Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Чанга, О суммах мультипликативных функций по числам, все простые делители которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 2, 205–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/im638>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:30:48

УДК 511

М. Е. Чанга

О суммах мультипликативных функций по числам, все простые делители которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям

Методом комплексного интегрирования получены асимптотические формулы для сумм мультипликативных функций по числам, все простые делители которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям. Главный член таких формул, вообще говоря, имеет вид суммы с растущим числом слагаемых, однако при определенных соотношениях параметров задачи обращается в конечную сумму.

Библиография: 8 наименований.

§ 1. Введение. Формулировка основных результатов

В начале прошлого века Э. Ландау [1] получил асимптотическую формулу для количества натуральных чисел, не превосходящих x , все простые делители которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям. В настоящей работе исследуется поведение сумм мультипликативных функций по таким числам, причем используется метод комплексного интегрирования в той форме, в которой он был применен автором [2] к решению аналогичной задачи с другими условиями на простые делители. Исследование подобной задачи иными методами проведено в работе [3].

Пусть фиксировано натуральное число k , большее двух. Для каждого натурального l , не превосходящего k и взаимно простого с k , определим множество M_l , состоящее из натуральных чисел, все простые делители которых сравнимы с l по модулю k . Определим при $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ функцию

$$F_l(s) = \sum_{n \in M_l} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \equiv l \pmod{k}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Эта функция аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ и не имеет на ней нулей. Действительно,

$$|F_l(s)|^{-1} = \left| \prod_{p \equiv l \pmod{k}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right| \leq \prod_{p \equiv l \pmod{k}} \left(1 + \frac{1}{p^\sigma}\right) \leq F_l(\sigma),$$

так что модуль $F_l(s)$ отличен от нуля при $\sigma > 1$.

Прежде чем сформулировать основные результаты, приведем список обозначений, используемых в настоящей статье: $\varphi(k)$ – функция Эйлера (количество натуральных чисел, не превосходящих k и взаимно простых с k); $\chi(n)$ – характер

Дирихле по модулю k ; $\mu(n)$ – функция Мёбиуса (мультипликативная функция, равная -1 на простых числах и равная 0 на числах вида p^r , $r \geq 2$); $\tau_r(n)$ при натуральном r – число решений уравнения $x_1 \dots x_r = n$ в натуральных $x_1, \dots, x_r$; $c, c_1, c_2, \dots$ – положительные постоянные, в различных случаях, вообще говоря, разные; $\log \zeta(s)$, $\log F_l(s)$, $\zeta^{\pm c}(s)$, $(s-1)^{\pm c}$, $s^{\pm c}$ – те однозначные ветви соответствующих функций, которые положительны при $s > 1$; при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\log L(s, \chi) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi^m(p)}{mp^{ms}}.$$

Пусть заданы m различных натуральных чисел $l_1, \dots, l_m$, не превосходящих k и взаимно простых с k . Пусть M – множество натуральных чисел, все простые делители которых сравнимы с одним из чисел l_i по модулю k .

ТЕОРЕМА 1. Пусть r – натуральное число,

$$H(s) = \frac{1}{s} ((s-1)\zeta(s))^{\frac{rm}{\varphi(k)}} e^{rG_{l_1}(s) + \dots + rG_{l_m}(s)},$$

A_n обозначает n -й коэффициент Тейлора функции $H(s)$ в точке $s = 1$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \tau_r(n) = x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} A_n \frac{(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)} - n - 1}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)} - n)} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Кроме того, при любом фиксированном целом неотрицательном N

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \tau_r(n) = x \sum_{0 \leq n \leq N} A_n \frac{(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)} - n - 1}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)} - n)} + O(x \log^{\frac{rm}{\varphi(k)} - N - 2} x).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$H(s) = \frac{1}{s} ((s-1)\zeta(s))^{-\frac{m}{\varphi(k)}} e^{-G_{l_1}(s) - \dots - G_{l_m}(s)},$$

A_n обозначает n -й коэффициент Тейлора функции $H(s)$ в точке $s = 1$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \mu(n) = x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} A_n \frac{(\log x)^{-\frac{m}{\varphi(k)} - n - 1}}{\Gamma(-\frac{m}{\varphi(k)} - n)} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Кроме того, при любом фиксированном целом неотрицательном N

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \mu(n) = x \sum_{0 \leq n \leq N} A_n \frac{(\log x)^{-\frac{m}{\varphi(k)} - n - 1}}{\Gamma(-\frac{m}{\varphi(k)} - n)} + O(x \log^{-\frac{m}{\varphi(k)} - N - 2} x).$$

В формулировках обеих теорем использована функция $G_l(s)$, которая определяется равенством

$$G_l(s) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(l^*) \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p) - \chi^m(p)}{mp^{ms}} + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{p|k} \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(l^*) \log L(s, \chi), \quad (1)$$

где $ll^* \equiv 1 \pmod{k}$.

Заметим, что коэффициенты A_0 в обеих теоремах положительны. Действительно, так как $\zeta(s)$ имеет при $s = 1$ полюс первого порядка с вычетом 1, получим

$$A_0 = e^{\alpha G_{l_1}(1) + \dots + \alpha G_{l_m}(1)} > 0,$$

где $\alpha = r$ в теореме 1 и $\alpha = -1$ в теореме 2.

§2. Вспомогательные утверждения

Сформулируем известные утверждения в виде лемм A–D и докажем необходимые в дальнейшем леммы 1 и 2.

ЛЕММА А. При $T \geq 10$ и любом достаточно малом c в области $\sigma \geq 1 - c/\log T$, $|t| \leq T$ нет нулей $\zeta(s)$ и $L(s, \chi)$ для всех $\varphi(k) - 1$ неглавных характеров Дирихле по модулю k . На границе указанной области при достаточно малом c справедливы оценки

$$\log^{-1} T \ll |\zeta(s)| \ll \log T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [4, с. 69, 139, 144]. Второе утверждение при $|t| \geq t_0$ доказано в [5, с. 54, 65], его справедливость при $|t| < t_0$ очевидна.

ЛЕММА В. Пусть функция $f(s)$ аналитична в круге $|s - s_0| \leq R$, причем $\operatorname{Re} f(s) \leq M$ на окружности $|s - s_0| = R$. Тогда в круге $|s - s_0| \leq r < R$

$$|f(s) - f(s_0)| \leq 2(M - \operatorname{Re} f(s_0)) \frac{r}{R - r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [4, с. 45].

ЛЕММА С. Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

причем этот ряд абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, и пусть при некотором $b > 1$

$$B(b) = \int_1^{\infty} \frac{|A(\xi)|}{\xi^{b+1}} d\xi, \quad A(\xi) = \sum_{n \leq \xi} a(n).$$

Тогда при $x \geq 1$, $T \geq 2$ имеет место формула

$$\int_1^x A(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds + R(x),$$

где

$$R(x) \ll B(b) \frac{x^{b+1}}{T} + 2^b \left(\frac{x \log x}{T} + \log T \right) \max_{\frac{x}{2} \leq \xi \leq \frac{3x}{2}} |A(\xi)|,$$

причем постоянная в знаке Виноградова абсолютная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [6].

ЛЕММА D. Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

причем ряд абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, пусть $|a(n)| \leq A(n)$, где $A(n)$ – положительная монотонно возрастающая функция, и пусть при $\sigma \rightarrow 1 + 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \ll (\sigma - 1)^{-\alpha}$$

с некоторым $\alpha > 0$. Тогда при любых $b_0 \geq b > 1$, $x \geq 2$, $T \geq 2$ имеет место формула

$$\sum_{n \leq x} a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + R(x),$$

где

$$R(x) \ll \frac{x^b}{T(b-1)^\alpha} + A(2x) \left(\frac{x \log x}{T} + \log T \right),$$

причем постоянная в знаке Виноградова зависит только от b_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для случая полупелого x приведено в [7, с. 334]. В общем случае при почленном интегрировании ряда Дирихле несколько членов с номерами n , близкими к x , следует оценить тривиально:

$$\sum_{|n-x| \leq 1} a(n) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s} \right) \ll A(2x) \int_{-T}^T \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} \ll A(2x) \log T.$$

ЛЕММА 1. При $T \geq 10$ в области $\sigma \geq 1 - c_1/\log T$, $|t| \leq T$, разрезанной вдоль горизонтального отрезка, имеющего правым концом точку $s = 1$, справедливо равенство

$$F_l(s) = \varphi^{(k)} \sqrt{\zeta^*(s)} e^{G_l(s)},$$

где функция $G_l(s)$ аналитична в свободной от нулей $\zeta(s)$ области $\sigma \geq 1 - c_1/\log T$, $|t| \leq T$, а на границе этой области имеют место оценки

$$\log^{-c_2} T \ll |F_l(s)| \ll \log^{c_2} T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме А при достаточно малом c_1 область $\sigma \geq 1 - 3c_1/\log T$, $|t| \leq 3T$ свободна от нулей всех $\varphi(k) - 1$ L -функций Дирихле, отвечающих неглавным характерам Дирихле по модулю k , а также от нулей дзета-функции Римана. Таким образом, функции $\log L(s, \chi)$ аналитичны в указанной области.

Оценим модуль $\log L(s, \chi)$ при $\sigma \geq 1 + c_1/\log T$. Имеем

$$|\log L(s, \chi)| \leq \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\sigma}} = \log \zeta(\sigma) \ll \log \log T, \quad (2)$$

так как

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma}} = \frac{\sigma}{\sigma - 1}.$$

В области $\sigma > 0$ функция $L(s, \chi)$ для неглавного характера задается равенством

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leq T} \frac{\chi(n)}{n^s} + s \int_T^{\infty} \sum_{T < n \leq x} \chi(n) \frac{dx}{x^{s+1}}. \quad (3)$$

В самом деле, совершая преобразование Абеля, имеем

$$\sum_{T < n \leq M} \frac{\chi(n)}{n^s} = s \int_T^M \sum_{T < n \leq x} \chi(n) \frac{dx}{x^{s+1}} + \frac{1}{M^s} \sum_{T < n \leq M} \chi(n).$$

Поскольку сумма характеров по подряд идущим натуральным числам не превосходит $2\varphi(k)$, то в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$, переходя к пределу при $M \rightarrow \infty$, имеем

$$\sum_{n > T} \frac{\chi(n)}{n^s} = s \int_T^{\infty} \sum_{T < n \leq x} \chi(n) \frac{dx}{x^{s+1}}.$$

При этом, в силу ограниченности суммы характеров, последний интеграл есть аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ функция. Согласно принципу аналитического продолжения отсюда вытекает соотношение (3).

Оценим модуль $L(s, \chi)$ в области $\sigma \geq 1 - 2c_1/\log T$, $|t| \leq 2T$. Пользуясь соотношением (3), находим при $\sigma \leq 2$

$$\begin{aligned} |L(s, \chi)| &\leq \sum_{n \leq T} n^{-1 + \frac{2c_1}{\log T}} + 2|s|\varphi(k) \int_T^{\infty} x^{-2 + \frac{2c_1}{\log T}} dx \\ &\ll T^{\frac{2c_1}{\log T}} \sum_{n \leq T} \frac{1}{n} + T \cdot T^{-1 + \frac{2c_1}{\log T}} \ll \log T. \end{aligned}$$

При $\sigma > 2$ эта оценка заведомо справедлива, так как $L(s, \chi)$ ограничена в этой полуплоскости. Итак, в области $\sigma \geq 1 - 2c_1/\log T$, $|t| \leq 2T$ справедлива оценка

$$\operatorname{Re} \log L(s, \chi) = \log |L(s, \chi)| \leq c \log \log T. \quad (4)$$

Применим лемму В к функции $\log L(s, \chi)$ и кругам радиусов $R = 3c_1/\log T$ и $r = 2c_1/\log T$ с центром в точке $s_0 = 1 + c_1/\log T + it_0$, причем $|t_0| \leq T$. Согласно оценке (4) в качестве M можно взять величину $c \log \log T$. Таким образом, в круге $|s - s_0| \leq r$ имеем

$$|\log L(s, \chi) - \log L(s_0, \chi)| \ll \log \log T,$$

так как

$$|\operatorname{Re} \log L(s_0, \chi)| \leq |\log L(s_0, \chi)| \ll \log \log T$$

в силу оценки (2). Итак, вновь прибегая к оценке (2), в круге $|s - s_0| \leq r$ получаем

$$|\log L(s, \chi)| \leq |\log L(s, \chi) - \log L(s_0, \chi)| + |\log L(s_0, \chi)| \ll \log \log T.$$

В силу произвольности выбора t_0 эта оценка будет справедлива в прямоугольнике $1 - c_1/\log T \leq \sigma \leq 1 + 3c_1/\log T$, $|t| \leq T$. Поскольку при $\sigma \geq 1 + 3c_1/\log T$ полученная оценка непосредственно вытекает из оценки (2), имеем

$$\log L(s, \chi) \ll \log \log T \quad (5)$$

при $\sigma \geq 1 - c_1/\log T$, $|t| \leq T$.

Пользуясь определением функции $F_l(s)$, в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ имеем соотношение

$$\begin{aligned} \log F_l(s) &= - \sum_{p \equiv l \pmod{k}} \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \\ &= - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \pmod{k}} \chi(l^*) \sum_p \chi(p) \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right), \end{aligned}$$

где $l^* \equiv 1 \pmod{k}$. Слагаемое, отвечающее главному характеру, имеет вид

$$- \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{p \nmid k} \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) = \frac{1}{\varphi(k)} \log \zeta(s) + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{p|k} \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right).$$

В каждом из слагаемых, отвечающих неглавным характерам, можно преобразовать внутреннюю сумму следующим образом:

$$\begin{aligned} - \sum_p \chi(p) \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) &= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(p)}{mp^{ms}} \\ &= \log L(s, \chi) + \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p) - \chi^m(p)}{mp^{ms}}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$\log F_l(s) = \frac{1}{\varphi(k)} \log \zeta(s) + G_l(s), \quad (6)$$

где функция $G_l(s)$ определена равенством (1).

В полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq \frac{3}{4}$ второе слагаемое в соотношении (1) есть аналитическая и ограниченная функция. То же самое можно сказать и о первом слагаемом, поскольку соответствующий повторный ряд сходится абсолютно и равномерно при $\sigma \geq \frac{2}{3}$. Таким образом, при достаточно малом c_1 в области $\sigma \geq 1 - c_1/\log T$, $|t| \leq T$ функция $G_l(s)$ аналитична. В то же время функция $\log \zeta(s)$ не имеет в этой области особенностей, за исключением точки ветвления при $s = 1$. В силу принципа аналитического продолжения потенцирование соотношения (6) дает искомое представление $F_l(s)$ в указанной в условии области.

Из всего сказанного выше и соотношения (5) следует, что в области $\sigma \geq 1 - c_1/\log T$, $|t| \leq T$ имеет место оценка

$$G_l(s) \ll \log \log T.$$

Согласно лемме А на границе этой области справедливы следующие неравенства:

$$\log^{-1} T \ll |\zeta(s)| \ll \log T.$$

Комбинируя эти оценки, получаем на границе области $\sigma \geq 1 - c_1/\log T$, $|t| \leq T$ требуемые неравенства для $|F_l(s)|$. Этим доказательство завершается.

ЛЕММА 2. Пусть функция $H(s)$ аналитична в круге $|s| < c$ и A_n обозначает n -й коэффициент ее разложения в ряд Тейлора в этом круге. Пусть контур Γ начинается в точке $-(\log x)^{-1/2} - i0$, обходит начало координат против часовой стрелки и заканчивается в точке $-(\log x)^{-1/2} + i0$. Пусть

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} x^s s^{-\alpha/\varphi(k)} H(s) ds,$$

где α – фиксированное целое число. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$I(x) = \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} A_n \frac{(\log x)^{\frac{\alpha}{\varphi(k)} - n - 1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{\varphi(k)} - n)} + O(e^{-c_3 \sqrt{\log x}}).$$

Кроме того, при любом фиксированном целом неотрицательном N

$$\sum_{N \leq n \leq \sqrt{\log x}} \left| \frac{A_n}{\Gamma(\frac{\alpha}{\varphi(k)} - n)} \right| (\log x)^{\frac{\alpha}{\varphi(k)} - n - 1} \ll (\log x)^{\frac{\alpha}{\varphi(k)} - N - 1}.$$

Наконец, при $n \asymp \sqrt{\log x}$ имеет место оценка

$$A_n \frac{(\log x)^{\frac{\alpha}{\varphi(k)} - n - 1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{\varphi(k)} - n)} \ll e^{-c_4 \sqrt{\log x} \log \log x}.$$

Доказательство с точностью до переобозначений приведено в работе [2], причем первые два утверждения вынесены в условие, а третье сформулировано в ходе доказательства (формула (7)).

§ 3. Доказательство теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По определению функции $F_l(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \in M}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = F_{l_1}(s) \dots F_{l_m}(s).$$

Возводя обе части этого равенства в степень r , находим, что производящая функция имеет вид

$$F(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \in M}}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{n^s} = F_{l_1}^r(s) \dots F_{l_m}^r(s). \quad (7)$$

При перемножении рядов Дирихле мы пользовались тем, что множество M замкнуто относительно умножения, и тем, что все делители числа из множества M также принадлежат множеству M .

Применим к функции $F(s)$ лемму С. Используя неравенство Марджанишвили [7, с. 357], находим

$$\Omega(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \tau_r(n) \leq \sum_{n \leq x} \tau_r(n) \ll x \log^{r-1} x.$$

Отсюда, интегрируя по частям, при $b = 1 + 1/\log x$ имеем

$$\int_1^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x^{b+1}} dx \ll \int_1^{\infty} \frac{\log^{r-1} x}{x^b} dx \ll (b-1)^{-r} = \log^r x.$$

Применение леммы С при $T = e^{c_1 \sqrt{\log x}}$, где c_1 – постоянная из леммы 1, приводит к равенству

$$\int_1^x \Omega(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds + O(x^2 e^{-c_2 \sqrt{\log x}}). \quad (8)$$

Выберем параметр $\beta = 1 - c_1/\log T = 1 - (\log x)^{-1/2}$. Рассмотрим контур C , состоящий из отрезков, последовательно соединяющих точки $b-iT$, $\beta-iT$ и $\beta-i0$, петли Γ , обходящей точку $s = 1$ против часовой стрелки, и отрезков, последовательно соединяющих точки $\beta+i0$, $\beta+iT$ и $b+iT$. Производящая функция $F(s)$, заданная соотношением (7), согласно лемме 1 аналитически продолжается левее единичной прямой, причем в области, ограниченной контуром C и вертикальным отрезком с концами в точках $b \pm iT$, функция $F(s)$ не имеет особенностей. В силу интегральной теоремы Коши соответствующий интеграл по границе этой области равен нулю, откуда находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds + R_1(x) + R_2(x), \end{aligned}$$

где через $R_1(x)$ и $R_2(x)$ обозначены интегралы по горизонтальным и вертикальным отрезкам контура C соответственно. Согласно лемме 1 на этих отрезках $F(s) \ll \log^{c_3} T$, поэтому

$$\begin{aligned} R_1(x) &\ll \int_{\beta}^b \frac{|F(s)|x^{\sigma+1}}{T^2} d\sigma \ll \frac{x^{1+b}}{T^2} \log^{c_3} T \ll x^2 e^{-c_4 \sqrt{\log x}}, \\ R_2(x) &\ll \int_0^T \frac{|F(s)|x^{\beta+1}}{(1+t)^2} dt \ll x^{\beta+1} \log^{c_3} T \ll x^2 e^{-c_4 \sqrt{\log x}}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds + O(x^2 e^{-c_4 \sqrt{\log x}}). \quad (9)$$

Используя выражение (7) для производящей функции $F(s)$ и явный вид $F_l(s)$ из леммы 1, получим

$$\frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s} (\zeta(s))^{\frac{rm}{\varphi(k)}} e^{rG_{l_1}(s) + \dots + rG_{l_m}(s)} = (s-1)^{-\frac{rm}{\varphi(k)}} H(s),$$

где $H(s)$ – функция из условия теоремы. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds = x^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} x^s s^{-\frac{rm}{\varphi(k)}} \frac{H(s+1)}{s+2} ds, \quad (10)$$

где Γ' – контур, получаемый из Γ параллельным переносом на единицу влево вдоль вещественной оси, что соответствует замене s на $s+1$.

Последний интеграл асимптотически вычисляется с помощью леммы 2. Находим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} x^s s^{-\frac{rm}{\varphi(k)}} \frac{H(s+1)}{s+2} ds = \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} B_n \frac{(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)} - n - 1}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)} - n)} + O(e^{-c_4 \sqrt{\log x}}),$$

где B_n обозначает n -й коэффициент Тейлора функции $H(s+1)/(s+2)$ в точке $s=0$. Подставляя полученное равенство в соотношение (10), а затем в формулы (9) и (8), получим следующую асимптотическую формулу:

$$\int_1^x \Omega(u) du = x^2 \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} B_n \frac{(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)} - n - 1}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)} - n)} + O(x^2 e^{-c_4 \sqrt{\log x}}). \quad (11)$$

Заметим, что с помощью формулы Лейбница можно выразить коэффициенты A_n через B_n . Имеем

$$\begin{aligned} (H(s))^{(n)}|_1 &= (H(s+1))^{(n)}|_0 = \left(\frac{H(s+1)}{s+2} (s+2) \right)^{(n)} \Big|_0 \\ &= 2 \left(\frac{H(s+1)}{s+2} \right)^{(n)} \Big|_0 + n \left(\frac{H(s+1)}{s+2} \right)^{(n-1)} \Big|_0, \end{aligned}$$

откуда, деля на $n!$, находим соотношение

$$A_n = 2B_n + B_{n-1} \quad (12)$$

при любом n , если положить $B_{-1} = 0$.

Функция $\Omega(x)$ монотонно возрастает, поэтому ее асимптотику можно получить, применяя метод асимптотического дифференцирования. При $0 < h < x/2$ имеем

$$\frac{1}{h} \int_{x-h}^x \Omega(u) du \leq \Omega(x) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \Omega(u) du. \quad (13)$$

Преобразуем эти интегралы, используя (11). Находим

$$\begin{aligned} & \pm \frac{1}{h} \int_1^{x \pm h} \Omega(u) du \mp \frac{1}{h} \int_1^x \Omega(u) du \\ &= \pm \frac{1}{h} (x \pm h)^2 \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log(x \pm h)}} B_n \frac{(\log(x \pm h))^{\frac{rm}{\varphi(k)} - n - 1}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)} - n)} \\ & \mp \frac{1}{h} x^2 \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} B_n \frac{(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)} - n - 1}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)} - n)} + O(x^2 h^{-1} e^{-c_4 \sqrt{\log x}}). \end{aligned}$$

Из третьего утверждения леммы 2 следует, что верхний предел изменения n в первой сумме можно заменить на $\sqrt{\log x}$. Теперь применим к первой сумме формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Первое слагаемое формулы Тейлора сократится со второй суммой, останется лишь второе слагаемое и остаточный член. Имеем

$$\begin{aligned} & \pm \frac{1}{h} \int_1^{x \pm h} \Omega(u) du \mp \frac{1}{h} \int_1^x \Omega(u) du + O(x^2 h^{-1} e^{-c_4 \sqrt{\log x}}) \\ &= x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} B_n \left(\frac{2(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)} - n - 1}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)} - n)} + \frac{(\frac{rm}{\varphi(k)} - n - 1)(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)} - n - 2}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)} - n)} \right) + R, \end{aligned}$$

где

$$R \ll h \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} \left| \frac{B_n}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)} - n)} \right| (\log(x + \theta h))^{\frac{rm}{\varphi(k)} - n - 1},$$

причем $|\theta| \leq 1$. При оценке остаточного члена мы пользовались тем, что $n \leq \sqrt{\log x}$ и, следовательно, $n/\log x \ll 1$. Как и выше, заменим верхний предел изменения n в оценке остаточного члена на $\sqrt{\log(x + \theta h)}$ и применим второе утверждение леммы 2. Получим окончательную оценку остатка:

$$R \ll h(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)} - 1}.$$

Теперь преобразуем главный член, используя формулу понижения для гамма-функции:

$$\begin{aligned}
& x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} B_n \left(\frac{2(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)}-n-1}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)}-n)} + \frac{(\frac{rm}{\varphi(k)}-n-1)(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)}-n-2}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)}-n)} \right) \\
&= x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} B_n \left(\frac{2(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)}-n-1}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)}-n)} + \frac{(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)}-n-2}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)}-n-1)} \right) \\
&= x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} (2B_n + B_{n-1}) \frac{(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)}-n-1}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)}-n)} + O(xe^{-c_4\sqrt{\log x}}),
\end{aligned}$$

причем оценка лишнего слагаемого следует из третьего утверждения леммы 2. Наконец, пользуясь соотношением (12), связывающим коэффициенты A_n и B_n , и собирая вместе все полученные оценки, находим

$$\begin{aligned}
& \pm \frac{1}{h} \int_1^{x \pm h} \Omega(u) du \mp \frac{1}{h} \int_1^x \Omega(u) du \\
&= x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} A_n \frac{(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)}-n-1}}{\Gamma(\frac{rm}{\varphi(k)}-n)} + O(x^2 h^{-1} e^{-c_4\sqrt{\log x}} + h(\log x)^{\frac{rm}{\varphi(k)}-1}).
\end{aligned}$$

Выбирая параметр $h = xe^{-c_4\sqrt{\log x}/2}$, мы видим, что верхняя и нижняя оценки $\Omega(x)$ в соотношении (13) асимптотически совпадают. Отсюда получим искомую асимптотическую формулу для $\Omega(x)$. Доказательство завершается применением второго утверждения леммы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ производящая функция задается равенством

$$\begin{aligned}
F(s) &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \in M}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \equiv l_1 \pmod{k}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \cdots \prod_{p \equiv l_m \pmod{k}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \\
&= F_{l_1}^{-1}(s) \cdots F_{l_m}^{-1}(s).
\end{aligned} \tag{14}$$

Применим к функции $F(s)$ лемму D. Возьмем параметры $b = 1 + 1/\log x$, $T = e^{c_1\sqrt{\log x}}$, где c_1 – постоянная из леммы 1. Тогда можно взять $A(n) = 1$ и $\alpha = 1$, и применение леммы D приводит нас к равенству

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \mu(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O(xe^{-c_2\sqrt{\log x}}). \tag{15}$$

Выберем параметр $\beta = 1 - c_1/\log T = 1 - (\log x)^{-1/2}$. Рассмотрим контур C , состоящий из отрезков, последовательно соединяющих точки $b-iT$, $\beta-iT$ и $\beta-i0$,

петли Γ , обходящей точку $s = 1$ против часовой стрелки, и отрезков, последовательно соединяющих точки $\beta + i0$, $\beta + iT$ и $b + iT$. Производящая функция $F(s)$, заданная соотношением (14), согласно лемме 1 аналитически продолжается левее единичной прямой, причем в области, ограниченной контуром C и вертикальным отрезком с концами в точках $b \pm iT$, функция $F(s)$ не имеет особенностей. В силу интегральной теоремы Коши соответствующий интеграл по границе этой области равен нулю, откуда находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_C F(s) \frac{x^s}{s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(s) \frac{x^s}{s} ds + R_1(x) + R_2(x), \end{aligned}$$

где через $R_1(x)$ и $R_2(x)$ обозначены интегралы по горизонтальным и вертикальным отрезкам контура C соответственно. Согласно лемме 1 на этих отрезках $F(s) \ll \log^{c_3} T$, поэтому

$$\begin{aligned} R_1(x) &\ll \int_{\beta}^b |F(s)| \frac{x^{\sigma}}{T} d\sigma \ll \frac{x^b}{T} \log^{c_3} T \ll x e^{-c_4 \sqrt{\log x}}, \\ R_2(x) &\ll \int_0^T |F(s)| \frac{x^{\beta}}{1+t} dt \ll x^{\beta} \log^{c_3+1} T \ll x e^{-c_4 \sqrt{\log x}}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O(x e^{-c_4 \sqrt{\log x}}). \quad (16)$$

Используя выражение (14) для производящей функции $F(s)$ и явный вид $F_l(s)$ из леммы 1, получим

$$\frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s} (\zeta(s))^{-\frac{m}{\varphi(k)}} e^{-G_{l_1}(s) - \dots - G_{l_m}(s)} = (s-1)^{\frac{m}{\varphi(k)}} H(s),$$

где $H(s)$ – функция из условия теоремы. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(s) \frac{x^s}{s} ds = x \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} x^s s^{\frac{m}{\varphi(k)}} H(s+1) ds, \quad (17)$$

где Γ' – контур, получаемый из Γ параллельным переносом на единицу влево вдоль вещественной оси, что соответствует замене s на $s+1$.

Последний интеграл асимптотически вычисляется с помощью леммы 2. Находим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} x^s s^{\frac{m}{\varphi(k)}} H(s+1) ds \\ &= \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\log x}} A_n \frac{(\log x)^{-\frac{m}{\varphi(k)} - n - 1}}{\Gamma(-\frac{m}{\varphi(k)} - n)} + O(e^{-c_4 \sqrt{\log x}}), \end{aligned}$$

где A_n обозначает n -й коэффициент Тейлора функции $H(s+1)$ в точке $s = 0$, или, что то же самое, функции $H(s)$ в точке $s = 1$. Подставляя полученное равенство в соотношение (17), а затем в формулы (16) и (15), получим искомую асимптотическую формулу. Доказательство завершается применением второго утверждения леммы 2.

§4. Примеры

Вычислим величины $G_l(1)$ для конкретных значений k и l , пользуясь формулой (1). Пусть $k = 3$, $l = 1$. В этом случае имеется лишь один неглавный характер, равный 1 на числах вида $3n + 1$ и равный -1 на числах вида $3n + 2$. Находим

$$\begin{aligned} G_1(1) &= \frac{1}{2} \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p) - \chi^m(p)}{mp^m} + \frac{1}{2} \log \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log L(1, \chi) \\ &= - \sum_{p \equiv 2 \pmod{3}} \sum_{m \equiv 0 \pmod{2}} \frac{1}{mp^m} + \frac{1}{2} \log \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{p \equiv 2 \pmod{3}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{2m}} + \frac{1}{2} \log \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \equiv 2 \pmod{3}} \log \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{2} \log \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующее равенство:

$$C_1 = e^{G_1(1)} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} \prod_{p \equiv 2 \pmod{3}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.533 \dots \quad (18)$$

Пусть $k = 4$, $l = 1$. В этом случае также имеется лишь один неглавный характер, равный 1 на числах вида $4n + 1$ и равный -1 на числах вида $4n + 3$. Находим

$$\begin{aligned} G_1(1) &= \frac{1}{2} \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p) - \chi^m(p)}{mp^m} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log L(1, \chi) \\ &= - \sum_{p \equiv 3 \pmod{4}} \sum_{m \equiv 0 \pmod{2}} \frac{1}{mp^m} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{p \equiv 3 \pmod{4}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{2m}} + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \equiv 3 \pmod{4}} \log \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующее равенство:

$$C_2 = e^{G_1(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.579 \dots \quad (19)$$

Наконец, пусть $k = 8$, $l = 7$. В этом случае имеется три неглавных характера: χ_1 равен 1 на числах вида $8n + 1$ и $8n + 5$ и равен -1 на числах вида $8n + 3$ и $8n + 7$; χ_2 равен 1 на числах вида $8n + 1$ и $8n + 7$ и равен -1 на числах вида $8n + 3$ и $8n + 5$; χ_3 равен 1 на числах вида $8n + 1$ и $8n + 3$ и равен -1 на числах вида $8n + 5$ и $8n + 7$.

Значения $L(1, \chi)$ в этих случаях, как и в уже рассмотренных выше, можно найти в [8]. Имеем

$$\begin{aligned} G_7(1) &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^3 (-1)^n \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi_n(p) - \chi_n^m(p)}{mp^m} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^3 (-1)^n \log L(1, \chi_n) = \sum_{p \equiv 7 \pmod{8}} \sum_{m \equiv 0 \pmod{2}} \frac{1}{mp^m} \\ &+ \frac{1}{4} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log \left(\frac{8}{\pi^2} \log(1 + \sqrt{2}) \right) = \frac{1}{2} \sum_{p \equiv 7 \pmod{8}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{2m}} \\ &+ \frac{1}{4} \log \left(\frac{4}{\pi^2} \log(1 + \sqrt{2}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{p \equiv 7 \pmod{8}} \log \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{4} \log \left(\frac{4}{\pi^2} \log(1 + \sqrt{2}) \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующее равенство:

$$C_3 = e^{G_7(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \log^{\frac{1}{4}}(1 + \sqrt{2}) \prod_{p \equiv 7 \pmod{8}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 0.782 \dots \quad (20)$$

Здесь возникает особый эффект, подобный отмечавшемуся в аналогичной задаче [2]. Поскольку функция $1/\Gamma(s)$ имеет нули в точках $0, -1, -2, \dots$ при rm , кратном $\varphi(k)$, главный член асимптотической формулы теоремы 1 обращается в конечную сумму по $n \leq rm/\varphi(k) - 1$. Аналитическая природа этого эффекта заключается в однозначном характере особой точки соответствующей производящей функции, хотя с чисто арифметической точки зрения он выглядит совершенно неожиданным.

Рассмотрим конкретные примеры. Пусть E_1 – множество натуральных чисел, все простые делители которых имеют вид $3n + 1$. Тогда имеют место формулы

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in E_1}} \tau(n) &= C_1^2 x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}), \\ \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in E_1}} \tau_3(n) &= \frac{2C_1^3}{\sqrt{\pi}} x \sqrt{\log x} \left(1 + \sum_{n \leq \sqrt{\log x}} a_n \log^{-n} x + O(e^{-c\sqrt{\log x}}) \right), \end{aligned}$$

где константа C_1 выражается формулой (18), а

$$a_n = \frac{A_n \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2} - n) C_1^3},$$

A_n – коэффициенты Тейлора соответствующей функции $H(s)$. Аналогичные равенства с заменой C_1 на C_2 , выражающуюся формулой (19), справедливы и для

множества E_2 натуральных чисел, все простые делители которых имеют вид $4n + 1$. В случае множества E_3 натуральных чисел, все простые делители которых имеют вид $8n + 7$, ситуация меняется. Имеем

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in E_3}} \tau(n) = \frac{C_3^2}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{\sqrt{\log x}} \left(1 + \sum_{n \leq \sqrt{\log x}} b_n \log^{-n} x + O(e^{-c\sqrt{\log x}}) \right),$$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in E_3}} \tau_4(n) = C_3^4 x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}),$$

где константа C_3 выражается формулой (20), а

$$b_n = \frac{A_n \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} - n) C_3^2},$$

A_n – коэффициенты Тейлора соответствующей функции $H(s)$.

Этот эффект проявляется и в теореме 2. Так,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in E_2}} \mu(n) = -\frac{1}{2C_2\sqrt{\pi}} \frac{x}{\log^{3/2} x} \left(1 + \sum_{n \leq \sqrt{\log x}} d_n \log^{-n} x + O(e^{-c\sqrt{\log x}}) \right),$$

где константа C_2 выражается формулой (19), а

$$d_n = \frac{A_n \Gamma(-\frac{1}{2}) C_2}{\Gamma(-\frac{1}{2} - n)},$$

A_n – коэффициенты Тейлора соответствующей функции $H(s)$.

С другой стороны, если рассмотреть сумму $\mu(n)$ по числам, все простые делители которых имеют вид $4n + 1$ или $4n + 3$, т. е. по нечетным числам, то главный член асимптотической формулы теоремы 2 обратится в нуль за счет множителей $1/\Gamma(-1 - n)$. Имеем

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{2}}} \mu(n) = O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Таким образом, в зависимости от соотношения параметров задачи возможны два различных случая: либо сумматорная функция представляется асимптотическим рядом по степеням $1/\log x$, либо этот ряд обрывается и сумматорная функция с точностью до $\ll xe^{-c\sqrt{\log x}}$ приближается соответствующей конечной суммой.

Список литературы

1. *Landau E.* Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. V. 2. Leipzig: Teubner, 1909.
2. *Чанга М. Е.* О числах, все простые делители которых лежат в специальных промежутках // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 4. С. 213–224.
3. *Левин Б. В., Файнлейб А. С.* Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел // УМН. 1967. Т. 22. № 3. С. 119–198.
4. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
5. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
6. *Карацуба А. А.* Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 3. С. 475–483.
7. *Воронин С. М., Карацуба А. А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
8. *Прудников А. П., Бричков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
E-mail: maris_changa@mail.ru

Поступило в редакцию
21.09.2004