},1(2)}$, $F_{\varepsilon,N}^{\text{match},3}$ и $F_{\varepsilon,N}^{\text{match},4}$ лежат соответственно в $(S^{\text{in(ex)}}(2t\varepsilon^{1/2}) \setminus S^{\text{in(ex)}}(t\varepsilon^{1/2})) \cap \Omega^{\text{in(ex)}}$, $\omega_\varepsilon \times [-2t\varepsilon^{1/2}, -t\varepsilon^{1/2}]$ и $\omega_\varepsilon \times [-h + 2t\varepsilon^{1/2}, -h + t\varepsilon^{1/2}]$, то из леммы 5.5 получаем

$$\|F_{\varepsilon,N}^{\text{match},1(2)}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{\frac{N}{2}+\frac{1}{4}}), \quad \|F_{\varepsilon,N}^{\text{match},3(4)}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{\frac{N}{2}+\frac{3}{4}}). \quad (5.34)$$

Из соотношений (5.32)–(5.34) и (5.29) вытекает оценка (5.27). Лемма доказана.

Заметим, что так как кратность собственного значения λ_0 равна $(1, 0, 0)$, то, во-первых, в силу теоремы 1.1 к нему сходится единственное и простое собственное значение возмущенной задачи (1.1), а во-вторых, для решения возмущенной краевой задачи (2.1) при λ , близких к λ_0 , равномерная оценка (2.63) приобретает вид

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C|\lambda^\varepsilon - \lambda|^{-1} \|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (5.35)$$

Применив оценку (5.35) к $u_\varepsilon = u_{\varepsilon,N}$ при $\lambda = \lambda(\varepsilon)$, в силу леммы 5.6 получаем

$$1 + o(1) \leq \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} = O\left(\frac{\varepsilon^{N_1}}{|\lambda^\varepsilon - \lambda(\varepsilon)|}\right),$$

причем $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Отсюда в силу произвольности выбора N следует, что степенная асимптотика собственного значения λ^ε совпадает с асимптотикой $\lambda(\varepsilon)$ (т.е. имеет вид (5.2)). Значение (5.7) для λ_2 легко вычисляется из равенств (5.10) и (5.16).

Осталось обосновать асимптотики собственной функции. Пусть ψ^ε – нормированная в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ^ε . Обозначим

$$\tilde{u}_{\varepsilon,N} = u_{\varepsilon,N} - (u_{\varepsilon,N}, \psi^\varepsilon)_{\Omega_\varepsilon} \psi^\varepsilon, \quad (5.36)$$

где (напомним) $(\cdot, \cdot)_Q$ – скалярное произведение в $L_2(Q)$. Тогда

$$(\tilde{u}_{\varepsilon,N}, \psi^\varepsilon)_{\Omega_\varepsilon} = 0, \quad (5.37)$$

а функция $\tilde{u}_{\varepsilon,N}$ является решением краевой задачи (2.1) при $\lambda = \lambda^\varepsilon$ и

$$f_\varepsilon = F_{\varepsilon,N} + (\lambda(\varepsilon) - \lambda^\varepsilon)u_{\varepsilon,N}. \quad (5.38)$$

Заметим, что так как λ_0 имеет кратность $(1, 0, 0)$, то в силу (5.37) оценка (2.64) приобретает вид

$$\|\tilde{u}_{\varepsilon,N}\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (5.39)$$

С другой стороны, в силу (5.38) и леммы 5.6

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{N_1}), \quad (5.40)$$

где N_1 растёт неограниченно вместе с N . Из (5.39) и (5.40) следует, что

$$\|\tilde{u}_{\varepsilon,N}\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{N_1}). \quad (5.41)$$

Из соотношений (5.36), (5.41) и (5.26) вытекает, что существует $\alpha_N(\varepsilon) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ такое, что

$$\|u_{\varepsilon,N} - \alpha_N(\varepsilon)\psi^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{N_1}). \quad (5.42)$$

Из (5.25), (5.42), лемм 5.4, 5.1 и 5.2 и в силу произвольности выбора N и t следует, что собственная функция (с учетом замечания 5.2) имеет асимптотики (5.3)–(5.6). Формулы (5.7) легко вычисляются из (5.16), первого равенства в (5.10) и (5.9). Теорема 5.1 доказана полностью.

§ 6. Асимптотики для кратности $(1, 0, 0)$. Случай вырождения по месту присоединения тонкой “ручки”

Целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть кратность λ_0 равна $(1, 0, 0)$, $\psi = \psi_1^{\text{in}}$ – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ собственная функция задачи Неймана в Ω^{in} и

$$\psi(0) = 0, \quad [\nabla' \psi] \neq 0, \quad \cos(k_0 h) \neq 0. \quad (6.1)$$

Тогда:

а) асимптотики собственного значения λ^ε краевой задачи (1.1), сходящегося к λ_0 , и соответствующей собственной функции Ψ^ε имеют вид

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \sum_{j=3}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_j, \quad (6.2)$$

$$\Psi^\varepsilon(x) = \psi(x) + \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j^{\text{in}}(x) \quad \text{в } \Omega^{\text{in}} \setminus S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi_j^{\text{in}} \in \mathcal{A}_{j-1}^{\text{in}}, \quad (6.3)$$

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{j=3}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j^{\text{ex}}(x) \quad \text{в } \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi_j^{\text{ex}} \in \mathcal{A}_{j-1}^{\text{ex}}, \quad (6.4)$$

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j w_j(x_3) \quad \text{в } \mathcal{K}^\varepsilon \setminus (S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2})), \quad w_j \in C^\infty([-h, 0]), \quad (6.5)$$

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j v_j^{\text{in(ex)}} \left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{\varepsilon} \right) \quad \text{в } S^{\text{in(ex)}}(2\varepsilon^{1/2}) \cap \Omega_\varepsilon, \quad v_j^{\text{in(ex)}} \in \mathcal{B}_j^j, \quad v_1^{\text{ex}} = 0 \quad (6.6)$$

по норме W_2^1 ;

б) для главных членов асимптотик имеют место равенства

$$\lambda_3 = 2\pi \langle [\nabla' \psi], C(\omega) [\nabla' \psi] \rangle, \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} v_1^{\text{in}} &= \langle \mathbf{X}, [\nabla' \psi] \rangle, & w_1(t) &= \frac{\langle \mathbf{q}_\omega, [\nabla' \psi] \rangle}{\sin(k_0 h)} \sin(k_0(t+h)), \\ v_2^{\text{ex}} &= -\frac{k_0 \langle \mathbf{q}_\omega, [\nabla' \psi] \rangle}{\sin(k_0 h)} Y, & \psi_3^{\text{ex}} &= \frac{k_0 \langle \mathbf{q}_\omega, [\nabla' \psi] \rangle |\omega|}{\sin(k_0 h)} G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda_0). \end{aligned} \quad (6.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Равенство в (6.1) означает вырожденность по месту присоединения тонкой “ручки”.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Из (6.7) и леммы 4.4 следует, что $\lambda_3 > 0$, т.е. в этом случае главный возмущенный член асимптотики знакоопределен (в отличие от невырожденного случая, рассмотренного в предыдущем параграфе), а само собственное значение при возмущении увеличивается.

Заметим, что в случае $\psi(0) = 0$ все члены ряда $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \lambda)$, определяемого равенством (5.8), стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Поэтому в этом параграфе под $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \lambda)$ и $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \lambda)$ будем понимать следующие ряды:

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \lambda) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\lambda_0 - \lambda) R_{i+1}^{\text{in}}(D_y) G^{\text{in}}(x, 0, \lambda), \\ \psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \lambda) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\lambda_0 - \lambda) R_i^{\text{ex}}(D_y) G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Поскольку

$$P_1(D_x) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

то, обозначив через $\mathbf{P}_1$ вектор (a_1, a_2) , получаем

$$P_1(D_x)u = \langle \mathbf{P}_1, \nabla' u \rangle, \quad [P_1(D_x)u] = \langle \mathbf{P}_1, [\nabla' u] \rangle.$$

Отметим, что в этих обозначениях в рассматриваемом случае $[R_1^{\text{in}} \psi] = \langle \mathbf{P}_1^{\text{in},1}, [\nabla' \psi] \rangle$. С учетом последнего равенства из определения рядов $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$ и леммы 3.1 вытекает следующий аналог лемм 5.1, 5.2.

ЛЕММА 6.1. Коэффициенты рядов (6.9) удовлетворяют утверждениям леммы 5.1. Если $\lambda(\varepsilon)$ имеет асимптотику вида (6.2) и

$$\langle \mathbf{P}_1^{\text{in},1}, [\nabla' \psi] \rangle = 1, \quad [R_i^{\text{in}} \psi] = 0, \quad i \geq 2, \quad (6.10)$$

то ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))$ представимы в виде (6.3), (6.4), причем

$$\psi_3^{\text{ex}}(x) = -\lambda_3 R_0^{\text{ex}} G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda_0). \quad (6.11)$$

Краевые задачи для коэффициентов w_j и $v_j^{\text{in(ex)}}$ получаются таким же образом, как и в предыдущем параграфе, и имеют вид (5.11) и (5.13), а следовательно, решения уравнений (5.11) имеют вид (5.12).

Обозначим через $w^\varepsilon(x)$ ряд (6.5), (5.12). Из лемм 3.1, 6.1, определений $K_q^{\text{in(ex)}}$ и w^ε вытекает следующий аналог леммы 5.3.

ЛЕММА 6.2. Пусть $\lambda(\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$, $w^\varepsilon(x)$ имеют асимптотики (6.2), (6.9), (6.5), (5.12). Тогда:

- а) справедливы утверждения а) леммы 5.3;
б) справедливы представления

$$\begin{aligned} W_0^{\text{in(ex)}}(\xi_3) &\equiv 0, & W_k^{\text{in}}(\xi_3) &= \widetilde{W}_k^{\text{in}}(\xi_3) + b_k, \\ W_k^{\text{ex}}(\xi_3) &= \widetilde{W}_k^{\text{ex}}(\xi_3) + b_k \cos(k_0 h) - a_k \sin(k_0 h), & k &\geq 1, \\ \widetilde{W}_1^{\text{in(ex)}}(\xi_3) &\equiv 0, & \widetilde{W}_2^{\text{in}}(\xi_3) &= a_1 k_0 \xi_3, \\ \widetilde{W}_2^{\text{ex}}(\xi_3) &= -k_0(b_1 \sin(k_0 h) + a_1 \cos(k_0 h))\xi_3, \end{aligned}$$

где $\widetilde{W}_i^{\text{in(ex)}}$ не зависят от λ_{q-1} , a_q и b_q при $q \geq i$,

$$\begin{aligned} V_0^{\text{in(ex)}} &= V_1^{\text{ex}} \equiv 0, & V_1^{\text{in}} &= \widetilde{V}_1^{\text{in}} - \frac{\lambda_3}{2\pi} \Pi_0^{\text{in}}, & V_2^{\text{ex}} &= -\frac{\lambda_3}{2\pi} \Pi_0^{\text{ex}}, \\ V_k^{\text{in}}(\xi) &= \widetilde{V}_k^{\text{in}}(\xi) - \frac{1}{2\pi}(\lambda_{k+2} \Pi_0^{\text{in}} + \lambda_3 \Pi_{k-1}^{\text{in}}), \\ V_{k+1}^{\text{ex}}(\xi) &= \widetilde{V}_{k+1}^{\text{ex}}(\xi) - \frac{1}{2\pi}(\lambda_{k+2} \Pi_0^{\text{ex}} + \lambda_3 \Pi_{k-1}^{\text{ex}}), & k &\geq 2, \\ \Pi_j^{\text{in}} &= \sum_{t=\delta_j^0}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{in}, t+j}(D_\xi) \rho^{-1}, & \Pi_j^{\text{ex}} &= \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{ex}, t+j}(D_\xi) \rho^{-1}; \end{aligned}$$

если, кроме того, имеют место равенства (6.10), то $\widetilde{V}_1^{\text{in}}(\xi) = \langle \xi', [\nabla' \psi] \rangle$, а $\widetilde{V}_k^{\text{in}}$ и $\widetilde{V}_{k+1}^{\text{ex}}$ не зависят от λ_{q+2} и $\Pi_{q-1}^{\text{in(ex)}}$ при $q \geq k$;
в) справедливы утверждения в) леммы 5.3.

Напомним, что здесь (и далее) δ_j^k – символ Кронекера.

ЛЕММА 6.3. Существуют функция $\lambda(\varepsilon)$, имеющая асимптотику (6.2), и ряды (6.9), (6.5), (5.12), (6.6) такие, что:

- а) справедливы утверждения а) леммы 5.4;
б) для коэффициентов этих рядов имеют место равенства (6.7), (6.10) и

$$\begin{aligned} v_1^{\text{in}}(\xi) &= \langle [\nabla' \psi], \mathbf{X} \rangle, & b_1 &= \langle \mathbf{q}_\omega, [\nabla' \psi] \rangle, \\ b_1 \cos(k_0 h) - a_1 \sin(k_0 h) &= 0, & v_2^{\text{ex}} &= -k_0(b_1 \sin(k_0 h) + a_1 \cos(k_0 h))Y, \\ \lambda_3 R_0^{\text{ex}} + k_0(b_1 \sin(k_0 h) + a_1 \cos(k_0 h))|\omega| &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и при доказательстве леммы 5.4, на ряды (6.9) сразу наложим нормирующие условия (6.10). Тогда в силу леммы 6.2 получаем справедливость равенств (5.15), (5.14) для $N = 0$.

На следующем (первом) шаге, определяя v_1^{in} в соответствии с (6.12), в силу (6.10) и лемм 4.4 и 6.2 получаем, что $v_1^{\text{in}} \in \mathcal{B}_1^1$ является решением (5.13) и при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} v_1^{\text{in}}(\xi) - V_1^{\text{in}}(\xi) &= \left(\langle [\nabla' \psi], C(\omega) \nabla' \rho^{-1} \rangle - \frac{\lambda_3}{2\pi} \langle \mathbf{P}_1^{\text{in}, 1}, \nabla' \rho^{-1} \rangle \right) \\ &+ \sum_{j=2}^{\infty} \left((-1)^j \frac{\lambda_3}{2\pi} P_j^{\text{in}, j}(D_\xi) + P_j^{\text{in}}(D_\xi) \right) \rho^{-1}, & \xi_3 &\geq 0, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где $P_j^{\text{in}}(D_\xi)$ – вполне определенные дифференциальные полиномы, не зависящие от $\mathbf{P}_1^{\text{in},1}$ и $P_0^{\text{in},1}$ (т.е. не зависящие от R_1^{in}), и

$$v_1^{\text{in}}(\xi) - W_1^{\text{in}}(\xi_3) = \langle \mathbf{q}_\omega, [\nabla' \psi] \rangle - b_1, \quad \xi_3 < 0, \quad (6.14)$$

с точностью до экспоненциально малых членов. Приравнивая нулю первую скобку в правой части (6.13) и учитывая симметричность матрицы $C(\omega)$, получаем

$$C(\omega)[\nabla' \psi] = \frac{\lambda_3}{2\pi} \mathbf{P}_1^{\text{in},1}. \quad (6.15)$$

Нелинейные уравнения (6.15) и первое уравнение в (6.10) представляют собой систему трех уравнений с тремя неизвестными: λ_3 и компоненты вектора $\mathbf{P}_1^{\text{in},1}$. Умножая обе части (6.15) на $[\nabla' \psi]$, в силу первого равенства в (6.10) получаем для λ_3 значение (6.7). Поскольку $\lambda_3 \neq 0$, то из (6.15) находим $\mathbf{P}_1^{\text{in},1}$. Далее, приравнивая нулю остальные члены в правой части (6.13), определяем полиномы $P_j^{\text{in},j}$ при $j \geq 2$ (а следовательно, определяем Π_0^{in}) и добиваемся выполнения равенства (5.14) для $N = 1$. И наконец, выбирая последовательно b_1, a_1 в соответствии с (6.12), получаем в силу леммы 6.2 и (6.14) справедливость равенств (5.15) для $N = 1$. Первый шаг доказательства завершен. Таким образом, на первом шаге определены λ_3, a_1, b_1 и Π_0^{in} .

Второй шаг является типичным (индуктивным) для дальнейшего построения коэффициентов. Положим v_2^{ex} в соответствии с (6.12). Тогда в силу лемм 4.4 и 6.2 функция v_2^{ex} является решением краевой задачи (5.13), причем при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} v_2^{\text{ex}}(\xi) - V_2^{\text{ex}}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} (\lambda_3 R_0^{\text{ex}} + k_0(b_1 \sin(k_0 h) + a_1 \cos(k_0 h))|\omega|) \rho^{-1} \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left((-1)^j \frac{\lambda_3}{2\pi} P_j^{\text{ex},j}(D_\xi) + P_j^{\text{ex}}(D_\xi) \right) \rho^{-1}, \quad \xi_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

(где $P_j^{\text{ex}}(D_\xi)$ – вполне определенные дифференциальные полиномы), и

$$v_2^{\text{ex}}(\xi) - W_2^{\text{ex}}(\xi_3) = a - b_2 \cos(k_0 h) + a_2 \sin(k_0 h), \quad \xi_3 < 0 \quad (6.17)$$

(где a – вполне определенная постоянная), с точностью до экспоненциально малых членов. Приравнивая нулю правые части в (6.16), во-первых, получаем последнее соотношение в (6.12), во-вторых, определяем $P_j^{\text{ex},j}$ при $j \geq 1$ (т.е. определяем Π_0^{ex}) и, в-третьих, добиваемся выполнения равенства (5.14) при $N = 2$ для индекса “ex”. Далее, в силу лемм 4.3 и 6.2 получаем, что существуют решение $v_2^{\text{in}} \in \mathcal{B}_2^2$ краевой задачи (5.13) и решение w_2 уравнения (5.11) вида (5.12) такие, что при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства

$$v_2^{\text{in}}(\xi) - V_2^{\text{in}}(\xi) = \frac{1}{2\pi} (\Pi^{\text{in}} + \lambda_4 \Pi_0^{\text{in}} + \lambda_3 \Pi_1^{\text{in}}) \quad (6.18)$$

для $\xi_3 \geq 0$, где

$$\Pi^{\text{in}} = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{in}}(D_\xi) \rho^{-1},$$

а $P_j^{\text{in}}(D_\xi)$ – вполне определенные дифференциальные полиномы, и

$$v_2^{\text{in}}(\xi) - W_2^{\text{in}}(\xi_3) = b - b_2 \quad (6.19)$$

при $\xi_3 < 0$ с точностью до экспоненциально малых членов, где b – вполне определенное число. Приравнявая нулю правые части в (6.19) и (6.17), последовательно определяем b_2 и a_2 и добиваемся выполнения равенства (5.15) для $N = 2$. Поскольку в Π_0^{in} нет члена порядка ρ^{-1} и $\lambda_3 \neq 0$, то, приравнявая в правой части (6.18) коэффициенты при ρ^{-1} , определяем $P_0^{\text{in},1}$. Приравнявая в (6.18) коэффициенты при ρ^{-2} , получаем систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными (λ_4 и две компоненты вектора $\mathbf{P}_1^{\text{in},2}$):

$$\lambda_3 \mathbf{P}_1^{\text{in},2} + \lambda_4 \mathbf{P}_1^{\text{in},1} = \mathbf{P}, \quad (6.20)$$

где $\mathbf{P}$ – вполне определенный вектор. Третьим (линейным) уравнением является второе соотношение в (6.10) при $i = 2$. Причем так как дифференциальный полином $P_2^{\text{in},2}$ уже определен на первом шаге, а $\psi(0) = 0$, то его можно переписать в виде

$$\langle \mathbf{P}_1^{\text{in},2}, [\nabla' \psi] \rangle = P, \quad (6.21)$$

где P – вполне определенное число. Легко видеть, что определитель системы уравнений (6.20), (6.21) равен $-\lambda_3$. Поскольку $\lambda_3 \neq 0$, то, разрешая эту систему, найдем λ_4 и $P_1^{\text{in},2}(D_\xi)$. Приравнявая нулю в правой части (6.18) коэффициенты при остальных степенях ρ , окончательно определяем Π_1^{in} и добиваемся выполнения равенства (5.14) для $N = 2$ и индекса “in”. Таким образом, на втором шаге определяются λ_4 , a_2 , b_2 , Π_1^{in} и Π_0^{ex} .

Такая же процедура выполняется на следующих шагах. На n -м шаге последовательно определяются b_n , a_n , Π_{n-2}^{ex} , λ_{n+2} и Π_{n-1}^{in} . Заметим, что матрица системы линейных уравнений для λ_{n+2} и $\mathbf{P}_1^{\text{in},n}$ – та же самая, что и у системы уравнений (6.20), (6.21) для λ_4 и $\mathbf{P}_1^{\text{in},2}$. Лемма доказана.

Обоснование построенных асимптотик повторяет доказательство, приведенное в предыдущем параграфе, а равенства (6.8) вытекают из равенств (6.12) и (6.11).

Теорема 6.1 доказана.

§ 7. Асимптотики для кратности $(1, 0, 0)$. Случай вырождения по длине тонкой “ручки”

Целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть кратность

$$\lambda_0 = \left(\frac{\pi(2m+1)}{2h} \right)^2 \quad (7.1)$$

равна $(1, 0, 0)$, $\psi = \psi_1^{\text{in}}$ – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ собственная функция задачи Неймана в Ω^{in} и

$$\lambda_3 = 2\pi \langle [\nabla' \psi], C(\omega) [\nabla' \psi] \rangle + \psi^2(0) \lambda_0 q_\omega |\omega| \neq 0. \quad (7.2)$$

Тогда:

- а) асимптотики собственного значения λ^ε краевой задачи (1.1), сходящиеся к λ_0 , и соответствующей собственной функции Ψ^ε имеют вид (6.2), (6.3), (5.4)–(5.6) по норме W_2^1 ;
 б) для главных членов асимптотик имеют место равенства (7.2),

$$\begin{aligned}\psi_2^{\text{ex}} &= (-1)^{m+1} \psi(0) k_0 |\omega| G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda_0), & w_0(t) &= \psi(0) \cos(k_0 t), \\ v_0^{\text{in}} &\equiv \psi(0), & v_1^{\text{ex}} &= (-1)^m \psi(0) k_0 Y.\end{aligned}\quad (7.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Равенство (7.1) означает вырожденность по длине тонкой “ручки”. Ясно, что в этом случае $\cos(k_0 h) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. В силу леммы 4.4 из (7.2) следует, что величина λ_3 не является знакоопределенной, но ее знак (в отличие от невырожденного случая) зависит не от длины h тонкой “ручки”, а от соотношения между $[\nabla' \psi]$ и $\psi(0)$, т. е. фактически от места присоединения тонкой “ручки”. Подобный эффект возникает и при возмущении, осуществляемом вырезанием в области малого отверстия [38] и узкого тороидального тела [39].

Всюду в этом параграфе

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \lambda) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\lambda_0 - \lambda) R_{i+1}^{\text{in}}(D_y) G^{\text{in}}(x, 0, \lambda), \\ \psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \lambda) &= \varepsilon^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\lambda_0 - \lambda) R_i^{\text{ex}}(D_y) G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda).\end{aligned}\quad (7.4)$$

Из определения $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$ и леммы 3.1 вытекает следующий аналог леммы 5.2.

ЛЕММА 7.1. Коэффициенты рядов (7.4) удовлетворяют утверждениям леммы 5.1. Если $\lambda(\varepsilon)$ имеет асимптотику вида (6.2) и

$$[R_1^{\text{in}} \psi] = 1, \quad [R_i^{\text{in}} \psi] = 0, \quad i \geq 2, \quad (7.5)$$

то ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))$ представимы в виде (6.3), (5.4), причем

$$\psi_2^{\text{ex}}(x) = -\lambda_3 R_0^{\text{ex}} G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda_0). \quad (7.6)$$

Краевые задачи для коэффициентов w_j и $v_j^{\text{in(ex)}}$ получаются таким же образом, как и в предыдущем параграфе, и имеют вид (5.11) и (5.13).

Вновь обозначим через $w^\varepsilon(x)$ ряд (5.5), (5.12). Из лемм 3.1, 7.1, определений $K_q^{\text{in(ex)}}$ и w^ε вытекает следующий аналог леммы 5.3.

ЛЕММА 7.2. Пусть $\lambda(\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$, $w^\varepsilon(x)$ имеют асимптотики (6.2), (7.4), (5.5), (5.12) и $a_0 = 0$. Тогда:

а) справедливы утверждения а) леммы 5.3;

б) справедливы представления

$$\begin{aligned} W_0^{\text{in}}(\xi_3) &\equiv b_0, & W_0^{\text{ex}}(\xi_3) &\equiv 0, \\ W_k^{\text{in}}(\xi_3) &= \widetilde{W}_k^{\text{in}}(\xi_3) + b_k, & W_k^{\text{ex}}(\xi_3) &= \widetilde{W}_k^{\text{ex}}(\xi_3) + (-1)^m a_k, \quad k \geq 1, \\ \widetilde{W}_1^{\text{in(ex)}}(\xi_3) &\equiv 0, & \widetilde{W}_2^{\text{in}}(\xi_3) &= -b_0 \frac{\lambda_0 \xi_3^2}{2} + a_1 k_0 \xi_3, \end{aligned}$$

где $\widetilde{W}_k^{\text{in(ex)}}$ не зависят от λ_{q-1} , a_q и b_q при $q \geq k$,

$$\begin{aligned} V_0^{\text{ex}} &\equiv 0, & V_1^{\text{in(ex)}} &= \widetilde{V}_1^{\text{in(ex)}} - \frac{\lambda_3}{2\pi} \Pi_0^{\text{in(ex)}}, & \widetilde{V}_1^{\text{ex}} &\equiv 0, \\ V_2^{\text{in(ex)}} &= \widetilde{V}_2^{\text{in(ex)}} - \frac{\lambda_4}{2\pi} \Pi_0^{\text{in(ex)}} - \frac{\lambda_3}{2\pi} \Pi_1^{\text{in(ex)}}, \\ V_k^{\text{in(ex)}} &= \widetilde{V}_k^{\text{in(ex)}} - \frac{\lambda_{k+2}}{2\pi} \Pi_0^{\text{in(ex)}} - \frac{\lambda_4}{2\pi} \Pi_{k-2}^{\text{in(ex)}} - \frac{\lambda_3}{2\pi} \Pi_{k-1}^{\text{in(ex)}}, & k &\geq 3, \\ \Pi_i^{\text{in}} &= \sum_{t=\delta_0^i}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{in}, t+i}(D_\xi) \rho^{-1}, & \Pi_i^{\text{ex}} &= \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{ex}, t+i}(D_\xi) \rho^{-1}; \end{aligned}$$

если, кроме того, имеют место равенства (7.5), то

$$V_0^{\text{in}} \equiv \psi(0), \quad \widetilde{V}_1^{\text{in}}(\xi) = \langle \xi', [\nabla' \psi] \rangle, \quad \widetilde{V}_2^{\text{in}}(\xi) = Z_2(\xi) - \psi(0) \frac{\lambda_0}{6} \rho^2,$$

где $Z_2(x) - \psi(0) \frac{\lambda_0}{6} r^2$ – второй член разложения в ряд Тейлора функции $\psi(x)$, $\widetilde{V}_j^{\text{in}}$ и $\widetilde{V}_j^{\text{ex}}$ не зависят от λ_{q+2} и $\Pi_{q-2}^{\text{in(ex)}}$ при $q \geq j$;

в) справедливы утверждения в) леммы 5.3.

ЛЕММА 7.3. Существуют функция $\lambda(\varepsilon)$, имеющая асимптотику (6.2), и ряды (7.4), (5.5), (5.12), (5.6) такие, что:

а) справедливы утверждения а) леммы 5.4;

б) для коэффициентов этих рядов имеют место равенства (7.5) и

$$\begin{aligned} v_0^{\text{in}} &\equiv b_0 = \psi(0), & a_0 &= 0, & v_1^{\text{ex}} &= (-1)^m b_0 k_0 Y, \\ \lambda_3 R_0^{\text{ex}} &= (-1)^m b_0 k_0 |\omega|. \end{aligned} \quad (7.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вновь на ряды (7.4) наложим нормирующие условия (7.5) заранее. Выбирая коэффициенты $v_0^{\text{in}} \equiv b_0 = \psi(0)$, $a_0 = 0$ (т.е. в соответствии с (7.7)), получаем в силу леммы 7.2 и условия (7.5) справедливость равенств (5.15), (5.14) для $N = 0$.

На следующем (первом) шаге положим v_1^{ex} в соответствии с (7.7). Тогда в силу лемм 4.4 и 7.2 функция $v_1^{\text{ex}} \in \mathcal{B}_1^1$ является решением краевой задачи (5.13), причем при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} v_1^{\text{ex}}(\xi) - V_1^{\text{ex}}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} (\lambda_3 R_0^{\text{ex}} + (-1)^{m+1} b_0 k_0 |\omega|) \rho^{-1} \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left((-1)^j \frac{\lambda_3}{2\pi} P_j^{\text{ex}, j}(D_\xi) + P_j^{\text{ex}}(D_\xi) \right) \rho^{-1}, \quad \xi_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

(где $P_j^{\text{ex}}(D_\xi)$ – вполне определенные дифференциальные полиномы), и

$$v_1^{\text{ex}}(\xi) - W_1^{\text{ex}}(\xi_3) = (-1)^m (b_0 k_0 q_\omega - a_1), \quad \xi_3 < 0, \quad (7.9)$$

с точностью до экспоненциально малых членов. Приравнивая нулю правую часть в (7.9), во-первых, добиваемся выполнения равенства (5.15) при $N = 1$ для индекса “ex”, а во-вторых, получаем

$$a_1 = b_0 k_0 q_\omega. \quad (7.10)$$

Далее, так же, как и на первом шаге в лемме 6.3, полагая $v_1^{\text{in}} = \langle [\nabla' \psi], \mathbf{X} \rangle$, в силу (7.5) и лемм 4.4 и 7.2 получаем, что $v_1^{\text{in}} \in \mathcal{B}_1^1$ является решением (5.13) и при $\rho \rightarrow \infty$ вновь справедливы равенства (6.13), где $P_j^{\text{in}}(D_\xi)$ – вполне определенные дифференциальные полиномы, и (6.14). Приравнивая правую часть (6.14) нулю, находим b_1 и получаем равенство (5.15) для индекса “in” при $N = 1$. Приравнивая нулю первую скобку в правой части (6.13), вновь получаем нелинейные уравнения (6.15). Поскольку $\psi(0) \neq 0$, то $[R_1^{\text{in}} \psi] = \langle \mathbf{P}_1^{\text{in},1}, [\nabla' \psi] \rangle + P_0^{\text{in},1} \psi(0)$. Поэтому первое соотношение в (7.5) имеет вид

$$\langle \mathbf{P}_1^{\text{in},1}, [\nabla' \psi] \rangle + P_0^{\text{in},1} \psi(0) = 1, \quad (7.11)$$

отличный от первого равенства в (6.10). Уравнения (6.15), (7.11) представляют собой недоопределенную систему трех уравнений с четырьмя неизвестными (три коэффициента полинома R_1^{in} и λ_3). Поэтому точное определение этих величин переносится на следующий шаг. Тем не менее, выберем произвольное решение системы уравнений (6.15), (7.11) такое, что $\lambda_3 \neq 0$. Тогда, приравнивая нулю правые части в (7.8) и (6.13), добиваемся выполнения равенств (5.14) для $N = 1$ и, в частности, получаем последнее соотношение в (7.7). Заметим, что на этом шаге (в отличие от предыдущего параграфа) λ_3 и $\Pi_0^{\text{in(ex)}}$ не определены однозначно, но после определения $\lambda_3 \neq 0$ ряды $\Pi_0^{\text{in(ex)}}$ определяются однозначно.

На втором шаге вначале положим

$$v_2^{\text{in}} = \widehat{Y} - \psi(0) \lambda_0 Y^{-1} + a_1 k_0 Y,$$

где $\widehat{Y}$ и Y^{-1} – функции из лемм 4.5, 4.6, причем Z_2 – гармонический полином из второго члена разложения функции $\psi(x)$ в ряд Тейлора. С учетом уже произведенного выбора v_0^{in} и лемм 4.4–4.6 получаем, что $v_2^{\text{in}} \in \mathcal{B}_2^2$ является решением (5.13), причем в силу леммы 7.2 и первого соотношения в (7.7) при $\rho \rightarrow \infty$ получаем равенства

$$\begin{aligned} v_2^{\text{in}}(\xi) - V_2^{\text{in}}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} (\lambda_3 P_0^{\text{in},1} - a_1 k_0 |\omega|) \rho^{-1} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (\lambda_4 P_j^{\text{in},j} + \lambda_3 P_j^{\text{in},j+1} + P_j^{\text{in}}) \rho^{-1} \end{aligned} \quad (7.12)$$

при $\xi_3 > 0$, где $P_j^{\text{in}}(D_\xi)$ – вполне определенные дифференциальные полиномы, и (6.19) при $\xi_3 < 0$ с точностью до экспоненциально малых членов, где b – вполне

определенное число. Приравнявая нулю правую часть в (6.19), находим b_2 и получаем равенство (5.15) для индекса “in” при $N = 2$. Приравнявая нулю коэффициент при ρ^{-1} в правой части (7.12), получаем недостающее нелинейное уравнение для компоненты $P_0^{\text{in},1}$ и значения λ_3 :

$$a_1 k_0 |\omega| = \lambda_3 P_0^{\text{in},1}. \quad (7.13)$$

Легко видеть, что необходимым и достаточным условием разрешимости (6.15), (7.13) и (7.11) является равенство

$$\lambda_3 = 2\pi \langle [\nabla' \psi], C(\omega) [\nabla' \psi] \rangle + a_1 k_0 \psi(0) |\omega|. \quad (7.14)$$

Из соотношений (7.14), (7.10) и (7.7) следует значение (7.2) для λ_3 . Поскольку $\lambda_3 \neq 0$ в силу (7.2), то теперь уже операторные ряды $\Pi_0^{\text{in(ex)}}$ определены однозначно. Более того, из (7.13) определен и первый член $P_0^{\text{in},1}$ ряда Π_1^{in} . Далее, в силу лемм 4.3, 7.2 существует решение $v_2^{\text{ex}} \in \mathcal{B}_2^2$ краевой задачи (5.13), не зависящее от λ_{j+3} и $\Pi_j^{\text{in(ex)}}$ для любых $j \geq 0$ и такое, что при $\rho \rightarrow \infty$ имеем

$$v_2^{\text{ex}}(\xi) - V_2^{\text{ex}}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\lambda_4 P_j^{\text{ex},j} + \lambda_3 P_j^{\text{ex},j+1} + P_j^{\text{ex}}) \rho^{-1} \quad (7.15)$$

при $\xi_3 > 0$, где $P_j^{\text{ex}}(D_\xi)$ – вполне определенные дифференциальные полиномы, и

$$v_2^{\text{ex}}(\xi) - W_2^{\text{ex}}(\xi_3) = a - (-1)^m a_2 \quad (7.16)$$

при $\xi_3 < 0$, где a – вполне определенная постоянная. Приравнявая правую часть (7.16) нулю, находим a_2 и получаем равенство (5.15) для индекса “ex” при $N = 2$. Приравнявая нулю коэффициент при ρ^{-2} в правой части (7.12), получаем два уравнения (6.20) для компонент вектора $\mathbf{P}_1^{\text{in},2}$ и значения λ_4 . Заметим, что так как Π_0^{in} уже определено, то второе соотношение в (7.5) при $i = 2$ можно переписать в виде

$$\langle \mathbf{P}_1^{\text{in},2}, [\nabla' \psi] \rangle + P_0^{\text{in},2} \psi(0) = p, \quad (7.17)$$

где p – вполне определенная величина. Уравнения (6.20) и (7.17) представляют собой недоопределенную систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными (компоненты вектора $\mathbf{P}_1^{\text{in},2}$ и значения $P_0^{\text{in},2}$ и λ_4). Точное определение этих величин вновь переносится на следующий шаг (так же, как и остальных членов рядов $\Pi_1^{\text{in(ex)}}$, за исключением члена $P_0^{\text{in},1}$, определенного на этом шаге). Тем не менее (так же, как и на первом шаге), выберем произвольное решение системы уравнений (6.20), (7.17). Тогда, приравнявая нулю правые части в (7.12) и (7.15), добиваемся равенств (5.14) для $N = 2$. Заметим, что после определения λ_4 ряды $\Pi_1^{\text{in(ex)}}$ доопределяются однозначно.

Третий шаг является типичным (индуктивным) для построения коэффициентов (в отличие от предыдущего параграфа, где таковым являлся второй шаг). В силу лемм 4.3, 7.2 получаем, что существуют решения $v_3^{\text{in(ex)}} \in \mathcal{B}_3^3$ краевой задачи

(5.13), не зависящие от λ_{q+3} и $\Pi_q^{\text{in(ex)}}$ для любых $q \geq 1$ и такие, что при $\rho \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} v_3^{\text{in}}(\xi) - V_3^{\text{in}}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} (\lambda_3 P_0^{\text{in},2} + \lambda_4 P_0^{\text{in},1} + P_0^{\text{in}}) \rho^{-1} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (\lambda_5 P_j^{\text{in},j} + \lambda_4 P_j^{\text{in},j+1} + \lambda_3 P_j^{\text{in},j+2} + P_j^{\text{in}}) \rho^{-1}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$v_3^{\text{ex}}(\xi) - V_3^{\text{ex}}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\lambda_5 P_j^{\text{ex},j} + \lambda_4 P_j^{\text{ex},j+1} + \lambda_3 P_j^{\text{ex},j+2} + P_j^{\text{ex}}) \rho^{-1} \quad (7.19)$$

при $\xi_3 > 0$, где $P_j^{\text{in(ex)}}(D_\xi)$ – вполне определенные дифференциальные полиномы, и

$$\begin{aligned} v_3^{\text{in}}(\xi) - W_3^{\text{in}}(\xi_3) &= b - b_3, \\ v_3^{\text{ex}}(\xi) - W_3^{\text{ex}}(\xi_3) &= a - (-1)^m a_3 \end{aligned} \quad (7.20)$$

при $\xi_3 < 0$, где a и b – вполне определенные числа. Приравнивая правые части (7.20) нулю, находим a_3 и b_3 и получаем равенство (5.15) при $N = 3$. Приравнивая нулю коэффициент при ρ^{-1} в правой части (7.18), получаем недостающее уравнение для $P_0^{\text{in},2}$ и λ_4 :

$$\lambda_3 P_0^{\text{in},2} + \lambda_4 P_0^{\text{in},1} = -P_0^{\text{in}}. \quad (7.21)$$

Теперь уже уравнения (6.20), (7.17), (7.21) представляют собой систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными (компоненты вектора $\mathbf{P}_1^{\text{in},2}$ и значения $P_0^{\text{in},2}$ и λ_4). Определитель системы уравнений (6.20), (7.17), (7.21) равен $-\lambda_3^2$. Поскольку $\lambda_3 \neq 0$, то, разрешая эту систему, находим λ_4 , $P_0^{\text{in},2}$ и $P_1^{\text{in},2}(D_\xi)$. Но после определения λ_4 уже и операторные ряды $\Pi_1^{\text{in(ex)}}$ доопределены однозначно. Более того, из (7.21) определен и первый член $P_0^{\text{in},2}$ ряда Π_2^{in} . Приравнивая нулю коэффициент при ρ^{-2} в правой части (7.18), получаем два уравнения для компонент вектора $\mathbf{P}_1^{\text{in},3}$ и значения λ_5 , которые являются аналогами уравнений (6.20):

$$\lambda_3 \mathbf{P}_1^{\text{in},3} + \lambda_5 \mathbf{P}_1^{\text{in},1} = \mathbf{P}, \quad (7.22)$$

где $\mathbf{P}$ – вполне определенный вектор. Третьим (линейным) уравнением является второе соотношение в (7.5) при $i = 3$. Причем так как дифференциальные полиномы $P_3^{\text{in},3}$ и $P_2^{\text{in},3}$ уже определены на предыдущих шагах, то его можно переписать в виде, аналогичном (7.17):

$$\langle \mathbf{P}_1^{\text{in},3}, [\nabla' \psi] \rangle + P_0^{\text{in},3} \psi(0) = p, \quad (7.23)$$

где p – вполне определенная величина. Уравнения (7.22) и (7.23) представляют собой недоопределенную систему трех линейных уравнений четырех неизвестных (компонент вектора $\mathbf{P}_1^{\text{in},3}$ и значений $P_0^{\text{in},3}$ и λ_5). Точное определение этих величин вновь переносится на следующий шаг (так же, как и остальных членов рядов $\Pi_2^{\text{in(ex)}}$, за исключением члена $P_0^{\text{in},2}$, определенного на этом шаге). Тем не менее (так же, как и на предыдущих шагах), выберем произвольное решение системы уравнений (7.22), (7.23). Тогда, приравнивая нулю правые части в (7.18) и (7.19),

получаем выполнение равенств (5.14) для $N = 2$. Опять заметим, что после определения λ_5 ряды $\Pi_2^{\text{in(ex)}}$ доопределяются однозначно.

Этот же алгоритм повторяется и на следующих шагах. Недостающее для (7.22), (7.23) линейное уравнение получается из приравнивания нулю коэффициента при ρ^{-1} в разности $v_4^{\text{in}}(\xi) - V_4^{\text{in}}(\xi)$ при $\rho \rightarrow \infty$ и $\xi_3 > 0$. В силу лемм 4.3, 7.2 и уже определенных коэффициентов получаем аналог уравнения (7.21):

$$\lambda_3 P_0^{\text{in},3} + \lambda_5 P_0^{\text{in},1} = p_0^{\text{in}}, \quad (7.24)$$

где p_0^{in} – вполне определенное (к этому шагу) число.

Теперь уравнения (7.22)–(7.24) представляют собой систему четырех линейных уравнений четырех неизвестных (компонент вектора $\mathbf{P}_1^{\text{in},3}$ и значений $P_0^{\text{in},3}$ и λ_5), которая отличается от ранее рассмотренной системы линейных уравнений (6.20), (7.17), (7.21) только правыми частями. Следовательно, она однозначно разрешима. Далее аналогично. Лемма доказана.

Обоснование построенных асимптотик повторяет доказательство, приведенное в § 5, а равенства (7.3) вытекают из равенств (7.7) и (7.6). Теорема 7.1 доказана.

§ 8. Асимптотики для кратности $(2, 0, 0)$

Пусть $\psi^{\text{in},1}, \psi^{\text{in},2}$ – ортонормированные собственные функции задачи Неймана в Ω^{in} , соответствующие двукратному собственному значению λ_0 . Ниже рассматривается невырожденный (для данной кратности) случай наиболее общего положения:

$$|\psi^{\text{in},1}(0)| + |\psi^{\text{in},2}(0)| \neq 0.$$

Легко видеть, что в этом случае собственные функции можно ортонормировать так, чтобы

$$\psi^{\text{in},1}(0) \neq 0, \quad \psi^{\text{in},2}(0) = 0. \quad (8.1)$$

Для определенности будем также предполагать, что

$$[\nabla' \psi^{\text{in},2}] \cos(k_0 h) \neq 0. \quad (8.2)$$

Целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть кратность λ_0 равна $(2, 0, 0)$, $\psi^{\text{in},i}$ – соответствующие нормированные в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ собственные функции задачи Неймана в Ω^{in} , удовлетворяющие (8.1) и (8.2).

Тогда существуют два простых собственных значения $\lambda^{\varepsilon,i}$ краевой задачи (1.1), сходящиеся к λ_0 , а асимптотики этих собственных значений и со-

ответствующих собственных функций $\Psi^{\varepsilon,i}$ имеют вид

$$\lambda^{\varepsilon,i} = \lambda_0 + \sum_{j=1+i}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_j^{(i)}, \quad (8.3)$$

$$\Psi^{\varepsilon,i}(x) = \psi^{\text{in},i}(x) + \sum_{j=3-i}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j^{\text{in},i}(x) \quad \vartheta \quad \Omega^{\text{in}} \setminus S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi_j^{\text{in},i} \in \mathcal{A}_{j-1}^{\text{in}}, \quad (8.4)$$

$$\Psi^{\varepsilon,i}(x) = \sum_{j=1+i}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j^{\text{ex},i}(x) \quad \vartheta \quad \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi_j^{\text{ex},i} \in \mathcal{A}_{j-1}^{\text{ex}}, \quad (8.5)$$

$$\Psi^{\varepsilon,i}(x) = \sum_{j=i-1}^{\infty} \varepsilon^j w_j^{(i)}(x_3) \quad \vartheta \quad \mathcal{X}^{\varepsilon} \setminus (S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2})), \quad (8.6)$$

$$w_j^{(i)} \in C^{\infty}([-h, 0]),$$

$$\Psi^{\varepsilon,i}(x) = \sum_{j=i-1}^{\infty} \varepsilon^j v_j^{\text{in(ex)},i} \left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{\varepsilon} \right) \quad \vartheta \quad S^{\text{in(ex)}}(2\varepsilon^{1/2}) \cap \Omega_{\varepsilon}, \quad (8.7)$$

$$v_{i-1}^{\text{ex},i} \equiv 0, \quad v_j^{\text{in(ex)},i} \in \mathcal{B}_j^i,$$

а для главных членов асимптотик справедливы равенства

$$\lambda_2^{(1)} = (\psi^{\text{in},1}(0))^2 k_0 |\omega| \operatorname{ctg}(k_0 h), \quad v_0^{\text{in},1} \equiv \psi^{\text{in},1}(0),$$

$$v_1^{\text{ex},1} = \psi^{\text{in},1}(0) k_0 \operatorname{ctg}(k_0 h) Y, \quad (8.8)$$

$$\psi_2^{\text{ex},1} = \frac{\psi^{\text{in},1}(0) k_0 |\omega|}{\sin(k_0 h)} G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda_0), \quad w_0^{(1)}(t) = \frac{\psi^{\text{in},1}(0)}{\sin(k_0 h)} \sin(k_0(t+h))$$

и

$$\lambda_3^{(2)} = 2\pi \langle [\nabla' \psi^{\text{in},2}], C(\omega) [\nabla' \psi^{\text{in},2}] \rangle, \quad (8.9)$$

$$v_1^{\text{in},2} = \langle \mathbf{X}, [\nabla' \psi^{\text{in},2}] \rangle, \quad w_1^{(2)}(t) = A(\omega, \Omega^{\text{in}}, h) \sin(k_0(t+h)),$$

$$v_2^{\text{ex},2} = -k_0 A(\omega, \Omega^{\text{in}}, h) Y, \quad \psi_3^{\text{ex}} = k_0 |\omega| A(\omega, \Omega^{\text{in}}, h) G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda_0), \quad (8.10)$$

$$A(\omega, \Omega^{\text{in}}, h) = -\frac{2\pi}{\psi^{\text{in},1}(0) k_0 |\omega| \cos(k_0 h)} \langle [\nabla' \psi^{\text{in},2}], C(\omega) [\nabla' \psi^{\text{in},1}] \rangle.$$

Замечание 8.1. Из (8.3), (8.8), (8.9) и (8.4), (8.1) следует, что собственные значения расщепляются при возмущении, а соответствующие собственные функции сходятся к собственным функциям предельной задачи в Ω^{in} , определенным в соответствии с (8.1). Заметим также, что главный (возмущенный) член асимптотики $\lambda^{\varepsilon,1}$ совпадает с главным членом асимптотики в невырожденном случае для простого собственного значения λ_0 (рассмотренном в §5), а главный член асимптотики $\lambda^{\varepsilon,2}$ совпадает с главным членом асимптотики в случае вырождения по месту присоединения тонкой “ручки” для простого собственного значения λ_0 (рассмотренного в §6).

Краевые задачи для коэффициентов рядов (8.6) и (8.7) получаются таким же образом, как и в предыдущих параграфах, и имеют вид (5.11) и (5.13) (с добавлением индекса соответствия $i = 1, 2$ каждому собственному значению). Поэтому и коэффициенты ряда (8.6) будем выбирать по формуле

$$w_j^{(i)}(t) = -\frac{1}{k_0} \sum_{q \geq 1} \lambda_q^{(i)} \int_{-h}^t \sin(k_0(t-s)) w_{j-q}^{(i)}(s) ds + a_j^{(i)} \sin(k_0 t) + b_j^{(i)} \cos(k_0 t), \quad (8.11)$$

которая отличается от (5.12) лишь добавлением индексов соответствия i .

Рассмотрим сначала случай $i = 1$. Построение формальных асимптотик для этого случая полностью аналогично алгоритму, приведенному в §5 для случая невырожденного простого собственного значения λ_0 . Легко видеть, что при $i = 1$ формулы (8.3)–(8.8) отличаются от формул (5.2)–(5.7) лишь добавлением этого индекса соответствия $i = 1$. Поэтому (для краткости формулировок утверждений) будем в (8.3)–(8.8) и в (8.11) использовать обозначения $\psi^{\text{in},1} = \psi$, $\lambda_j^{(1)} = \lambda_j$, $\psi_j^{\text{in(ex)},1} = \psi_j^{\text{in(ex)}}$, $v_j^{\text{in(ex)},1} = v_j^{\text{in(ex)}}$, $w_j^{(1)} = w_j$. Далее, при $i = 1$ обозначим через w^ε ряд (8.6) (принимаящий при $w_j^{(1)} = w_j$ вид (5.5)), через $v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}$ – частичные суммы рядов (8.7) (принимаящие при $v_j^{\text{in(ex)},1} = v_j^{\text{in(ex)}}$ вид частичных сумм рядов (5.6)). В этих обозначениях, повторяя доказательства, приведенные в §5, с учетом равенства $\psi^{\text{in},2}(0) = 0$ получаем справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 8.1. *Справедливы утверждения лемм 5.2, 5.4.*

Тогда справедливость формул (8.8) при $i = 1$ (которые отличаются от (5.7) лишь добавлением этого индекса) вытекает по-прежнему из равенств (5.16), первого равенства в (5.10) и (5.9).

Алгоритм построения формальных асимптотик второго собственного значения и соответствующей собственной функции аналогичен алгоритмам, приведенным в §6, 7, но имеет и свои отличия. Аналогом лемм 6.1, 7.1 является следующее утверждение, вытекающее из леммы 3.1.

ЛЕММА 8.2. *Коэффициенты рядов (6.9) удовлетворяют утверждениям леммы 5.1. Если $\lambda(\varepsilon)$ имеет асимптотику вида (8.3) при $i = 2$ и*

$$\langle \mathbf{P}_1^{\text{in},1}, [\nabla' \psi^{\text{in},2}] \rangle = 1, \quad [R_1^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] = 0, \quad [R_q^{\text{in}} \psi^{\text{in},2}] = 0, \quad q \geq 2, \quad (8.12)$$

то ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))$ представимы в виде (8.4), (8.5) при $i = 2$, причем справедливо равенство

$$\psi_3^{\text{ex},2}(x) = -\lambda_3^{(2)} R_0^{\text{ex}} G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda_0). \quad (8.13)$$

Аналогом лемм 6.2, 7.2 является следующее утверждение, вытекающее из лемм 3.1, 8.2 и определения $K_q^{\text{in(ex)}}$.

ЛЕММА 8.3. Пусть $\psi_{\varepsilon}^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$ имеют асимптотики (6.9), (8.12), а $\lambda(\varepsilon)$ и $w^{\varepsilon}(x)$ имеют асимптотики (8.3) и (8.6), (8.11) при $i = 2$. Тогда:

- а) справедливы утверждения а) леммы 5.3;
б) справедливы представления

$$\begin{aligned} W_0^{\text{in(ex)}}(\xi_3) &\equiv 0, & W_1^{\text{in}}(\xi_3) &= b_1^{(2)}, & W_{k+1}^{\text{in}}(\xi_3) &= \widetilde{W}_{k+1}^{\text{in}}(\xi_3) + a_k^{(2)} k_0 \xi_3 + b_{k+1}^{(2)}, \\ W_k^{\text{ex}}(\xi_3) &= \widetilde{W}_k^{\text{ex}}(\xi_3) + b_k^{(2)} \cos(k_0 h) - a_k^{(2)} \sin(k_0 h), & k &\geq 1, \\ \widetilde{W}_1^{\text{ex}}(\xi_3) &\equiv 0, & \widetilde{W}_2^{\text{in}}(\xi_3) &\equiv 0, \\ \widetilde{W}_2^{\text{ex}}(\xi_3) &= -k_0 (b_1^{(2)} \sin(k_0 h) + a_1^{(2)} \cos(k_0 h)) \xi_3, \end{aligned}$$

где $\widetilde{W}_j^{\text{in(ex)}}$ не зависят от $\lambda_{q-1}^{(2)}$, $a_q^{(2)}$ и $b_q^{(2)}$ при $q \geq j$, а $\widetilde{W}_j^{\text{in}}$ не зависят от $a_{j-1}^{(2)}$,

$$\begin{aligned} V_0^{\text{in(ex)}} &= V_1^{\text{ex}} \equiv 0, & V_2^{\text{ex}} &= -\frac{\lambda_3^{(2)}}{2\pi} \Pi_0^{\text{ex}}, \\ V_1^{\text{in}}(\xi) &= \langle \xi', [\nabla' \psi^{\text{in},2}] \rangle + [R_2^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \psi^{\text{in},1}(0) - \frac{\lambda_3^{(2)}}{2\pi} \Pi_0^{\text{in}}, \\ V_k^{\text{in}}(\xi) &= \widetilde{V}_k^{\text{in}}(\xi) + [R_k^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \langle \xi', [\nabla' \psi^{\text{in},1}] \rangle + [R_{k+1}^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \psi^{\text{in},1}(0) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} (\lambda_{k+2}^{(2)} \Pi_0^{\text{in}} + \lambda_3^{(2)} \Pi_{k-1}^{\text{in}}), \\ V_{k+1}^{\text{ex}}(\xi) &= \widetilde{V}_{k+1}^{\text{ex}}(\xi) - \frac{1}{2\pi} (\lambda_{k+2}^{(2)} \Pi_0^{\text{ex}} + \lambda_3^{(2)} \Pi_{k-1}^{\text{ex}}), & k &\geq 2, \\ \widetilde{V}_2^{\text{in}}(\xi) &= Z_2(\xi), \\ \Pi_j^{\text{in}} &= \sum_{t=\delta_0^j}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{in},t+j}(D_{\xi}) \rho^{-1}, & \Pi_j^{\text{ex}} &= \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{ex},t+j}(D_{\xi}) \rho^{-1}, \end{aligned}$$

где $Z_2(x)$ – второй член разложения в ряд Тейлора функции $\psi^{\text{in},2}(x)$, а $\widetilde{V}_k^{\text{in}}$ и $\widetilde{V}_{k+1}^{\text{ex}}$ не зависят от $\lambda_{q+2}^{(2)}$ и $\Pi_{q-1}^{\text{in(ex)}}$ при $q \geq k$;
в) справедливы утверждения в) леммы 5.3.

Теперь можно переходить к ключевому аналогу лемм 6.3 и 7.3. Обозначим через w^{ε} ряд (8.6), а через $v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}$ – частичные суммы рядов (8.7) при $i = 2$.

ЛЕММА 8.4. Существуют функция $\lambda(\varepsilon)$, имеющая асимптотику (8.3), и ряды (6.9), (8.6), (8.11), (8.7) при $i = 2$ такие, что:

- а) коэффициенты $v_j^{\text{in(ex),2}}$ являются решениями рекуррентной системы краевых задач (5.13), для любого целого $N \geq 0$ справедливы дифференцируемые асимптотические равенства (5.14), (5.15);

б) для коэффициентов этих рядов имеют место равенства (8.12) и

$$\begin{aligned}
 v_1^{\text{in},2}(\xi) &= \langle [\nabla' \psi^{\text{in},2}], \mathbf{X} \rangle + [R_2^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \psi^{\text{in},1}(0), \\
 b_1^{(2)} &= \langle \mathbf{q}_\omega, [\nabla' \psi^{\text{in},2}] \rangle + [R_2^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \psi^{\text{in},1}(0), \\
 b_1^{(2)} \cos(k_0 h) - a_1^{(2)} \sin(k_0 h) &= 0, \\
 \psi^{\text{in},1}(0) k_0 |\omega| a_1^{(2)} &= -2\pi \langle [\nabla' \psi^{\text{in},2}], C(\omega) [\nabla' \psi^{\text{in},1}] \rangle, \\
 v_2^{\text{ex},2} &= -k_0 (b_1^{(2)} \sin(k_0 h) + a_1^{(2)} \cos(k_0 h)) Y, \\
 \lambda_3^{(2)} R_0^{\text{ex}} + k_0 (b_1^{(2)} \sin(k_0 h) + a_1^{(2)} \cos(k_0 h)) |\omega| &= 0.
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнены условия (8.12), налагаемые на ряды (6.9). Выбирая $v_1^{\text{in},2}$, $b_2^{(2)}$, $a_1^{(2)}$ в соответствии с первыми тремя соотношениями в (8.14) (где R_2^{in} – пока не до конца определенный многочлен, а только удовлетворяющий (8.12)), добиваемся в силу леммы 8.3 для $N = 1$ выполнения равенства (5.15) при двух значениях индексов, равенства (5.14) для индекса “ex” и равенства (6.13) при $\rho \rightarrow \infty$ и $\xi_3 > 0$ (с заменой v_1^{in} , λ_3 и ψ на $v_1^{\text{in},2}$, $\lambda_3^{(2)}$ и $\psi^{\text{in},2}$ соответственно). Так же, как и в § 6, приравнявая нулю первую скобку в правой части (6.13), получаем два нелинейных уравнения (6.14) для трех неизвестных. Разрешая систему трех уравнений, состоящую из (6.14) и первого уравнения (8.12), находим значение (8.9) для $\lambda_3^{(2)}$ и определяем $P_1^{\text{in},1}$. Поскольку $\lambda_3^{(2)} \neq 0$, то, приравнявая нулю коэффициенты при остальных степенях ρ , определяем Π_0^{in} и добиваемся выполнения равенства (5.14) при $N = 1$ и для индекса “in”. Первый шаг закончен.

Заметим, что на этом шаге у нас не определились окончательно $a_1^{(2)}$, $b_1^{(2)}$ и $[R_2^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}]$, так как второе и третье соотношения в (8.14) представляют собой лишь два линейных уравнения для этих неизвестных величин. Заметим также, что, определив Π_0^{in} , мы нашли и $P_1^{\text{in},1}(D_\xi)$, а следовательно, в силу второго равенства из (8.12) окончательно определили $P_0^{\text{in},1}$ и R_1^{in} . В частности, умножая (6.15) на $[\nabla' \psi^{\text{in},1}]$, в силу второго равенства из (8.12) получаем

$$\langle [\nabla' \psi^{\text{in},2}], C(\omega) [\nabla' \psi^{\text{in},1}] \rangle = -\frac{\lambda_3^{(2)}}{2\pi} P_0^{\text{in},1} \psi^{\text{in},1}(0). \tag{8.15}$$

Следующий второй шаг является типичным (индуктивным). Положив

$$v_2^{\text{in},2} = \widehat{Y} + [R_2^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \langle \mathbf{X}, [\nabla' \psi^{\text{in},1}] \rangle + [R_3^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \psi^{\text{in},1}(0) + a_1^{(2)} k_0 Y, \tag{8.16}$$

в силу лемм 8.4, 4.4, 4.5 получаем, что при $\rho \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 v_2^{\text{in},2}(\xi) - V_2^{\text{in}}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} (\lambda_3^{(2)} P_0^{\text{in}} - a_1^{(2)} k_0 |\omega|) \rho^{-1} \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (\lambda_4^{(2)} P_j^{\text{in},j} + \lambda_3^{(2)} P_j^{\text{in},j+1} \\
 &+ [R_2^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \widetilde{P}_j^{\text{in}} + P_j^{\text{in}}) \rho^{-1}, \quad \xi_3 \geq 0,
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

где P_j^{in} и $\tilde{P}_j^{\text{in}}$ – вполне определенные дифференциальные полиномы, и

$$v_2^{\text{in},2}(\xi) - W_2^{\text{in}}(\xi_3) = [R_2^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \tilde{b} + [R_3^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \psi^{\text{in},1}(0) - b_2^{(2)}, \quad \xi_3 < 0, \quad (8.18)$$

где $\tilde{b}$ – вполне определенное число. Приравнявая нулю коэффициент при ρ^{-1} в правой части (8.17), находим $a_1^{(2)}$ и, в частности, получаем

$$a_1^{(2)} k_0 |\omega| = \lambda_3^{(2)} P_0^{\text{in},1}. \quad (8.19)$$

Из соотношений (8.19) и (8.15) вытекает четвертое соотношение в (8.14). В свою очередь, из третьего и второго соотношений (8.14) находим $b_1^{(2)}$ и $[R_2^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}]$. Приравнявая в правой части (8.17) нулю коэффициенты сначала при ρ^{-2} , а затем при остальных степенях ρ , так же, как и на втором шаге в доказательстве леммы 6.3, последовательно определяем $\lambda_4^{(2)}$ и остальные члены ряда Π_1^{in} и получаем равенство (5.14) при $N = 2$ для индекса “in”. Приравнявая правую часть (8.18) нулю, добиваемся равенства (5.15) при $N = 2$ для индекса “in” и получаем первое соотношение для $b_2^{(2)}$ и $[R_3^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}]$, являющееся аналогом второго соотношения в (8.14):

$$[R_3^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \psi^{\text{in},1}(0) - b_2^{(2)} = b, \quad (8.20)$$

где b – вполне определенное число. Положив $v_2^{\text{ex},2}$ в соответствии с (8.14) и требуя выполнения (5.14) при $N = 2$ для индекса “ex”, определяем Π_0^{ex} и, в частности, получаем последнее соотношение в (8.14). И наконец, требуя выполнения (5.15) при $N = 2$ для индекса “ex”, в силу лемм 8.4, 4.4 получаем второе соотношение для $a_2^{(2)}$, $b_2^{(2)}$ и $[R_3^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}]$, являющееся аналогом третьего соотношения в (8.14):

$$[R_3^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \psi^{\text{in},1}(0) - b_2^{(2)} \cos(k_0 h) + a_2^{(2)} \sin(k_0 h) b_2^{(2)} = a, \quad (8.21)$$

где a – вполне определенное число. Заметим, что, вычислив Π_0^{in} , Π_1^{in} и $[R_2^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}]$, мы полностью определили R_2^{in} и, в частности, нашли $P_0^{\text{in},2}$.

На следующем шаге по $V_3^{\text{in(ex)}}$ и $W_3^{\text{in(ex)}}$ строим решения $v_3^{\text{in(ex),2}} \in \mathcal{B}_3^3$ краевой задачи (5.13) такие, что при $\rho \rightarrow \infty$

$$v_3^{\text{in(ex),2}}(\xi) - V_3^{\text{in(ex)}}(\xi) = O(\rho^{-1}), \quad \xi_3 \geq 0, \quad (8.22)$$

$$v_3^{\text{in(ex),2}}(\xi) - W_3^{\text{in(ex)}}(\xi_3) = O(1), \quad \xi_3 < 0. \quad (8.23)$$

Для индекса “in”, приравнявая правую часть в (8.22) нулю, в силу (8.21), (8.20), последнего равенства из (8.12) при $q = 2$ и того, что $P_0^{\text{in},2}$ уже найдено, последовательно определяем $a_2^{(2)}$, $b_2^{(2)}$, $[R_3^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}]$, $\lambda_5^{(2)}$ и Π_2^{in} . Затем, приравнявая правую часть в (8.22) нулю для индекса “ex”, определяем Π_2^{ex} . Приравнявая правые части в (8.23) нулю, получаем аналоги уравнений (8.21) и (8.20) для следующего шага:

$$\begin{aligned} [R_4^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \psi^{\text{in},1}(0) - b_3^{(2)} &= b, \\ [R_4^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}] \psi^{\text{in},1}(0) - b_3^{(2)} \cos(k_0 h) + a_3^{(2)} \sin(k_0 h) b_2^{(2)} &= a, \end{aligned}$$

где a и b – вполне определенные числа. Заметим, что, вычислив Π_j^{in} при $j \leq 2$ и $[R_3^{\text{in}} \psi^{\text{in},1}]$, мы полностью определили R_3^{in} и, в частности, нашли $P_0^{\text{in},3}$, и т.д. Лемма доказана.

Перейдем к обоснованию построенных асимптотик. Обозначим через $\lambda^{(i)}(\varepsilon)$ и $w_{\varepsilon,N}^{(i)}$, $v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)},i}$, $\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)},i}(x, \lambda)$ функции $\lambda(\varepsilon)$ и ряды (8.6), (8.7), $\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$, удовлетворяющие утверждениям лемм 8.1 и 8.4 соответственно для $i = 1$ и $i = 2$, а через $w_{\varepsilon,N}^{(i)}(x_3)$, $v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)},i}$ и $\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)},i}(x, \lambda)$ – частичные суммы этих рядов. Положим

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon,N}^{(i)}(x; t) = & \psi_{\varepsilon,N}^{\text{in},i}(x, \lambda^{(i)}(\varepsilon)) \chi\left(\frac{r}{t\varepsilon^{1/2}}\right) + \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex},i}(x, \lambda(\varepsilon)) \chi\left(\frac{r_{\text{ex}}}{t\varepsilon^{1/2}}\right) \\ & + w_{\varepsilon,N}^{(i)}(x_3) \chi\left(-\frac{x_3}{t\varepsilon^{1/2}}\right) \chi\left(\frac{x_3 + h}{t\varepsilon^{1/2}}\right) + v_{\varepsilon,N}^{\text{in},i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(1 - \tilde{\chi}\left(\frac{x}{t\varepsilon^{1/2}}\right)\right) \\ & + v_{\varepsilon,N}^{\text{ex},i}\left(\frac{x^{\text{ex}}}{\varepsilon}\right) \left(1 - \tilde{\chi}\left(\frac{x^{\text{ex}}}{t\varepsilon^{1/2}}\right)\right), \end{aligned} \quad (8.24)$$

где, напомним, срезающая функция $\tilde{\chi}(x)$ равна $\chi(r)$ при $x_3 > 0$ и равна $\chi(-x_3)$ при $x_3 < 0$, а $t > 0$ – пока произвольное фиксированное число.

Повторяя доказательства лемм 5.5 и 5.6, получаем справедливость следующего аналога леммы 5.6.

ЛЕММА 8.5. *Функции $u_{\varepsilon,N}^{(i)} \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ являются решениями (2.1) при $\lambda = \lambda^{(i)}(\varepsilon)$ и $f_\varepsilon = F_{\varepsilon,N}^{(i)}$, причем при $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$\|u_{\varepsilon,N}^{(i)}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = 1 + o(1), \quad \|F_{\varepsilon,N}^{(i)}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{N(i)}), \quad (8.25)$$

где $N(i) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

Перейдем к строгому обоснованию построенных асимптотик собственных значений. В силу теоремы 1.1 существуют два собственных значения $\lambda^{\varepsilon,i}$ (с учетом кратности) возмущенной задачи (1.1), сходящихся к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Допустим, что существует $\delta > 0$ такое, что $|\lambda^{(1)}(\varepsilon) - \lambda^{\varepsilon,i}| > c\varepsilon^\delta$ для любых i и N . Тогда в силу (2.63) получаем оценку

$$\|u_{\varepsilon,N}^{(i)}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{N(i)-2\delta}),$$

которая противоречит первому соотношению в (8.25). Следовательно, существует собственное значение $\lambda^{\varepsilon,1}$, имеющее степенную асимптотику, совпадающую с $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$. Аналогично доказывается, что существует собственное значение $\lambda^{\varepsilon,2}$, имеющее степенную асимптотику, совпадающую с $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$. Причем так как $\lambda^{(2)}(\varepsilon) \neq \lambda^{(1)}(\varepsilon)$, то собственные значения $\lambda^{\varepsilon,i}$ – простые.

Перейдем к обоснованию асимптотик собственных функций. Пусть $\psi^{\varepsilon,i}$ – соответствующие нормированные в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственные функции. Обозначим

$$\tilde{u}_{\varepsilon,N}^{(i)} = u_{\varepsilon,N}^{(i)} - (u_{\varepsilon,N}^{(i)}, \psi^{\varepsilon,i})_{\Omega_\varepsilon} \psi^{\varepsilon,i}. \quad (8.26)$$

Тогда

$$(\tilde{u}_{\varepsilon,N}^{(i)}, \psi^{\varepsilon,i})_{\Omega_\varepsilon} = 0, \quad (8.27)$$

а функция $\tilde{u}_{\varepsilon,N}^{(i)}$ является решением краевой задачи (2.1) при $\lambda = \lambda^{\varepsilon,i}$ и

$$f_\varepsilon = F_{\varepsilon,N}^{(i)} + (\lambda^{(i)}(\varepsilon) - \lambda^{\varepsilon,i}) u_{\varepsilon,N}^{(i)}. \quad (8.28)$$

Поскольку по построению $|\lambda^{(1)}(\varepsilon) - \lambda^{(2)}(\varepsilon)| > c\varepsilon^2$, где $c > 0$, то из (8.25), (8.27), (8.28) и оценки (2.64) следует, что

$$\|\tilde{u}_{\varepsilon,N}^{(i)}\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{N(i)-2}), \quad (8.29)$$

где $N(i)$ растет неограниченно вместе с N . Из соотношений (8.26), (8.29) и (8.25) вытекает, что существует $\alpha_N^{(i)}(\varepsilon) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ такое, что

$$\|u_{\varepsilon,N}^{(i)} - \alpha_N^{(i)}(\varepsilon) \psi^{\varepsilon,i}\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{N(i)-2}). \quad (8.30)$$

Из (8.30), (8.24), лемм 8.1, 8.2 и 8.4 и в силу произвольности выбора N и t следует, что собственная функция имеет асимптотики (8.3)–(8.11), (8.9). Формулы (8.10) легко вычисляются из (8.14), (8.13) и (8.9). Теорема 8.1 доказана полностью.

§9. Асимптотики для кратности $(1, 0, 1)$

Целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть кратность λ_0 равна $(1, 0, 1)$, ψ^{in} и ψ^{ex} – соответствующие нормированные в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ и $L_2(\Omega^{\text{ex}})$ собственные функции задачи Неймана в Ω^{in} и Ω^{ex} и

$$\psi^{\text{in}}(0) \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) \neq 0. \quad (9.1)$$

Тогда существуют два простых собственных значения $\lambda^{\varepsilon,i}$, $i = 1, 2$, краевой задачи (1.1), сходящиеся к λ_0 , а асимптотики этих собственных значений и соответствующих собственных функций $\Psi^{\varepsilon,i}$ имеют вид

$$\lambda^{\varepsilon,i} = \lambda_0 + \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_j^{(i)}, \quad (9.2)$$

$$\Psi^{\varepsilon,i}(x) = \psi^{\text{in}}(x) + \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j^{\text{in},i}(x) \quad \text{в } \Omega^{\text{in}} \setminus S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi_j^{\text{in},i} \in \mathcal{A}_{j-1}^{\text{in}}, \quad (9.3)$$

$$\Psi^{\varepsilon,i}(x) = B^{(i)} \psi^{\text{ex}}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j^{\text{ex},i}(x) \quad \text{в } \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi_j^{\text{ex},i} \in \mathcal{A}_{j-1}^{\text{ex}}, \quad (9.4)$$

$$\Psi^{\varepsilon,i}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j^{(i)}(x_3) \quad \text{в } \mathcal{K}^\varepsilon \setminus (S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2})), \quad w_j^{(i)} \in C^\infty([-h, 0]), \quad (9.5)$$

$$\Psi^{\varepsilon,i}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j^{\text{in(ex)},i} \left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{\varepsilon} \right) \quad \text{в } S^{\text{in(ex)}}(2\varepsilon^{1/2}) \cap \Omega_\varepsilon, \quad v_j^{\text{in(ex)},i} \in \mathcal{B}_j^{\text{in(ex)}}, \quad (9.6)$$

а для главных членов асимптотик справедливы равенства

$$\lambda_2^{(i)} = \frac{k_0|\omega|}{2} C_+^{(i)}, \quad C_{\pm}^{(i)} = A_{\pm} + (-1)^i \sqrt{A_{\pm}^2 + 4(\psi^{\text{in}}(0)\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2}, \quad (9.7)$$

$$A_{\pm} = ((\psi^{\text{in}}(0))^2 \pm (\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2) \operatorname{ctg}(k_0 h),$$

$$B^{(i)} = -\frac{2\psi^{\text{in}}(0)\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}})}{\sin(k_0 h)C_-^{(i)}}, \quad v_0^{\text{in},i} \equiv \psi^{\text{in}}(0), \quad v_0^{\text{ex},i} \equiv B^{(i)}\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}), \quad (9.8)$$

$$w_0^{(i)}(t) = \psi^{\text{in}}(0) \cos(k_0 t) + \frac{C_+^{(i)}}{2\psi^{\text{in}}(0)} \sin(k_0 t).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Из формул (9.2), (9.7) следует, что одно из собственных значений возмущенной задачи больше λ_0 , а второе – меньше.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2. В (9.3)–(9.6) приведены асимптотики собственных функций, нормированных с точностью до скалярных множителей, т.е. $\Psi^{\varepsilon,i} = \alpha_i(\varepsilon)\psi^{\varepsilon,i}$, где $\psi^{\varepsilon,i}$ – нормированные в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственные функции, а скалярные множители $\alpha_i(\varepsilon) = \sqrt{(B^{(i)})^2 + 1} + o(1)$. Поэтому главные члены асимптотик нормированной собственной функции получаются из формул (9.8) делением на $\sqrt{(B^{(i)})^2 + 1}$. В силу (9.3), (9.4), (9.7), (9.8) и (9.1) главные члены асимптотик каждой из собственных функций не равны нулю в областях Ω^{in} и Ω^{ex} .

Из леммы 3.1 последовательно вытекают следующие аналоги лемм 5.2 и 5.3.

ЛЕММА 9.1. Если $\lambda(\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))$ имеют асимптотики вида (5.2), (5.8) и

$$R_0^{\text{in}}\psi^{\text{in}}(0) = 1, \quad [R_j^{\text{in}}\psi^{\text{in}}] = 0, \quad j \geq 1, \quad (9.9)$$

то ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \lambda(\varepsilon))$ и $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \lambda(\varepsilon))$ представимы в виде (9.3) и (9.4), причем

$$B^{(i)} = R_0^{\text{ex}}\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}). \quad (9.10)$$

Уравнения и краевые задачи для коэффициентов рядов (9.5) и (9.6) получаются таким же образом, как и в предыдущих параграфах, и имеют вид (5.11) и (5.13) (с добавлением индексов соответствия i). Коэффициенты ряда (9.5) определим равенствами (8.11).

ЗАМЕЧАНИЕ 9.3. Поскольку построение асимптотик для двух собственных значений (и соответствующих собственных функций) будет проводиться одновременно и однотипно, то индекс соответствия i будем (по возможности) опускать. При таком подходе формулы (9.2), (9.3), (9.5), (8.11) приобретают вид (5.2), (5.3), (5.5), (5.12) соответственно. Структура ряда (9.6) отличается от (5.5) лишь тем, что в последнем полагается $v_0^{\text{ex}} = 0$. Чтобы подчеркнуть как связь, так и различие в алгоритмах из §5 и настоящего параграфа, будем использовать (также по возможности) приведенную нумерацию из §5.

ЛЕММА 9.2. Пусть $\lambda(\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$, $w^\varepsilon(x)$ имеют асимптотики (5.2), (5.8), (9.9), (5.5), (5.12). Тогда:

- а) справедливы утверждения а) леммы 5.3;
 б) для $W_j^{\text{in(ex)}}$ справедливы утверждения б) леммы 5.3, а для $V_j^{\text{in(ex)}}$ справедливы представления

$$\begin{aligned} V_0^{\text{in}} &\equiv \psi^{\text{in}}(0), & V_0^{\text{ex}} &\equiv R_0^{\text{ex}}(\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2, & V_1^{\text{in}}(\xi) &= \langle \xi', [\nabla' \psi^{\text{in}}] \rangle - \frac{\lambda_2}{2\pi} \Pi_0^{\text{in}}, \\ V_1^{\text{ex}} &= R_0^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) \langle \xi', [\nabla' \psi^{\text{ex}}] \rangle + [R_1^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) - \frac{\lambda_2}{2\pi} \Pi_0^{\text{ex}}, \\ V_k^{\text{in}} &= \tilde{V}_k^{\text{in}} - \frac{1}{2\pi} (\lambda_{k+1} \Pi_0^{\text{in}} + \lambda_2 \Pi_{k-1}^{\text{in}}), \\ V_k^{\text{ex}} &= \tilde{V}_k^{\text{ex}} + P_0^{\text{ex}, k-1} \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) \langle \xi', [\nabla' \psi^{\text{ex}}] \rangle + [R_k^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} (\lambda_{k+1} \Pi_0^{\text{ex}} + \lambda_2 \Pi_{k-1}^{\text{ex}}), \quad k \geq 2, \\ \Pi_i^{\text{in(ex)}} &= \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{in(ex), t+i}}(D_\xi) \rho^{-1}, \end{aligned}$$

где $\tilde{V}_j^{\text{in(ex)}}$ не зависит от λ_{q+1} и $\Pi_{q-1}^{\text{in(ex)}}$ при $q \geq j$;

- в) справедливы утверждения в) леммы 5.3.

Обозначим через $v_{\varepsilon, N}^{\text{in(ex)}}$ частичные суммы рядов (9.6).

ЛЕММА 9.3. Существуют функция $\lambda(\varepsilon)$, имеющая асимптотику (5.2), и ряды (5.8), (5.5), (5.12), (9.6) такие, что:

- а) справедливы утверждения а) леммы 5.4;
 б) для коэффициентов этих рядов имеют место равенства (9.9), (9.7) и

$$v_0^{\text{in}} \equiv b_0 = \psi^{\text{in}}(0), \quad v_0^{\text{ex}} \equiv R_0^{\text{ex}}(\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2, \quad (9.11)$$

$$b_0 \cos(k_0 h) - a_0 \sin(k_0 h) = R_0^{\text{ex}}(\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2, \quad (9.12)$$

$$a_0 = \frac{\lambda_2^{(i)}}{\psi^{\text{in}}(0) k_0 |\omega|}, \quad R_0^{\text{ex}} = \frac{k_0 |\omega| b_0}{(\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2 k_0 |\omega| \cos(k_0 h) - \lambda_2^{(i)} \sin(k_0 h)}. \quad (9.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнены условия (9.9), налагаемые на R_j^{in} . Выбирая $v_0^{\text{in(ex)}}$, b_0 в соответствии с (9.11), где R_0^{ex} — пока неизвестная постоянная, и предполагая, что для a_0 и R_0^{ex} выполнено условие (9.12), добиваемся выполнения равенств (5.15), (5.14) для $N = 0$.

На следующем (первом) шаге, полагая

$$\begin{aligned} v_1^{\text{in}} &= \langle \mathbf{X}, [\nabla' \psi^{\text{in}}] \rangle + a_0 k_0 Y, \\ v_1^{\text{ex}} &= R_0^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) \langle \mathbf{X}, [\nabla' \psi^{\text{ex}}] \rangle - k_0 (b_0 \sin(k_0 h) + a_0 \cos(k_0 h)) Y \\ &\quad + [R_1^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) \end{aligned}$$

и требуя выполнения равенств (5.14) для $N = 1$ до членов порядка ρ^{-1} включительно, получаем в силу лемм 9.2 и 4.4 еще два уравнения на коэффициенты a_0 , R_0^{ex} и λ_2 :

$$a_0 k_0 |\omega| = \frac{\lambda_2}{\psi^{\text{in}}(0)}, \quad -k_0 |\omega| (b_0 \sin(k_0 h) + a_0 \cos(k_0 h)) = \lambda_2 R_0^{\text{ex}}. \quad (9.14)$$

Легко видеть, что нелинейная система трех уравнений (9.12), (9.14) имеет два набора решений, которым и присвоим значения индексов $i = 1$ и $i = 2$. Разрешая данную систему уравнений, находим эти величины и, в частности, получаем два значения (9.7) для $\lambda_2 = \lambda_2^{(i)}$ и равенства (9.13). Далее, так как $\lambda_2 \neq 0$, то выбором остальных коэффициентов в $\Pi_0^{\text{in(ex)}}$ добиваемся выполнения равенств (5.14) для $N = 1$. Из требования равенства (5.15) для $N = 1$ определяем b_1 и получаем линейное уравнение для a_1 и $P_0^{\text{ex},1}$:

$$a_1 \sin(k_0 h) + P_0^{\text{ex},1} (\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2 = p, \quad (9.15)$$

где p – вполне определенное число. Это уравнение является аналогом (9.12) для следующего шага.

На n -м шаге к одному линейному уравнению для a_{n-1} и $P_0^{\text{ex},n-1}$

$$a_{n-1} \sin(k_0 h) + P_0^{\text{ex},n-1} (\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2 = P_0^{(1)} \quad (9.16)$$

(где $P_0^{(1)}$ – вполне определенное к этому шагу число), являющемуся аналогом уравнений (9.12) и (9.15) и получающемуся из требования выполнения равенства (5.15) для индекса “ex” при $N = n - 1$ на предыдущем шаге, добавляются еще два линейных уравнения для a_{n-1} , $P_0^{\text{ex},n-1}$ и λ_{n+1} , получающихся в силу лемм 9.2 и 4.3 из приравнивая коэффициентов при ρ^{-1} в рядах $V_n^{\text{in(ex)}}$ и в асимптотиках на бесконечности функций $v_n^{\text{in(ex)}}$ при $\xi_3 > 0$ и являющихся аналогами уравнений (9.14):

$$\begin{aligned} a_{n-1} k_0 |\omega| \psi^{\text{in}}(0) - \lambda_{n+1} &= P_0^{(2)}, \\ a_{n-1} k_0 |\omega| \cos(k_0 h) + \lambda_2 P_0^{\text{ex},n-1} + R_0^{\text{ex}} \lambda_{n+1} &= P_0^{(3)}, \end{aligned} \quad (9.17)$$

где $P_0^{(2)}$ и $P_0^{(3)}$ – вполне определенные к этому шагу числа.

Заметим, что правая часть второго уравнения в (9.17) не зависит от $P_0^{\text{ex},n-1}$ в силу того, что, во-первых, вследствие лемм 9.2, 4.3 и 4.4

$$v_n^{\text{ex}} = \tilde{v}_n^{\text{ex}} + P_0^{\text{ex},n-1} \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) \langle \mathbf{X}, [\nabla' \psi^{\text{ex}}] \rangle + [R_n^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}),$$

где функция $\tilde{v}_n^{\text{ex}}$ не зависит от $P_0^{\text{ex},n-1}$, а во-вторых, первый убывающий при $\rho \rightarrow \infty$ член асимптотики вектор-функции $\mathbf{X}$ имеет порядок $O(\rho^{-2})$ в силу леммы 4.4. Непосредственно проверяется, что определитель линейной системы уравнений (9.16), (9.17) для неизвестных величин a_{n-1} , $P_0^{\text{ex},n-1}$ равен $-k_0 |\omega| \neq 0$. Решая эту систему линейных уравнений, определяем a_{n-1} , $P_0^{\text{ex},n-1}$ и λ_{n+1} . Затем, приравнивая коэффициенты в $V_n^{\text{in(ex)}}$ и $v_n^{\text{in(ex)}}$ при остальных отрицательных

степенях ρ , в силу того, что $\lambda_2 \neq 0$, определяем $\Pi_{n-1}^{\text{in(ex)}}$ полностью. И наконец, в силу требования выполнения равенства (5.15) для $N = 1$ определяем b_n и получаем линейное уравнение для a_n и $P_0^{\text{ex},n}$:

$$a_n \sin(k_0 h) + P_0^{\text{ex},n} (\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2 = p$$

(где p – вполне определенное число), являющееся аналогом (9.16) для следующего шага, и т. д. Лемма доказана.

Обоснование построенных асимптотик повторяет доказательство, приведенное в §8, а равенства (9.8) вытекают из равенств (9.11)–(9.13), (9.7) и (9.10). Теорема 9.1 доказана.

§10. Асимптотики для кратности $(0, 1, 0)$

Целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть кратность $\lambda_0 = (\frac{\pi m}{h})^2$ равна $(0, 1, 0)$. Тогда:

а) асимптотики собственного значения λ^ε краевой задачи (1.1), сходящиеся к λ_0 , и соответствующей собственной функции Ψ^ε имеют вид

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_j, \quad (10.1)$$

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{j=-1}^{\infty} \varepsilon^j w_j(x_3) \quad \text{в } \mathcal{K} \setminus (S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2})),$$

$$w_j \in C^\infty([-h, 0]), \quad w_{-1}(t) = \sin(k_0 t), \quad (10.2)$$

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j^{\text{in(ex)}}(x) \quad \text{в } \Omega^{\text{in(ex)}} \setminus S^{\text{in(ex)}}(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi_j \in \mathcal{A}_j^{\text{in(ex)}}, \quad (10.3)$$

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j^{\text{in(ex)}} \left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{\varepsilon} \right) \quad \text{в } S^{\text{in(ex)}}(2\varepsilon^{1/2}) \cap \Omega_\varepsilon, \quad v_j^{\text{in(ex)}} \in \mathcal{B}_{j+1}^j; \quad (10.4)$$

б) для главных членов асимптотик справедливы равенства

$$\lambda_1 = \frac{4\lambda_0 q_\omega}{h}, \quad (10.5)$$

$$\psi_2^{\text{ex}} = (-1)^m k_0 |\omega| G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda_0), \quad \psi_2^{\text{in}} = -k_0 |\omega| G^{\text{in}}(x, 0, \lambda_0),$$

$$v_0^{\text{in}} = k_0 Y, \quad v_1^{\text{ex}} = (-1)^{m+1} k_0 Y. \quad (10.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. Из равенств (5.7) и леммы 4.4 следует, что $\lambda_1 < 0$, т.е. собственное значение λ^ε возмущенной задачи при увеличении ε уменьшается.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.2. В формулах (10.2)–(10.4) приведены асимптотики собственной функции, нормированной с точностью до скалярного множителя $\sqrt{\frac{2}{|\omega|h}} + o(1)$, т.е. $\psi^\varepsilon = \alpha(\varepsilon) \Psi^\varepsilon$, где ψ^ε – нормированная в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственная функция, а скалярный множитель $\alpha(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{|\omega|h}} + o(1)$. Поэтому главные члены асимптотик нормированной функции получаются из формул (10.6) умножением на $\sqrt{\frac{2}{|\omega|h}}$.

Из леммы 3.1 вытекает следующий аналог леммы 5.2.

ЛЕММА 10.1. Если $\lambda(\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))$ имеют асимптотики вида (10.1), (5.8), то ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \lambda(\varepsilon))$ и $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \lambda(\varepsilon))$ представимы в виде (10.3), причем

$$\psi_1^{\text{in(ex)}} = -\lambda_1 R_0^{\text{in(ex)}} G^{\text{in(ex)}}(x, x_0^{\text{in(ex)}}, \lambda_0). \quad (10.7)$$

Краевые задачи для $v_j^{\text{in(ex)}}$ и уравнения для w_j по-прежнему имеют вид (5.13) и (5.11) соответственно, но в качестве решений (5.11) будем выбирать функции

$$w_j(t) = -\frac{1}{k_0} \sum_{1 \leq i \leq j+1} \lambda_i \int_{-h}^t \sin(k_0(t-s)) w_{j-i}(s) ds + b_j \cos(k_0 t), \quad j \geq 0, \quad (10.8)$$

т. е. (в отличие от предыдущих параграфов) будем опускать синусоидальное слагаемое.

Обозначим через $w^\varepsilon(x)$ ряд (10.2), (10.8). Из лемм 3.1, 10.1, определений $K_q^{\text{in(ex)}}$ и w^ε вытекает

ЛЕММА 10.2. Пусть $\lambda(\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$, $w^\varepsilon(x)$ имеют асимптотики (10.1), (5.8), (10.2), (10.8). Тогда:

- а) справедливы утверждения а) леммы 5.3;
- б) справедливы представления

$$\begin{aligned} W_k^{\text{in}}(\xi_3) &= \widetilde{W}_k^{\text{in}}(\xi_3) + \frac{\lambda_{k+1} h}{2k_0} + b_k, & W_k^{\text{ex}}(\xi_3) &= \widetilde{W}_k^{\text{ex}}(\xi_3) + (-1)^m b_k, \\ \widetilde{W}_0^{\text{in}}(\xi_3) &= k_0 \xi_3, & \widetilde{W}_0^{\text{ex}}(\xi_3) &= (-1)^{m+1} k_0 \xi_3, \end{aligned}$$

где $\widetilde{W}_i^{\text{in(ex)}}$ не зависят от λ_{q-1} и b_q при $q \geq i$,

$$\begin{aligned} V_0^{\text{in(ex)}} &= -\frac{\lambda_1}{2\pi} \Pi_0^{\text{in(ex)}}, \\ V_k^{\text{in(ex)}} &= \widetilde{V}_k^{\text{in(ex)}} - \frac{1}{2\pi} (\lambda_{k+1} \Pi_0^{\text{in(ex)}} + \lambda_1 \Pi_k^{\text{in(ex)}}), \quad k \geq 1, \\ \Pi_i^{\text{in(ex)}} &= \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{in(ex)}, t+i} (D_\xi) \rho^{-1}, \end{aligned}$$

где $\widetilde{V}_i^{\text{in(ex)}}$ не зависят от λ_{q+1} и $\Pi_q^{\text{in(ex)}}$ при $q \geq i$;

- в) справедливы утверждения в) леммы 5.3.

Обозначим через $v_{\varepsilon, N}^{\text{in(ex)}}$ частичные суммы рядов (10.4).

ЛЕММА 10.3. Существуют функция $\lambda(\varepsilon)$, имеющая асимптотику (10.1), и ряды (5.8), (10.2), (10.8), (10.4) такие, что:

- а) справедливы утверждения а) леммы 5.4;
- б) для коэффициентов этих рядов имеют место равенства (10.5),

$$v_0^{\text{in}} = k_0 Y, \quad v_0^{\text{ex}} = (-1)^{m+1} k_0 Y, \quad (10.9)$$

$$k_0 q_\omega = \frac{\lambda_1 h}{2k_0} + b_0, \quad k_0 q_\omega = -b_0, \quad (10.10)$$

$$\lambda_1 R_0^{\text{in}} = k_0 |\omega|, \quad \lambda_1 R_0^{\text{ex}} = (-1)^{m+1} k_0 |\omega|. \quad (10.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая $v_0^{\text{in(ex)}}$ в соответствии (10.9) и требуя выполнения равенств (5.15) для $N = 0$, в силу леммы 10.3 получаем соотношения (10.10). Разрешая (10.10), находим b_0 и λ_1 и, в частности, получаем равенство (10.5). Требуя выполнения равенств (5.14) для $N = 0$, в силу леммы 10.2 определяем $\Pi_0^{\text{in(ex)}}$ и, в частности, получаем соотношения (10.11).

Если назвать проделанный шаг “нулевым”, то на n -м шаге по $\tilde{V}_n^{\text{in(ex)}}$ и $\tilde{W}_n^{\text{in(ex)}}$ в силу лемм 10.2 и 4.3 определяем решения $v_n^{\text{in(ex)}}$ краевых задач (5.13) таких, что

$$\begin{aligned} v_n^{\text{in(ex)}}(\xi) - V_n^{\text{in(ex)}}(\xi) &= O(\rho^{-1}), \quad \xi_3 \geq 0, \\ v_n^{\text{in(ex)}}(\xi) - W_n^{\text{in(ex)}}(\xi_3) &= O(1), \quad \xi_3 < 0. \end{aligned}$$

Добиваясь выполнения при $N = n$ равенства (5.15) последовательно для индексов “ex” и “in”, также последовательно определяем b_n и λ_{n+1} . И наконец, требуя выполнения равенства (5.14) при $N = n$, находим $\Pi_n^{\text{in(ex)}}$. Лемма доказана.

Обоснование построенных асимптотик повторяет доказательство, приведенное в §5, а равенства (10.6) вытекают из равенств (10.9), (10.11), (10.5) и (10.7). Теорема 10.1 доказана.

§ 11. Асимптотики для кратности $(1, 1, 0)$

Целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть кратность $\lambda_0 = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2$ равна $(1, 1, 0)$, ψ – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ собственная функция задачи Неймана в Ω^{in} и $\psi(0) \neq 0$.

Тогда существуют два простых собственных значения $\lambda^{\varepsilon, i}$ краевой задачи (1.1), сходящиеся к λ_0 , а асимптотики этих собственных значений и соответствующих собственных функций $\Psi^{\varepsilon, i}$ имеют вид

$$\lambda^{\varepsilon, i} = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_j^{(i)}, \quad (11.1)$$

$$\Psi^{\varepsilon, i}(x) = B^{(i)}\psi(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j^{\text{in}, i}(x) \quad \text{в } \Omega^{\text{in}} \setminus S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi_j^{\text{in}, i} \in \mathcal{A}_{j-1}^{\text{in}}, \quad (11.2)$$

$$\Psi^{\varepsilon, i}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j^{\text{ex}, i}(x) \quad \text{в } \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi_j^{\text{ex}, i} \in \mathcal{A}_{j-1}^{\text{ex}}, \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} \Psi^{\varepsilon, i}(x) &= \sum_{j=-1}^{\infty} \varepsilon^j w_j^{(i)}(x_3) \quad \text{в } \mathcal{K}^{\varepsilon} \setminus (S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2})), \\ w_j^{(i)} &\in C^\infty([-h, 0]), \quad w_{-1}^{(i)}(t) = \sin(k_0 t), \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\Psi^{\varepsilon, i}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j^{\text{in(ex), i}}\left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{\varepsilon}\right) \quad \text{в } S^{\text{in(ex)}}(2\varepsilon^{1/2}) \cap \Omega_\varepsilon, \quad v_j^{\text{in(ex), i}} \in \mathcal{B}_{j+1}^{\text{in(ex), i}}, \quad (11.5)$$

а для главных членов асимптотик справедливы равенства

$$\lambda_1^{(i)} = \frac{2\lambda_0 q_\omega \pm \sqrt{(2\lambda_0 q_\omega)^2 + 2\psi^2(0)\lambda_0|\omega|h}}{h}, \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned} B^{(i)} &= \frac{\psi(0)k_0|\omega|}{\lambda^{(i)}}, \quad \psi_2^{\text{ex}} = (-1)^m k_0|\omega|G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda_0), \\ v_0^{\text{in}, i} &= k_0 Y + \psi(0)B^{(i)}, \quad v_0^{\text{ex}, i} = (-1)^{m+1} Y. \end{aligned} \quad (11.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11.1. Из формул (11.1) и (11.6) следует, что одно из собственных значений возмущенной задачи больше λ_0 , а второе – меньше λ_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 11.2. В (11.2)–(11.5) приведены асимптотики собственных функций, нормированных с точностью до скалярных множителей, т.е. $\Psi^{\varepsilon, i} = \alpha_i(\varepsilon)\psi^{\varepsilon, i}$, где $\psi^{\varepsilon, i}$ – нормированные в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственные функции, а скалярные множители $\alpha_i(\varepsilon) = \sqrt{(B^{(i)})^2 + \frac{|\omega|h}{2}} + o(1)$. Поэтому главные члены асимптотик нормированных собственных функций получаются из формул (11.7) делением на величину $\sqrt{(B^{(i)})^2 + \frac{|\omega|h}{2}}$. В силу формул (11.2), (11.4), (11.7) главные члены асимптотик обеих собственных функций не равны нулю в Ω^{in} и не стремятся к нулю (по норме $L_2(\mathcal{K}^\varepsilon)$) в $\mathcal{K}^\varepsilon$.

Из леммы 3.1 вытекает следующий аналог лемм 5.2 и 10.1.

ЛЕММА 11.1. Если $\lambda(\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))$ имеют асимптотики вида (11.1), (5.8), то ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \lambda(\varepsilon))$ и $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \lambda(\varepsilon))$ представимы в виде (11.2), (11.3), причем

$$B^{(i)} = R_0^{\text{in}}\psi(0), \quad \psi_1^{\text{ex}} = -\lambda_1^{(i)} R_0^{\text{ex}} G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, \lambda_0). \quad (11.8)$$

Уравнения и краевые задачи для коэффициентов рядов (11.4) и (11.5) получаются таким же образом, как и в предыдущих параграфах, и имеют вид (5.11) и (5.13) (с добавлением индексов соответствия i).

ЗАМЕЧАНИЕ 11.3. Поскольку построение асимптотик для двух собственных значений (и соответствующих собственных функций) будет проводиться одновременно и однотипно аналогично построению в § 10, то индекс соответствия i будем (по возможности) опускать. При таком подходе формулы (11.1), (11.4), (11.5) приобретают вид (10.1), (10.2), (10.4) соответственно. Чтобы отметить как связь, так и различие в алгоритмах предыдущего и настоящего параграфов, будем использовать (по возможности) приведенную нумерацию из § 10. Поэтому коэффициенты ряда (10.2) (т.е. ряда (11.4), в котором опущен индекс соответствия) определим равенствами (10.8).

Из лемм 3.1 и 11.1 и определения $K_q^{\text{in(ex)}}$ вытекает следующий аналог лемм 5.3 и 10.2.

ЛЕММА 11.2. Пусть $\lambda(\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$, $w^\varepsilon(x)$ имеют асимптотики (10.1), (5.8), (10.2), (10.8). Тогда:

а) справедливы утверждения а) леммы 5.3;

б) для $W_k^{\text{in(ex)}}$ справедливо утверждение б) леммы 10.2, а для $V_j^{\text{in(ex)}}$ справедливы представления

$$\begin{aligned} V_0^{\text{in}} &= R_0^{\text{in}} \psi^2(0) - \frac{\lambda_1}{2\pi} \Pi_0^{\text{in}}, & V_0^{\text{ex}} &= -\frac{\lambda_1}{2\pi} \Pi_0^{\text{ex}}, \\ V_k^{\text{in}} &= \tilde{V}_k^{\text{in}} + [R_k^{\text{in}} \psi] \psi(0) - \frac{1}{2\pi} (\lambda_{k+1} \Pi_0^{\text{in}} + \lambda_1 \Pi_k^{\text{in}}), \\ V_k^{\text{ex}} &= \tilde{V}_k^{\text{ex}} - \frac{1}{2\pi} (\lambda_{k+1} \Pi_0^{\text{ex}} + \lambda_1 \Pi_k^{\text{ex}}), & k &\geq 1, \\ \Pi_i^{\text{in(ex)}} &= \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{in(ex),t+i}} (D_\xi) \rho^{-1}, \end{aligned}$$

где $\tilde{V}_i^{\text{in(ex)}}$ не зависит от λ_{q+1} и $\Pi_q^{\text{in(ex)}}$ при $q \geq i$;
в) справедливы утверждения в) леммы 5.3.

Обозначим через $v_{\varepsilon, N}^{\text{in(ex)}}$ частичные суммы рядов (10.4) (т.е. рядов (11.5), в которых опущен индекс соответствия).

ЛЕММА 11.3. Существуют функция $\lambda(\varepsilon)$, имеющая асимптотику (11.1), и ряды (5.8), (10.2), (10.8), (10.4) такие, что:

- а) справедливы утверждения а) леммы 5.4;
- б) для коэффициентов этих рядов имеют место равенства

$$v_0^{\text{in}} = k_0 Y + R_0^{\text{in}} \psi^2(0), \quad v_0^{\text{ex}} = (-1)^{m+1} k_0 Y, \quad (11.9)$$

$$k_0 q_\omega + R_0^{\text{in}} \psi^2(0) = \frac{\lambda_1 h}{2k_0} + b_0, \quad k_0 q_\omega = -b_0, \quad (11.10)$$

$$\lambda_1 R_0^{\text{in}} = k_0 |\omega|, \quad (11.11)$$

$$\lambda_1 R_0^{\text{ex}} = (-1)^{m+1} k_0 |\omega|. \quad (11.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая $v_0^{\text{in(ex)}}$ в соответствии с (11.9), где R_0^{in} – пока произвольная постоянная, и предполагая выполнение равенств (5.15) для $N = 0$, в силу леммы 11.2 получаем соотношения (11.10). Предполагая выполнение равенств (5.14) для $N = 0$ до членов порядка ρ^{-1} включительно, в силу леммы 11.3 получаем соотношения (11.11) и (11.12). Разрешая систему уравнений (11.10), (11.11) относительно λ_1 , b_0 и R_0^{in} , находим два набора решений этой системы и, в частности, получаем два значения (11.6) для $\lambda_1 = \lambda_1^{(i)}$. Далее, из (11.12) находим R_0^{ex} , а, требуя выполнения равенств (5.14) при $N = 0$ для остальных степеней ρ , в силу лемм 11.2 и 4.4 определяем и остальные коэффициенты рядов $\Pi_0^{\text{in(ex)}}$.

На n -м шаге, предполагая выполнение (5.15) для индекса “ex” при $N = n$, находим b_n . Далее, требуя для индекса “in” и $N = n$ выполнения (5.15) и выполнения (5.14) с точностью до $O(\rho^{-1})$ включительно, получаем систему линейных уравнений для λ_{n+1} и $P_0^{\text{in}, n}$:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2k_0} \lambda_{n+1} - \psi^2(0) P_0^{\text{in}, n} &= A_1, \\ R_0^{\text{in}} \lambda_{n+1} + \lambda_1 P_0^{\text{in}, n} &= A_2, \end{aligned} \quad (11.13)$$

где A_i – вполне определенные числа. Учитывая (11.11), получаем, что определитель этой системы равен

$$\frac{h\lambda_1^2 + k_0^2\psi^2(0)}{\lambda_1 k_0} \neq 0.$$

Разрешая систему (11.13), находим λ_{n+1} и $P_0^{\text{in},n}$. Добиваясь выполнения равенств (5.14) для $N = n$, определяем $\Pi_n^{\text{in(ex)}}$. Лемма доказана.

Обоснование построенных асимптотик повторяет доказательство, приведенное в § 8, а равенства (11.7) вытекают из равенств (11.9), (11.11), (11.12), (11.6) и (11.8). Теорема 11.1 доказана.

§ 12. Асимптотики для кратности (1, 1, 1)

Целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 12.1. Пусть кратность $\lambda_0 = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2$ равна (1, 1, 1), $\psi^{\text{in}}, \psi^{\text{ex}}$ – соответствующие нормированные в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ и $L_2(\Omega^{\text{ex}})$ собственные функции задач Неймана в Ω^{in} и Ω^{ex} и

$$\psi^{\text{in}}(0)\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) \neq 0.$$

Тогда существуют три простых собственных значения краевой задачи (1.1), сходящиеся к λ_0 , а асимптотики этих собственных значений и соответствующих собственных функций имеют вид

$$\lambda^{\varepsilon,i} = \lambda_0 + \sum_{j=1+2\delta_3^i}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_j^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12.1)$$

$$\Psi^{\varepsilon,i}(x) = B^{\text{in(ex)},i} \psi^{\text{in(ex)}}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j^{\text{in(ex)},i}(x) \quad \vartheta \quad \Omega^{\text{in(ex)}} \setminus S^{\text{in(ex)}}(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi_j^{\text{in(ex)},i} \in \mathcal{A}_{j-1}^{\text{in(ex)}}, \quad (12.2)$$

$$\Psi^{\varepsilon,i}(x) = \sum_{j=-1+\delta_3^i}^{\infty} \varepsilon^j w_j^{(i)}(x_3) \quad \vartheta \quad \mathcal{K}^{\varepsilon} \setminus (S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2})), \quad w_j^{(i)} \in C^\infty([-h, 0]), \quad w_{-1}^{(1)}(t) = w_{-1}^{(2)}(t) = \sin(k_0 t), \quad (12.3)$$

$$\Psi^{\varepsilon,i}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j^{\text{in(ex)},i} \left(\frac{x^{\text{in(ex)}}}{\varepsilon} \right) \quad \vartheta \quad S^{\text{in(ex)}}(2\varepsilon^{1/2}) \cap \Omega_\varepsilon, \quad v_j^{\text{in(ex)},i} \in \mathcal{B}_{j+1-\delta_3^i}^j, \quad (12.4)$$

для главных членов асимптотик справедливы равенства

$$\lambda_1^{(l)} = \frac{2\lambda_0 q_\omega + (-1)^l \sqrt{(2\lambda_0 q_\omega)^2 + 2((\psi^{\text{in}}(0))^2 + (\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2)\lambda_0 |\omega| h}}{h}, \quad (12.5)$$

$$B^{\text{in},l} = \frac{\psi^{\text{in}}(0)k_0|\omega|}{\lambda^{(l)}}, \quad v_0^{\text{in},l} = k_0 Y + \psi(0)B^{\text{in},l}, \quad (12.6)$$

$$B^{\text{ex},l} = (-1)^{m+1} \frac{\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}})k_0|\omega|}{\lambda^{(l)}}, \quad v_0^{\text{ex},l} = (-1)^{m+1} Y + B^{\text{ex},l} \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}})$$

при $l = 1, 2$ и

$$\lambda_3^{(3)} = \frac{2\pi}{(\psi^{\text{in}}(0))^2 + (\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2} ((\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2 \langle [\nabla \psi^{\text{in}}], C(\omega) [\nabla \psi^{\text{in}}] \rangle + (\psi^{\text{in}}(0))^2 \langle [\nabla \psi^{\text{ex}}], C(\omega) [\nabla \psi^{\text{ex}}] \rangle), \quad (12.7)$$

$$B^{\text{in},3} = 1, \quad B^{\text{ex},3} = (-1)^m \frac{\psi^{\text{in}}(0)}{\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}})}, \quad w_0^{(3)}(t) = \psi^{\text{in}}(0) \cos(k_0 t), \quad (12.8)$$

$$v_0^{\text{in},3} \equiv \psi^{\text{in}}(0), \quad v_0^{\text{ex},3} \equiv (-1)^m \psi^{\text{in}}(0).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12.1. Из формул (12.5), (12.7) и леммы 4.4 следует, что два из собственных значений возмущенной задачи больше λ_0 , а одно – меньше λ_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 12.2. В (12.1)–(12.3) приведены асимптотики собственных функций, нормированных с точностью до скалярных множителей, т.е. $\Psi^{\varepsilon,i} = \alpha_i(\varepsilon) \psi^{\varepsilon,i}$, где $\psi^{\varepsilon,i}$ – нормированная в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственная функция, а скалярные множители

$$\alpha_l(\varepsilon) = \sqrt{(B^{\text{in},l})^2 + (B^{\text{ex},l})^2 + \frac{|\omega|h}{2}} + o(1), \quad l = 1, 2,$$

$$\alpha_3(\varepsilon) = \sqrt{1 + (\psi^{\text{in}}(0))^2 (\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^{-2}} + o(1).$$

Поэтому главные члены асимптотик нормированной собственной функции получаются из формул (12.6) и (12.8) делением на эти скалярные множители $\alpha_i(\varepsilon)$. В силу (12.2), (12.3), (12.6) и (12.8) главные члены асимптотик собственных функций $\Psi^{\varepsilon,1}$ и $\Psi^{\varepsilon,2}$ не равны нулю в областях Ω^{in} и Ω^{ex} и не стремятся к нулю (по норме $L_2(\mathcal{K}^\varepsilon)$) в $\mathcal{K}^\varepsilon$, а главные члены асимптотики собственной функции $\Psi^{\varepsilon,3}$ также не равны нулю в областях Ω^{in} и Ω^{ex} , но $\|\Psi^{\varepsilon,3}\|_{L_2(\mathcal{K}^\varepsilon)} \rightarrow 0$.

Из леммы 3.1 вытекают два следующих аналога лемм 11.1 и 7.1 соответственно.

ЛЕММА 12.1. Если $\lambda(\varepsilon)$ имеет асимптотику вида (12.1) при $i = 1, 2$, а ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda(\varepsilon))$ имеют вид (5.8), то ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \lambda(\varepsilon))$ и $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \lambda(\varepsilon))$ представимы в виде (12.2), причем

$$B^{\text{in(ex)},i} = R_0^{\text{in(ex)}} \psi^{\text{in(ex)}}(x_0^{\text{in(ex)}}). \quad (12.9)$$

ЛЕММА 12.2. Если $\lambda(\varepsilon)$ имеет асимптотику вида (12.1) при $i = 3$ и

$$\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\lambda_0 - \lambda) R_{i+1}^{\text{in(ex)}}(D_y) G^{\text{in(ex)}}(x, x_0^{\text{in(ex)}}, \lambda), \quad (12.10)$$

где

$$[R_1^{\text{in}} \psi^{\text{in}}] = 1, \quad [R_j^{\text{in}} \psi^{\text{in}}] = 0, \quad j \geq 2, \quad (12.11)$$

то ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \lambda(\varepsilon))$ и $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \lambda(\varepsilon))$ представимы в виде (12.2), причем

$$B^{\text{in},3} = 1, \quad B^{\text{ex},3} = [R^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}]. \quad (12.12)$$

Уравнения и краевые задачи для коэффициентов рядов (12.3) и (12.4) получают-ся таким же образом, как и в предыдущих параграфах, и имеют вид (5.11) и (5.13) (с добавлением индексов соответствия i).

Построим вначале асимптотики (12.1)–(12.4) для значений индекса $i = 1, 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12.3. Для значений индекса $i = 1, 2$ построение асимптотик для двух собственных значений (и соответствующих собственных функций) будет проводиться одновременно и однотипно (аналогично построению в §10 и §11). Поэтому индекс соответствия i будем (по возможности) опускать. При таком подходе формулы (12.1), (12.3), (12.4) приобретают вид (10.1), (10.2), (10.4) соответственно. Чтобы отметить как связь, так и различие в алгоритмах двух предыдущих и настоящего параграфов, будем использовать (по возможности) и нумерацию, приведенную в §10. Поэтому коэффициенты ряда (10.2) (т.е. ряда (12.3) при $i = 1, 2$, в котором опущен индекс соответствия) определим равенствами (10.8).

Из лемм 3.1 и 12.1 и определения $K_q^{\text{in(ex)}}$ получаем следующий аналог лемм 5.3, 10.2 и 11.2.

ЛЕММА 12.3. Пусть $\lambda(\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$, $w^\varepsilon(x)$ имеют асимптотики (10.1), (5.8), (10.2), (10.8). Тогда:

- а) справедливы утверждения а) леммы 5.3;
- б) для $W_k^{\text{in(ex)}}$ справедливо утверждение б) леммы 10.2, а для $V_j^{\text{in(ex)}}$ справедливы представления

$$\begin{aligned} V_0^{\text{in(ex)}} &= R_0^{\text{in(ex)}}(\psi(x_0^{\text{in(ex)}}))^2 - \frac{\lambda_1}{2\pi} \Pi_0^{\text{in(ex)}}, \\ V_k^{\text{in(ex)}} &= \tilde{V}_k^{\text{in(ex)}} + [R_k^{\text{in(ex)}} \psi^{\text{in(ex)}}] \psi^{\text{in(ex)}}(x_0^{\text{in(ex)}}) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} (\lambda_{k+1} \Pi_0^{\text{in(ex)}} + \lambda_1 \Pi_k^{\text{in(ex)}}), \quad k \geq 1, \\ \Pi_j^{\text{in(ex)}} &= \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{in(ex), t+j}}(D_\xi) \rho^{-1}, \end{aligned}$$

где $\tilde{V}_j^{\text{in(ex)}}$ не зависит от λ_{q+1} и $\Pi_q^{\text{in(ex)}}$ при $q \geq j$;

- в) справедливы утверждения в) леммы 5.3.

Обозначим через $v_{\varepsilon, N}^{\text{in(ex)}}$ частичные суммы рядов (10.4) (т.е. рядов (12.4) при $i = 1, 2$, в которых опущен индекс соответствия).

ЛЕММА 12.4. Существуют функция $\lambda(\varepsilon)$, имеющая асимптотику (10.1), и ряды (5.8), (10.2), (10.8), (10.4) такие, что:

- а) справедливы утверждения в) леммы 5.3;
- б) для коэффициентов этих рядов имеют место равенства

$$v_0^{\text{in}} = k_0 Y + R_0^{\text{in}}(\psi^{\text{in}}(0))^2, \quad v_0^{\text{ex}} = (-1)^{m+1} k_0 Y + R_0^{\text{ex}}(\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2, \quad (12.13)$$

$$k_0 q_\omega + R_0^{\text{in}} \psi^2(0) = \frac{\lambda_1 h}{2k_0} + b_0, \quad k_0 q_\omega + (-1)^{m+1} R_0^{\text{ex}}(\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2 = -b_0, \quad (12.14)$$

$$\lambda_1 R_0^{\text{in}} = k_0 |\omega|, \quad \lambda_1 R_0^{\text{ex}} = (-1)^{m+1} k_0 |\omega|. \quad (12.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая $v_0^{\text{in(ex)}}$ в соответствии с (12.13), где R_0^{in} и R_0^{ex} – пока произвольные постоянные, и требуя выполнения равенств (5.15) для $N = 0$, в силу леммы 12.3 получаем соотношения (12.14). Требуя выполнения равенств (5.14) для $N = 0$ до членов порядка ρ^{-1} , в силу лемм 12.3 и 4.4 получаем соотношения (12.15). Решая систему нелинейных уравнений (12.14), (12.15) относительно $\lambda_1, b_0, R_0^{\text{in}}$ и R_0^{ex} , находим два набора решений этой системы и, в частности, получаем значения (12.5) для $\lambda_1 = \lambda_1^{(i)}$. Далее, требуя выполнения равенств (5.14) при $N = 0$ для всех отрицательных степеней ρ , в силу лемм 12.3 и 4.4 определяем и остальные коэффициенты операторных рядов $\Pi_0^{\text{in(ex)}}$.

На n -м шаге, предполагая, что при $N = n$ выполнены равенства (5.15) и равенства (5.14) с точностью до $O(\rho^{-1})$ включительно, в силу лемм 4.3 и 12.3 получаем систему линейных уравнений для $b_n, \lambda_{n+1}, P_0^{\text{in},n}$ и $P_0^{\text{ex},n}$:

$$\begin{aligned} -(\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2 P_0^{\text{ex},n} + (-1)^m b_n &= A_1, \\ \frac{h}{2k_0} \lambda_{n+1} - (\psi^{\text{in}}(0))^2 P_0^{\text{in},n} + b_n &= A_2, \\ R_0^{\text{in}} \lambda_{n+1} + \lambda_1 P_0^{\text{in},n} &= A_3, \\ R_0^{\text{ex}} \lambda_{n+1} + \lambda_1 P_0^{\text{ex},n} &= A_4, \end{aligned} \quad (12.16)$$

где A_i – вполне определенные числа. Из (12.16) следует, что определитель этой системы вычисляется по формуле

$$\det A = \lambda_1 \left((\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2 R_0^{\text{ex}} + (-1)^{m+1} (\psi^{\text{in}}(0))^2 R_0^{\text{in}} + (-1)^{m+1} \frac{h\lambda_1}{2k_0} \right). \quad (12.17)$$

Подставляя (12.14) в (12.17), получаем

$$\det A = (-1)^{m+1} \lambda_1 \left(\frac{h\lambda_1}{k_0} - 2k_0 q_\omega \right). \quad (12.18)$$

Из (12.18) и (12.5) вытекает, что

$$|\det A| = \frac{|\lambda_1|}{k_0} \sqrt{(2\lambda_0 q_\omega)^2 + 2((\psi^{\text{in}}(0))^2 + (\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}))^2) \lambda_0 |\omega| h} > 0.$$

Решая систему (12.16), находим $b_n, \lambda_{n+1}, P_0^{\text{in},n}$ и $P_0^{\text{ex},n}$. Добиваясь выполнения равенств (5.14) для $N = n$, определяем $\Pi_n^{\text{in(ex)}}$. Лемма доказана.

Равенства (12.6) вытекают из равенств (12.13)–(12.15), (12.5) и (12.9).

Перейдем к построению асимптотик (12.1)–(12.4) для значения индекса $i = 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12.4. Для индекса $i = 3$ при построении асимптотик будем также его по возможности опускать. При таком подходе формулы (12.1), (12.3), (12.4) приобретают вид (6.2), (5.5), (10.4) соответственно. Коэффициенты ряда (5.5)

(т.е. ряда (12.3) при $i = 3$, в котором опущен индекс соответствия) определим следующими равенствами:

$$\begin{aligned} w_0(t) &= b_0 \cos(k_0 t), \\ w_j(t) &= -\frac{1}{k_0} \sum_{q=3}^j \lambda_q \int_{-h}^t \sin(k_0(t-s)) w_{j-q}(s) ds \\ &\quad + b_j \cos(k_0 t) + a_j \sin(k_0 t), \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Из лемм 3.1 и 12.2 и определения $K_q^{\text{in(ex)}}$ вытекает следующий аналог лемм 5.3, 7.2 и 9.2.

ЛЕММА 12.5. Пусть $\lambda(\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \lambda)$, $w^\varepsilon(x)$ имеют асимптотики (6.2), (12.10), (12.11), (5.5), (12.19). Тогда:

- а) справедливы утверждения а) леммы 5.3;
- б) справедливы представления

$$\begin{aligned} W_0^{\text{in}} &= (-1)^m W_0^{\text{ex}} \equiv b_0, \quad W_1^{\text{in}} = (-1)^m W_0^{\text{ex}} \equiv b_1, \\ W_2^{\text{in}}(\xi_3) &= -b_0 \frac{\lambda_0 \xi_3^2}{2} + a_1 k_0 \xi_3 + b_2, \\ W_2^{\text{ex}}(\xi_3) &= (-1)^m \left(-b_0 \frac{\lambda_0 \xi_3^2}{2} - a_1 k_0 \xi_3 + b_2 \right), \\ W_k^{\text{in}}(\xi_3) &= \widetilde{W}_k^{\text{in}}(\xi_3) + a_{k-1} k_0 \xi_3 + b_k, \\ W_k^{\text{ex}}(\xi_3) &= \widetilde{W}_k^{\text{ex}}(\xi_3) + (-1)^{m+1} a_{k-1} k_0 \xi_3 + (-1)^m b_k, \\ \widetilde{W}_k^{\text{in}}(\xi_3) &= \widehat{W}_k^{\text{in}}(\xi_3) - b_{k-2} \frac{\lambda_0 \xi_3^2}{2}, \\ \widetilde{W}_k^{\text{ex}}(\xi_3) &= \widehat{W}_k^{\text{ex}}(\xi_3) + (-1)^{m+1} b_{k-2} \frac{\lambda_0 \xi_3^2}{2}, \quad k \geq 3, \end{aligned}$$

где $\widehat{W}_j^{\text{in(ex)}}$ не зависят от λ_{q-1} , a_{q-2} и b_{q-2} при $q \geq j$,

$$\begin{aligned} V_0^{\text{in}} &\equiv \psi^{\text{in}}(0), \quad V_0^{\text{ex}} \equiv [R_1^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}), \\ V_1^{\text{in}}(\xi) &= \langle \xi', [\nabla' \psi^{\text{in}}] \rangle - \frac{\lambda_3}{2\pi} \Pi_0^{\text{in}}, \\ V_1^{\text{ex}}(\xi) &= [R_1^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] \langle \xi', [\nabla' \psi^{\text{ex}}] \rangle + [R_2^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) - \frac{\lambda_3}{2\pi} \Pi_0^{\text{ex}}, \\ V_2^{\text{in}}(\xi) &= \left(Z_2^{\text{in}}(\xi) - \lambda_0 \psi^{\text{in}}(0) \frac{\rho^2}{6} \right) - \frac{1}{2\pi} (\lambda_4 \Pi_0^{\text{in}} + \lambda_3 \Pi_1^{\text{in}}), \\ V_2^{\text{ex}}(\xi) &= [R_1^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] \left(Z_2^{\text{ex}}(\xi) - \lambda_0 \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) \frac{\rho^2}{6} \right) + [R_2^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] \langle \xi', [\nabla' \psi^{\text{ex}}] \rangle \\ &\quad + [R_3^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) - \frac{1}{2\pi} (\lambda_4 \Pi_0^{\text{ex}} + \lambda_3 \Pi_1^{\text{ex}}), \\ V_k^{\text{in}}(\xi) &= \widetilde{V}_k^{\text{in}}(\xi) - \frac{1}{2\pi} (\lambda_{k+2} \Pi_0^{\text{in}} + \lambda_{k+1} \Pi_1^{\text{in}} + \lambda_3 \Pi_{k-1}^{\text{in}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_k^{\text{ex}}(\xi) &= \tilde{V}_k^{\text{ex}}(\xi) + [R_k^{\text{ex}}\psi^{\text{ex}}]\langle\xi', [\nabla'\psi^{\text{ex}}]\rangle + [R_{k+1}^{\text{ex}}\psi^{\text{ex}}]\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}(\lambda_{k+2}\Pi_0^{\text{ex}} + \lambda_{k+1}\Pi_1^{\text{ex}} + \lambda_3\Pi_{k-1}^{\text{ex}}), \quad k \geq 3, \\
\tilde{V}_k^{\text{ex}}(\xi) &= \hat{V}_k^{\text{ex}}(\xi) + [R_{k-1}^{\text{ex}}\psi^{\text{ex}}]\left(Z_2^{\text{ex}}(\xi) - \lambda_0\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}})\frac{\rho^2}{6}\right), \\
\Pi_j^{\text{in(ex)}} &= \sum_{t=\delta_j^0}^{\infty} (-1)^t P_t^{\text{in(ex)}, t+j}(D_\xi)\rho^{-1},
\end{aligned}$$

где $\tilde{V}_j^{\text{in}}$ и $\hat{V}_j^{\text{ex}}$ не зависят от λ_{q+1} и $\Pi_{q-1}^{\text{in(ex)}}$ при $q \geq j$, а

$$Z_2^{\text{in(ex)}}(x^{\text{in(ex)}}) - \lambda_0\psi^{\text{in(ex)}}(x_0^{\text{in(ex)}})\frac{r_{\text{in(ex)}}^2}{6}$$

– второй член разложения в ряд Тейлора функции $\psi^{\text{in(ex)}}(x)$ при $x = x_0^{\text{in(ex)}}$;
в) справедливы утверждения в) леммы 5.3.

Обозначим через $v_{\varepsilon, N}^{\text{in(ex)}}$ частичные суммы рядов (10.4) (т. е. рядов (12.4), в которых опущен индекс соответствия).

ЛЕММА 12.6. *Существуют функция $\lambda(\varepsilon)$, имеющая асимптотику (6.2), и ряды (12.10), (12.11), (5.5), (12.19), (10.4) такие, что:*

- а) справедливы утверждения в) леммы 5.3;
- б) для коэффициентов этих рядов имеют место равенства (12.7) и

$$v_0^{\text{in}} \equiv b_0 = \psi^{\text{in}}(0), \quad v_0^{\text{ex}} \equiv (-1)^m b_0 = [R_1^{\text{ex}}\psi^{\text{ex}}]\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}). \quad (12.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнены условия (12.11), налагаемые на ряды (12.10). Выбирая $v_0^{\text{in(ex)}}$, b_0 и R_1^{ex} в соответствии с (12.20), где R_1^{ex} – дифференциальный многочлен с пока недоопределенными коэффициентами (так же, как и R_1^{in}), в силу леммы 12.5 получаем справедливость (5.14), (5.15) для $N = 0$. Заметим, что из равенств (12.20) вытекает второе уравнение для шести коэффициентов многочленов $R_j^{\text{in(ex)}}$ (первым уравнением является первое уравнение из (12.11)):

$$\psi^{\text{in}}(0) = (-1)^m [R_1^{\text{ex}}\psi^{\text{ex}}]\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}). \quad (12.21)$$

Далее, положим

$$\begin{aligned}
v_1^{\text{in}}(\xi) &= \langle \mathbf{X}, [\nabla'\psi^{\text{in}}] \rangle, \\
v_1^{\text{ex}}(\xi) &= [R_1^{\text{ex}}\psi^{\text{ex}}]\langle \mathbf{X}, [\nabla'\psi^{\text{ex}}] \rangle + [R_2^{\text{ex}}\psi^{\text{ex}}]\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}),
\end{aligned}$$

где R_2^{in} и R_2^{ex} – дифференциальные многочлены также пока с неопределенными коэффициентами (но на коэффициенты R_2^{in} наложено второе условие из (12.11) при $j = 2$). Требуя выполнения (5.15) для $N = 1$, в силу лемм 12.5, 4.4 находим b_1 и получаем следующее соотношение для R_1^{ex} и R_2^{ex} :

$$b_1 = \langle \mathbf{q}_\omega, [\nabla'\psi^{\text{in}}] \rangle = (-1)^m ([R_1^{\text{ex}}\psi^{\text{ex}}]\langle \mathbf{q}_\omega, [\nabla'\psi^{\text{ex}}] \rangle + [R_2^{\text{ex}}\psi^{\text{ex}}]\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}})). \quad (12.22)$$

Требуя выполнения (5.14) для $N = 1$ до членов $O(\rho^{-2})$ включительно, получаем в силу лемм 12.5, 4.4 еще четыре уравнения для λ_3 и коэффициентов полиномов $R_1^{\text{in(ex)}}$:

$$C(\omega)[\nabla' \psi^{\text{in}}] = \frac{\lambda_3}{2\pi} \mathbf{P}_1^{\text{in},1}, \quad [R_1^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}]C(\omega)[\nabla' \psi^{\text{ex}}] = \frac{\lambda_3}{2\pi} \mathbf{P}_1^{\text{ex},1}. \quad (12.23)$$

Уравнения (12.23), (12.21) и первое уравнение из (12.11) представляют собой недоопределенную систему шести уравнений для семи неизвестных (коэффициентов многочленов $R_1^{\text{in(ex)}}$ и λ_3). Поэтому точное определение этих величин переносится на следующий шаг. Тем не менее, аналогично §7 выберем произвольное решение этой системы уравнений такое, что $\lambda_3 \neq 0$. Тогда, требуя выполнения (5.14) для $N = 1$, находим $\Pi_0^{\text{in(ex)}}$. Заметим, что после определения $\lambda_3 \neq 0$ ряды $\Pi_0^{\text{in(ex)}}$ определяются однозначно.

На следующем (втором) шаге, полагая

$$\begin{aligned} v_2^{\text{in}} &= (\hat{Y}^{\text{in}} - \lambda_0 \psi^{\text{in}}(0)Y^{-1}) + a_1 k_0 Y, \\ v_2^{\text{ex}} &= [R_1^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}](\hat{Y}^{\text{ex}} - \lambda_0 \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}})Y^{-1}) \\ &\quad + [R_2^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}]\langle \mathbf{X}, [\nabla' \psi^{\text{ex}}] \rangle + (-1)^{m+1} a_1 k_0 Y + [R_3^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}](x_0^{\text{ex}}), \end{aligned}$$

где $\hat{Y}^{\text{in(ex)}}$ – функции из леммы 4.5 с $Z_2 = Z_2^{\text{in(ex)}}$, в силу лемм 12.6, 4.4–4.6 добиваемся выполнения равенства (5.14) для $N = 2$ с точностью до $O(1)$ включительно. Требуя выполнения для $N = 2$ равенства (5.14) с точностью до $O(\rho^{-1})$ включительно, в силу этих же лемм получаем еще два уравнения для λ_3 и $P_0^{\text{in(ex),1}}$:

$$\lambda_3 P_0^{\text{in},1} = a_1 k_0 |\omega|, \quad \lambda_3 P_0^{\text{ex},1} = (-1)^{m+1} a_1 k_0 |\omega|. \quad (12.24)$$

Уравнения (12.21), (12.23), (12.24) и первое уравнение из (12.11) представляют собой систему восьми нелинейных уравнений для восьми переменных: для λ_3 , a_1 и коэффициентов полиномов $R_1^{\text{in(ex)}}$. Решая эту систему, получаем значение (12.7) для $\lambda_3 = \lambda_3^{(3)}$, находим a_1 и коэффициенты полиномов $R_1^{\text{in(ex)}}$. Заметим, что, найдя $\lambda_3 \neq 0$, мы однозначно доопределили $\Pi_0^{\text{in(ex)}}$. Кроме этого, после определения $P_2^{\text{ex},2}$ уравнение (12.22) становится аналогом уравнения (12.21) для коэффициентов полинома $P_1^{\text{ex},2}$ и для $P_0^{\text{ex},2}$:

$$[(P_1^{\text{ex},2} + P_0^{\text{ex},2})\psi^{\text{ex}}]\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) = F_1, \quad (12.25)$$

где F_1 – вполне определенное число. В свою очередь, требуя выполнения (5.15) для $N = 2$, находим b_2 и получаем аналог соотношения (12.22) на R_2^{ex} и R_3^{ex} :

$$f_1 + f_2[R_2^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] = [R_3^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}]\psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}), \quad (12.26)$$

где f_i – вполне определенные числа. Далее, требуя выполнения для $N = 2$ равенства (5.14) с точностью до $O(\rho^{-2})$ включительно, с учетом (12.25) получаем еще четыре уравнения, являющиеся линейными аналогами уравнений (12.23):

$$\mathbf{F}^{\text{in}} = \lambda_3 \mathbf{P}_1^{\text{in},2} + \lambda_4 \mathbf{P}_1^{\text{in},1}, \quad \mathbf{F}^{\text{ex}} = \lambda_3 \mathbf{P}_1^{\text{ex},2} + \lambda_4 \mathbf{P}_1^{\text{ex},1}, \quad (12.27)$$

где $\mathbf{F}^{\text{in(ex)}}$ – вполне определенные векторы. Уравнения (12.25), (12.27) и второе уравнение из (12.11) при $j = 2$ представляют собой систему шести (но уже линейных) уравнений для семи неизвестных: коэффициентов многочленов $P_1^{\text{in(ex)},2}$, $P_0^{\text{in(ex)},2}$ и λ_4 . Легко видеть, что эта система разрешима. Выбирая (временно) произвольное решение этой системы и требуя выполнения равенства (5.14) для $N = 2$, находим $\Pi_1^{\text{in(ex)}}$.

Требуя выполнения для $N = 3$ равенства (5.14) с точностью до $O(\rho^{-1})$ включительно, в силу лемм 12.6, 4.3–4.6 получаем еще два уравнения для λ_4 и $P_0^{\text{in(ex)},2}$, являющиеся линейными аналогами уравнений (12.24):

$$\begin{aligned}\lambda_3 P_0^{\text{in},2} + \lambda_4 P_0^{\text{in},1} &= a_2 k_0 |\omega| + F^{\text{in}}, \\ \lambda_3 P_0^{\text{ex},2} + \lambda_4 P_0^{\text{ex},1} &= (-1)^{m+1} a_2 k_0 |\omega| + F^{\text{ex}},\end{aligned}\quad (12.28)$$

где $F^{\text{in(ex)}}$ – вполне определенные числа. Заметим, что независимость $F^{\text{in(ex)}}$ от еще неопределенных величин $[R_2^{\text{in}} \psi^{\text{in}}]$ и $[R_2^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}]$ следует из структуры $\tilde{V}^{\text{ex}}$ и порядка первых убывающих на бесконечности (при $\xi_3 > 0$) членов асимптотик функций $\hat{Y}$, Y^{-1} и X_q . Уравнения (12.25), (12.27), (12.28) и второе уравнение из (12.11) при $j = 2$ представляют собой систему восьми уже линейных уравнений для восьми переменных: для λ_4 , a_2 , $P_0^{\text{in(ex)},2}$ и коэффициентов полиномов $P_1^{\text{in(ex)},2}$. Нетрудно убедиться в том, что эта система однозначно разрешима. Дальнейшее построение повторяет вышеизложенную процедуру. Найдя λ_4 , однозначно доопределили $\Pi_1^{\text{in(ex)}}$. Кроме этого, после определения R_2^{ex} и $P_2^{\text{ex},3}$ уравнение (12.26) становится аналогом уравнения (12.25) для коэффициентов полинома $P_1^{\text{ex},3}$ и для $P_0^{\text{ex},3}$:

$$[(P_1^{\text{ex},3} + P_0^{\text{ex},3}) \psi^{\text{ex}}] \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}) = F_1, \quad (12.29)$$

где F_1 – вполне определенное число. В свою очередь, требуя выполнения (5.15) для $N = 3$, находим b_3 и получаем аналог соотношения (12.26) на R_3^{ex} и R_4^{ex} :

$$f_1 + f_2 [R_3^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] = [R_4^{\text{ex}} \psi^{\text{ex}}] \psi^{\text{ex}}(x_0^{\text{ex}}),$$

где f_i – вполне определенные числа. Далее, требуя выполнения для $N = 3$ равенства (5.14) с точностью до $O(\rho^{-2})$ включительно, с учетом (12.29) получаем еще четыре уравнения, являющиеся линейными аналогами уравнений (12.27):

$$\mathbf{F}^{\text{in}} = \lambda_3 \mathbf{P}_1^{\text{in},3} + \lambda_5 \mathbf{P}_1^{\text{in},1}, \quad \mathbf{F}^{\text{ex}} = \lambda_3 \mathbf{P}_1^{\text{ex},3} + \lambda_5 \mathbf{P}_1^{\text{ex},1}, \quad (12.30)$$

где $\mathbf{F}^{\text{in(ex)}}$ – вполне определенные векторы. Уравнения (12.29), (12.30) и второе уравнение из (12.11) при $j = 3$ представляют собой систему шести уравнений для восьми неизвестных: коэффициентов многочленов $P_1^{\text{in(ex)},3}$, $P_0^{\text{in(ex)},3}$, λ_5 и a_3 . Выбирая (временно) произвольное решение этой системы и требуя выполнения равенства (5.14) для $N = 3$, находим $\Pi_2^{\text{in(ex)}}$.

И наконец, требуя выполнения для $N = 4$ равенства (5.14) с точностью до $O(\rho^{-1})$ включительно, в силу лемм 12.6, 4.3–4.6 получаем недостающие два уравнения для λ_4 и $P_0^{\text{in(ex)},2}$, являющиеся аналогами уравнений (12.28):

$$\begin{aligned}\lambda_3 P_0^{\text{in},3} + \lambda_5 P_0^{\text{in},1} &= a_3 k_0 |\omega| + F^{\text{in}}, \\ \lambda_3 P_0^{\text{ex},3} + \lambda_5 P_0^{\text{ex},1} &= (-1)^{m+1} a_3 k_0 |\omega| + F^{\text{ex}}.\end{aligned}\quad (12.31)$$

Как уже было отмечено выше, линейная система уравнений (12.29)–(12.31) однозначно разрешима. Далее аналогично. Лемма доказана.

Равенства (12.8) вытекают из равенств (12.2)–(12.4), (12.7), (12.12), (12.19) и (12.20).

Обоснование построенных асимптотик повторяет доказательство, приведенное в §8. Теорема 12.1 доказана.

Список литературы

1. *Beale J. T.* Scattering frequencies of resonators // *Commun. Pure and Appl. Math.* 1973. V. 26. № 4. P. 549–563.
2. *Арсеньев А. А.* О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // *ЖВМ и МФ.* 1976. Т. 16. № 3. С. 718–724.
3. *Санчес-Паленсия Е.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
4. *Jimbo Sh.* The singularly perturbed domain and characterization for the eigenfunctions with Neumann boundary condition // *J. Differ. Equat.* 1989. V. 77. № 2. P. 322–350.
5. *Fang Q.* Asymptotic behavior and domain-dependency of solutions to a class of reaction-diffusion systems with large diffusion coefficients // *Hiroshima Math. J.* 1990. V. 20. P. 549–571.
6. *Hempel R., Seco L., Simon B.* The essential spectrum of Neumann Laplacians on some bounded singular domains // *J. Funct. Anal.* 1991. V. 102. P. 448–483.
7. *Jimbo Sh., Morita Y.* Remarks on the behavior of certain eigenvalues on a singularly perturbed domain with several thin channels // *Comm. Partial Differ. Equat.* 1992. V. 17. P. 523–552.
8. *Hislop P. D.* Singular perturbations of Dirichlet and Neumann domains and resonances for obstacle scattering // *Astérisque.* 1992. V. 210. P. 197–216.
9. *Гадильшин Р. Р.* Асимптотика второй собственной частоты для системы двух тел, соединенных тонкой перемычкой // *ТМФ.* 1993. Т. 97. № 1. С. 68–77.
10. *Гадильшин Р. Р.* О собственных частотах тел с тонкими отростками. I. Сходимость и оценки // *Матем. заметки.* 1993. Т. 54. № 6. С. 10–21.
11. *Jimbo Sh.* Perturbation formula of eigenvalues in singularly perturbed domain // *J. Math. Soc. Japan.* 1993. V. 45. P. 339–356.
12. *Гадильшин Р. Р.* О собственных частотах тел с тонкими отростками. II. Асимптотики // *Матем. заметки.* 1994. Т. 55. № 1. С. 20–34.
13. *Киселев А. А., Павлов Б. С.* Собственные частоты и собственные функции оператора Лапласа задачи Неймана в системе двух связанных резонаторов // *ТМФ.* 1994. Т. 100. № 3. С. 354–366.
14. *Brown R. M., Hislop P. D., Martinez A.* Eigenvalues and resonances for domains with tubes: Neumann boundary conditions // *J. Differ. Equat.* 1995. V. 115. P. 458–476.
15. *Arrieta J. M.* Neumann eigenvalue problems on exterior perturbations of the domain // *J. Differ. Equat.* 1995. V. 118. P. 54–103.
16. *Arrieta J. M.* Rates of eigenvalues on a dumbbell shaped domain. Simple eigenvalue case // *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 1995. V. 347. № 9. P. 3503–3531.
17. *Гадильшин Р. Р.* О собственных частотах тел с тонкими отростками. III. Расщепление частот // *Матем. заметки.* 1997. Т. 61. № 4. С. 494–502.
18. *Hawkins H., Parnowski L.* Trapped modes in a waveguide with a thick obstacle. *math.AP/0111103.*
19. *Ладьженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
20. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
21. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
22. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.: Мир, 1951.
23. *Morrey C. B.* Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin: Springer-Verlag, 1966.

24. *Kato T.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
25. *Гадильшин Р. Р.* О собственных значениях задачи Неймана в области с узким каналом связи // Докл. РАН. 2002. Т. 387. № 1. С. 26–30.
26. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
27. *Назаров С. А.* Соединение сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. I // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1995. № 18. С. 3–78.
28. *Babushka I., Vyborny R.* Continuous dependence of eigenvalues on the domains // Czech. Mat. J. 1965. V. 15. P. 169–178.
29. *Арсеньев А. А.* Об особенностях аналитического продолжения и резонансных свойствах решения задачи рассеяния для уравнения Гельмгольца // ЖВМ и МФ. 1971. Т. 12. № 1. С. 112–138.
30. *Петрас С. В.* О расщеплении серий резонансов на “нефизическом листе” // Зап. научн. семина. ЛОМИ. 1975. Т. 51. С. 155–169.
31. *Fernandez C.* Resonances in scattering by a resonator // Indiana Univ. Math. J. 1985. V. 34. P. 115–125.
32. *Hislop P. D., Martinez A.* Scattering resonances of Helmholtz resonator // Indiana Univ. Math. J. 1991. V. 40. P. 767–788.
33. *Brown R. M., Hislop P. D., Martinez A.* Lower bounds on the interaction between cavities connected by a thin tube // Duke Math. J. 1995. V. 115. P. 458–476.
34. *Гадильшин Р. Р.* Асимптотика решений сингулярно возмущенной задачи Дирихле // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36. № 1. С. 92–102.
35. *Гадильшин Р. Р.* Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задаче для оператора Лапласа // Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прилож. Тематические обзоры. Т. 5. М.: ВИНТИ, 2003. С. 3–32.
36. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
37. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
38. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
39. *Planida M. Yu.* Asymptotics for eigenvalues of Laplacian with Neumann boundary condition on a thin tube cut out // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Ser. Mecanique. 2003. V. 331. P. 531–536.