Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Засорина, О группе Брауэра алгебраического многообразия над конечным полем, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 2, 111–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/im635>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:50:43

УДК 512.6

Т. В. Засорина

О группе Брауэра алгебраического многообразия над конечным полем

Для арифметической модели $X \rightarrow C$ гладкого проективного регулярного многообразия V над глобальным полем k положительной характеристики доказывается конечность l -примарной компоненты группы $\text{Br}'(X)$ при условии, что l не делит порядок группы кручения $[\text{NS}(V)]_{\text{tors}}$ и для V верна гипотеза Тейта о дивизориальных классах когомологий.

Библиография: 14 наименований.

Введение

Пусть X – гладкое проективное многообразие над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p , $\text{Br}(X)$ – группа Брауэра, $\text{Br}'(X) = H^2(X, G_m)$ – когомологическая группа Брауэра. Известно, что $\text{Br}(X) \hookrightarrow \text{Br}'(X)$.

Существует гипотеза М. Артина о том, что группа $\text{Br}(X)$ конечна [7, гл. IV, §2, вопрос 2.19].

Пусть C – гладкая проективная кривая над $\mathbb{F}_q$, $k = \mathbb{F}_q(C)$ – поле рациональных функций на C . По определению, поле k является *глобальным полем* положительной характеристики p . Обозначим через k^s сепарабельное замыкание поля k , а через $\bar{k}$ – алгебраическое замыкание поля k .

Предположим, что имеется сюръективный $\mathbb{F}_q$ -морфизм гладких проективных многообразий $\pi: X \rightarrow C$ с гладким общим слоем V и приведенными схемными слоями, причем $V(k) \neq \emptyset$, $\text{NS}(V) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$. Пусть $V \otimes \bar{k}$ – регулярное многообразие в том смысле, что $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = 0$. Если для дивизоров на V верна гипотеза Тейта (другими словами, если каноническое отображение

$$\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \rightarrow H^2(V \otimes k^s, \mathbb{Q}_l(1))^{\text{Gal}(k^s/k)}$$

является изоморфизмом для простого числа $l \neq p = \text{char}(\mathbb{F}_q)$ [12], [14]) и l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V)]_{\text{tors}})$, то мы доказываем, что группа $\text{Br}'(X)$ имеет конечную l -примарную компоненту (теорема 2.1).

Аналогичные результаты о конечности l -примарных компонент групп Брауэра арифметических схем, проективных и плоских над спектром кольца целых числового поля, доказаны в работах [9]–[11].

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю С. Г. Танкееву за постановку задачи, внимание, советы и замечания на протяжении всей работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-00374).

§ 1. Некоторые замечания о группе Брауэра алгебраического многообразия

1.1. ЛЕММА [9, лемма 1.1]. *Предположим, что спектральная последовательность $E_2^{p,q}$ дает инъективный морфизм $E_2^{3,0} \rightarrow E^3$. Тогда имеется точная последовательность*

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

где $E_1^2 = \text{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$.

1.2. ЛЕММА. *Пусть V – гладкое проективное многообразие над полем $k = \mathbb{F}_q(C)$, l – простое число, отличное от $p = \text{char}(\mathbb{F}_q)$. Тогда для любого целого числа i группа $H^i(V \otimes k^s, \mu_l)$ конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вложение $k^s \hookrightarrow \bar{k}$ сепарабельно замкнутых полей (напомним, что k^s и $\bar{k}$ не имеют нетривиальных сепарабельных алгебраических расширений). Это вложение индуцирует морфизм схем $V \otimes \bar{k} \rightarrow V \otimes k^s$, который, в свою очередь, определяет изоморфизм

$$H^i(V \otimes k^s, \mu_l) \xrightarrow{\sim} H^i(V \otimes \bar{k}, \mu_l)$$

(см. [7, гл. VI, § 2, следствие 2.3]). С другой стороны, группы $H^i(V \otimes \bar{k}, \mu_l)$ конечны [7, гл. VI, § 2, теорема 2.1]. Лемма доказана.

1.3. ЛЕММА. *Если выполнены условия леммы 1.2, то группа $\text{Br}'(V \otimes k^s)_l$ конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точная последовательность Куммера

$$1 \rightarrow \mu_l \rightarrow G_m \xrightarrow{l} G_m \rightarrow 1$$

дает точную последовательность когомологий

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow H^0(V \otimes k^s, \mu_l) &\rightarrow H^0(V \otimes k^s, G_m) \xrightarrow{l} H^0(V \otimes k^s, G_m) \\ &\rightarrow H^1(V \otimes k^s, \mu_l) \rightarrow H^1(V \otimes k^s, G_m) \xrightarrow{l} H^1(V \otimes k^s, G_m) \\ &\rightarrow H^2(V \otimes k^s, \mu_l) \rightarrow H^2(V \otimes k^s, G_m) \xrightarrow{l} H^2(V \otimes k^s, G_m) \\ &\rightarrow H^3(V \otimes k^s, \mu_l) \rightarrow H^3(V \otimes k^s, G_m) \xrightarrow{l} H^3(V \otimes k^s, G_m) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

где $H^1(V \otimes k^s, G_m) = \text{Pic}(V \otimes k^s)$ – группа Пикара многообразия $V \otimes k^s$, $H^2(V \otimes k^s, G_m) = \text{Br}'(V \otimes k^s)$ – когомологическая группа Брауэра многообразия $V \otimes k^s$.

Часть рассматриваемой точной последовательности принимает вид

$$\begin{aligned} H^1(V \otimes k^s, \mu_l) &\rightarrow \text{Pic}(V \otimes k^s) \xrightarrow{l} \text{Pic}(V \otimes k^s) \\ &\rightarrow H^2(V \otimes k^s, \mu_l) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes k^s) \xrightarrow{l} \text{Br}'(V \otimes k^s). \end{aligned}$$

Согласно лемме 1.2 $H^2(V \otimes k^s, \mu_l)$ – конечная группа. Поэтому ее образ в $\text{Br}'(V \otimes k^s)$ тоже является конечной группой. С другой стороны, этот образ равен

$$\text{Ker}[\text{Br}'(V \otimes k^s) \xrightarrow{l} \text{Br}'(V \otimes k^s)] \stackrel{\text{def}}{=} \text{Br}'(V \otimes k^s)_l = \{x \in \text{Br}'(V \otimes k^s) \mid lx = 0\}.$$

Значит, $\text{Br}'(V \otimes k^s)_l$ является конечной группой. Лемма доказана.

1.4. ЛЕММА. Если выполнены условия леммы 1.2, то для любого простого числа l , отличного от $p = \text{char}(\mathbb{F}_q)$, l -примарная компонента $\text{Br}'(V \otimes k^s)(l)$ группы Брауэра $\text{Br}'(V \otimes k^s)$ изоморфна (неканонически) $(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)^{\rho_0(V \otimes k^s, l)} \oplus F$, где $\rho_0(V \otimes k^s, l)$ – целое число и F – конечная группа, зависящие, вообще говоря, от выбора простого числа l и многообразия V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа

$$\text{Br}'(V \otimes k^s)(l) = \{x \in \text{Br}'(V \otimes k^s) \mid \exists n \geq 1: l^n \cdot x = 0\}$$

называется l -примарной компонентой группы $\text{Br}'(V \otimes k^s)$.

По лемме 1.3 группа $\text{Br}'(V \otimes k^s)_l = \{x \in \text{Br}'(V \otimes k^s) \mid lx = 0\}$ конечна. Поскольку она является конечномерным линейным пространством над полем $\mathbb{F}_l = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, то $\text{Br}'(V \otimes k^s)_l \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$, где $n = \rho_0(V \otimes k^s, l)$ – целое число. С другой стороны, группа $\text{Br}'(V \otimes k^s)$ является группой кручения, поэтому ее можно представить в виде индуктивного предела конечных подгрупп [3, гл. II, § 11, пример 1].

Пусть $e_1^{(1)}, \dots, e_n^{(1)}$ – базис конечномерного линейного пространства $\text{Br}'(V \otimes k^s)_l$ над $\mathbb{F}_l = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. Если для элемента $e_i^{(1)}$ и для любого целого числа $m \geq 1$ существует такой элемент $e_i^{(m)} \in \text{Br}'(V \otimes k^s)$, что $le_i^{(m)} = e_i^{(m-1)}$, то элементы $e_i^{(1)}, \dots, e_i^{(m)}, \dots$ порождают квазициклическую группу $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$ [3, гл. I, § 3], причем эта группа является прямым слагаемым в l -примарной компоненте $\text{Br}'(V \otimes k^s)(l)$ группы $\text{Br}'(V \otimes k^s)$. Если для некоторого целого числа $m \geq 1$ не существует такого элемента $e_i^{(m+1)} \in \text{Br}'(V \otimes k^s)$, что $le_i^{(m+1)} = e_i^{(m)}$, то элемент $e_i^{(m)}$ порождает циклическую группу, изоморфную $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$, и эта группа является прямым слагаемым в $\text{Br}'(V \otimes k^s)(l)$. Лемма доказана.

1.5. При выполнении условий леммы 1.2

$$\begin{aligned} T_l \text{Br}'(V \otimes k^s) &\stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim \text{Br}'(V \otimes k^s)_{l^m} \\ &= \text{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, \text{Br}'(V \otimes k^s)) = \text{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, \text{Br}'(V \otimes k^s)(l)) \end{aligned}$$

– свободный конечно порожденный $\mathbb{Z}_l$ -модуль ранга $\rho_0(V \otimes k^s, l)$ [13, § 5]. Последовательность Куммера

$$1 \rightarrow \mu_{l^m} \rightarrow G_m \xrightarrow{l^m} G_m \rightarrow 1$$

дает точную последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^1(V \otimes k^s, G_m) &\xrightarrow{l^m} H^1(V \otimes k^s, G_m) \rightarrow H^2(V \otimes k^s, \mu_{l^m}) \\ &\rightarrow H^2(V \otimes k^s, G_m) \xrightarrow{l^m} H^2(V \otimes k^s, G_m) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

которая принимает вид

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Pic}(V \otimes k^s) &\xrightarrow{l^m} \text{Pic}(V \otimes k^s) \rightarrow H^2(V \otimes k^s, \mu_{l^m}) \\ &\rightarrow \text{Br}'(V \otimes k^s) \xrightarrow{l^m} \text{Br}'(V \otimes k^s) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.6. Пусть Pic_V – схема Пикара многообразия V над k , $\text{Pic}_V^0 \hookrightarrow \text{Pic}_V$ – многообразие Пикара многообразия V над k ; тогда имеется точная последовательность групповых схем над k :

$$0 \rightarrow \text{Pic}_V^0 \rightarrow \text{Pic}_V \rightarrow \mathcal{NS}_V \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

где $\mathcal{NS}_V$ – схема Нерона–Севери (эталная над $\text{Spec } k$).

Хорошо известно, что Pic_V^0 – гладкое проективное многообразие над k , являющееся алгебраической группой над k . Точная последовательность (1.3) дает точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Pic}_V^0(\bar{k}) \rightarrow \text{Pic}_V(\bar{k}) \rightarrow \mathcal{NS}_V(\bar{k}) \rightarrow 0,$$

где

$$\text{Pic}_V(\bar{k}) = \text{Pic}(V \otimes \bar{k}) = H^1(V \otimes \bar{k}, G_m),$$

причем $\dim_k \text{Pic}_V^0 = \dim_{\bar{k}} H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}})$ [8]. Кроме того, $\mathcal{NS}_V(\bar{k}) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$ – группа Нерона–Севери многообразия $V \otimes \bar{k}$ (группа классов дивизоров на $V \otimes \bar{k}$ по модулю алгебраической эквивалентности).

1.7. Будем предполагать далее, что

$$H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = 0. \quad (1.4)$$

В этом случае $\text{Pic}_V^0 = 0$. Значит, $\text{Pic}_V = \mathcal{NS}_V$, и поэтому $\text{Pic}_V(k^s) = \mathcal{NS}_V(k^s)$, $\text{Pic}_V(k) = \mathcal{NS}_V(k)$. Следовательно, $\text{Pic}(V \otimes k^s) = \text{NS}(V \otimes k^s)$ и $\text{Pic}(V \otimes \bar{k}) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$.

Будем также предполагать, что

$$\text{NS}(V) = \text{NS}(V \otimes \bar{k}). \quad (1.5)$$

Поскольку

$$\text{NS}(V) = \mathcal{NS}_V(k) \hookrightarrow \mathcal{NS}_V(k^s) = \text{NS}(V \otimes k^s) \hookrightarrow \mathcal{NS}_V(\bar{k}) = \text{NS}(V \otimes \bar{k}),$$

то в силу соотношения (1.5) все эти включения являются равенствами:

$$\text{NS}(V) = \text{NS}(V \otimes k^s) = \text{NS}(V \otimes \bar{k}). \quad (1.6)$$

Точная последовательность (1.2) дает точную последовательность

$$0 \rightarrow l^m \cdot \text{Pic}(V \otimes k^s) \rightarrow \text{Pic}(V \otimes k^s) \rightarrow H^2(V \otimes k^s, \mu_{l^m}) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes k^s)_{l^m} \rightarrow 0,$$

которую, в свою очередь, можно преобразовать в короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Pic}(V \otimes k^s) / [l^m \cdot \text{Pic}(V \otimes k^s)] \rightarrow H^2(V \otimes k^s, \mu_{l^m}) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes k^s)_{l^m} \rightarrow 0.$$

В нашем случае в силу (1.6)

$$\mathrm{Pic}(V \otimes k^s) = \mathrm{NS}(V \otimes k^s) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) = \mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k}). \quad (1.7)$$

Кроме того,

$$H^2(V \otimes k^s, \mu_{lm}) \xrightarrow{\sim} H^2(V \otimes \bar{k}, \mu_{lm})$$

(см. [7, гл. VI, § 2, следствие 2.3]). Поэтому мы имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes k^s) / [l^m \cdot \mathrm{NS}(V \otimes k^s)] & \rightarrow & H^2(V \otimes k^s, \mu_{lm}) & \rightarrow & \mathrm{Br}'(V \otimes k^s)_{lm} & \rightarrow & 0 \\ & \parallel & & \parallel & & \downarrow \sim & \\ 0 \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) / [l^m \cdot \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})] & \rightarrow & H^2(V \otimes \bar{k}, \mu_{lm}) & \rightarrow & \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})_{lm} & \rightarrow & 0. \end{array} \quad (1.8)$$

В частности, имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Br}'(V \otimes k^s)_{lm} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})_{lm}. \quad (1.9)$$

Заметим, что точная последовательность конечных групп (с дискретной топологией)

$$0 \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes k^s) / [l^m \cdot \mathrm{NS}(V \otimes k^s)] \rightarrow H^2(V \otimes k^s, \mu_{lm}) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes k^s)_{lm} \rightarrow 0$$

дает точную последовательность проективных пределов

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \varprojlim_m \mathrm{NS}(V \otimes k^s) / [l^m \cdot \mathrm{NS}(V \otimes k^s)] \\ \rightarrow \varprojlim_m H^2(V \otimes k^s, \mu_{lm}) \rightarrow \varprojlim_m \mathrm{Br}'(V \otimes k^s)_{lm} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

(в случае произвольных абелевых групп проективный предел не сохраняет коротких точных последовательностей [3, гл. II, § 12, теорема 12.3, упражнение 6; гл. V, § 29, упражнение 7], но проективный предел сохраняет точность для компактных (и, в частности, конечных) групп [6, предложение 1.9]).

Хорошо известно, что последовательность (1.10) преобразуется в точную последовательность $\mathrm{Gal}(k^s/k)$ -модулей

$$0 \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes k^s) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow H^2(V \otimes k^s, \mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow T_l \mathrm{Br}'(V \otimes k^s) \rightarrow 0, \quad (1.11)$$

которая, в свою очередь, определяет точную последовательность когомологий Галуа

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow [\mathrm{NS}(V \otimes k^s) \otimes \mathbb{Q}_l]^{\mathrm{Gal}(k^s/k)} &\rightarrow [H^2(V \otimes k^s, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(k^s/k)} \\ &\rightarrow [T_l \mathrm{Br}'(V \otimes k^s) \otimes \mathbb{Q}_l]^{\mathrm{Gal}(k^s/k)} \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(k^s/k), \mathrm{NS}(V \otimes k^s) \otimes \mathbb{Q}_l). \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.8. ТЕОРЕМА. Пусть C – гладкая проективная кривая над конечным полем $\mathbb{F}_q$, $k = \mathbb{F}_q(C)$ – поле рациональных функций на C , V – гладкое проективное многообразие над полем k . Предположим, что $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = 0$, $\text{NS}(V) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$. Если для простого числа $l \neq \text{char}(\mathbb{F}_q)$

$$\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes k^s, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(k^s/k)}$$

(другими словами, если верна гипотеза Тэйта для дивизоров на V), то l -примарная компонента группы кручения $[\text{Br}'(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)}$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим спектральную последовательность Хохшильда–Серра

$$E_2^{p,q} = H^p(\text{Gal}(k^s/k), H^q(V \otimes k^s, G_m)) \Rightarrow H^{p+q}(V, G_m)$$

для бесконечного накрытия Галуа $V \otimes k^s \rightarrow V$ [7, гл. 3, §2, замечание 2.21(b)]. Напомним, что спектральная последовательность $E_2^{p,q}$ дает точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0}, \quad (1.13)$$

где $E_1^2 = \text{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ (см. [7, приложение В]). Поэтому мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^1(\text{Gal}(k^s/k), H^0(V \otimes k^s, G_m)) \rightarrow H^1(V, G_m) \\ &\rightarrow H^0(\text{Gal}(k^s/k), H^1(V \otimes k^s, G_m)) \rightarrow H^2(\text{Gal}(k^s/k), H^0(V \otimes k^s, G_m)) \\ &\rightarrow \text{Ker}[H^2(V, G_m) \rightarrow H^0(\text{Gal}(k^s/k), H^2(V \otimes k^s, G_m))] \\ &\rightarrow H^1(\text{Gal}(k^s/k), H^1(V \otimes k^s, G_m)) \rightarrow H^3(\text{Gal}(k^s/k), H^0(V \otimes k^s, G_m)), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $H^1(\text{Gal}(k^s/k), H^0(V \otimes k^s, G_m)) = H^1(\text{Gal}(k^s/k), k^{\times}) = 0$ по теореме 90 Гильберта,

$$\begin{aligned} H^1(V, G_m) &= \text{Pic}(V), \\ H^0(\text{Gal}(k^s/k), H^1(V \otimes k^s, G_m)) &= [\text{Pic}(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)}, \\ H^2(\text{Gal}(k^s/k), H^0(V \otimes k^s, G_m)) &= H^2(\text{Gal}(k^s/k), k^{\times}) = \text{Br}(k), \\ \text{Ker}[H^2(V, G_m) \rightarrow H^0(\text{Gal}(k^s/k), H^2(V \otimes k^s, G_m))] & \\ &= \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)}, \\ H^1(\text{Gal}(k^s/k), H^1(V \otimes k^s, G_m)) &= H^1(\text{Gal}(k^s/k), \text{Pic}(V \otimes k^s)), \\ H^3(\text{Gal}(k^s/k), H^0(V \otimes k^s, G_m)) &= H^3(\text{Gal}(k^s/k), k^{\times}). \end{aligned}$$

Поэтому (1.14) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Pic}(V) \rightarrow [\text{Pic}(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)} \\ &\rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)} \\ &\rightarrow H^1(\text{Gal}(k^s/k), \text{Pic}(V \otimes k^s)) \rightarrow H^3(\text{Gal}(k^s/k), k^{\times}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Поскольку $V(k) \neq \emptyset$, то мы имеем сечение канонического отображения $V \rightarrow \text{Спец } k$, поэтому канонические отображения $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)$, $E_2^{3,0} = H^3(\text{Gal}(k^s/k), k^s \times) = H^3(\text{Спец } k, G_m) \rightarrow E^3 = H^3(V, G_m)$ инъективны. В силу леммы 1.1 последовательность (1.15) расщепляется в следующие точные последовательности:

$$0 \rightarrow \text{Pic}(V) \xrightarrow{\sim} [\text{Pic}(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)} \rightarrow 0, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)} \\ \rightarrow H^1(\text{Gal}(k^s/k), \text{Pic}(V \otimes k^s)) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

По условию теоремы выполнены соотношения (1.4) и (1.5), поэтому $\text{NS}(V) = \text{NS}(V \otimes k^s)$ и $\text{NS}(V) = \text{NS}(V \otimes k^s)^{\text{Gal}(k^s/k)}$. С другой стороны, по условию теоремы верна гипотеза Тэйта для дивизоров на V :

$$\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes k^s, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(k^s/k)},$$

и поэтому точная последовательность (1.12) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes k^s, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(k^s/k)} \\ \rightarrow [[T_l \text{Br}'(V \otimes k^s)] \otimes \mathbb{Q}_l]^{\text{Gal}(k^s/k)} \rightarrow H^1(\text{Gal}(k^s/k), \text{NS}(V \otimes k^s) \otimes \mathbb{Q}_l). \end{aligned} \quad (1.18)$$

В рассматриваемом случае $\text{Gal}(k^s/k)$ действует тривиально на $\text{NS}(V \otimes k^s) = \text{NS}(V)$, поэтому $\text{NS}(V \otimes k^s) = \text{NS}(V \otimes k^s)^U$ для любой открытой нормальной подгруппы $U \subset \text{Gal}(k^s/k)$, и, следовательно, $\text{NS}(V \otimes k^s) \otimes \mathbb{Q}_l$ является дискретным $\text{Gal}(k^s/k)$ -модулем.

С другой стороны, для любой открытой нормальной подгруппы U $\mathbb{Q}_l$ -пространство $H^1(\text{Gal}(k^s/k)/U, [\text{NS}(V \otimes k^s) \otimes \mathbb{Q}_l]^U)$ аннулируется числом $\text{Card}(\text{Gal}(k^s/k)/U)$ [2, гл. IV, §6, следствие 1]. Значит,

$$\begin{aligned} H^1(\text{Gal}(k^s/k)/U, [\text{NS}(V \otimes k^s) \otimes \mathbb{Q}_l]^U) &= 0, \\ H^1(\text{Gal}(k^s/k), \text{NS}(V \otimes k^s) \otimes \mathbb{Q}_l) \\ &= \varinjlim H^1(\text{Gal}(k^s/k)/U, [\text{NS}(V \otimes k^s) \otimes \mathbb{Q}_l]^U) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому (1.18) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes k^s, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(k^s/k)} \\ \rightarrow [[T_l \text{Br}'(V \otimes k^s)] \otimes \mathbb{Q}_l]^{\text{Gal}(k^s/k)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$0 = [T_l \text{Br}'(V \otimes k^s) \otimes \mathbb{Q}_l]^{\text{Gal}(k^s/k)} = [T_l \text{Br}'(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)} \otimes \mathbb{Q}_l.$$

Значит, $0 = [T_l \text{Br}'(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)}$ (действительно, в силу замечаний из п. 1.5 $T_l \text{Br}'(V \otimes k^s)$ является *свободным* конечно порожденным $\mathbb{Z}_l$ -модулем, поэтому $[T_l \text{Br}'(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)}$ – *свободный* конечно порожденный $\mathbb{Z}_l$ -модуль).

С другой стороны,

$$\begin{aligned} 0 &= [T_l \text{Br}'(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)} = [\text{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, \text{Br}'(V \otimes k^s))]^{\text{Gal}(k^s/k)} \\ &= \text{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, [\text{Br}'(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)}(l)) = T_l [\text{Br}'(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)}(l). \end{aligned}$$

Поэтому максимальная l -делимая подгруппа в $[\text{Br}'(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)}(l)$ тривиальна. Следовательно, $[\text{Br}'(V \otimes k^s)]^{\text{Gal}(k^s/k)}$ – конечная группа [13, §5.2]. Теорема доказана.

§2. Основной результат

2.1. ТЕОРЕМА. Пусть C – гладкая проективная кривая над конечным полем $\mathbb{F}_q$, $k = \mathbb{F}_q(C)$ – поле рациональных функций на C , $\pi: X \rightarrow C$ – сюръективный морфизм гладких проективных многообразий над $\mathbb{F}_q$, общий схемный слой которого является гладким многообразием V над k , и все схемные слои морфизма π приведены. Предположим, что $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = 0$, $\text{NS}(V) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$. Если для простого числа l , не делящего $\text{Card}([\text{NS}(V)]_{\text{tors}})$ и отличного от характеристики поля $\mathbb{F}_q$, верно соотношение

$$\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes k^s, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(k^s/k)}$$

(другими словами, если верна гипотеза Тэйта для дивизоров на V), то l -первичная компонента группы $\text{Br}'(X)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать через $\kappa(y)$ поле вычетов точки $y \in X$.

Пусть $i_y: \text{Spec}(\kappa(y)) \rightarrow X$ – каноническое вложение $y \in X$ и

$$\text{Div}_X^{\text{vert}} = \bigoplus_{\substack{y \in X \setminus V \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z}$$

– пучок вертикальных дивизоров Картье. Существует точная последовательность пучков (в этальной топологии схемы X)

$$0 \rightarrow G_{m,X} \rightarrow h_* G_{m,V} \rightarrow \text{Div}_X^{\text{vert}} \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

где $h: V \hookrightarrow X$ – вложение общего схемного слоя морфизма π . Действительно, пусть η – общая точка кривой C ; тогда для любого этального морфизма $U \rightarrow X$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V \times_X U & \hookrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \eta & \hookrightarrow & C, \end{array}$$

где каждый прямоугольник дает диаграмму расслоенного произведения. Мы видим, что $V \times_X U$ – общий слой канонического морфизма $U \rightarrow C$. Поскольку

$$H^0(U, h_* G_{m,V}) = H^0(V \times_X U, G_m),$$

то существует каноническое вложение $G_{m,X} \rightarrow h_* G_{m,V}$, которое на U является вложением $H^0(U, \mathcal{O}_U^\times) \hookrightarrow H^0(V \times_X U, \mathcal{O}_{V \times_X U}^\times)$. Коядро этого отображения – пучок вертикальных дивизоров Картье $\text{Div}_X^{\text{vert}}$.

Мы имеем

$$\text{Div}_X = \bigoplus_{\substack{y \in X \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z} = \left(\bigoplus_{\substack{y \in V \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z} \right) \oplus \text{Div}_X^{\text{vert}}.$$

Хорошо известно, что $H^1(X, \text{Div}_X) = (0)$ [7, гл. 3, § 2, пример 2.22]. Следовательно, $H^1(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) = (0)$. Таким образом, (2.1) дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(X, G_m) \rightarrow H^2(X, h_* G_{m,V}) \rightarrow H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) \\ \rightarrow H^3(X, G_m) \rightarrow H^3(X, h_* G_{m,V}) \rightarrow H^3(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q h_* G_{m,V}) \rightarrow H^{p+q}(V, G_{m,V})$$

дает точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0},$$

где $E_1^2 = \text{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ (см. [7, приложение В]). Следовательно, мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, h_* G_{m,V}) \rightarrow H^1(V, G_{m,V}) \rightarrow H^0(X, R^1 h_* G_{m,V}) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(X, h_* G_{m,V}) \\ \rightarrow \text{Ker}[H^2(V, G_{m,V}) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})] \rightarrow H^1(X, R^1 h_* G_{m,V}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Слой $R^1 h_* G_{m,V}$ в геометрической точке $\bar{x} \rightarrow x \in X$ изоморфен группе $H^1(V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), G_m)$ [7, гл. III, § 1, теорема 1.15, замечание 1.17(a)], где $\mathcal{O}_{X,\bar{x}} = \mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}$ – строгая гензелизация локального кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ [7, гл. I, § 4, замечание 4.11]. Очевидно, что $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}})$ – схема над $\mathcal{O}_{C,\pi(x)}$.

Напомним, что строгая гензелизация $\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}$ регулярного локального нётерова кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ является регулярным локальным нётеровым кольцом [4, предложение 18.8.8, следствие 18.8.13]. Следовательно, это кольцо имеет однозначное разложение на множители (факториальное кольцо), и поэтому

$$H^1(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}), G_m) = \text{Pic}(\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}) = \text{Pic}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = 0$$

(см. [5, гл. II, § 6, предложение 6.2, следствие 6.16]).

Если $\bar{x} \rightarrow x \in V$, то $\pi(x) = \eta$ – общая точка кривой C , поэтому $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – схема над $k = \mathbb{F}_q(C)$ и $V \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$. Следовательно, в этом случае

$$\begin{aligned} (R^1 h_* G_{m,V})_{\bar{x}} &= H^1(V \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), G_m) \\ &= H^1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), G_m) = \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) = \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = 0. \end{aligned}$$

Если $\bar{x} \rightarrow x \in X \setminus V$, то $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{\mathrm{sh}})$ – схема над дискретно нормированным кольцом $\mathcal{O}_{C,\pi(x)}$. Пусть η – общая точка C . Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \eta & \hookrightarrow & C, \end{array}$$

где каждый прямоугольник дает диаграмму расслоенного произведения. Мы видим, что $V \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – общий слой канонического морфизма $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \rightarrow C$. С другой стороны, морфизм $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \rightarrow C$ является композицией канонических морфизмов

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,\pi(x)}) \hookrightarrow C.$$

В рассматриваемом случае $\mathcal{O}_{C,\pi(x)}$ – дискретно нормированное кольцо. Поэтому $V \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – открытая подсхема в $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$. Поскольку $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – нётеровы регулярные схемы, то они локально факториальны. Следовательно, существуют естественные изоморфизмы

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})), \\ \mathrm{Cl}(V \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(V \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) \end{aligned}$$

(см. [5, гл. II, § 6, следствие 6.16]). С другой стороны, $V \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – открытая подсхема в нётеровой регулярной схеме $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$, поэтому существует точная последовательность

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) \rightarrow \mathrm{Cl}(V \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) \rightarrow 0$$

(см. [5, гл. II, § 6, предложение 6.5]). В итоге равенство $\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) = 0$ дает равенство $\mathrm{Pic}(V \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) = 0$. В частности,

$$(R^1 h_* G_{m,V})_{\bar{x}} = H^1(V \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), G_m) = 0.$$

Следовательно, $(R^1 h_* G_{m,V})_{\bar{x}} = 0$ для всех геометрических точек $\bar{x} \rightarrow x \in X$. Поэтому $R^1 h_* G_{m,V} = 0$, и из (2.3) следует существование изоморфизма

$$H^2(X, h_* G_{m,V}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})].$$

Значит, из (2.2) получается точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}'(X) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})] \rightarrow H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}). \quad (2.4)$$

Далее мы обозначаем через $\overline{\kappa(y)}^s$ сепарабельное замыкание поля вычетов $\kappa(y)$ в алгебраическом замыкании $\overline{\kappa(y)}$. Поскольку $V(k) \neq \emptyset$, то существует каноническое вложение $\mathrm{Br}(k) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(V)$. С другой стороны, существует каноническая точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(C) \rightarrow \mathrm{Br}(k) &\rightarrow \bigoplus_{\substack{v \in C \\ v \neq \eta}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}^s / \kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ &\rightarrow H^3(C, G_m) \rightarrow H^3(\mathrm{Spec}(k), G_m) \end{aligned}$$

(см. [7, гл. III, § 3, пример 2.22(a)]). В рассматриваемом случае $\mathrm{Br}(C) = 0$ и $H^3(C, G_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ [7, гл. III, § 3, пример 2.22(g)]. Мы приходим к хорошо известной точной последовательности глобальной теории полей классов

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \bigoplus_{\substack{v \in C \\ v \neq \eta}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}^s / \kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

Эта точная последовательность имеет вид

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \bigoplus_{\substack{v \in C \\ v \neq \eta}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

(см. [7, гл. III, § 3, пример 2.22(e)]).

Рассмотрим каноническое вложение $i_v : \mathrm{Spec}(\kappa(v)) \hookrightarrow C$. Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q i_{v*} \mathbb{Z}) \rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Spec}(\kappa(v)), \mathbb{Z})$$

дает точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1},$$

где $E_1^2 = \mathrm{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ (см. [7, приложение В]); следовательно, мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(C, i_{v*} \mathbb{Z}) &\rightarrow H^1(\mathrm{Spec}(\kappa(v)), \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(C, R^1 i_{v*} \mathbb{Z}) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(C, i_{v*} \mathbb{Z}) \\ &\rightarrow \mathrm{Ker}[H^2(\mathrm{Spec}(\kappa(v)), \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(C, R^2 i_{v*} \mathbb{Z})] \rightarrow H^1(C, R^1 i_{v*} \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Известно, что $R^q i_{v*} \mathbb{Z} = (0)$ для всех $q > 0$ [7, гл. III, § 2, пример 2.22(a)]; поэтому (2.6) дает изоморфизм

$$H^2(C, i_{v*} \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathrm{Spec}(\kappa(v)), \mathbb{Z}).$$

С другой стороны, $H^2(\mathrm{Spec}(\kappa(v)), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(v)^s/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ [7, гл. III, § 2, пример 2.22]. Следовательно,

$$\begin{aligned} H^2(C, \mathrm{Div}_C) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} H^2\left(C, \bigoplus_{\substack{v \in C \\ v \neq \eta}} i_{v*} \mathbb{Z}\right) \\ &= \bigoplus_{\substack{v \in C \\ v \neq \eta}} H^2(C, i_{v*} \mathbb{Z}) = \bigoplus_{\substack{v \in C \\ v \neq \eta}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(v)^s/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(см. [7, гл. III, § 2, пример 2.22(a)]). Поэтому (2.5) дает точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow H^2(C, \mathrm{Div}_C). \quad (2.7)$$

Пусть $\theta: C \rightarrow X$ – сечение морфизма π , отвечающее k -рациональной точке из множества $V(k) \neq \emptyset$. Тогда $\theta(C)$ пересекается с одной неприводимой компонентой любого схемного слоя $\pi^{-1}(v)$, $v \in C$.

Действительно, для любой точки $v \in C$ $\theta(v)$ – регулярная точка схемного слоя $\pi^{-1}(v)$ [11, следствие 2.2]. Поэтому $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(v), \theta(v)}$ – регулярное локальное кольцо и $\pi^{-1}(v)$ – аналитически неприводимая схема в точке $\theta(v)$ [1, гл. 11, замечание 1 к предложению 11.24]; в частности, $\theta(C)$ пересекает одну неприводимую компоненту схемного слоя $\pi^{-1}(v)$.

Из этого факта следует, что θ определяет инъективные морфизмы

$$\pi^*: \mathrm{Br}(k) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(V), \quad H^2(C, \mathrm{Div}_C) \hookrightarrow H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})$$

(см. [9, (6.12)]). Пусть $B = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})]$. Очевидно, что (2.4) и (2.7) дают коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathrm{Br}'(X) & \rightarrow & B & \rightarrow & H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}) \\ & & & & \cup & & \cup \\ 0 & \rightarrow & \mathrm{Br}(k) \cap B & \rightarrow & H^2(C, \mathrm{Div}_C). \end{array}$$

Следовательно, $\mathrm{Br}'(X) \cap \mathrm{Br}(k) = 0$ внутри $\mathrm{Br}'(V)$. Поэтому

$$\mathrm{Br}'(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k).$$

Остается показать, что l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)$ конечна.

Хорошо известно, что $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = 0$ – касательное пространство в нуле группы $\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k})$ [8, лекция 24]. Поэтому $\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = 0$. Следовательно,

$$\mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k})/\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) = \mathrm{NS}(V).$$

В силу (1.6) имеем $\mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes k^s)$. Поэтому (1.17) принимает вид

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes k^s)^{\mathrm{Gal}(k^s/k)}] \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(k^s/k), \mathrm{NS}(V)) \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Поскольку все группы в (2.8) являются группами кручения, то мы получаем точную последовательность l -примарных компонент

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)(l) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes k^s)(l)^{\mathrm{Gal}(k^s/k)}] \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(k^s/k), \mathrm{NS}(V))(l) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Хорошо известно, что $\mathrm{NS}(V)$ – абелева группа с конечным числом образующих. Поэтому $\mathrm{NS}(V) \cong \mathbb{Z}^\rho \oplus F$, где F – конечная группа. По условию теоремы l не делит $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V)]_{\mathrm{tors}}) = \mathrm{Card}(F)$, кроме того, группа $\mathrm{Gal}(k^s/k)$ действует на $\mathrm{NS}(V)$ тривиально; поэтому

$$H^1(\mathrm{Gal}(k^s/k), \mathrm{NS}(V))(l) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k^s/k), \mathbb{Z}^\rho \oplus F),$$

где F – конечная группа, порядок которой не делится на l . С другой стороны,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k^s/k), \mathbb{Z}^\rho) = 0,$$

потому что $\mathbb{Z}^\rho$ не имеет нетривиальных компактных подгрупп, а группа $\mathrm{Gal}(k^s/k)$ компактна по теории Галуа. Кроме того, $F(l) = 0$ по условию теоремы; значит,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k^s/k), F)(l) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k^s/k), F(l)) = 0,$$

и поэтому

$$H^1(\mathrm{Gal}(k^s/k), \mathrm{NS}(V))(l) = 0.$$

Точная последовательность (2.9) принимает вид

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)(l) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes k^s)(l)^{\mathrm{Gal}(k^s/k)}] \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$\mathrm{Br}(k)(l) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes k^s)(l)^{\mathrm{Gal}(k^s/k)}].$$

Следовательно, существует каноническое вложение

$$\mathrm{Br}'(V)(l)/\mathrm{Br}(k)(l) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes k^s)(l)^{\mathrm{Gal}(k^s/k)},$$

а группа $\mathrm{Br}'(V \otimes k^s)(l)^{\mathrm{Gal}(k^s/k)}$ конечна по лемме 1.8. Значит, группа $\mathrm{Br}'(V)(l)/\mathrm{Br}(k)(l) = [\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)](l)$ конечна, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.
2. *Касселс Дж., Фрелих А.* Алгебраическая теория чисел. М.: Мир, 1969.
3. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. I. М.: Мир, 1974.
4. *Grothendieck A.* Eléments de géométrie algébrique, IV. Étude locale des schémas et des morphismes des schémas // Publ. Math. IHES. 1967. V. 32. P. 5–328.
5. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
6. *Кох Х.* Теория Галуа p -расширений. М.: Мир, 1973.
7. *Милн Дж.* Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.
8. *Мамфорд Д.* Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир, 1968.
9. *Танкеев С. Г.* О группе Брауэра // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 4. С. 141–162.
10. *Танкеев С. Г.* О группе Брауэра арифметической схемы // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 2. С. 155–186.
11. *Танкеев С. Г.* О группе Брауэра арифметической схемы. II // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 155–176.
12. *Tate J.* Algebraic cycles and poles of zeta functions // Arithmetical Algebraic Geometry. N.Y.: Harper and Row, 1965. P. 93–110.
13. *Тейт Дж.* О гипотезе Берча и Свиннертон–Дайера и их геометрическом аналоге // Математика. 1968. Т. 12. № 6. С. 41–55.
14. *Tate J.* Conjectures on algebraic cycles in l -adic cohomology // Proc. Symposia in Pure Math. 1994. V. 55. Part 1. P. 71–83.

Владимирский государственный университет

Поступило в редакцию
16.03.2004