Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Имомкулов, О голоморфном продолжении функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 2, 125–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/im636>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:08:46

УДК 517.55

С. А. Имомкулов

**О голоморфном продолжении функций,
заданных на граничном пучке комплексных прямых**

Изучены области голоморфности функций, имеющих тонкие особенности вдоль фиксированного направления. Доказывается граничный аналог теоремы Хартогса о голоморфном продолжении функции многих переменных, допускающих голоморфное продолжение по одной из переменных.

Библиография: 24 наименований.

Основным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – область с кусочно гладкой границей и $M \subset \partial D$ – порождающее k -мерное, $n \leq k \leq 2n - 1$, многообразие класса C^1 . Пусть функция $f(z, w)$ голоморфна в полициркульной области

$$D \times V = D \times \{w : |w| < r\} \subset \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w,$$

непрерывна на $\overline{D} \times V$, и пусть функция $f(\xi, w)$ переменной w при каждом фиксированном ξ из некоторого множества $E \subset M$ положительной меры Лебега на M , $t_k(E) > 0$, продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением полярного (конечного) множества особенностей. Тогда $f(z, w)$ голоморфно продолжается в $(D \times \mathbb{C}) \setminus S$, где S – некоторое замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество $D \times \mathbb{C}$.

По сути эта теорема относится к тематике голоморфного продолжения вдоль фиксированного направления, где первый результат принадлежит Хартогсу [1], (см. также [2]).

ЛЕММА А. Если функция $f(z, w)$ определена в полициркуле $U \times \{w : |w| < R\} \subset \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$, голоморфна в $U \times \{w : |w| < r\}$, $0 < r < R$, и при каждом фиксированном $z \in U$ голоморфна по w в круге $\{w : |w| < R\}$, то она голоморфна в полициркуле $U \times \{w : |w| < R\}$ по совокупности переменных.

Это утверждение, называемое *основной леммой Хартогса*, имеет множество различных по характеру обобщений. Одно из них – продолжение функций, имеющих полюсы вдоль фиксированного направления, – рассмотрено В. Ротштейном [3], доказавшим, что такие функции являются мероморфными. М. Казаряном [4], [5] рассмотрен случай, когда особое множество состоит из одной точки. Более общий результат получен в работе А. С. Садуллаева и Е. М. Чирки [6].

ЛЕММА Б. Пусть $f(z, w)$ голоморфна в поликруге $U \times \{w: |w| < r\} \subset \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$ и при каждом фиксированном ξ из некоторого неплюриполярного множества $E \subset U$ функция $f(\xi, w)$ переменного w продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением некоторого полярного (конечного) множества особенностей. Тогда f голоморфно продолжается в $(U \times \mathbb{C}) \setminus S$, где S – замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество в $U \times \mathbb{C}$.

Одной из особенностей теоремы является тот факт, что тонкость особых множеств на сечениях требуется не для всех $z \in U$, а лишь для точек z из некоторого неплюриполярного множества $E \subset U$.

Следующий результат, который по содержанию близок к сформулированной теореме, принадлежит Т. Туйчиеву [7].

ЛЕММА В. Пусть $f(z, w)$ голоморфна в поликруге $U \times V$, и пусть при любом фиксированном $z \in U$ функция $f(z, w)$ однозначно продолжается по w , т.е. ее естественная область существования Вейерштрасса $W_f(z)$ однолистка. Обозначим через $\rho(z, w) = \rho(w, \partial W_f(z))$ расстояние от точки $w \in W_f(z)$ до границы $\partial W_f(z)$ при фиксированном $z \in U$, а через $u^*(z, w)$ – верхнюю регуляризацию функции $u(z, w) = -\ln \rho(z, w)$, т.е. $\lim u(\zeta, \eta)$ при $(\zeta, \eta) \rightarrow (z, w)$. Пусть $W = \bigcup_{z \in U} \{z\} \times W_f(z)$ и W^0 – открытое ядро множества W . Тогда:

- 1) W^0 – область, причем ортогональная проекция множества $W \setminus W^0$ на $\mathbb{C}_z^n$ плюриполярна (следовательно, множество $W \setminus W^0$ плюриполярно в $\mathbb{C}^{n+1}$);
- 2) функция $f(z, w)$ голоморфно продолжается в W^0 ;
- 3) $u^*(z, w)$ является плюрисубгармонической функцией в W^0 , причем

$$W \setminus W^0 \subset \{(z, w): u(z, w) < u^*(z, w)\}.$$

Доказательство теоремы основано на известном методе подклеивания аналитических дисков к порождающему многообразию, на свойствах плюрисубгармонических функций и псевдогогнутых множеств, излагаемых далее в §1–5. Сама теорема доказывается в §6.

§1. Порождающие многообразия и подклеивание аналитических дисков

Гладкое (класса C^1) многообразие $M \subset \mathbb{C}^n$ называется *порождающим*, если в каждой точке $z \in M$ комплексная линейная оболочка векторов касательного пространства $T_z(M)$ (к M в точке z) совпадает со всем пространством $\mathbb{C}^n$.

В работе [19] С. И. Пинчук доказал, что если $M \subset \partial D$ – порождающее многообразие класса C^2 , то оно является множеством единственности в классе $\mathcal{O}(D) \cap C(\bar{D})$ голоморфных в D и непрерывных вплоть до границы функций. В доказательстве использовано непрерывное семейство аналитических дисков, подклеенных к M . В работе [13] Е. М. Чирка уточнил результат С. И. Пинчука, доказав, что для существования непрерывного семейства аналитических дисков достаточно C^1 -гладкости многообразия M . Дальнейшие результаты о семействах аналитических дисков получены в работах [20] и [21].

Следующая лемма позволяет нам рассматривать только порождающие многообразия размерности n .

ЛЕММА 1 (см. [20]). Пусть M – порождающее k -мерное многообразие в $\mathbb{C}^n$, $E \subset M$ – подмножество положительной меры. Тогда существует n -мерное порождающее подмногообразие $M' \subset M$ такое, что $M' \cap E$ имеет положительную меру на M' .

Итак, можно считать, что $\dim_R M = n$, и, заменяя систему координат, мы можем в окрестности точки $0 \in M$ задать его в виде

$$M = \{z = x + iy : y = h(x)\},$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{C}^n$ меняется в окрестности

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{x : |x| < \delta\} \times \{y : |y| < \delta\},$$

а $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ – вектор-функция, равная нулю при $x = 0$ вместе со своими первыми частными производными.

Изложим кратко метод подклеивания.

Обозначим через Tu гармоническую сопряженную функцию к непрерывной функции u , заданной на границе ∂U единичного круга $U \subset \mathbb{C}$, причем для однозначности полагаем

$$\int_0^{2\pi} Tu(\zeta) d\zeta = 0.$$

Рассмотрим на ∂U систему нелинейных сингулярных уравнений

$$\vartheta(\zeta) = c - T(h \circ \vartheta)(\zeta) - tTu(\zeta), \quad (1)$$

где $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – бесконечно гладкая вектор-функция, а $c, t \in \mathbb{R}^n$ – параметры. Если $\vartheta(c, t, \zeta)$ – решение уравнения (1), то функция $\vartheta(c, t, \zeta) + i((h \circ \vartheta) \times (c, t, \zeta) + tu(\zeta))$ является граничным значением голоморфной в U вектор-функции $\Phi(c, t, \zeta)$, $\zeta \in U$, т.е. $\Phi(c, t, \zeta) \in \mathcal{O}(U)$ и $\Phi(c, t, \zeta) = \vartheta(c, t, \zeta) + i((h \circ \vartheta)(c, t, \zeta) + tu(\zeta))$ при $\zeta \in \partial U$. Если $u \equiv 0$ на дуге $\partial U^+ = \{\zeta \in \partial U : \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$, то образ сужения функции $\Phi(c, t, \zeta)|_{\partial U^+}$ принадлежит M , т.е. $\Phi(c, t, \zeta)$ “подклеивает” диск $\Delta_{c,t} = \{\Phi(c, t, \zeta) : \zeta \in U\}$ к M по дуге ∂U^+ (см. [13], [19], [20]).

Отметим, что А.С. Садуллаев [20] построил достаточно “плотное” семейство аналитических дисков, подклеенных к порождающему n -мерному многообразию класса C^3 . Пусть порождающее многообразие M задано в виде

$$M = \{z = x + iy \in \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 : y = h(x)\},$$

где $h(x)$ – трижды гладкая вектор-функция в Ω_1 , исчезающая в нуле вместе со своими частными производными. Если $E \subset M$ – подмножество положительной меры, то существует семейство аналитических в круге U функций $\Phi(c, t, \zeta) : G \times U \rightarrow \mathbb{C}^n$ (где параметр (c, t) принимает значения в некоторой замкнутой окрестности $G \subset \mathbb{R}^{2n}$) такое, что:

а) функция $\Phi(c, t, \zeta)$ гладкая в $G \times \overline{U}$ и $\Phi(G \times \overline{U}) \subset \Omega$;

б) для каждой точки z^0 из некоторого множества $F \subset \Omega$ положительной $(2n-1)$ -меры Лебега (на некоторой гладкой гиперповерхности) существуют параметр $(c^0, t^0) \in G$ и множество $\ell \subset \partial U$ положительной длины такие, что $\Phi(c^0, t^0, 0) = z^0$ и $\Phi(c^0, t^0, \zeta) \in E$ при $\zeta \in \ell$.

Ю.В. Хурумов доказал [24], что для существования “плотного” семейства дисков, подклеенных к M , достаточно C^1 -гладкости многообразия M . Мы сформулируем и докажем этот результат в следующей нужной нам формулировке.

ЛЕММА 2. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – область с кусочно гладкой границей, $M \subset \partial D$ – порождающее n -мерное многообразие класса C^1 , заданное в виде

$$M = \{z = x + iy \in \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 : y = h(x)\},$$

где

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{x : |x| < \delta\} \times \{y : |y| < \delta\}$$

и $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ – вектор-функция, равная нулю при $x = 0$ вместе со своими первыми частными производными. Пусть $E \subset M$ – множество положительной меры Лебега на M , $m_n(E) > 0$, и $z = 0$ – точка плотности множества E . Тогда существуют компакт $E_1 \subset E$, семейство дисков $\Delta_{c,t} = \{\Phi(c, t, \zeta), \zeta \in U\}$, $(c, t) \in \Pi_\theta$, где $\Pi_\theta = \{(c, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |c| < \theta, |t| < \theta\}$, $\theta > 0$, и множество $P \subset \Pi_\theta$ положительной меры Лебега в $\mathbb{R}^{2n}$ такие, что $m_1(\Phi^{-1}(\partial\Delta_{c,t} \cap E_1)) > 0$ для любого $(c, t) \in P$. Кроме того, для любого $(c, t) \in P$ существует область $W_{c,t} \subset U$ со спрямляемой границей такая, что

$$\Phi(c, t, W_{c,t}) =: \mathbf{A}_{c,t} \subset D, \quad m_1(\Phi^{-1}(\partial\mathbf{A}_{c,t} \cap E_1)) > 0,$$

и множество $X = \bigcup_{(c,t) \in P} \mathbf{A}_{c,t}$ имеет положительную меру в $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем в несколько этапов.

1. Сначала напомним, что семейство дисков $\Delta_{c,t} = \{\Phi(c, t, \zeta) : \zeta \in U\}$, построенное при помощи уравнения (1), обладает следующими свойствами гладкости (см. [21]): если многообразие M удовлетворяет условиям леммы 2, то существует достаточно малое число $\theta > 0$ такое, что $\Phi \in C^1(\Pi_\theta \times U)$ и $\Phi \in W^{1,p}(\Pi_\theta \times \partial U)$, $p \geq 1$, где $W^{1,p}$ – класс Соболева. Иначе говоря, семейство дисков $\Delta_{c,t}$ имеет почти ту же гладкость, что и многообразие M .

2. Существует θ_1 , $0 < \theta_1 < \theta$, такое, что сужение Φ на множество $\Pi_{\theta_1} \times U$ обладает “ (N^{-1}) -свойством” (прообраз множества нулевой меры имеет нулевую меру в $\Pi_{\theta_1} \times U$, т.е. $m_{2n+2}(\Phi^{-1}(X) \cap (\Pi_{\theta_1} \times U)) = 0$ для любого множества $X \subset \mathbb{C}^n$ нулевой меры).

Поскольку $M \in C^1$, то $\Phi(c, t, \zeta)$ непрерывно дифференцируемо в $\Pi_\theta \times U$, поэтому для доказательства “ (N^{-1}) -свойства” достаточно показать, что $\det \Phi'_{c,t} \neq 0$ почти всюду в $\Pi_{\theta_1} \times U$ для некоторого θ_1 , $0 < \theta_1 < \theta$ (здесь $\Phi'_{c,t}$ – матрица частных производных Φ по c, t). В точках $(c, 0, \zeta) \in \Pi_\theta \times U$, как показывает непосредственное вычисление, $\det \Phi'_{c,t} = (u(\zeta))^n \neq 0$. По непрерывности $\det \Phi'_{c,t} \neq 0$ в $\Pi_{\theta_1} \times \{0\}$ для некоторого θ_1 , $0 < \theta_1 < \theta$. Тогда, в силу вещественной аналитичности $\Phi'_{c,t}$ по ζ , $\det \Phi'_{c,t} \neq 0$ почти всюду в $\Pi_{\theta_1} \times U$.

Далее, не ограничивая общности, будем считать, что $\theta_1 = \theta$.

3. Опишем поведение нормалей дисков семейства Φ . Для этого аппроксимируем нормали дисков семейства $\Phi(c, t, \zeta)$ нормальными дисков некоторого линейного по t семейства $\Phi_0(c, t, \zeta)$, подклеенных к $T_\xi M$ по ∂U^+ (здесь $\xi = c + ih(c) \in M$).

Для фиксированного $(c, t) \in \Pi_\theta$ рассмотрим следующее уравнение относительно $\vartheta_0: \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\vartheta_0 = -Th'(c)\vartheta_0 - tTu. \quad (2)$$

Легко проверить, что его решением будет

$$\vartheta_0(c, t, \zeta) = -(I_n + (h'(c))^2)^{-1}((u(\zeta) - u(0))h'(c) + Tu(\zeta)I_n)t = L(c, \zeta)t, \quad (3)$$

где I_n – единичная $(n \times n)$ -матрица. Положим

$$\Phi_0(c, t, \zeta) = \vartheta_0(c, t, \zeta) + ih'(c)\vartheta_0(c, t, \zeta) + itu(\zeta).$$

Очевидно, что Φ_0 линейно по t , голоморфно по ζ и принадлежит классу C^∞ по (t, ζ) в $\Pi_\theta \times U$ (частные производные всех порядков по (t, ζ) непрерывны по (c, t, ζ)). Кроме того, диски $\{\Phi_0(c, \cdot, \zeta): \zeta \in U\}$ подклеены к $T_\xi M$ по ∂U^+ , где $\xi = c + ih(c)$.

Рассмотрим внутренние нормали дисков

$$\Delta_{c,t}: N(c, t, \tau) = -\frac{\partial \Phi(c, t, \rho e^{i\tau})}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1}.$$

Поскольку $\Phi(c, t, e^{i\tau}) \in W^{1,p}(\Pi_\theta \times \partial U)$, $p \geq 1$, то отсюда следует, что для почти всех фиксированных $(c, t) \in \Pi_\theta$ функция $\Phi(c, t, e^{i\tau})$ переменного τ принадлежит классу $W^{1,p}(\partial U)$. Следовательно, производные Φ'_ρ и Φ'_τ существуют почти всюду на ∂U и $N(c, t, \tau) = i\Phi'_\tau(c, t, e^{i\tau})$ (см. [16, гл. IX, §5, теорема 1]).

Аналогично определяется $N_0(c, t, \tau)$ и имеет место равенство $N_0(c, t, \tau) = i\Phi'_{0\tau}(c, t, e^{i\tau})$ всюду на ∂U , где $\Phi'_{0\tau} = \frac{\partial \Phi'_0}{\partial \tau}$.

Покажем, что при $t \rightarrow 0$ направления нормалей N_0 и N сближаются. Точнее,

$$N_0(c, t, \tau)/|t| - N(c, t, \tau)/|t| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0$$

по мере Лебега в $B_\theta(0) \times \partial U$, где $B_\theta(0): |c| < \theta$.

Формальным дифференцированием уравнений (1) и (2) по τ получаем

$$\begin{aligned} \vartheta'_\tau &= -Th'(\vartheta)\vartheta'_\tau - tTu'_\tau, \\ \vartheta'_{0\tau} &= -Th'(c)\vartheta'_{0\tau} - tTu'_\tau. \end{aligned}$$

Обозначая $\vartheta'_{0\tau} - \vartheta'_\tau = \gamma$, получим

$$\gamma = -T\left((h'(c) - h'(\vartheta))\vartheta'_{0\tau} + h'(\vartheta)\gamma\right).$$

Поскольку $h'(0) = 0$, то, не ограничивая общности, можем предполагать, что

$$\|h'\|_\infty = \max_{j,k,x \in \Omega_1} \left| \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_k} \right| \leq \frac{1}{2n(1 + \|T\|_p)},$$

где $\|T\|_p$ – норма оператора T в пространстве $L^p(\partial U)$, число $p > 1$ фиксировано. Тогда имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|\gamma\|_{L^p(\partial U)} &\leq \|T\|_p \|(h'(c) - h'(\vartheta))\vartheta'_{0\tau}\|_{L^p(\partial U)} + \|T\|_p n \|h'\|_\infty \|\gamma\|_{L^p(\partial U)} \\ &\leq \|T\|_p \|(h'(c) - h'(u))\vartheta'_{0\tau}\|_{L^p(\partial U)} + \frac{1}{2} \|\gamma\|_{L^p(\partial U)}. \end{aligned}$$

Дифференцируя уравнение (3) по τ и подставляя полученное выражение в правую часть последнего неравенства, имеем оценку

$$\|\gamma\| \leq 2\|T\|_p \|(h'(c) - h'(\vartheta))L'_{0\tau}(c, e^{i\tau})\|_\infty |t|, \quad (4)$$

где $\|\cdot\|_\infty$ – верхняя грань максимумов модулей на $\Pi_\theta \times \partial U$ элементов соответствующей матрицы. Так как $\vartheta(c, 0, e^{i\tau}) \equiv c$ и $\vartheta \in C(\Pi_\theta \times \partial U)$, то $\vartheta(c, t, e^{i\tau}) \rightarrow c$ при $t \rightarrow 0$, причем сходимость равномерна в $B_\theta(0) \times \partial U$. Поэтому множитель при $|t|$ из неравенства (4) стремится к нулю при $t \rightarrow 0$.

Интегрируя неравенство (4) по $B_\theta(0)$, получим

$$\|\vartheta'_{0\tau} - \vartheta'_\tau\|_{L^p(B_\theta(0) \times \partial U)} \leq \delta_1(t)|t|,$$

где $\delta_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Заметим, что $\vartheta'_{0\tau} - \vartheta'_\tau = \operatorname{Re}(\Phi'_{0\tau} - \Phi'_\tau)$, и отсюда также легко следует оценка для разности

$$\operatorname{Im}(\Phi'_{0\tau} - \Phi'_\tau) = h'(c)\vartheta'_{0\tau} - h'(\vartheta)\vartheta'_\tau.$$

В результате получим оценку

$$\frac{\|N_0 - N\|_{L^p(B_\theta(0) \times \partial U)}}{|t|} = \frac{\|i\Phi'_{0\tau} - i\Phi'_\tau\|_{L^p(B_\theta(0) \times \partial U)}}{|t|} \leq \delta_2(t),$$

где $\delta_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, откуда следует сходимость $N_0/|t| - N/|t| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ по мере в $B_\theta(0) \times \partial U$.

4. Покажем, что почти во всех точках многообразия M , близких к точке $0 \in M$, найдутся диски $\Delta_{c,t}$, подходящие к M по направлениям, близким к заранее заданному направлению $\nu^0 \in iT_0M$.

Ясно, что нормаль $N_0(c, t, \tau) = i\Phi'_{0,\tau}(c, t, e^{i\tau})$ принадлежит $iT_\xi M$, так как $\Phi_0(c, t, e^{i\tau}) \in T_\xi M$ при $\tau \in [0, \pi]$. Аналогично, если $\tau \in [0, \pi]$, $\Phi(c, t, e^{i\tau}) = \xi$ и если в точке (c, t, τ) существуют $N(c, t, \tau)$, $\Phi'_\tau(c, t, e^{i\tau})$, причем $N(c, t, \tau) = i\Phi'_\tau(c, t, e^{i\tau})$, то $N(c, t, \tau) \in iT_\xi M$ (напомним, что N и $i\Phi'_\tau$ почти всюду существуют и равны между собой).

Фиксируем вектор $\nu^0 \in iT_0M$ и открытый острый конус $A_{\beta}^{\nu^0}(0)$ с вершиной в точке $0 \in M$, осью ν^0 и углом вращения β . Определим множество

$$\begin{aligned} G = \Big\{ (c, t, \tau) \in \Pi_\theta \times [0, \pi] : \Phi(c, t, \cdot) \in W^{1,p}(\partial U), \text{ существуют } N(c, t, \tau), \Phi'_\tau(c, t, e^{i\tau}) \\ \text{и некасательное предельное значение } \lim_{\zeta \rightarrow e^{i\tau}} \Phi'_\zeta(c, t, \zeta) = \Phi'_\zeta(c, t, e^{i\tau}) \neq 0, \text{ причем} \\ \text{имеет место равенство } N(c, t, \tau) = i\Phi'_\tau(c, t, e^{i\tau}) \text{ и } N(c, t, \tau) \in A_{\beta/2}^{\nu^0}(\Phi(c, t, e^{i\tau})) \Big\}. \end{aligned}$$

Здесь $A_{\beta/2}^{\nu^0}(\Phi(c, t, e^{i\tau})) = A_{\beta/2}^{\nu^0}(0) + \Phi(c, t, e^{i\tau})$ и $\beta \in (0, \pi)$ – фиксированное число. И наконец, обозначим через G_t и $G_{c,t}$ сечения множества G при фиксированных t и (c, t) соответственно.

Вычисляя $\vartheta'_{0\tau}(c, t, e^{i\frac{\pi}{2}})$ по формуле (3), получим, что $N_0(0, \cdot, \frac{\pi}{2}): \mathbb{R}^n \rightarrow iT_0M$ – изоморфизм (над $\mathbb{R}$). Поэтому найдется t^0 такое, что $N_0(0, t^0, \frac{\pi}{2}) = \nu^0$. По непрерывности, существует ε , $0 < \varepsilon < \theta$, такое, что $N_0(c, t, \tau) \in A_{\beta/4}^{\nu^0}(\Phi_0(c, t, e^{i\tau}))$ при $c \in B_\varepsilon(0) = \{c: |c| < \varepsilon\}$ и $t \in B_\varepsilon(t^0) = \{t: |t - t^0| < \varepsilon\}$, $\tau \in \ell_\varepsilon = (\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)$. Поскольку N_0 линейно по t , то существует конус $C_\delta^{t^0}(0)$ в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в точке 0, осью $0t^0$ и углом вращения δ , который содержит некоторую окрестность точки t^0 , и для любого $t \in C_\delta^{t^0}(0)$

$$N_0(c, t, \tau) \in A_{\beta/4}^{\nu^0}(\Phi_0(c, t, e^{i\tau})), \quad (c, \tau) \in B_\varepsilon(0) \times \ell_\varepsilon. \quad (5)$$

Пусть $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ и $M_{\varepsilon_0}(0) = \{\xi \in M: \xi = c + ih(c), c \in B_{\varepsilon_0}(0)\}$ – окрестность точки 0 на M . Покажем, что для любого борелевского множества $E_1 \subset M_{\varepsilon_0}(0)$ с положительной мерой $m_n(E_1) > 0$ при достаточно малых t из $C_\delta^{t^0}(0)$ выполняется неравенство

$$m_{n+1}(G_t \cap (\Phi^{-1}(E_1))_t \cap B_\varepsilon(0) \times \ell_\varepsilon) > 0. \quad (6)$$

Это неравенство означает, что множество параметров $(c, \tau) \in (\Phi^{-1}(E_1))_t$, для которых N отличается от ν^0 по направлению на угол, меньший $\beta/2$, имеет положительную меру при всех достаточно малых $t \in C_\delta^{t^0}(0)$.

При доказательстве (6) мы воспользуемся следующим неравенством, которое является модификацией близкого неравенства из работы [23, гл. 2, §1]: пусть $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $F: \overline{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение класса $W^{1,n}(U_1)$; если $U_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus F(\partial U_1)$ – открытое множество и степень отображения F в точках U_2 отлична от нуля, то для любого борелевского множества $\Sigma \subset U_2$ имеет место неравенство

$$m_n(\Sigma) \leq \int_{F^{-1}(\Sigma)} |J_F| dm_n, \quad (7)$$

где J_F – якобиан F .

Рассмотрим отображение $V_t: \overline{B}_\varepsilon(0) \times \overline{\ell}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, определенное по формуле $V_t(c, \tau) = (\vartheta(c, t, \tau), \tau)$. При $t = 0$ степень отображения V_t равна единице, так как $V_0(c, \tau) \equiv (c, \tau)$. Поэтому при достаточно малых t степень отображения V_t в точках $B_{\varepsilon_0}(0) \times \ell_{\varepsilon_0}$ также равна единице. Пусть $\Sigma = E_0 \times \ell_{\varepsilon_0}$, где $E_0 = \text{Re}(E_1) \subset B_{\varepsilon_0}(0)$, $m_n(E_0) > 0$. Применяя неравенство (7), при достаточно малых t получим

$$m_{n+1}(\Sigma) \leq \int_{V_t^{-1}(\Sigma)} |J_{V_t}| dm_{n+1} \leq \int_{V_t^{-1}(\Sigma)} dm_{n+1} + \int_{V_t^{-1}(\Sigma)} |J_{V_t} - 1| dm_{n+1}.$$

Последнее слагаемое стремится к нулю при $t \rightarrow 0$, так как $(V_0)'_{c,\tau} = I_{n+1}$ – единичная $((n+1) \times (n+1))$ -матрица и $\vartheta'_{c,\tau}$ непрерывно зависит от t в норме пространства $L^{n+1}(B_\varepsilon(0) \times \partial U)$. Поэтому все элементы матрицы $(V_t)'_{c,\tau} - I_{n+1}$

стремятся к нулю в $L^{n+1}(B_\varepsilon(0) \times \partial U)$ при $t \rightarrow 0$, и тогда $J_{V_t} \rightarrow 1$ в пространстве $L^1(B_\varepsilon(0) \times \partial U)$. Таким образом, для достаточно малых t имеем

$$\frac{1}{2} m_{n+1}(\Sigma) < m_{n+1}(V_t^{-1}(\Sigma)).$$

Поскольку $V_t^{-1}(\Sigma) = (\vartheta^{-1}(E_0))_t \cap (B_\varepsilon(0) \times \ell_\varepsilon)$, то отсюда получим

$$m_{n+1}((\vartheta^{-1}(E_0))_t \cap (B_\varepsilon(0) \times \ell_\varepsilon)) > 0.$$

Теперь, используя доказанный в п. 3 факт, что направления нормалей N_0 и N сближаются при $t \rightarrow 0$ по мере, мы покажем, что $m_{n+1}((B_\varepsilon(0) \times \ell_\varepsilon) \setminus G_t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, $t \in C_\delta^{t_0}(0)$.

В самом деле, из определения множества G и включения (5) следует, что для любого α : $0 < \alpha < \beta/4$,

$$\begin{aligned} m_{n+1}((B_\varepsilon(0) \times \ell_\varepsilon) \setminus G_t) \\ = m_{n+1}\{(c, \tau) \in B_\varepsilon(0) \times \ell_\varepsilon : N(c, t, \tau) \notin A_{\beta/2}^{\nu^0}(\Phi(c, t, e^{i\tau}))\} \\ \leq m_{n+1}\{(c, \tau) \in B_\varepsilon(0) \times \ell_\varepsilon : \text{угол между } N_0(c, t, \tau) \text{ и } N(c, t, \tau) \\ \text{больше, чем } \alpha\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $t \rightarrow 0$, $t \in C_\delta^{t_0}(0)$. Значит,

$$m_{n+1}(G_t \cap (\vartheta^{-1}(E_0))_t \cap B_\varepsilon(0) \times \ell_\varepsilon) > 0$$

при достаточно малых $t \in C_\delta^{t_0}(0)$. Отсюда следует неравенство (6), так как $(\vartheta^{-1}(E_0))_t = (\Phi^{-1}(E_1))_t$.

Остается доказать, что

$$m_n(M_\varepsilon(0) \setminus \Phi(G)) = 0, \quad (8)$$

где $M_\varepsilon(0) = \{\xi \in M : \xi = c + ih(c), c \in B_\varepsilon(0)\}$.

Положим $E_{\varepsilon_0} = M_{\varepsilon_0}(0) \setminus \Phi(G)$, $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$. Если $m_n(E_{\varepsilon_0}) > 0$ для некоторого ε_0 , то в силу (6)

$$G_t \cap (\Phi^{-1}(E_{\varepsilon_0}))_t \neq \emptyset$$

для почти всех достаточно малых $t \in C_\delta^{t_0}(0)$, что противоречит определению E_{ε_0} . Поэтому $m_n(E_{\varepsilon_0}) = 0$, и в силу произвольности $\varepsilon_0 < \varepsilon$ имеем равенство (8).

Значит, образ множества G при отображении Φ почти полностью покрывает ε -окрестность точки $0 \in M$, т. е. почти во всех точках многообразия M , близких к точке $0 \in M$, найдутся диски $\Delta_{c,t}$, подходящие к M по направлениям, близким к заранее заданному направлению $\nu^0 \in iT_0M$.

5. Теперь построим треугольники в $\{c\} \times \{t\} \times U$, образы которых при отображении Φ подходят к точкам $\xi = \Phi(c, t, e^{i\tau}) \in M$, $\tau \in [0, \pi]$, изнутри конусов $A_\beta^{\nu^0}(\xi)$. Область

$$\nabla(\rho, \tau) = \left\{ \zeta \in U : |\zeta| > 1 - \rho, |\arg(1 - \zeta e^{-i\tau})| < \frac{\beta}{4} \right\}$$

при достаточно малых ρ является криволинейным треугольником. При $(c, t, \tau) \in G$ функция $\Phi(c, t, \zeta)$ голоморфна по ζ в $\nabla(\rho, \tau)$, непрерывно дифференцируема на $\bar{\nabla}(\rho, \tau)$, и если ρ достаточно малое, то $\Phi'_\zeta(c, t, \zeta) \neq 0$ в $\nabla(\rho, \tau)$ (см. определение множества G). Поскольку $N(c, t, \tau) \in A_{\beta/2}^{\nu_0}(\Phi(c, t, e^{i\tau}))$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти достаточно малое $\rho = \rho(c, t, \tau)$ такое, чтобы $\frac{1}{\rho}$ было натуральным числом и

$$\Phi(c, t, \nabla(\rho, \tau)) \subset A_{\beta}^{\nu_0}(\Phi(c, t, e^{i\tau})) \cap \{z \in \mathbb{C}^n : |z - \Phi(c, t, e^{i\tau})| < \varepsilon\}.$$

6. Наконец, перейдем к заключительной части доказательства, т. е. покажем существование множеств $E_1 \subset E$ и $P \subset \Pi_\theta$, удовлетворяющих условиям леммы. Построим области $W_{c,t} \subset U$ и докажем, что объединение аналитических множеств $\Phi(c, t, W_{c,t}) = \mathbf{A}_{c,t}$ имеет положительную меру Лебега в $\mathbb{C}^n$.

Поскольку граница области D кусочно гладкая и $z = 0$ — точка плотности множества E , то можно найти числа β_1 , ε_1 , ε , вектор $\nu^0 \in iT_0M$ и компакт $E_1 \subset E \cap M_\varepsilon(0)$ такие, что $m_n(E_1) > 0$, и клин с острием E_1 ,

$$\Omega_{E_1} = \bigcup_{\xi \in E_1} (A_{\beta_1}^{\nu_0}(\xi) \cap V_{\varepsilon_1}(\xi)) \subset D,$$

где $V_{\varepsilon_1}(\xi) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - \xi| < \varepsilon_1\}$. Кроме того, согласно п. 4 для вектора ν^0 и $\beta = \beta_1$ можно построить семейство дисков $\Delta_{c,t}$ и множество G такие, что при достаточно малых $t \in C_\delta^{\nu^0}(0)$ имеет место неравенство (6). Отсюда для достаточно малых $t \in C_\delta^{\nu^0}(0)$ мы получим

$$m_{n+1}(G_t \cap (\Phi^{-1}(E_1))_t) = m_{n+1}((G \cap \Phi^{-1}(E_1))_t) > 0.$$

По теореме Фубини $m_{2n+1}(G \cap \Phi^{-1}(E_1)) > 0$ и множество

$$P = \{(c, t) \in \Pi_\theta : m_1((G \cap \Phi^{-1}(E_1))_{c,t}) > 0\}$$

имеет положительную меру в $\mathbb{R}^{2n}$. По построению очевидно, что

$$m_1(\Phi^{-1}(\partial\Delta_{c,t} \cap E_1)) > 0$$

для любого $(c, t) \in P$. Тем самым множества E_1 и P с требуемыми свойствами построены. Перейдем к построению области $W_{c,t}$.

При фиксированном $(c, t) \in P$ рассмотрим последовательность открытых множеств

$$W_{c,t}^k = \bigcup \{c\} \times \{t\} \times \nabla\left(\frac{1}{k}, \tau\right) \subset \{c\} \times \{t\} \times U,$$

где объединение берется по $\tau \in (G \cap \Phi^{-1}(E_1))_{c,t}$ таким, что $\rho(c, t, \tau) = \frac{1}{k}$. Поскольку

$$m_1\left(\left(\bigcup_k \partial W_{c,t}^k\right) \cap \{c\} \times \{t\} \times \partial U\right) \geq m_1((G \cap \Phi^{-1}(E_1))_{c,t}) > 0,$$

то существует связная компонента $W_{c,t}$ одного из множеств $W_{c,t}^k$ такая, что $m_1(\partial W_{c,t} \cap \{c\} \times \{t\} \times \partial U) > 0$, $(c, t) \in P$. Нетрудно проверить, что $W_{c,t}$ – область со спрямляемой границей. Наконец, треугольники $\nabla(\rho, \tau)$ можно выбирать так, что $\Phi(W_{c,t}) = \mathbf{A}_{c,t} \subset \Omega_{E_1} \subset D$ и $m_1(\Phi^{-1}(\partial \mathbf{A}_{c,t} \cap E_1)) > 0$.

Теперь остается только доказать, что множество $X = \bigcup_{(c,t) \in P} \mathbf{A}_{c,t}$ имеет положительную меру в $\mathbb{C}^n$. Предположим обратное: пусть $m_{2n}(X) = 0$. Тогда в силу “ (N^{-1}) -свойства” множество $Y = \Phi^{-1}(X)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^{2n+2}$, но $Y \supset \bigcup_{(c,t) \in P} W_{c,t}$, поэтому мера сечения $m_2(Y_{c,t}) > 0$ для $(c, t) \in P$. Так как $m_{2n}(P) > 0$, то по теореме Фубини $m_{2n+2}(Y) > 0$, что является противоречием, т. е. $m_{2n}(X) > 0$. Лемма доказана.

В следующих трех параграфах мы докажем несколько лемм для одномерного случая $D \subset \mathbb{C}$, которые применяются в доказательстве основного результата.

§ 2. N -множества

Предел равномерно сходящейся или монотонно убывающей последовательности плюрисубгармонических функций плюрисубгармоничен. Супремум конечного числа плюрисубгармонических функций плюрисубгармоничен. Иначе обстоит дело с предельной функцией $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ для монотонно возрастающей последовательности плюрисубгармонических локально равномерно ограниченных сверху функций u_k , $k = 1, 2, \dots$. В этом случае u не обязана быть полунепрерывной сверху, однако ее верхняя регуляризация $u^*(z) = \overline{\lim}_{w \rightarrow z} u(w)$ является плюрисубгармонической функцией в D . Аналогично, для верхнего предела

$$u(z) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} u_k(z)$$

локально равномерно ограниченной сверху последовательности $\{u_k\}$ регуляризация $u^*(z)$ будет плюрисубгармонической функцией.

Множества вида $\{z \in D: u(z) < u^*(z)\}$ в свое время П. Лелон называл N -множествами. В работах [11] и [9] доказано, что всякое N -множество является плюриполярным, т. е. понятия плюриполярности и N -множества совпадают.

В настоящей работе нас будут интересовать граничные свойства плюрисубгармонических функций и нам нужно будет рассматривать граничные N -множества и их свойства. Пусть D – ограниченная область с C^1 -гладкой границей ∂D и

$$A_\alpha(\xi) = \{z \in D: |z - \xi| < \alpha \rho(z, T_\xi)\},$$

где $\xi \in \partial D$, $\alpha > 1$, $\rho(z, T_\xi)$ – расстояние от точки z до касательной к ∂D в точке ξ плоскости T_ξ (таким образом, $A_\alpha(\xi)$ – конус с вершиной ξ).

Пусть u – плюрисубгармоническая в D функция. Доопределим ее до границы области следующим образом:

$$u(\xi) = \sup_{\alpha \geq 1} \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in A_\alpha(\xi)}} u(z), \quad \xi \in \partial D. \quad (9)$$

Далее всюду в качестве граничного значения плюрисубгармонической в D функции u мы будем брать, не оговаривая это каждый раз, значение $u(\xi)$, $\xi \in \partial D$, определенное по формуле (9).

Граничное N -множество определим следующим образом: пусть $u_k(z)$, $z \in \overline{D}$, – монотонно возрастающая последовательность равномерно ограниченных сверху плюрисубгармонических в D функций. Рассмотрим предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(z) = u(z), \quad z \in D,$$

и регуляризацию $u^*(z) = \overline{\lim}_{w \rightarrow z} u(w)$, $z \in D$. Тогда из неравенства $u_k(z) \leq u(z) \leq u^*(z)$, $z \in D$, вытекает $u_k(\xi) \leq u(\xi) \leq u^*(\xi)$, $\xi \in \partial D$, и, следовательно, всюду на ∂D имеет место неравенство $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi) \leq u^*(\xi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмножества множеств вида

$$\left\{ \xi \in \partial D: \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi) < u^*(\xi) \right\}$$

называются N -граничными множествами.

В многомерном случае вопрос о плюриполярности граничного N -множества остается открытым. (Граничное множество $E \subset \partial D$ называется *плюриполярным*, если существует плюрисубгармоническая и ограниченная сверху в D функция $u(z)$ такая, что $u(z) \not\equiv -\infty$ и граничные значения $u(\xi)|_E \equiv -\infty$.) Но в настоящей работе нам достаточно изучить граничные N -множества в одномерном случае $D \subset \mathbb{C}$.

ЛЕММА 3. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область с C^1 -гладкой границей и $u_k(z)$ – монотонно возрастающая последовательность функций, субгармонических и равномерно ограниченных сверху в D . Если $u(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(z)$, $z \in D$, то линейная мера Лебега множества

$$E = \left\{ \xi \in \partial D: \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi) < u^*(\xi) \right\}$$

равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты изложения, не ограничивая общности, можно считать, что $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная односвязная область и $0 \leq u_k(z) \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$, $z \in D$. Пусть $\vartheta_k(z)$ – наименьшая гармоническая мажоранта функции $u_k(z)$. Тогда $\vartheta_k(z)$ представляется интегралом Пуассона (см. [17]):

$$\vartheta_k(z) = \int_{\partial D} P(\xi, z) u_k(\xi) d\sigma,$$

где $d\sigma$ – мера Лебега на ∂D , и почти всюду на ∂D выполнено равенство $\vartheta_k(\xi) = u_k(\xi)$, $k = 1, 2, \dots$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, в силу монотонности $u_k(\xi)$ имеем

$$\vartheta(z) = \int_{\partial D} P(\xi, z) \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi) d\sigma.$$

Отсюда $\vartheta(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi)$ почти всюду на ∂D . С другой стороны, из неравенства $u_k(z) \leq u^*(z) \leq \vartheta(z)$, $z \in D$, имеем $u_k(\xi) \leq u^*(\xi) \leq \vartheta(\xi)$, $\xi \in \partial D$. Следовательно, $u^*(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi)$ почти всюду на ∂D , т.е. $m_1\{\xi \in \partial D: \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi) < u^*(\xi)\} = 0$.

Граничные множества $E \subset \partial D$ положительной линейной меры $m_1(E) > 0$ и только они имеют нетривиальную гармоническую меру (см. [18]), т. е. гармоническая в D функция

$$\omega(z, E, D) = \sup\{u \in \text{Sh}(D): u|_D \leq 0, u|_E \leq -1\}$$

не равна нулю в D тогда и только тогда, когда $m_1(E) > 0$ (здесь Sh обозначает субгармоничность). Отсюда следует, что $E \subset \partial D$ (одномерный случай) является N -множеством тогда и только тогда, когда оно полярное. В самом деле, если $E \subset \partial D$ является N -множеством, то согласно лемме 3 $m_1(E) = 0$ и гармоническая мера $\omega(z, E, D) \equiv 0$. Тогда для некоторой фиксированной точки $z^0 \in D$ существует последовательность субгармонических в области D функций таких, что

$$u_k(z^0) > -\frac{1}{2^k}, \quad u_k|_D \leq 0, \quad u_k|_E \leq -1.$$

Сумма $u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ является в D субгармонической, причем $u(z^0) \geq -1$ и $u|_E = -\infty$, т. е. множество E полярно. И наоборот, если $u(z)$ – субгармоническая функция в D такая, что $u(z)|_D \leq 0$, $u \neq -\infty$ в D , и $u|_E = -\infty$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\frac{1}{k} u|_D \leq 0$ и $\frac{1}{k} u|_E \leq -1$. Отсюда вытекает, что $\omega(z, E, D) \equiv 0$, т. е. гармоническая мера множества E равна нулю. Нетрудно видеть, что $E \subset \{\xi \in \partial D: \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} u(\xi) < \frac{1}{k} u^*(\xi)\}$ и E является N -множеством.

Рассмотрим теперь монотонно убывающую последовательность $\{u_k(z)\}$ субгармонических в D функций: $u_k(z) \geq u_{k+1}(z)$, $z \in D$. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(z) = u(z)$ – субгармоническая функция в D и $u_k(\xi) \geq u(\xi)$ для граничных точек $\xi \in \partial D$. Следовательно, в этом случае $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi) \geq u(\xi)$ для всех точек $\xi \in \partial D$. (Для последовательности субгармонических в круге $U: |z| < 1$ функций $u_k(z) = \max\{-1, k \ln |z|\}$ мы имеем $u(z) \equiv -1$, $z \in U$, и $u_k(\xi) \equiv 0$, $\xi \in \partial U$. Следовательно, $u(\xi) < \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi)$ всюду на ∂U .)

Объединяя случаи для монотонных последовательностей (возрастающих и убывающих), докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4. Пусть $\{u_k(z)\}$ – последовательность равномерно ограниченных сверху субгармонических функций в области $D \subset \mathbb{C}$ и

$$u(z) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} u_k(z).$$

Тогда функция $u^*(z)$ является субгармонической в D и линейная мера Лебега множества

$$E = \left\{ \xi \in \partial D: \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi) < u^*(\xi) \right\}$$

равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим последовательность субгармонических функций

$$w_{j,m}(z) = \max_{j \leq k \leq m} u_k(z).$$

Понятно, что

$$u(z) = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} u_j(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} w_{j,m}(z).$$

Поскольку последовательность $w_{j,m}(z)$ является монотонно возрастающей по m , то согласно лемме 3 почти всюду на границе

$$w_j^*(\xi) = \lim_{m \rightarrow \infty} w_{j,m}(\xi), \quad j = 1, 2, \dots \quad (10)$$

С другой стороны, последовательность

$$w_j(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} w_{j,m}(z)$$

монотонно убывающая и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} w_j^*(z) = u^*(z), \quad z \in D.$$

Поскольку $u^*(z) \leq w_j^*(z)$, $z \in D$, то $u^*(\xi) \leq w_j^*(\xi)$ при $\xi \in \partial D$, и согласно (10) имеем

$$u^*(\xi) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} w_j^*(\xi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} w_{j,m}(\xi)$$

почти для всех $\xi \in \partial D$, т. е. линейная мера множества E равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно видеть, что леммы 3 и 4 верны и для областей $D \subset \mathbb{C}$ со спрямляемыми границами.

§3. Об однозначности функций на одномерных параллельных сечениях

Пусть f – голоморфная функция в некоторой окрестности U точки $0 \in \mathbb{C}$ такая, что существует последовательность рациональных функций $r_k(z)$, $\deg r_k \leq k$, быстро сходящаяся к f по мере Лебега:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_2 \left\{ z \in U : |f - r_k|^{1/k} \geq \varepsilon \right\} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$. Тогда f глобально однозначна в своей вейерштрассовой области существования W_f и последовательность $r_k(z)$ быстро по мере сходится к f в области W_f (см. [12]). Класс всех таких функций f , введенный А. А. Гончаром [12], обозначается через R^0 .

Класс R^0 содержит, помимо целых и мероморфных в $\mathbb{C}$ функций, любую (однозначную) функцию f , имеющую полярное множество особенностей. В работе [10] получен критерий принадлежности функции f классу R^0 в терминах числовой последовательности, выражающейся через коэффициенты Тейлора f в окрестности нуля. Сформулируем этот критерий.

Пусть функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

голоморфна в окрестности единичного круга и

$$V_k = \sup_{j_1, \dots, j_k} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} a_{j_1} & a_{j_1+1} & \dots & a_{j_1+k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j_k} & a_{j_k+1} & \dots & a_{j_k+k-1} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\text{mod } |\cdot|$ обозначает модуль соответствующего определителя. Тогда

$$f \in R^0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} V_k^{1/k^2} = 0. \quad (11)$$

С помощью этого критерия мы докажем следующую лемму, которая обеспечит однозначность аналитического продолжения функции f по одному переменному.

ЛЕММА 5. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область со спрямляемой границей и $V = \{w \in \mathbb{C}: |w| < r\}$. Если $f(z, w) \in \mathcal{O}(D \times V) \cap C(\overline{D} \times V)$ и $f(\xi, w) \in R^0$ для всех $\xi \in E \subset \partial D$, $m_1(E) > 0$, то $f(z, w) \in R^0$ при всех $z \in D$.

В случае, когда E – неплуриполярное множество в $D \subset \mathbb{C}^n$, эта лемма доказана в [10].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем предполагать, что $r > 1$, так как общий случай легко сводится к этому случаю путем линейной замены w . Разложим функцию $f(z, w)$ в ряд Хартогса:

$$f(z, w) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z) w^j,$$

где

$$a_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(z, \eta)}{\eta^{j+1}} d\eta.$$

Очевидно, что $a_j(z) \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$.

Теперь определим

$$V_k(z) = \sup_{j_1, \dots, j_k} \text{mod} \begin{vmatrix} a_{j_1}(z) & a_{j_1+1}(z) & \dots & a_{j_1+k-1}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j_k}(z) & a_{j_k+1}(z) & \dots & a_{j_k+k-1}(z) \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что функции $\varphi_k(z) = \frac{1}{k^2} \ln V_k(z)$ субгармоничны и равномерно ограничены сверху в $\overline{D}$. Пусть

$$\varphi(z) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(z), \quad z \in D,$$

и $\varphi^*(z)$ – ее регуляризация. В силу критерия (11) $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\xi) = -\infty$ для любого $\xi \in E$, а согласно лемме 4 неравенство $\varphi^*(\xi) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\xi)$ выполнено почти для всех $\xi \in \partial D$, т.е. $\varphi^*(\xi) = -\infty$ почти для всех $\xi \in E$. Отсюда получаем, что субгармоническая функция $\varphi^*(z) = -\infty$ в области D . Поскольку $\varphi(z) \leq \varphi^*(z)$, то $\varphi(z) = -\infty$ для любого $z \in D$. Значит,

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} V_k^{1/k^2}(z) = 0, \quad z \in D,$$

и согласно критерию (11) имеем $f(z, w) \in R^0$ для любого $z \in D$.

§ 4. Граничные свойства псевдогогнутых множеств

Свойства псевдогогнутых множеств изучены в работах [14], [15], [9], [10]. Пусть S – псевдогогнутое подмножество области $D \times V = D \times \{w \in \mathbb{C}: |w| < r\} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, $r > 0$, и $S_a = S \cap \{z = a\}$. Предположим, что S не пересекает $D \times \partial V$. Тогда:

1) функция $\log(\text{cap } S_z)$, где cap обозначает емкость (трансфинитный диаметр) плоского множества, плюрисубгармонична в D [15];

2) если S_z конечны для всех z из некоторого неплюриполярного множества $E \subset D$, то S – аналитическое множество [14];

3) если S_z полярны для всех z из некоторого неплюриполярного множества $E \subset D$, то S – плюриполярное множество [9], [10].

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область со спрямляемой границей. Обозначим через S_ξ^* некасательный граничный слой псевдогогнутого множества $S \subset D \times \mathbb{C}$ в регулярной точке $\xi \in \partial D$ (где существует касательная прямая), полагая

$$S_\xi^* = \bigcup_{\alpha \geq 1} (\overline{(A_\alpha(\xi) \times \mathbb{C})} \cap \bar{S} \cap \{z = \xi\}).$$

(Напомним, что $A_\alpha(\xi)$ – конус с вершиной в точке ξ .) Таким образом, S_ξ^* определяется почти всюду на ∂D , и нетрудно убедиться в том, что в общем случае $S_\xi^* \neq \bar{S} \cap \{z = \xi\}$.

ЛЕММА 6. Пусть S – псевдогогнутое ограниченное подмножество области $D \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$. Если для каждой точки ξ из множества $E \subset \partial D$ с положительной мерой Лебега, $t_1(E) > 0$, некасательные граничные слои S_ξ^* полярны, то S – плюриполярное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что трансфинитный диаметр множества S , равный по определению

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\max_{w_i, w_j \in S} \prod_{1 \leq i \leq j \leq k} |w_i - w_j| \right)^{\frac{2}{k(k-1)}},$$

совпадает с емкостью $\text{cap } S$ (см. [16]). Согласно известным свойствам псевдогогнутых множеств (см. [22]) последовательность функций

$$\delta_k(z) = \frac{2}{k(k-1)} \max_{w \in S_z^k} \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} \ln |w_i - w_j|,$$

построенная для сечений S_z , $z \in D$, субгармонична в D (здесь $w = (w_1, \dots, w_k)$ и $S_z^k = S_z \times S_z \times \dots \times S_z$ (k раз)). Поскольку эта последовательность, убывая, сходится к функции $\psi(z) = \ln \text{cap } S_z$, то $\psi(z)$ является ограниченной сверху субгармонической в D функцией, причем $\psi(\xi) = \ln \text{cap } S_\xi^* = -\infty$ для любого $\xi \in E$. В самом деле, фиксируем число $\alpha \geq 1$ и последовательность $z_k \in A_\alpha(\xi)$, сходящуюся к точке ξ . Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \psi(z_k) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \text{cap } S_{z_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \text{cap} \left(\bigcup_{m \geq k} \overline{S_{z_m}} \right) \\ &= \ln \text{cap} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq k} \overline{S_{z_m}} \right) \leq \ln \text{cap } S_\xi^* = -\infty, \end{aligned}$$

что и доказывает требуемое соотношение $\psi(\xi) = -\infty$, $\xi \in E$. Отсюда следует, что $\psi(z) = \ln \operatorname{cap} S_z \equiv -\infty$ в D , т. е. слои S_z являются полярными для всех $z \in D$. Тогда по теореме Садуллаева (см. [10]) множество S является плюриполярным в $D \times \mathbb{C}$.

Имеет место также следующая более простая

ЛЕММА 7. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область со спрямляемой границей и S – псевдогомолотное ограниченное подмножество области $D \times \mathbb{C}$. Если для каждой точки ξ из множества $E \subset \partial D$ с положительной мерой Лебега, $m_1(E) > 0$, некасательные граничные слои S_ξ^* состоят из конечного числа точек, то S – аналитическое множество.

§5. Ряды Якоби–Хартогса

Рассмотрим снова функцию $f(z, w)$, голоморфную в области $D \times V$, $D \subset \mathbb{C}^n$.

Пусть $g(w)$ – рациональная функция по w такая, что $g(0) = 0$. Тогда при малых ρ существует связная компонента Λ_ρ множества $\{w: |g(w)| < \rho\}$ такая, что $0 \in \Lambda_\rho \subset V$. Поскольку $f(z, w)$ голоморфна в $(D \times \Lambda_\rho)$, то при каждом фиксированном $z \in D$, как показано в работе [6], ее можно разлагать в ряд Якоби–Хартогса:

$$f(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z, w) g^k(w), \quad (12)$$

где коэффициенты ряда определяются по формуле

$$c_k(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Lambda_\rho} f(z, \eta) \frac{g(\eta) - g(w)}{g^{k+1}(\eta)(\eta - w)} d\eta.$$

Отсюда следует, что $c_k(z, w)$ – рациональные функции по w с коэффициентами, голоморфными в D .

При фиксированном $z \in D$ ряд (12) сходится в лемнискате $|g(w)| < R^{(g)}(z)$, где $R^{(g)}(z)$ определяется по формуле

$$R^{(g)}(z) = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|c_k(z, w)\|_K}}.$$

Здесь $K \subset \mathbb{C}_w$ – произвольный неполярный компакт, не содержащий полюсов g , и предел в правой части равенства не зависит от выбора такого компакта. Заметим, что величина $R^{(g)}(z)$ является максимальным радиусом, для которого функция f голоморфна внутри лемнискаты $|g(w)| < R^{(g)}(z)$.

В работе [6] также доказана следующая

ЛЕММА 8. Ряд Якоби–Хартогса (12) сходится равномерно внутри открытого множества

$$G_g = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C}: |g(w)| < R_*^{(g)}(z), z \in D\},$$

где $R_*^{(g)}(z) = \lim_{\zeta \rightarrow z} R^{(g)}(\zeta)$ – регуляризация снизу. Функция $-\log R_*^{(g)}(z)$ плюрисубгармонична в D , $R_*^{(g)}(z) \leq R^{(g)}(z)$, $z \in D$, и множество $\{z \in D: R_*^{(g)}(z) < R^{(g)}(z)\}$ плюриполярно.

Обозначим через $\mathfrak{R} = \{g(w)\}$ счетное семейство всех рациональных функций с коэффициентами из множества $Q + iQ$ (где Q – множество рациональных чисел) такое, что каждая функция $\mathfrak{R} = \{g(w)\}$ имеет нуль только в точке $w = 0$. Для изучения областей сходимости соответствующих рядов Якоби–Хартогса будет полезна следующая лемма об аппроксимации плоских множеств рациональными лемнискатами.

ЛЕММА 9 [6]. Пусть Σ – замкнутое полярное множество из $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и K – компакт в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$. Тогда существует рациональная функция $g \in \mathfrak{R}$ такая, что лемниската $\{w: |g(w)| < 1\}$ является связной, принадлежит $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ и содержит K .

§6. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы проведем в несколько этапов.

1. Пусть $f(z, w)$ удовлетворяет условиям теоремы, т.е. $f(z, w) \in \mathcal{O}(D \times V) \cap C(\overline{D} \times V)$, и при каждом фиксированном $\xi \in E \subset M$ функция $f(\xi, w)$ переменного w продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением полярного (конечного) множества особенностей. Следовательно, при каждом фиксированном $\xi \in E$ функция $f(\xi, w)$ принадлежит классу R^0 .

Пусть $\Delta_{c,t} = \{\Phi(c, t, \zeta): \zeta \in U, |c| < \theta, |t| < \theta\}$ – семейство дисков, подклеенных к M по образу дуги $\partial U^+ = \{\zeta = e^{i\tau}: \tau \in (0, \pi)\}$ и удовлетворяющих условиям леммы 2. Поскольку для любого фиксированного $\zeta \in \Phi^{-1}(\partial \mathbf{A}_{c,t} \cap E)$, $(c, t) \in P$, функция $f(\Phi(c, t, \zeta), w)$ принадлежит классу R^0 , то по лемме 5 $f(\Phi(c, t, \lambda), w)$ принадлежит классу R^0 для любых $\lambda \in W_{c,t}$ (определения P , $W_{c,t}$, $\mathbf{A}_{c,t}$ см. в §1). Следовательно, для любого фиксированного $z \in X = (\bigcup_{(c,t) \in P} \mathbf{A}_{c,t}) \subset D$ функция $f(z, w)$ принадлежит классу R^0 . Так как множество X имеет положительную меру в $\mathbb{C}^n$ (см. лемму 2), то оно неплюриполярно в D и функция $f(z, w)$ принадлежит классу R^0 для любого фиксированного $z \in D$ (см. [10]). Следовательно, $f(z, w)$ однозначна по w для любого фиксированного $z \in D$.

2. Разложим функцию $f(z, w)$ в ряд Якоби–Хартогса по степеням рациональной функции $g(w) \in \mathfrak{R}$:

$$f(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z, w) g^k(w), \quad (13)$$

где $c_k(z, w) \in \mathcal{O}(D \times V) \cap C(\overline{D} \times V)$. Это можно сделать, так как $f(z, w)$ голоморфна в $D \times V$, непрерывна на $\overline{D} \times V$ и при достаточно малом $\rho > 0$ лемниската $\{w: |g(w)| < \rho\}$ принадлежит V . По лемме 8 ряд сходится равномерно внутри множества $G_g = \{(z, w): |g(w)| < R_*^{(g)}(z), z \in D\}$ и, следовательно, его сумма в нем голоморфна. Согласно определению семейства рациональных функций $\mathfrak{R}$ (см. §5) все лемнискаты $\{w: |g(w)| < R_*^{(g)}(z)\}$ связные и содержат некоторую окрестность точки $w = 0$. Поэтому множество G_g является областью, содержащей $D \times \{0\}$.

Сумма построенного ряда совпадает с $f(z, w)$ в окрестности $D \times \{0\}$ и, таким образом, является голоморфным продолжением $f(z, w)$ в G_g .

3. Пусть g_1 и g_2 – произвольные рациональные функции из семейства $\mathfrak{R}$, и пусть $f_1(z, w)$ и $f_2(z, w)$ – аналитические продолжения функции $f(z, w)$ в области G_{g_1} и G_{g_2} соответственно. Поскольку для любого $z^0 \in D$ функция $f(z^0, w)$ однозначна по w и $f_1(z^0, w) = f_2(z^0, w) = f(z^0, w)$ для любого $(z^0, w) \in G_{g_1} \cap G_{g_2}$, то $f(z^0, w)$ голоморфна в $(G_{g_1} \cup G_{g_2}) \cap \{z = z^0\}$. Значит, $f(z, w)$ однозначно продолжается в $G_{g_1} \cup G_{g_2}$, и отсюда следует, что функция $f(z, w)$ однозначно продолжается в область $G = \cup G_g$, где объединение берется по всему семейству рациональных функций $\mathfrak{R}$.

4. Поскольку при каждом фиксированном $z^0 \in D$ функция $f(z^0, w)$ принадлежит классу R^0 , то из этого следует, что аналитическое продолжение функции $f(z, w)$ (в $D \times \mathbb{C}$) однозначно. Пусть $\tilde{G} \subset D \times \mathbb{C}$ – естественная область существования функции $f(z, w)$ относительно $D \times \mathbb{C}$. Значит, $\tilde{G}$ однолистка и не расширяема голоморфно в каждой точке $(z^0, w^0) \in S = (D \times \mathbb{C}) \setminus \tilde{G}$. Отсюда получаем, что для любого шара $B \subset D$ дополнение $(B \times \mathbb{C}) \setminus S$ псевдовыпукло, т. е. S – псевдовогнутое множество.

5. Фиксируем рациональную функцию $g \in \mathfrak{R}$. Поскольку функция $-\log R_*^{(g)}(z)$ (соответствующая разложению (13) функции f) плюрисубгармоническая, то ее сужение на аналитическое множество $\mathbf{A}_{c,t}$, $(c, t) \in P$, является субгармонической функцией, и согласно лемме 4 (напомним, что леммы 3 и 4 верны и для областей со спрямляемой границей) линейная мера дополнения множества

$$F_{c,t}^{(g)} = \left\{ \zeta \in \partial W_{c,t} : \text{существует касательная прямая к } \partial W_{c,t} \text{ в точке } \zeta \right. \\ \left. \text{и } R_*^{(g)}(\Phi(c, t, \zeta)) \geq \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|c_k(\Phi(c, t, \zeta), w)\|_K}} \right\}$$

равна нулю. Положим $F_{c,t} = \bigcap_{g \in \mathfrak{R}} F_{c,t}^{(g)}$. Тогда линейная мера дополнения $\partial W_{c,t} \setminus F_{c,t}$ также равна нулю и, следовательно, для любых $\zeta \in F_{c,t}$ и $g \in \mathfrak{R}$ имеет место неравенство

$$R_*^{(g)}(\Phi(c, t, \zeta)) \geq \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|c_k(\Phi(c, t, \zeta), w)\|_K}}.$$

Теперь, используя лемму 9, мы покажем, что для любого $\zeta \in \Phi^{-1}(\partial \mathbf{A}_{c,t} \cap E) \cap F_{c,t}$ множество особых точек функции $f(\Phi(c, t, \lambda), w)$ переменного w совпадает с граничным слоем в точке $\Phi(c, t, \zeta)$ множества $S \cap (\mathbf{A}_{c,t} \times \mathbb{C})$, определяемого как на плоском множестве. Действительно, так как по условиям теоремы особое множество Λ функции $f(\Phi(c, t, \zeta), w)$ состоит из полярного множества (конечного числа) точек, то согласно лемме 9 для любого компакта $K \subset \mathbb{C} \setminus \Lambda$ существует рациональная функция $g \in \mathfrak{R}$ такая, что лемниската $\{|g(w)| < 1\}$ содержит K . Следовательно, лемниската $\{|g(w)| < R_*^{(g)}(\Phi(c, t, \zeta))\}$, а значит, и $\{|g(w)| < R_*^{(g)}(\Phi(c, t, \zeta))\}$ содержат K (так как $\zeta \in F_{c,t}$ и $R_*^{(g)}(\Phi(c, t, \zeta)) \geq R_*^{(g)}(\Phi(c, t, \zeta))$).

Отсюда получим, что граничный слой для множества $S \cap (\mathbf{A}_{c,t} \times \mathbb{C})$ совпадает со следующим множеством:

$$\begin{aligned} & \bigcup_{\alpha > 1} \overline{\{(\Phi(c, t, A_\alpha(\zeta)) \times \mathbb{C})\} \cap S \cap \{\xi = \Phi(c, t, \zeta)\}} \\ &= \bigcap_{g \in \mathbb{R}} \bigcup_{\alpha > 1} \overline{\{(\Phi(c, t, A_\alpha(\zeta)) \times \mathbb{C})\} \cap \{(D \times \mathbb{C}) \setminus G_g\} \cap \{\xi = \Phi(c, t, \zeta)\}} \\ &= \bigcap_{g \in \mathbb{R}} \{(\Phi(c, t, \zeta), w) : |g(w)| \geq R_*^{(g)}(\Phi(c, t, \zeta))\} = \Lambda, \end{aligned}$$

где $A_\alpha(\zeta) \subset W_{c,t}$ – конус (угол) с вершиной в точке ζ , $\alpha > 1$ (см. §2).

Пусть Ω – образ области $\tilde{G} = (D \times \mathbb{C}) \setminus S$ при отображении $(z, w) \rightarrow (z, \frac{1}{w})$. Множество $(D \times \mathbb{C}) \setminus \Omega = L$ также является псевдовогнутым. Поскольку $\tilde{S}$ не пересекает множество $\overline{D} \times \{0\}$, то L ограничено и пересечение $L \cap (\mathbf{A}_{c,t} \times \mathbb{C})$ псевдовогнуто относительно двумерной области $\mathbf{A}_{c,t} \times \mathbb{C}$. Кроме того, для любого $\Phi(c, t, \zeta)$, $\zeta \in \Phi^{-1}(\partial \mathbf{A}_{c,t} \cap E) \cap F_{c,t}$, граничный слой $L_{\Phi(c, t, \zeta)}^*$ состоит из полярного множества (конечного числа) точек, т. е. множество $L \cap (\mathbf{A}_{c,t} \times \mathbb{C})$ удовлетворяет всем условиям леммы 6 (леммы 7). Поэтому $\Sigma \cap (\mathbf{A}_{c,t} \times \mathbb{C})$ – плюриполярное (аналитическое) подмножество $\mathbf{A}_{c,t} \times \mathbb{C}$. Следовательно, для любого фиксированного $z^0 \in X = (\bigcup_{(c,t) \in P} \mathbf{A}_{c,t}) \subset D$ сечение $L \cap \{z = z^0\}$ состоит из полярного множества (конечного числа) точек. Согласно теоремам Ока и Садуллаева [14], [9], [10] получаем, что L – плюриполярное (аналитическое) подмножество в $D \times \mathbb{C}$. Отсюда легко вытекает, что S плюриполярно (аналитично). Теорема доказана.

Список литературы

1. *Hartogs F.* Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiben // Math. Ann. 1906. V. 62. P. 1–88.
2. *Шабам Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985.
3. *Rothstein W.* Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Funktionen // Math. Z. 1950. V. 53. P. 84–95.
4. *Казарян М. В.* О голоморфном продолжении функций со специальными особенностями в $\mathbb{C}^n$ // ДАН АрмССР. 1983. Т. 76. № 1. С. 13–17.
5. *Казарян М. В.* Мероморфное продолжения по группам переменных // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 3. С. 384–397.
6. *Садуллаев А. С., Чирка Е. М.* О продолжении функций с полярными особенностями // Матем. сб. 1987. Т. 132 (174). № 3. С. 383–390.
7. *Туйчиев Т. Т.* Продолжение функций вдоль фиксированного направления // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29. № 3. С. 142–147.
8. *Садуллаев А. С.* Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях // УМН. 1981. Т. 36. № 4. С. 53–105.
9. *Садуллаев А. С.* Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества // Матем. сб. 1982. Т. 119 (161). № 3. С. 96–118.
10. *Садуллаев А. С.* Критерий быстрой рациональной аппроксимации в $\mathbb{C}^n$ // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 2(10). С. 568–583.
11. *Bedford E., Taylor B. A.* A new capacity for plurisubharmonic functions // Acta. Math. 1982. V. 149. P. 1–40.
12. *Гончар А. А.* Локальное условие однозначности аналитических функций нескольких переменных // Матем. сб. 1974. Т. 93. № 2. С. 296–313.

13. Хенкин Г. М., Чирка Е. М. Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Итоги науки и техн. Современные проблемы математики. Т. 4. М.: ВИНТИ АН СССР, 1975. С. 13–142.
14. Oka K. Notes sur les familles des fonctions analytiques multiformes // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. 1934. V. 4. P. 93–98.
15. Słodkowski Z. On subharmonicity of the spectrum // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81. P. 143–249.
16. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
17. Привалов И. И., Кузнецов П. И. Граничные задачи и различные классы гармонических и субгармонических функций, определенных в произвольных областях // Матем. сб. 1939. Т. 6 (48). № 3. С. 345–375.
18. Хейман У., Кеннеди П. И. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.
19. Пинчук С. И. Граничная теорема единственности для голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 2. С. 205–212.
20. Садуллаев А. С. Граничная теорема единственности в $\mathbb{C}^n$ // Матем. сб. 1976. Т. 101 (143). № 4. С. 568–583.
21. Хурумов Ю. В. К теореме Линделёфа в $\mathbb{C}^n$ // ДАН СССР. 1983. Т. 273. № 6. С. 1325–1328.
22. Słodkowski Z. Analytic Set-Valued Functions and Spectra // Math. Ann. 1981. V. 256. P. 363–386.
23. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными // УМН. 1979. Т. 34. № 1 (205). С. 17–65.
24. Хурумов Ю. В. Существование предельных значений и граничная теорема единственности для функций, мероморфных в клине в $\mathbb{C}^n$. Препринт № 20М. Красноярск: Ин-т физики им. Л. В. Киренского, 1982.