Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, О группах q -монодромии особенностей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 1, 115–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/im64>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 04:00:29

УДК 512.7

Г.Г. Ильюта

О группах q -монодромии особенностей

В статье доказываются некоторые факты о q -аналоге симметрической и кососимметрической групп монодромии особенности. Описывается образ представления Бурау группы кос из трех нитей. Для q , равного корню из 1, изучается образ группы q -крашенных кос особенности в кососимметрической группе монодромии, которая является исключительной среди групп q -монодромии для корней из 1. Описаны орбиты кососимметрической группы монодромии над $\mathbb{Z}$. Устанавливается связь между спектрами обобщенной q -матрицы Картана и q -оператора Кокстера для диаграмм Кокстера–Дынкина без циклов нечетной длины.

Библиография: 34 наименования.

Симметрическая и кососимметрическая группы монодромии особенности включены А.Б. Гивенталем в однопараметрическое семейство (q -аналог) [6]. Для особенности A_n получается классическое представление Бурау группы кос Артина. Основное содержание статьи составляет изучение образа группы q -крашенных кос особенности для q , равного корню из 1, в кососимметрической ($q = -1$) группе монодромии, которая является в некотором смысле исключительной среди групп q -монодромии для корней из 1. Группа q -крашенных кос особенности определяется для каждого q как ядро представления q -монодромии. Также в статье доказан критерий принадлежности оператора образу представления Бурау группы кос из трех нитей и приведены формулы, связывающие спектры q -оператора Кокстера и q -матрицы Картана для диаграмм Кокстера–Дынкина без циклов нечетной длины. Более глубоко изучаются кососимметрические группы монодромии особенностей, описаны их орбиты над $\mathbb{Z}$. Представим подробное содержание каждого параграфа.

§ 1 содержит вспомогательные результаты, и, кроме того, в нем доказано, что в группе q -монодромии особенности не зависит от q только единица.

Известно, что в q -идеологии выделенную роль играют корни из 1 (см., например, [26]). В частности, это относится к алгебре Гекке симметрической группы [33] (по-видимому, ситуация полностью аналогична для алгебр Гекке групп монодромии всех особенностей). Причиной можно считать следующее замечание. Порождающие группы q -монодромии (преобразования Пикара–Лефшеца) удовлетворяют соотношению Гекке [6]:

$$h^2 = (1 - q)h + q = (1 - q)(h - 1) + 1.$$

Отсюда имеем

$$h^n = \frac{1 - (-q)^n}{1 + q} h + q \frac{1 - (-q)^{n-1}}{1 + q} = \frac{1 - (-q)^n}{1 + q} (h - 1) + 1,$$

Работа поддержана грантами ISF M91000 и РФФИ (95-01-01122а).

и если $-q$ является отличным от 1 корнем из 1, то порождающие имеют конечный порядок. Формула для h^n показывает, что значение $q = -1$ является исключительным среди корней из 1.

В §2 частично описан образ в группе (-1) -монодромии особенности группы q -крашенных кос для q , равного корню из 1. Это описание обобщает результаты из [8] для $q = 1$.

Для особенности A_2 кососимметрическая группа монодромии совпадает с $SL_2(\mathbb{Z})$. Задача изучения для корней из 1 образов групп q -крашенных кос в кососимметрической группе монодромии особенности обобщает классическую задачу [23, с. 267, 354–360] изучения главных конгруэнц-подгрупп Γ_m в $SL_2(\mathbb{Z})$ и подгрупп Δ_m , являющихся нормальным замыканием в $SL_2(\mathbb{Z})$ степени параболического элемента

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результаты §2 показывают, что по свойствам подгрупп, аналогичных Δ_m и Γ_m , кососимметрические группы монодромии особенностей очень близки к $SL_2(\mathbb{Z})$ (известно, что в другом естественном семействе групп, содержащем $SL_2(\mathbb{Z}) - SL_n(\mathbb{Z})$, группа $SL_2(\mathbb{Z})$ резко выделяется по свойствам конгруэнц-подгрупп [12]). А именно, для любого натурального m факторгруппа Γ_{2m}/Δ_{2m} изоморфна аналогичной факторгруппе для любой не морсовской особенности.

Отметим, что группа Γ_m/Δ_m изоморфна фундаментальной группе компактной ориентируемой поверхности рода 0, если $m = 1, 2$, и рода

$$g = 1 + \frac{m^2(m-6)}{24} \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad p \text{ простое,}$$

для $m > 2$ [5]. Для $1 \leq m \leq 5$ получается фундаментальная группа сферы, т.е. $\Gamma_m = \Delta_m$; род 1 изучался в [29]. Равенство $\Gamma_m = \Delta_m$, $1 \leq m \leq 5$, имеет различные доказательства: чисто арифметическое [16], в терминах модулярных функций [24], минимумов бинарных квадратичных форм [30], с использованием классификации групп [28]; см. также [13], [25], [31], [34].

В силу результатов §2 аналогичные подгруппы кососимметрической группы монодромии любой особенности имеют близкую структуру, и было бы интересно развить эти подходы для изучения аналогов Γ_m и Δ_m для всех особенностей. В связи с этой задачей напомним еще один классический факт.

Для $m = 2, 3, 4, 5$ группа

$$SL_2(\mathbb{Z}) / \Gamma_m = SL_2(\mathbb{Z}) / \Delta_m$$

действует на факторпространстве (H – верхняя полуплоскость)

$$H/\Gamma_m = H/\Delta_m,$$

которое является сферой, соответственно как группа диэдра порядка 6, группа тетраэдра, группа октаэдра, группа икосаэдра [5]. Об изучении аналогичных фактов для $m > 5$ см. [7], [17].

Отметим некоторые другие известные факты о представлении q -монодромии в корнях из 1. Эти представления естественно возникают при взятии прямой суммы особенности со степенью новой переменной и разложении представления монодромии полученной особенности по характерам циклической группы [6]. Такая операция эффективно использовалась для изучения спектра особенности [4]. В [11] изучается поведение характеристического многочлена оператора классической монодромии особенности при сложении со степенью новой переменной. По-видимому, впервые представление Бурау в корнях из 1 изучалось в [27].

В §3 описаны орбиты кососимметрической группы монодромии любой особенности над $\mathbb{Z}$: приведены просто проверяемые необходимые и достаточные условия того, что два вектора принадлежат одной орбите группы монодромии. (Описание специального вида орбит играет ключевую роль в доказательстве результатов §2.)

Описание образа представления q -монодромии особенности известно лишь в наиболее важных случаях $q = \pm 1$ [18]–[22]. В §4 доказан критерий принадлежности оператора образу представления Бурау группы кос из трех нитей для общего q . Прояснению структуры групп q -монодромии особенностей существенно способствовало бы описание исчезающих циклов (орбит базисных векторов при действии группы монодромии), однако напрашивающаяся после результатов [20] гипотеза о том, что множество исчезающих циклов совпадает с множеством уровня $\{x : \Phi_q(x, x) = 1 + q\}$ индекса пересечения Φ_q , неверна уже для A_1 : вектор q не лежит в орбите единственного базисного вектора при действии группы q -монодромии, порожденной умножением на $-q$. Но, возможно, с теми же исключениями для гиперболических особенностей, что и в [20], справедлива следующая гипотеза: если q -индекс самопересечения вектора равен $1 + q$, то q -отражение для этого вектора принадлежит группе q -монодромии.

В §5 описана связь между спектрами q -оператора Кокстера и q -матрицы Картана для диаграммы Кокстера–Дынкина, не имеющей циклов нечетной длины (не обязательно являющейся диаграммой Кокстера–Дынкина особенности). Для $q = 1$ это сделано в [14]. Примерами таких диаграмм среди диаграмм Кокстера–Дынкина особенностей являются стандартные: A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 (в [10] сформулирована гипотеза о том, что других для не простых особенностей нет). Близкий результат о связи сигнатуры q -индекса пересечения и спектра особенности приведен в [6].

Мы несколько пожертвовали общностью, не рассматривая кососимметрические исчезающие решетки [21]. Этому есть две причины: во-первых, насколько известно автору, q -теория для полных пересечений не опубликована, во-вторых, некоторые использующиеся в статье результаты (например, из [19]) не доказаны для всех исчезающих решеток. С другой стороны, доказанные ниже предложения 7, 8 справедливы и в этом более общем контексте.

§0. Определения и обозначения

С каждой особенностью, рассматриваемой с точностью до стабильной эквивалентности, связаны две симметрические и две кососимметрические билинейные формы – индексы пересечения в гомологиях слоя Милнора [1]. Все они включаются в однопараметрическое семейство (q -аналог), причем значению $q = 1$ отвечает

симметрический случай, а значению $q = -1$ – кососимметрический [6]. Предположим, что число переменных функции, задающей рассматриваемую особенность, сравнимо с 3 по mod 4 (это предположение несущественно для содержания, оно лишь фиксирует знаки в формулах).

Пусть S – матрица формы Зейферта в отмеченном базисе решетки Милнора изолированной особенности кратности μ , $C = -S^{-1}S^t$ – оператор классической монодромии [1], q – переменная, которой будем придавать отличные от 0 комплексные значения, $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ – кольцо многочленов Лорана от q . Группа q -монодромии особенности M_q действует на свободном $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -модуле H_q ранга μ с отмеченным базисом $a_1, \dots, a_\mu$ [6]. Она порождается q -отражениями Пикара–Лефшеца h_i , $i = 1, \dots, \mu$, относительно q -индекса пересечения Φ_q :

$$\begin{aligned}\Phi_q &= -S - qS^t, \\ h_i(x) &= x - \Phi_q(x, a_i)a_i, \quad x \in H_q.\end{aligned}$$

Очевидно, что M_q принадлежит q -ортогональной группе формы Φ_q . Через C_q обозначим q -оператор классической монодромии особенности [6]:

$$C_q = h_\mu \dots h_1 = -qS^{-1}S^t = qC.$$

Исчезающими называются векторы из орбит элементов отмеченного базиса (говоря ниже об орбитах, подразумеваем орбиты группы монодромии).

Для простых особенностей A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 в подходящем базисе и для $q = 1$ матрица Φ_q совпадает с матрицей Картана соответствующего типа, а M_q – с группой Вейля того же типа.

Через π обозначим фундаментальную группу дополнения к дискриминанту особенности [1], а через $\gamma_q: \pi \rightarrow M_q$ представление q -монодромии. Для каждого q назовем $\text{Кер } \gamma_q$ *группой q -крашенных кос*. Для особенности A_n $\text{Кер } \gamma_1$ совпадает с классической группой крашенных кос Артина.

Для $\varphi \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ определим $\bar{\varphi}$ как образ φ при действии инволюции $q \rightarrow q^{-1}$. Через H_q^* обозначим пространство полулинейных отображений

$$\begin{aligned}h: H_q &\rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}], \\ h(x+y) &= h(x) + h(y), \quad h(\varphi x) = \bar{\varphi}h(x), \\ \varphi &\in \mathbb{Z}[q, q^{-1}], \quad x, y \in H_q.\end{aligned}$$

Имеем естественный гомоморфизм

$$\begin{aligned}\delta: H_q &\rightarrow H_q^*, \\ \delta(e)(f) &= \Phi_q(f, e), \quad e, f \in H_q.\end{aligned}$$

Из определения q -отражения вытекает, что M_q индуцирует тривиальное действие на фактормодуле

$$\tilde{H}_q = H_q^* / \delta H_q.$$

Стандартный базис для A_n задается условиями

$$\begin{aligned}\Phi_q(a_{i+1}, a_i) &= q\Phi_q(a_i, a_{i+1}) = q, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \Phi_q(a_i, a_j) &= 0, \quad i \neq j+1, \quad j \neq i+1.\end{aligned}$$

Через E_{ij} обозначим $(\mu \times \mu)$ -матрицу, у которой элемент на месте ij равен 1, а все остальные элементы равны 0. Если i или j не принадлежит множеству $\{1, \dots, \mu\}$, то считаем $E_{ij} = 0$.

Дальнейшие определения относятся к $q = -1$. В обозначениях соответствующих объектов будем опускать индекс q и писать просто H, Φ, M ; отмеченный базис для $q = -1$ обозначим через $e_1, \dots, e_\mu$.

Форма Φ является целочисленной кососимметрической билинейной формой. По теореме Фробениуса [2] в H существует (симплектический) базис

$$x_1, \dots, x_n, \quad y_1, \dots, y_n, \quad z_1, \dots, z_k,$$

в котором

$$\Phi(x_i, y_i) = -\Phi(y_i, x_i) = \lambda_i;$$

все остальные индексы пересечения элементов базиса равны 0, λ_{i+1} делится на λ_i для всех i .

Обозначим $\lambda_n = \lambda$ и

$$H' = \{x \in H : \Phi(x, y) = 0 \bmod \lambda \text{ для всех } y \in H\}.$$

Для любого $y \in H$ обозначим через h_y трансвекцию, отвечающую вектору y :

$$h_y(x) = x - \Phi(x, y)y, \quad x \in H.$$

Через M^m обозначим группу, порожденную $2m - n$ степенями трансвекций, отвечающих всем векторам из H . Через mM обозначим подгруппу симплектической группы формы Φ (считаем по определению, что все элементы симплектической группы тождественны на $\text{Ker } \Phi$), элементы которой индуцируют тривиальное действие на $H'/2\lambda mH$.

В [18] доказано, что $M^1 = {}^1M \subset M$ для всех особенностей. Очевидно, что $M^m \subset M^1$, ${}^mM \subset {}^1M$, $M^m \subset {}^mM$ для всех $m \geq 1$. Поэтому $M^m \subset M$, ${}^mM \subset M$ для всех $m \geq 1$.

Обозначим через Δ_m подгруппу в $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, которая является нормальным замыканием элемента

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m,$$

а через Γ_m — главную конгруэнц-подгруппу уровня m :

$$\Gamma_m = \{A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : A \equiv \text{Id} \pmod{m}\}.$$

Для особенности A_2 инвариант λ равен 1,

$$M = \text{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad M^m = \Delta_{2m}, \quad {}^mM = \Gamma_{2m},$$

Δ_m совпадает с подгруппой, порожденной $m - n$ степенями (-1) -отражений Пикара–Лефшеца для всех исчезающих циклов.

В решетке H любой особенности существует базис Вайнриба (см. [18], [32]) $e_1, \dots, e_\mu$, который характеризуется следующими свойствами: все e_i – исчезающие векторы, отвечающие e_i трансекции порождают M и для $i > 1$

$$\Phi(e_1, e_i) = 1.$$

Для любой особенности на H корректно определена функция $p: H \rightarrow \mathbb{Z}_2$ [18], [32], удовлетворяющая тождествам

$$\begin{aligned} p(e_i) &= 1, \quad i = 1, \dots, \mu, \\ p(x + y) &= p(x) + p(y) + \Phi(x, y) \bmod 2, \quad x, y \in H. \end{aligned}$$

Скажем, что $x \in H$ имеет примитивный ковектор, если существует $y \in H$, для которого $\Phi(x, y) = 1$.

Для особенности A_n стандартный базис решетки H задается условиями

$$\begin{aligned} \Phi(e_i, e_{i+1}) &= -\Phi(e_{i+1}, e_i) = 1, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \Phi(e_i, e_j) &= 0, \quad i \neq j+1, \quad j \neq i+1. \end{aligned}$$

Для A_n каждый вектор из H , имеющий примитивный ковектор, принадлежит орбите одного из следующих векторов [8]:

$$f_k = \sum_{i=1}^k e_{2i-1}, \quad k < \left\lfloor \frac{\mu+1}{2} \right\rfloor.$$

Положим $\alpha(x) = k_H$, если x лежит в орбите вектора f_k . Если $x \in H$ для решетки особенности $D_{\mu+1}$, то согласно [8] x лежит в одной орбите с вектором из подрешетки, изоморфной решетке A_μ , причем если x имеет примитивный ковектор, то для него однозначно определено число k такое, что x лежит в одной орбите с вектором f_k . Положим также $\alpha(x) = k$. Для отличной от A_μ и D_μ особенности любой вектор $x \in H$, имеющий примитивный ковектор, лежит в одной орбите либо с вектором f_1 (если $p(x) = 1$), либо с вектором f_2 (если $p(x) = 0$) из некоторой подрешетки A_n [8]. Для такого вектора x определим $\alpha(x)$ как множество натуральных чисел k , обладающих свойством: x лежит в одной орбите с вектором f_k из некоторой подрешетки, изоморфной решетке A_n , $k < \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Из предыдущего замечания и определения функции p вытекает, что для отличной от A_μ и D_μ особенности $\alpha(x)$ бывает лишь двух типов: $\alpha(x)$ содержит 1 и состоит из последовательных нечетных чисел (обозначим через t_1 максимальное из них), если $p(x) = 1$, или $\alpha(x)$ содержит 2 и состоит из последовательных четных чисел (обозначим через t_2 максимальное из них), если $p(x) = 0$.

Обозначим через $\beta_k^m(q)$ следующий полином от q :

$$\beta_k^m(q) = \frac{q^{2mk} - 1}{q^{2m} - 1} (q - 1).$$

§ 1. Общие свойства групп q -монодромии

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [1, гл. 1, § 3]. *Для любой особенности определитель матрицы q -индекса пересечения Φ_q с точностью до знака равен характеристическому многочлену оператора классической монодромии C .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\varphi \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, $\varphi\bar{\varphi} = 1$. Тогда $\varphi = \pm q^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi = \sum \varphi_i q^i$. Тогда коэффициент при q^0 в полиноме Лорана $\varphi\bar{\varphi}$ равен $\sum \varphi_i^2 = 1$. Поскольку $\varphi_i \in \mathbb{Z}$ для всех i , то лишь одно из φ_i отлично от 0 и равно ± 1 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если скалярный оператор φId , $\varphi \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, сохраняет Φ_q и индуцирует тождественное преобразование на H_q , то $\varphi = \pm q^n$, $n \in \mathbb{Z}$, и произведение φ на алгебраическое дополнение любого элемента матрицы Φ_q делится в $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ на характеристический многочлен оператора классической монодромии C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку φId сохраняет Φ_q , то

$$1 + q = \Phi_q(a_1, a_1) = \Phi_q(\varphi a_1, \varphi a_1) = \varphi\bar{\varphi}\Phi_q(a_1, a_1) = \varphi\bar{\varphi}(1 + q).$$

Поэтому $\varphi\bar{\varphi} = 1$ и по предложению 2 $\varphi = \pm q^n$. По условию оператор $\varphi \text{Id} - \text{Id}$ переводит H_q^* в δH_q . Оператор δ в двойственных базисах задается матрицей Φ_q . Поэтому векторы φa_i раскладываются по векторам $\Phi_q(a_j)$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Для нахождения этих коэффициентов при каждом i получается линейная система, матрица которой совпадает с Φ_q . Решая эти системы по правилу Крамера и учитывая предложение 1, получаем утверждение предложения 3.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях предложения 3 для особенности A_2

$$\varphi \text{ делится на } q^2 + q + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для A_2 характеристический многочлен оператора классической монодромии равен $q^2 + q + 1$. Легко видеть, что в $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ миноры матрицы Φ_q взаимно просты с этим многочленом. Поэтому φ делится на $q^2 + q + 1$ согласно предложению 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказанное следствие вытекает также из следующих известных фактов: представление Бирау группы кос из трех нитей точно и центр группы кос из n нитей порождается n -й степенью произведения стандартных образующих [15]. В нашем случае группы кос из трех нитей центр порождается элементом

$$C_q^3 = (h_2 h_1)^3 = \begin{pmatrix} -q & q \\ -q & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} q^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix}.$$

Мы предпочли, однако, прямое доказательство, которое лучше поддается обобщению (тем более, что построен контрпример к гипотезе о точности представления Бирау для всех n).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любой особенности верно следующее: если $h \in M_q$ не зависит от q , то $h = \text{Id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскладывая, как в доказательстве предложения 3, векторы $h(a_i) - a_i$ по векторам $\Phi_q(a_j)$ и применяя правило Крамера для нахождения коэффициентов (они принадлежат $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$), получаем, что каждый коэффициент представляет собой частное многочлена степени $< \mu$ и многочлена степени μ . Поэтому все коэффициенты равны 0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Рассмотрим на H_q оператор вида

$$h = \sum E_{ii} + \sum_{\substack{i < n \\ j > n}} a_{ij} E_{ij}.$$

Если h принадлежит q -ортогональной группе формы Φ_q и $a_1, \dots, a_n$ образуют стандартный базис для A_n , то $h = \text{Id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $j > n$ и рассмотрим систему n уравнений с $n - 1$ неизвестными a_{ij} :

$$\Phi_q(a_i, a_j) = \Phi_q(h(a_i), h(a_j)), \quad i = 1, \dots, n.$$

После сокращений имеем

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} \Phi_q(a_k, a_i) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Подставляя значения $\Phi_q(a_k, a_i)$ для стандартного базиса A_n , найдем, что все a_{ij} равны 0.

ЗАМЕЧАНИЕ. Смысл предложения 5 состоит в следующем. Рассмотрим H_q для некоторой особенности и произвольным образом занумерованное подмножество $a_1, \dots, a_n$ соответствующего отмеченного базиса в H_q . Если $\{a_1, \dots, a_n\}$ является стандартным базисом для A_n , оператор монодромии h порождается q -отражениями, отвечающими векторам $a_1, \dots, a_{n-1}$, и h является тождественным на порожденном векторами $a_1, \dots, a_n$ пространстве, то h также является тождественным на всем H_q . Очевидно, что предложение 5 справедливо при гораздо более слабых предположениях, но нам понадобится в § 2 только случай стандартного подмодуля A_n в H_q .

§ 2. О группе q -крашенных кос

ТЕОРЕМА 1. Пусть для некоторой особенности вектор $x \in H$ имеет примитивный ковектор, $k \in \alpha(x)$ и q является корнем многочлена

$$\frac{q^{2mk} - 1}{q^{2k} - 1}(q - 1), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда существует $\gamma \in \text{Ker } \gamma_q$, для которого

$$\gamma_{-1}(\gamma) = h_x^{2m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Трансвекции для векторов из одной орбиты сопряжены (оператор, переводящий один вектор в другой, сопрягает трансвекции этих векторов). Очевидно также, что теорема одновременно верна или неверна для сопряженных трансвекций (ядро любого гомоморфизма является нормальной подгруппой). Из [8] следует (см. замечания в конце § 0), что x лежит в одной орбите с вектором f_k для некоторой подрешетки в H , изоморфной стандартной решетке A_n . Для A_μ мы предъявим нужный оператор для каждого f_k . Тот факт, что соответствующий оператор на всем H_q обладает нужными свойствами, вытекает из предложения 5. Итак, для доказательства теоремы достаточно для каждого $m \geq 1$ и $k < [\frac{\mu+1}{2}]$ построить оператор δ_{km} из группы M_q для особенности A_μ , который обладает следующими свойствами: для q из формулировки теоремы $\delta_{km} = \text{Id}$, для $q = -1$

$$\delta_{km} = h_{f_k}^{2m}.$$

По определению для стандартного базиса A_μ

$$h_i = \sum_{j \neq i} E_{jj} + E_{i\ i-1} - qE_{i\ i} + qE_{i\ i+1}.$$

Рассмотрим для $m < \mu$ оператор

$$g_m = h_m \dots h_1.$$

Очевидно, что правый верхний $(m \times m)$ -угол матрицы g_m в стандартном базисе A_μ занимает матрица q -оператора классической монодромии C_q для особенности A_m ,

$$\begin{aligned} C_q &= -qS^{-1}S^t, \\ S &= -\sum E_{i\ i} + \sum E_{i\ i-1}, \quad S^{-1} = -\sum_{i \geq j} E_{i\ j}, \\ C_q &= q \left(-\sum E_{i\ 1} + \sum E_{i\ i+1} \right). \end{aligned}$$

Отсюда для $m < \mu$ и $n \leq m$ имеем

$$\begin{aligned} g_m &= q \left(-\sum_{i \leq m} E_{i\ 1} + \sum_{i \leq m} E_{i\ i+1} \right) + \sum_{i > m} E_{i\ i}, \\ g_m^n &= q^n \left(-\sum_{i \leq m} E_{i\ n} + \sum_{i+n \leq m} E_{i\ i+n} + \sum_{1 \leq i \leq m-n} E_{i+n\ i} \right) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i \leq n} q^i E_{m-i+1\ m+1} + \sum_{i > m+1} E_{i\ i}, \\ g_m^{m+1} &= q^{m+1} \sum_{i \leq m} E_{i\ i} + \sum_{i \leq m} q^{m-i+1} (1 - q^i) E_{i\ m+1} + \sum_{i > m} E_{i\ i}, \\ g_m^{(m+1)k} &= q^{(m+1)k} \sum_{i \leq m} E_{i\ i} + \sum_{i \leq m} q^{m-i+1} (1 - q^i) \frac{1 - q^{(m+1)k}}{1 - q^{m+1}} E_{i\ m+1} + \sum_{i > m} E_{i\ i}. \end{aligned}$$

Положим

$$\delta_{mk} = g_{2k-1}^{2km}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для простых особенностей и $m = 1$ мы получили доказательство теоремы А. Н. Варченко и С. В. Чмутова [8] с использованием свойств кососимметрической монодромии. В [8] доказательство опирается на классификацию конечных систем корней.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства видно, что теорема 1 основывается на описании орбит векторов, имеющих примитивные ко векторы [8]. В §3 описаны все орбиты над $\mathbb{Z}$ для кососимметрической монодромии. Возможно, что это позволит обобщить теорему 1 на все векторы по следующему плану: найти в каждой орбите некоторую нормальную форму (например, в симплектическом базисе) и для нормальной формы предъявить оператор с нужными свойствами.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В [8] доказано, что

$$\gamma_{-1}(\text{Ker } \gamma_1) = {}^1M = M^1$$

для особенностей, у которых λ нечетно (в частности, для особенностей функций двух переменных, у которых $\lambda = 1$). Возможно, что и в общем случае для примитивного корня степени $2m$ из 1

$$\gamma_{-1}(\text{Ker } \gamma_q) = M^m \quad \text{или} \quad \gamma_{-1}(\text{Ker } \gamma_q) = {}^mM.$$

Частично эта гипотеза доказывается ниже.

ТЕОРЕМА 2. Если q является корнем многочлена $\beta_\mu^m(q)$, то для особенности A_μ или $D_{\mu+1}$

$$M^m \subset \gamma_{-1}(\text{Ker } \gamma_q).$$

Если особенность отлична от A_μ и D_μ , q является корнем хотя бы одного из многочленов

$$\beta_k^m(q), \quad k = 1, 3, \dots, t_1,$$

и корнем хотя бы одного из многочленов

$$\beta_k^m(q), \quad k = 2, 4, \dots, t_2,$$

то

$$M^m \subset \gamma_{-1}(\text{Ker } \gamma_q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для особенностей кратности ≥ 4 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ [18], то теорема 2 вытекает из теоремы 1 и следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если для решетки H $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, то M^m порождается $2m$ -ми степенями трансвекций, отвечающих векторам, которые имеют примитивный ко вектор.

Для $m = 1$ этот факт доказан в [22] без предположения, что $\lambda_2 = 1$, но для $m > 1$ автору не удалось обобщить это доказательство. В то же время доказательство из [8] в предположении, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, легко обобщается.

Следующее утверждение доказывается совершенно аналогично шагу индукции в доказательстве предложения 1 из [18].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Для любой не морсовской особенности и любого натурального m

$${}^mM/M^m \simeq \Gamma_{2m}/\Delta_{2m}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Для любой особенности изоморфны группы 2M и M^2 .

§ 3. Орбиты кососимметрической группы монодромии над $\mathbb{Z}$

Описание орбит над $\mathbb{Z}_2$ завершено в [8] (см. также [18], [32]). Ниже описаны орбиты над $\mathbb{Z}$. Предложение 8 обобщает аналогичный факт для векторов, имеющих примитивный ковектор [32], доказательство такое же, но несколько усложняется на последнем шаге (поэтому оно и приводится). Доказательство предложения 9 существенно опирается на результаты из [19].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть H – свободный $\mathbb{Z}$ -модуль с кососимметрической билинейной формой Φ и базисом Вайнриба $e_1, \dots, e_\mu$. Если $x, y \in H$, $\Phi(x, H) = \Phi(y, H) = \beta\mathbb{Z}$, $x - y \in 2\beta H$, то x и y лежат в одной орбите группы M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Phi(x, e_1)/\beta$ (а следовательно, и $\Phi(y, e_1)/\beta$) четно, то существует e_j , для которого $\Phi(x, e_j)$ нечетно, и после применения к x и y оператора h_j можно считать, что $\Phi(x, e_1)/\beta$ и $\Phi(y, e_1)/\beta$ нечетны. Положим $m = \Phi(x, e_1)/\beta$. Докажем, что существует $x_1 \in M(x)$ со свойствами

$$x - x_1 \in 2\beta H, \quad \Phi(x_1, e_1) = \pm\beta.$$

Используем индукцию по $|m|$ на множестве нечетных чисел. Пусть $m > 1$. Из условия $\Phi(x, H) = \beta\mathbb{Z}$ вытекает, что существует $z = \sum \alpha_i e_i$ со свойством

$$\beta = \Phi(x, z) = \sum \alpha_i \Phi(x, e_i).$$

Поэтому существует индекс j такой, что

$$\Phi(x, e_j) \notin \beta m \mathbb{Z}.$$

Для $p \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon = \pm 1$ имеем

$$\begin{aligned} h_j^{2\varepsilon} h_1^{2p}(x) &= x - 2mp\beta e_1 - 2\varepsilon(\Phi(x, e_j) - 2mp\beta)e_j, \\ h_j^{2\varepsilon} h_1^{2p}(x) - x &\in 2\beta H, \\ |\Phi(h_j^{2\varepsilon} h_1^{2p}(x), e_1)| &= \beta \left| m + 2\varepsilon \left(\frac{\Phi(x, e_j)}{\beta} - 2mp \right) \right|. \end{aligned}$$

При подходящем выборе p и ε

$$\left| m + 2\varepsilon \left(\frac{\Phi(x, e_j)}{\beta} - 2mp \right) \right| < |m|,$$

так как $\Phi(x, e_j) \notin m\beta\mathbb{Z}$. Поэтому можно найти x_1 с требуемыми свойствами. Запишем $x_1 = \sum \beta_i e_i$. Так как $|\Phi(x_1, e_1)| = \beta$, то

$$\sigma := -\Phi(x_1, e_1) = \sum_{i>1} \beta_i = \pm\beta.$$

Пусть $j \neq 1$ и $n = \Phi(e_j, x_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} h_1^{2+\sigma n/\beta^2} h_j h_1^{2+\sigma n/\beta^2}(x_1) &= x_1 - 2\sigma e_j, \\ -\Phi(x_1 - 2\sigma e_j, e_1) &= \sigma - 2\sigma = -\sigma. \end{aligned} \tag{1}$$

Итак, если $\sigma > 0$ (и тогда по крайней мере одна из координат β_i , $i > 1$, положительна), то любую отличную от β_1 положительную координату вектора x_1 можно уменьшить на 2β . Если же $\sigma < 0$, то аналогично можно увеличить на 2β любую отличную от β_1 отрицательную координату. Используя $h_1^{\pm 2}$, можно увеличивать или уменьшать β_1 на 2β .

Построим по вектору y вектор y_1 с теми же свойствами, что и x_1 по отношению к x , и докажем, что x_1 и y_1 лежат в одной орбите группы M . Тогда и x , y лежат в одной орбите.

Покажем, что с помощью операций (1) можно добиться того, чтобы все координаты векторов x_1 , y_1 были по модулю меньше 2β . Если $\sigma > 0$ и существует положительная координата $\geq 2\beta$, то применяем к ней (1). Если же все положительные координаты $< 2\beta$, то применяем (1) к одной из них. При этом σ станет < 0 и не изменится число координат по модулю $< 2\beta$. Если $\sigma < 0$, то аналогично поступаем с отрицательными координатами.

Очевидна следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Если*

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}, \quad \gamma > 0, \quad \alpha &= \beta \bmod \gamma, \\ |\alpha| < \gamma, \quad |\beta| < \gamma, \quad \text{sign } \alpha &= \text{sign } \beta, \end{aligned}$$

то $\alpha = \beta$.

Согласно лемме достаточно показать, что преобразованиями (1), не меняя свойств векторов x_1 , y_1 , можно добиться того, чтобы знаки их координат совпали.

Если для $k > 1$ k -е координаты векторов x_1 и y_1 имеют разные знаки и знак какой-либо из них совпадает со знаком соответствующего σ , то применяем (1) к этой координате. Если таких пар координат нет, то все пары имеют одинаковый знак. Действительно, в этом случае для всех пар координат с разными знаками соответствующие σ также имеют разные знаки, причем противоположные знакам координат. Но суммы координат (без первой) каждого из векторов совпадают с соответствующими σ . Эти свойства совместимы, только если координат разных знаков нет. Предложение доказано.

ЛЕММА 2 [9]. Пусть $x \in H \setminus \text{Ker } \Phi$ — неделимый вектор и $\Phi(x, H) = \lambda_x \mathbb{Z}$. Тогда λ делится на λ_x .

Из предложений 8 и леммы 2 следует, что для полного описания орбит группы M над $\mathbb{Z}$ достаточно описать орбиты в

$$\tilde{H} = H' / 2\lambda H.$$

Для особенностей A_μ и D_μ орбиты описаны в [8]. Для описания орбит у других особенностей определим эквивалентность векторов в $\tilde{H}$ [19].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторы $x, y \in \tilde{H}$ называются *эквивалентными*, если выполняются следующие условия:

- 1) если x или y принадлежит $\text{Ker } \Phi / 2\lambda \text{ Ker } \Phi$, то $x = y$;
- 2) $x - y = 0 \bmod \lambda$;
- 3) $p\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} \Phi\left(x, \frac{x-y}{\lambda}\right) \bmod 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для отличной от A_μ и D_μ особенности векторы $x, y \in H$ лежат в одной орбите образа группы M в $\text{Aut}(\tilde{H})$, если и только если x эквивалентен y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) = 1$, то по теореме из [9] трансвекция, отвечающая вектору $(x - y)/\lambda$, принадлежит образу группы M в $\text{Aut}(\tilde{H})$ и в $\tilde{H}$ и

$$h_{\frac{x-y}{\lambda}}(x) = y.$$

Пусть $p\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) = 0$. Найдем $e \in H$ со следующими свойствами (очевидно, что для $e \in H$, $f \in \tilde{H}$ корректно определено $\Phi(e, f) \bmod 2\lambda$):

$$p(e) = 1, \quad \Phi(e, x) = \lambda \bmod 2\lambda, \quad \Phi(e, y) = \lambda \bmod 2\lambda.$$

Можно считать, что x, y не принадлежат образу $\text{Ker } \Phi$ в $\tilde{H}$, и тогда по лемме 2

$$\Phi(\cdot, x) \neq 0 \bmod 2\lambda, \quad \Phi(\cdot, y) \neq 0 \bmod 2\lambda.$$

Рассмотрим базис Вайнриба $e_1, \dots, e_\mu$ и обозначим

$$\alpha_i = \Phi(e_i, x) \bmod 2\lambda, \quad \beta_i = \Phi(e_i, y) \bmod 2\lambda.$$

Если $\alpha_1 = \beta_1 = \lambda$, то положим $e = e_1$. Если $\alpha_1 = \lambda$, $\beta_1 = 0$, то существует $\beta_i = \lambda$. Если $\alpha_i = \lambda$, то положим $e = e_i$, если же $\alpha_i = 0$, то положим $e = e_1 + e_i$.

Аналогично разбирается случай $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \lambda$.

Пусть $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Тогда существуют $\alpha_i = \beta_j = \lambda$. Если $i = j$, то положим $e = e_i$. Если $i \neq j$ и $\beta_i = \lambda$, то положим $e = e_i$. Если $i \neq j$ и $\alpha_j = \lambda$, то положим $e = e_j$. Если $i \neq j$ и $\alpha_j = \beta_i = 0$, то положим $e = e_1 + e_i + e_j$.

После того как вектор e найден, имеем по теореме из [19], что образ h_e в $\text{Aut}(\tilde{H})$ принадлежит образу M и

$$p\left(\frac{h_e(x) - y}{\lambda}\right) = 1.$$

Доказательство сводится к предыдущему случаю.

§ 4. Образ представления Бурзу группы кос из трех нитей

Выпишем явно интересующие нас объекты для особенности A_2 :

$$\begin{aligned}\Phi_q &= \begin{pmatrix} 1+q & -1 \\ -q & 1+q \end{pmatrix}, \quad C_q = \begin{pmatrix} -q & q \\ -q & 0 \end{pmatrix}, \\ x, y &\in H_q, \quad x = x_1 a_1 + x_2 a_2, \quad y = y_1 a_1 + y_2 a_2, \\ \Phi_q(x, y) &= (1+q)x_1 \bar{y}_1 + (1+q)x_2 \bar{y}_2 - x_1 \bar{y}_2 - qx_2 \bar{y}_1, \\ h_1 &= \begin{pmatrix} -q & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -q \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть для особенности A_2 $h \in \text{Aut}(H_q)$. Тогда $h \in M_q$, если и только если выполнены следующие условия:

- 1) h принадлежит q -ортогональной группе формы Φ_q ;
- 2) h индуцирует тождественное преобразование на $\tilde{H}_q$;
- 3) h сохраняет орбиту базисного вектора a_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сохранения орбиты вектора a_1 вытекает, что существует $g \in M_q$, для которого

$$gh = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}].$$

Из сохранения Φ_q вытекает, что

$$\begin{aligned}q(a-1) &= (q+1)b, \\ \bar{a}-1 &= (q+1)\bar{b}, \\ (q+1)(a\bar{a} + b\bar{b}) - q\bar{a}b - \bar{b}a &= 1+q.\end{aligned}$$

Выражая b и $\bar{b}$ через a и $\bar{a}$ из первых двух соотношений и подставляя в третье, после сокращений получаем

$$(q^2 + q + 1)(a\bar{a} - 1) = 0.$$

Для общего q $(q^2 + q + 1) \neq 0$, и поэтому $a\bar{a} = 1$. По предложению 2 $a = \pm q^n$. Поскольку

$$b = q \frac{a-1}{q+1} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}],$$

то имеем

$$a = (-q)^n, \quad b = q \frac{(-q)^n - 1}{q+1}.$$

Легко видеть, что

$$h_1^n = \begin{pmatrix} -q & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-q)^n & -q \frac{(-q)^n - 1}{q+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$h_1^n gh = \begin{pmatrix} (-q)^n & 0 \\ 0 & (-q)^n \end{pmatrix}.$$

По следствию 1 $(-q)^n - 1$ делится на $q^2 + q + 1$. Поэтому n делится на 6 и

$$h_1^n gh = \begin{pmatrix} q^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix}^{n/3} = (h_2 h_1)^n.$$

§ 5. Спектры q -оператора Кокстера и q -матрицы Картана

Рассмотрим обобщенную матрицу Картана A порядка n , т.е. матрицу с комплексными элементами, удовлетворяющими условиям

$$\begin{aligned} A_{ii} &= 2, \\ A_{ij} &= 0, \text{ если и только если } A_{ji} = 0. \end{aligned}$$

Диаграммой матрицы A называется граф с n упорядоченными вершинами, в котором вершины i и j соединены ребром, если и только если $i \neq j$, $A_{ij} \neq 0$.

Предположим, что диаграмма матрицы A не имеет циклов нечетной длины. Тогда она является двудольным графом и вершины можно разбить на два множества Σ_1 и Σ_2 , в каждом из которых вершины не соединены ребрами [14].

Рассмотрим векторное пространство над $\mathbb{C}$ с базисом $e_1, \dots, e_n$ и группу его автоморфизмов, порожденную инволюциями

$$r_i(e_j) = e_j - A_{ji}e_i, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Операторы r_i , $i \in \Sigma_m$, попарно коммутируют, $m = 1, 2$. В частности, операторы

$$R_m = \prod_{i \in \Sigma_m} r_i, \quad m = 1, 2,$$

не зависят от порядка r_i в произведении и являются инволюциями. Автоморфизм $R = R_2 R_1$ называется *оператором Кокстера*. Он сопряжен своему обратному

$$R^{-1} = R_1 R_2 = R_2^{-1} (R_2 R_1) R_2.$$

Если диаграмма является деревом, то операторы Кокстера для любого порядка перемножения r_i сопряжены [3]. Если же диаграмма имеет цикл, то наш выбор порядка перемножения приводит к тому, что доказанный ниже результат о спектре относится не к любому q -оператору Кокстера матрицы Картана A .

В [14] доказано, что существуют комплексные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ со следующими свойствами:

- 1) $\alpha_i + \alpha_{n-i+1} = 2\pi\sqrt{-1}$;
- 2) числа $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ образуют спектр оператора R ;
- 3) числа $4 \cosh^2\left(\frac{\alpha_1}{4}\right), \dots, 4 \cosh^2\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)$ образуют спектр матрицы Картана A .

Определим q -матрицу Картана B и q -оператор Кокстера P для матрицы Картана A :

$$\begin{aligned} B_{ii} &= 1 + q, \\ B_{ij} &= A_{ij}, \quad i > j, \\ B_{ij} &= qA_{ij}, \quad i < j. \end{aligned}$$

Рассмотрим свободный $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -модуль с базисом $f_1, \dots, f_n$ и группу его автоморфизмов, порожденную операторами

$$p_i(f_j) = f_j - B_{ji}f_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим

$$P_m = \prod_{i \in \Sigma_m} p_i, \quad m = 1, 2.$$

Назовем q -оператором Кокстера автоморфизм

$$P = P_2 P_1 = qR.$$

Обозначим $q = e^\alpha$.

ТЕОРЕМА 4. Спектр q -оператора Кокстера P составляют числа

$$e^{\alpha+\alpha_1}, \dots, e^{\alpha+\alpha_n};$$

спектр q -матрицы Картана B составляют числа

$$2e^{\alpha/2} \left(\cosh \frac{\alpha}{2} + \cosh \frac{\alpha_1}{2} \right), \dots, 2e^{\alpha/2} \left(\cosh \frac{\alpha}{2} + \cosh \frac{\alpha_n}{2} \right).$$

Доказательство вытекает из приведенных выше формул для спектров матриц R и A , а также легко проверяемого соотношения

$$2 + R + R^{-1} = (R_1 + R_2)^2 = (e^{-\alpha/2}B - e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})^2.$$

Отметим, что последняя формула для $q \neq 1$ неверна без возведения в квадрат, т.е.

$$R_1 + R_2 \neq e^{-\alpha/2}B - e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}.$$

Квадраты этих операторов равны благодаря отсутствию циклов нечетной длины в диаграмме и выбору порядка перемножения p_i .

Так как

$$2e^{\alpha/2} \left(\cosh \frac{\alpha_i}{2} + \cosh \frac{2\pi\sqrt{-1} - \alpha_i}{2} + 2 \cosh \frac{\alpha}{2} \right) = 2(q+1),$$

то собственные значения матрицы B появляются парами $\lambda, 2(q+1) - \lambda$.

Опишем связь между соответствующими собственными векторами. Для вектора $m = (m_1, \dots, m_n)$ обозначим через $\tilde{m}$ вектор с координатами

$$\tilde{m}_i = \begin{cases} -m_i, & i \in \Sigma_1, \\ m_i, & i \in \Sigma_2. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Если m – собственный вектор матрицы B с собственным значением λ , то $\tilde{m}$ – собственный вектор с собственным значением $2(q+1) - \lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i \in \Sigma_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n B_{ij} m_j &= \lambda m_i, \\ \sum_{j \in \Sigma_2} B_{ij} \tilde{m}_j &= \lambda m_i + \sum_{j \in \Sigma_1} B_{ij} \tilde{m}_j = -\lambda \tilde{m}_i + (1+q) \tilde{m}_i, \\ \sum_{j=1}^n B_{ij} \tilde{m}_j &= -\lambda \tilde{m}_i + (1+q) \tilde{m}_i + (1+q) \tilde{m}_i = (2(1+q) - \lambda) \tilde{m}_i. \end{aligned}$$

Пусть $i \in \Sigma_2$. Тогда

$$\begin{aligned} - \sum_{j \in \Sigma_1} B_{ij} m_j &= \lambda \tilde{m}_i - \sum_{j \in \Sigma_2} B_{ij} \tilde{m}_j = (\lambda - 1 - q) \tilde{m}_i, \\ \sum_{j=1}^n B_{ij} \tilde{m}_j &= (-\lambda + 1 + q) \tilde{m}_i + (1+q) \tilde{m}_i = (2(1+q) - \lambda) \tilde{m}_i. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. П. М.: Наука, 1984.
2. Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Наука, 1965.
3. Бурбаки Н. Группы и алгебра Ли. Группы Кокстера и системы Титса. М.: Мир, 1972.
4. Варченко А. Н. Асимптотики интегралов и структуры Ходжа // Итоги науки. Современные проблемы математики. 1983. Т. 22.
5. Ганнинг Р. К. Лекции о модулярных формах // Математика. 1964. Т. 8. № 6. С. 3–68.
6. Гивенталь А. Б. Скрученные формулы Пикара–Лефшеца // Функцион. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. № 4. С. 12–22.
7. Долгачев И. В. Автоморфные формы и квазиоднородные особенности // Функцион. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. № 2. С. 67–68.
8. Илюта Г. Г. Отношения между группами монодромии особенности // Функцион. анализ и его прилож. 1992. Т. 26. № 1. С. 9–16.
9. Илюта Г. Г. Группы монодромии краевых особенностей // Матем. сб. 1993. Т. 183. № 5. С. 29–42.
10. Илюта Г. Г. Теорема А'Кампо на дискриминанте // Функцион. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 2. С. 10–19.
11. Савельев И. В. Круговые многочлены и особенности комплексных гиперповерхностей // УМН. 1993. Т. 48. № 2. С. 197–198.
12. Серр Ж.-П. Проблема конгруэнцподгрупп для SL_2 // Математика. 1971. Т. 15. № 6. С. 12–45.
13. Фейт В. Исключительные подгруппы в GL_2 // Приложение к книге: Ленг С. Введение в теорию модулярных форм. М.: Мир, 1979.
14. Berman S., Lee Y. S., Moody R. V. The Spectrum of a Coxeter transformation, affine Coxeter transformations and the defect map // J. of Algebra. 1989. V. 121. P. 339–357.
15. Birman J. Braids, links and mapping class groups // Ann. of Math. Stud. V. 82. Princeton–N. J.: Princeton Univ. Press, 1974.
16. Brenner J. L. The linear homogeneous group. III // Ann. Math. 1960. V. 71. P. 210–223.
17. Brieskorn E. The Unfolding of exceptional singularities // Nova acta Leopoldina. NF52. 1981. № 240. P. 65–93.

18. *Chmutov S. V.* Monodromy groups of critical point of functions // Invent. Math. 1982. V. 67. P. 123–131.
19. *Chmutov S. V.* Monodromy groups of critical point of functions. II // Invent. Math. 1983. V. 73. P. 491–510.
20. *Ebeling W.* Vanishing lattices and monodromy groups of isolated complete intersection singularities // Invent. Math. 1987. V. 90. P. 653–668.
21. *Janssen W. A. M.* Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy groups. II // Math. Ann. 1985. V. 272. P. 17–22.
22. *Janssen W. A. M.* Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy groups: Thesis. Utrecht: Univ. of Utrecht, 1984.
23. *Klein F., Fricke R.* Vozlesungen über die Theorie der elliptische Modulfunctionen. V. 1. Leipzig: Teubner, 1890.
24. *Knopp M. I.* A note on subgroups of the modular group // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14. P. 95–97.
25. *Lindon R.* Two notes on Rankin's book on the modular group // J. Austr. Math. Soc. 1973. V. 16. P. 454–457.
26. *Lusztig G.* Quantum groups at root of 1 // Geom. Dedicata. 1990. V. 35. P. 89–114.
27. *Magnus W., Peluzo A.* On a theorem of V.I. Arnol'd // Comm. Pure Appl. Math. 1969. V. 22. P. 683–692.
28. *Mennicke J.* Finite factor groups of the unimodular group // Ann. Math. 1965. V. 81. P. 31–37.
29. *Newman M.* A complete description of the normal subgroups of genus one of the modular group // Amer. J. Math. 1964. V. 86. P. 17–24.
30. *Rankin R. A.* The modular group and its subgroups. The Ramanujan Institute, University of Madras, 1969.
31. *Reiner I.* Subgroups of the unimodular group // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 173–174.
32. *Wajnrib B.* On the monodromy of plane curve singularities // Ann. Math. 1980. V. 246. P. 141–154.
33. *Wenzl H.* Hecke algebras of type A and subfactors // Invent. Math. 1988. V. 92. P. 349–383.
34. *Wohlfahrt K.* An extension of F. Klein's level concept // Illinois J. Math. 1964. V. 8. P. 529–535.

Поступило в редакцию
1.XI.1994