Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Владимиров, Об уравнении p -адической открытой струны для скалярного поля тахионов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 3, 55–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/im640>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 17:23:38

УДК 517.958+530.1

В. С. Владимиров

Об уравнении p -адической открытой струны для скалярного поля тахионов

Исследуется структура решений одномерного нелинейного псевдодифференциального уравнения, описывающего динамику p -адической открытой струны для скалярного поля тахионов $p^{\frac{1}{2}}\partial_t^2\Phi = \Phi^p$. Выясняется роль вещественных нулей целой функции $\Phi^p(z)$ и поведение решений $\Phi(t)$ в окрестности этих нулей. Указывается на возможность появления разрывных решений при четном p . Применяется метод разложения решения Φ и функции Φ^p по полиномам Эрмита и по модифицированным полиномам Эрмита и устанавливается связь между коэффициентами этих разложений (интегральные законы сохранения). Для $p = 2$ построена бесконечная система нелинейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Эрмита и изучается ее структура. Рассмотрено 3-приближение. Указана связь сформулированных задач с нелинейной краевой задачей для уравнения теплопроводности.

Библиография: 15 наименований.

§ 1. Введение

Для описания динамики открытой p -адической струны для скалярного поля тахионов используется нелинейное псевдодифференциальное уравнение движения вида [1]–[9]

$$p^{\frac{1}{2}}\square\Phi = \Phi^p, \quad (1.1)$$

где

$$\square = \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \dots - \partial_{x_{d-1}}^2, \quad t = x_0,$$

– оператор Даламбера и p – простое число, $p = 2, 3, 5, \dots$. Далее будем считать p любым натуральным числом. Физический смысл имеют вещественные решения уравнения (1.1), и впредь только такие решения будут рассматриваться.

В одномерном случае ($d = 1$) с помощью замены неизвестной функции

$$\varphi(t) = \Phi(t\sqrt{2\ln p})$$

уравнение (1.1) приводится к эквивалентному виду

$$e^{\frac{1}{2}}\partial_t^2\varphi = \varphi^p. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) является нелинейным интегральным уравнением вида [9]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2} \varphi(\tau) d\tau = \varphi^p(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ № НШ-1542.2003.1 и Благотворительного фонда содействия отечественной науке.

Решение уравнения (1.3) ищется в классе измеримых функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию роста

$$|\varphi(t)| \leq C \exp\{(1 - \varepsilon)t^2\} \quad \text{при любом } \varepsilon > 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Для решений φ уравнения (1.3) физический смысл имеют следующие краевые задачи: для четных p

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 1; \quad (1.5)$$

для нечетных p

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 1. \quad (1.6)$$

В § 2 приведены необходимые для дальнейшего сведения о полиномах Эрмита $H_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, вводятся модифицированные полиномы Эрмита $V_n(t)$, $n = 0, 1, \dots$, и изучаются их свойства. В § 3 изучаются свойства интегрального оператора K , стоящего в левой части уравнения (1.3), в пространстве L_2^α , $0 < \alpha < 2$. В § 4 дается разложение решения $\varphi(t)$ уравнения (1.3) в ряды по полиномам H_n и V_n , а функции $\varphi^p(t)$ – в ряды Тейлора и по H_n , и устанавливается связь между этими разложениями, в частности доказывается важное равенство (4.5), играющее роль интегральных законов сохранения:

$$(\varphi^p, H_n)_1 = (\varphi, V_n)_{1/2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

В § 5 предлагается новый метод исследования уравнения (1.3), сводящий решение этого уравнения к решению нелинейной краевой задачи для уравнения теплопроводности, установлены некоторые следствия этой эквивалентности (теорема 5.1). В § 6 рассматривается линейное уравнение (1.3) ($p = 1$), устанавливается связь его решений с периодическими по x решениями уравнения теплопроводности (5.1) и эти решения выписываются в явном виде. Доказана теорема единственности в классе обобщенных функций медленного роста S' (теорема 6.1). Показано, что спектр интегрального оператора K непрерывный и сосредоточен на отрезке $[0, 1]$, вычислены (обобщенные) собственные функции. Для коэффициентов Эрмита $a_n = (\varphi, H_n)_1$, $n = 2, 3, \dots$, решения φ выведена бесконечная линейная треугольная система уравнений (6.8). В § 7 изучается краевая задача (1.3), (1.5) при четном p и устанавливается поведение ее решения в окрестности вещественных нулей целой функции $\varphi^p(z)$, $z = t + iy$, и в окрестности разрывов I-го рода решения $\varphi(t)$ (теорема 7.1). Вопрос о существовании решения этой задачи остается открытым так же, как и вопрос о возможности появления у него разрывов I-го рода. Там же изучается ветвление нулей интерполирующей функции $u(1 - \varepsilon, t - t_0)$ в ε -окрестности, $\varepsilon > 0$, нуля t_0 функции $\varphi^p(t)$ (теорема 7.2). В § 8 рассматривается специальный случай $p = 2$. Выводится бесконечная нелинейная система уравнений (8.3) для определения коэффициентов a_n решений уравнения (1.3). Рассмотрено 3-приближение. В § 9 выводится аналогичная система уравнений (9.4) для решения краевой задачи (1.3), (1.5) при $p = 2$. Рассмотрено 3-приближение. В § 10 для нечетного p изучается структура решений краевой задачи (1.3), (1.6), в частности поведение в окрестности вещественных нулей целой функции $\varphi^p(z)$ при условии существования решения (теорема 10.1); указывается на существование нечетного непрерывного решения краевой задачи (1.3), (1.6) [9].

Наряду с решением $\varphi(t)$ уравнения (1.3) функция $\varphi(t + t_0)$ при любом t_0 также является решением. Поэтому если решение $\varphi(t)$ существует, то оно заведомо неединственно. Вопрос о том, будут ли сдвиги решения $\varphi(t)$ по t , т.е. $\varphi(t + t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, исчерпывать все решения уравнения (1.3), остается открытым.

Для исследования интегрального уравнения (1.3) наиболее естественными являются полиномы Эрмита, поскольку его ядро есть производящая функция для них (§4). Поэтому в настоящей статье систематически используются эти полиномы для построения решений (точных или приближенных) уравнения (1.3). Отметим, что полиномы Эрмита использовались также в работах [13]–[15] в теории D -бранных возмущений, а также для более сложных задач, совместно описывающих тахионы для открытых и замкнутых струн.

Далее нам понадобится шкала весовых сепарабельных гильбертовых пространств L_2^α , $0 < \alpha < \infty$, состоящих из измеримых квадратично-суммируемых функций на $\mathbb{R}$ по мере

$$d\mu_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2} dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_\alpha(t) = 1, \quad \alpha > 0,$$

со скалярным произведением и нормой

$$(f, g)_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{g}(t) d\mu_\alpha(t), \quad \|f\|_\alpha = \sqrt{(f, f)_\alpha}, \quad f, g \in L_2^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Вложение $L_2^\alpha \subset L_2^\beta$, $\alpha < \beta$, плотно и непрерывно, причем

$$\|f\|_\beta \leq \|f\|_\alpha, \quad f \in L_2^\alpha. \quad (1.7)$$

При рассмотрении краевых задач (1.3), (1.5) и (1.3), (1.6) нам понадобится следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Если φ – решение уравнения (1.3) такое, что*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = a, \quad |a| < \infty,$$

то $a = 0$ или $a = 1$ при четном p и $a = 0$ или $a = \pm 1$ при нечетном p . При этом $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi^p)'(t) = 0$ и если $a \neq 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (1.3) имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^p(t) &= \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \right]^p = a^p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-(t-\tau)^2} d\tau \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-u) e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t-u) e^{-u^2} du = a, \end{aligned}$$

откуда следует, что $a = 0$ или $a = 1$ при четном p и $a = 0, \pm 1$ при нечетном p . Далее,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi^p)'(t) &= -2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) (t-\tau) e^{-(t-\tau)^2} d\tau \\ &= -2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-u) u e^{-u^2} du = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t-u) u e^{-u^2} du \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} a \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-u^2} du = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} a \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Если $a \neq 0$, то отсюда следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = 0$ в силу

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi^p)'(t) = p \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^{p-1}(t) \varphi'(t) = p a^{p-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = 0.$$

Возможность переходов к пределу под знаком интеграла обеспечивается теоремой Лебега и оценкой (1.4).

Обозначим $a \equiv b$, $a \not\equiv b$, если целые числа a и b одной или разной четности соответственно.

§ 2. Полиномы Эрмита

Полиномами Эрмита называются полиномы вида [10]

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

так что $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x, \dots$. Они образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве L_2^1 , причем

$$\|H_n\|_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) d\mu_1(x) = 2^n n!. \quad (2.2)$$

Если функция $f \in L_2^1$, то ее можно разложить в ряд по полиномам Эрмита:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, H_n)_1 \frac{H_n(x)}{2^n n!} \quad \text{в } L_2^1, \quad (2.3)$$

и справедливо равенство Парсеваля–Стеклова

$$\|f\|_1^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(f, H_n)_1|^2 \frac{1}{2^n n!}. \quad (2.4)$$

Имеют место следующие равенства:

$$(x^m, H_n)_1 = \begin{cases} 2^{n-m} m! \left(\frac{m-n}{2} ! \right)^{-1}, & m \geq n \text{ и } n \equiv m, \\ 0, & m < n \text{ или } n \not\equiv m. \end{cases} \quad (2.5)$$

Здесь мы воспользовались формулой 2.20.3.4 из [11, с. 487] при $\alpha = m + 1$, $p = c = 1$.

Значения полиномов в точке $x = 0$:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.6)$$

Разложение полиномов по степеням x (см. [12, формула 8.950, с. 1047]) имеет вид

$$H_n(x) = n! \sum_{\substack{m=0 \\ m \equiv n}}^n c_{n,m} x^m, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.7)$$

где

$$c_{n,m} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{2^m}{m!} \left(\frac{m-n}{2} ! \right)^{-1}, & m \equiv n \text{ и } m \leq n, \\ 0, & m \not\equiv n \text{ или } m > n. \end{cases} \quad (2.8)$$

Отсюда, в частности, получаем

$$\begin{aligned} c_{n,n} &= \frac{2^n}{n!}, & c_{2n,0} &= \frac{(-1)^n}{n!}, & c_{2n+1,1} &= 2 \frac{(-1)^n}{n!}, \\ c_{2n,2} &= -2 \frac{(-1)^n}{(n-1)!}, & c_{2n+1,3} &= -\frac{4(-1)^n}{3(n-1)!}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Асимптотическое поведение полиномов выражается формулой

$$H_n(x) = (2x)^n [1 + O(x^{-2})], \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (2.10)$$

Модифицированные полиномы Эрмита – это полиномы вида

$$V_n(x) = 2^{-n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.11)$$

так что $V_0(x) = 1$, $V_1(x) = x$, $V_2(x) = x^2 - 1$, $V_3(x) = x^3 - 3x, \dots$

Они образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве $L_2^{1/2}$, причем

$$\|V_n\|_{1/2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} V_n^2(x) d\mu_{1/2}(x) = n!. \quad (2.12)$$

Если функция $f \in L_2^{1/2}$, то ее можно разложить в ряд по модифицированным полиномам Эрмита:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, V_n)_{1/2} \frac{V_n(x)}{n!} \quad \text{в } L_2^{1/2}, \quad (2.13)$$

и справедливо равенство Парсеваля–Стеклова

$$\|f\|_{1/2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(f, V_n)_{1/2}|^2 \frac{1}{n!}. \quad (2.14)$$

Имеют место следующие равенства:

$$(H_m, V_n)_{1/2} = \begin{cases} 2^n m! \left(\frac{m-n}{2} ! \right)^{-1}, & m \geq n \text{ и } n \equiv m, \\ 0, & m < n \text{ или } n \not\equiv m, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$(H_n, V_m)_1 = \begin{cases} (-1)^{\frac{m-n}{2}} 2^{n-m} m! \left(\frac{m-n}{2} ! \right)^{-1}, & m \geq n \text{ и } n \equiv m, \\ 0, & m < n \text{ или } n \not\equiv m. \end{cases} \quad (2.16)$$

Здесь мы дважды воспользовались формулой 2.20.16.4 из [11, с.502] при $p = 1/2$, $b = 1$, $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и при $p = c = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Разложения полиномов V_n по H_n и полиномов H_n по V_n следуют из формул (2.3), (2.13), (2.15) и (2.16):

$$V_n(x) = 2^{-n} n! \sum_{\substack{m=0 \\ m \equiv n}}^n (-1)^{\frac{n-m}{2}} \left(\frac{m-n}{2} ! \right)^{-1} \frac{H_m(x)}{m!}, \quad (2.17)$$

$$H_n(x) = n! \sum_{\substack{m=0 \\ m \equiv n}}^n \frac{2^m}{m!} \left(\frac{m-n}{2} ! \right)^{-1} V_m(x). \quad (2.18)$$

Интегральное представление для модифицированных полиномов Эрмита имеет вид

$$V_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\tau) e^{-2(t/2-\tau)^2} d\tau, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.19)$$

Равенство (2.19) следует из [11, формула 2.20.3.16, с. 488] при $p = 2$, $c = 1$, $y = \tau/2$ и из определения (2.11) полиномов V_n .

Пусть $f \in L_2^{1/2}$. Тогда по (1.2) $f \in L_2^1$ и справедливы равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{H_n(x)}{2^n n!} = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{V_n(x)}{n!} \quad \text{в } L_2^1, \quad (2.20)$$

причем коэффициенты $a_n = (f, H_n)_1$ и $b_n = (f, V_n)_{1/2}$ выражаются через друг друга по формулам

$$a_n = \sum_{\substack{m \geq n \\ m \equiv n}}^{\infty} (-1)^{\frac{m-n}{2}} 2^{n-m} \left(\frac{m-n}{2} ! \right)^{-1} b_m, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.21)$$

$$b_n = \sum_{\substack{m \geq n \\ m \equiv n}}^{\infty} 2^{n-m} \left(\frac{m-n}{2} ! \right)^{-1} a_m, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.22)$$

Эти формулы следуют из (2.19), (2.15) и (2.16).

§ 3. Свойства оператора K

Обозначим через K линейный интегральный оператор в уравнении (1.3):

$$\varphi \rightarrow (K\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2} \varphi(\tau) d\tau.$$

ЛЕММА 3.1. *Оператор K переводит всякую функцию $f(t)$, удовлетворяющую условию (1.4), в целую функцию $(Kf)(z)$ с оценкой*

$$|(Kf)(z)| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \exp \left\{ y^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) t^2 \right\}, \quad z = t + iy. \quad (3.1)$$

Доказательство сразу следует из оценки (1.4):

$$\begin{aligned} |(Kf)(z)| &\leq \frac{C}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(1-\varepsilon)\tau^2} |e^{-(t-\tau)^2}| d\tau \\ &= \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{y^2-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\tau^2+2t\tau} d\tau = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} e^{y^2+(1/\varepsilon-1)t^2}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.2. Оператор K переводит функцию $f \in L_2^\alpha$, $0 < \alpha < 2$, в целую функцию $(Kf)(z)$ с оценкой

$$|(Kf)(z)| \leq \|f\|_\alpha (2-\alpha)^{-1/4} \exp\left\{y^2 + \frac{\alpha}{2-\alpha} t^2\right\}, \quad z = t + iy. \quad (3.2)$$

Доказательство вытекает из неравенства Коши–Буняковского, примененного к функции $(Kf)(z)$, и в силу следующих оценок:

$$\begin{aligned} |(Kf)(z)| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| e^{-\alpha\tau^2/2} \left| \exp\left\{-z^2 + 2z\tau - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\tau^2\right\} \right| d\tau \\ &\leq \|f\|_\alpha \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\exp\{2z^2 + 4t\tau - (2-\alpha)\tau^2\}| d\tau \right]^{1/2} \\ &\leq \|f\|_\alpha \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2y^2 - 2t^2 + 4t\tau - (2-\alpha)\tau^2\} d\tau \right]^{1/2} \\ &= \|f\|_\alpha \exp\left\{y^2 + \frac{\alpha}{2-\alpha} t^2\right\} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{(2-\alpha)\left(\tau - \frac{2t}{2-\alpha}\right)^2\right\} d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.3. Оператор $K: L_2^\alpha \rightarrow L_2^\beta$, $0 < \alpha < 2$, $\beta > \frac{2\alpha}{2-\alpha}$, ограничен, и справедлива оценка

$$\|Kf\|_\beta \leq \left(\frac{2\beta^2}{\alpha} - 2\beta - \beta^2\right)^{-1/4} \|f\|_\alpha, \quad f \in L_2^\alpha. \quad (3.3)$$

Доказательство следует из цепочки равенств и неравенств для $f \in L_2^\alpha$:

$$\begin{aligned} \|Kf\|_2^\beta &= \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} |(Kf)(t)|^2 dt \\ &= \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\beta+2)t^2} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-(\alpha/2)\tau^2 - (1-\alpha/2)\tau^2 + 2t\tau} d\tau \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\beta+2)t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau^2} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2-\alpha)\tau^2 + 4t\tau} d\tau dt \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \|f\|_2^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\beta+2-\frac{4}{2-\alpha})t^2} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2-\alpha)\tau^2} d\tau \\ &= (2\beta - 2\alpha - \alpha\beta)^{-1/2} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \|f\|_2^\alpha \left[2\alpha \left(\beta + 2 - \frac{4}{2-\alpha} \right) \right]^{-1/2}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.4. Если $f \in L_2^1$, то ее образ $(Kf)(t)$ разлагается в ряд Тейлора:

$$(Kf)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad a_n = (f, H_n)_1, \quad (3.4)$$

сходящийся равномерно на каждом компакте $\mathbb{R}$. Если $f \in L_2^{1/2}$, то

$$(Kf)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{H_n(t)}{2^n n!} \quad \text{в } L_2^1, \quad b_n = (Kf, H_n)_1, \quad (3.5)$$

при этом справедливы равенства

$$(Kf, H_n)_1 = (f, V_n)_{1/2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $(Kf)(t)$ по лемме 3.3 есть след целой функции $(Kf)(z)$ при $y = 0$, и поэтому она разлагается в ряд Тейлора с коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} (Kf)(t)|_{t=0} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{d^n}{dt^n} e^{-(t-\tau)^2} d\tau \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) (-1)^n e^{-(t-\tau)^2} H_n(t-\tau) d\tau \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) (-1)^n H_n(-\tau) e^{-\tau^2} d\tau = (f, H_n)_1 = a_n. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенством (2.1).

Далее, если $f \in L_2^{1/2}$, то по лемме 3.3 $Kf \in L_2^1$ и в силу (2.20) справедливо разложение (3.5). Докажем равенства (3.6):

$$(Kf, H_n)_1 = (f, K^* H_n)_{1/2} = (f, V_n)_{1/2}.$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.19), согласно которой $V_n = K^* H_n$, где K^* – оператор, сопряженный оператору K .

§ 4. Разложение решений в ряды по полиномам Эрмита

Пусть φ – решение уравнения (1.3) из L_2^1 , так что $\varphi^p = K\varphi$. Тогда, обозначая $a_n = (\varphi, H_n)_1$, в силу (2.3) и (2.4) будем иметь

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{H_n(t)}{2^n n!} \quad \text{в } L_2^1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{2^n n!} = \|\varphi\|^2. \quad (4.1)$$

При этом функция $\varphi^p(t)$ есть след целой функции $A(z) = (K\varphi)(z)$, удовлетворяющей оценке (3.2) при $\alpha = 1$:

$$|A(z)| \leq \|\varphi\|_1 e^{|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.2)$$

и по лемме 3.4 она разлагается в ряд Тейлора (3.4):

$$\varphi^p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}. \quad (4.3)$$

Если решение уравнения (1.3) $\varphi \in L_2^{1/2}$, то по лемме 3.3 $\varphi^p \in L_2^1$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi^p\|_1 \leq \|\varphi\|_{1/2}, \quad (4.4)$$

а по лемме 3.4 справедливы равенства (3.6) (интегральные законы сохранения)

$$(\varphi^p, H_n)_1 = b_n = (\varphi, V_n)_{1/2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.5)$$

Поэтому функция $\varphi^p(t)$ разлагается в ряд по полиномам Эрмита, а функция $\varphi(t)$ – по модифицированным полиномам Эрмита:

$$\varphi^p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{H_n(t)}{2^n n!} \quad \text{в } L_2^1, \quad (4.6)$$

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{V_n(t)}{n!} \quad \text{в } L_2^{1/2}, \quad (4.7)$$

и имеют место соответствующие равенства Парсеваля–Стеклова

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{2^n n!} = \|\varphi^p\|_1^2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{n!} = \|\varphi^p\|_{1/2}^2. \quad (4.8)$$

Отметим, что коэффициенты a_n и b_n связаны соотношениями (2.21) и (2.22).

§ 5. Связь решения $\varphi(t)$ с решениями уравнения теплопроводности

Интегральное уравнение (1.3) эквивалентно следующей краевой задаче для уравнения теплопроводности:

$$u_x = \frac{1}{4} u_{tt}, \quad 0 < x \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(1, t) = \varphi^p(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Решением краевой задачи (5.1), (5.2) назовем всякую измеримую функцию $u(x, t)$, ограниченную условием роста (1.4), где C не зависит от x . Функцию $u(x, t)$ назовем *интерполирующей* между решением $\varphi(t)$ и его степенью $\varphi^p(t)$.

Отметим, что интерполирующая функция, если она существует, представляется формулой Пуассона для уравнения (5.1):

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \exp\left\{-\frac{(t-\tau)^2}{x}\right\} d\tau, \quad 0 < x \leq 1. \quad (5.3)$$

Если функция φ удовлетворяет условию роста:

$$|\varphi(t)| \leq C \exp\{\varepsilon t^2\} \quad \text{при любом } \varepsilon > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

то формула (5.3) дает ее вещественно-аналитическое продолжение в область $x > 1$, $t \in \mathbb{R}$ и, далее, – аналитическое продолжение по (x, t) в комплексную область $T^+ \times \mathbb{C}$, где T^+ – правая полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta = x > 0$.

Из представления (5.3) следует, что если $\varphi(t)$ – решение краевых задач (1.3), (1.5) или (1.3), (1.6), то $|u(x, t)| < 1$, $0 \leq x$, $t \in \mathbb{R}$, $u(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (1.5) или (1.6) соответственно и $u(x, t) > 0$ при $x > 1$.

ПРИМЕР. Для решения

$$\varphi(t) = p^{\frac{1}{2(p-1)}} \exp \left\{ \frac{p-1}{p} t^2 \right\}$$

уравнения (1.3) интерполирующая функция имеет вид

$$u(x, t) = p^{\frac{1}{2(p-1)}} \left(1 - x + \frac{x}{p} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{t^2(p-1)}{p - xp + x} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $u(x, t)$ – интерполирующая функция между решением φ и его степенью φ^p краевых задач (1.3), (1.5) и (1.3), (1.6). Тогда справедливы равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t) [1 - \varphi^{2p-2}(t)] dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) dt dx, \quad (5.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t) - \varphi(t)] dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} [u(x+1, t) - \varphi^p(t)] dt = 0, \quad x \geq 0 \quad (5.6)$$

(закон сохранения).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнение (5.1) на $u(x, t)$ и интегрируя обе части по прямоугольнику $0 \leq x \leq 1$, $a \leq t \leq b$, получим с учетом (5.2) цепочку равенств

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_a^b uu_x dt dx &= \frac{1}{2} \int_a^b [u^2(1, t) - u^2(0, t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(t) [\varphi^{2p-2}(t) - 1] dt = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_a^b uu_{tt} dt dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^1 \int_a^b u_t^2 dt dx + \frac{1}{4} \int_0^1 [u(x, b)u_t(x, b) - u(x, a)u_t(x, a)] dx. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Однако, из представления (5.3) и в силу (1.5) и (1.6) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} u(x, b) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \varphi(b - \sqrt{x}v) e^{-v^2} dv = 1, \\ \lim_{b \rightarrow \infty} u_t(x, b) &= -\frac{2}{\sqrt{x\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \varphi(b - \sqrt{x}v) v e^{-v^2} dv = 0, \\ |u_t(x, b)| &< \frac{2}{\sqrt{x\pi}}, \quad 0 < x \leq 1. \end{aligned}$$

(Переход к пределу под знаком интеграла возможен в силу теоремы Лебега.) Аналогичные соотношения справедливы и для функций $u(x, a)$ и $u_t(x, a)$. Принимая их во внимание и переходя к пределу в равенствах (5.7), получим равенство (5.5).

Докажем равенство (5.6). Интегрируя уравнение (5.1) по прямоугольнику $0 \leq x \leq X$, $a \leq t \leq b$, как и выше, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \int_a^b [u(X, t) - \varphi(t)] dt &= \frac{1}{4} \int_0^X [u_t(x, b) - u_t(x, a)] dx \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^X \frac{1}{x\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(b-\tau)e^{-\frac{(b-\tau)^2}{x}} - (a-\tau)e^{-\frac{(a-\tau)^2}{x}} \right] \varphi(\tau) d\tau dx \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^X \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-v^2} [\varphi(b-v\sqrt{x}) - \varphi(a-v\sqrt{x})] dv dx. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow \infty$ и учитывая граничные условия (1.5) и (1.6), получим равенство (5.6).

СЛЕДСТВИЕ 5.1. 1) Для того чтобы интегралы

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \varphi^2(t) dt, \quad \int_0^{\infty} (1 - \varphi^{2p-2}(t)) dt \quad \text{для} \quad (1.3), (1.5), \\ \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \varphi^{2p-2}(t)) dt \quad \text{для} \quad (1.3), (1.6) \end{aligned} \quad (5.8)$$

сходились, необходимо и достаточно

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) dt dx < \infty.$$

2) Из равенства (5.6) при $x = 1$ следует равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(t) - \varphi^p(t)] dt = 0. \quad (5.9)$$

3) Для задачи (1.3), (1.5) сходятся интегралы

$$\int_0^{\infty} [1 - \varphi^{p-1}(t)] dt, \quad \int_0^{\infty} [1 - \varphi(t)] dt, \quad \int_0^{\infty} [1 - u(x, t)] dt, \quad x \geq 1,$$

а если $\varphi(t)$ знакопостоянна при $t < c$, то сходятся и интегралы

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt, \quad \int_{-\infty}^0 u(x, t) dt, \quad x \geq 1.$$

4) Для задачи (1.3), (1.6) сходятся интегралы

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \varphi^{p-1}(t)] dt, \quad \int_0^{\infty} [1 - \varphi(t)] dt, \quad \int_{-\infty}^0 [1 + \varphi(t)] dt, \\ \int_0^{\infty} [1 - u(x, t)] dt, \quad \int_{-\infty}^0 [1 + u(x, t)] dt, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

§ 6. Линейный случай ($p = 1$)

Рассмотрим линейное уравнение (1.3)

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-(t-\tau)^2} d\tau. \quad (6.1)$$

Для уравнения (6.1) естественно рассматривать более общую задачу – спектральную задачу на обобщенные собственные функции для оператора K (см. § 3):

$$\lambda \varphi = K \varphi, \quad \varphi \in L_2^\alpha, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (6.2)$$

ТЕОРЕМА 6.1. *Спектр оператора K непрерывный, сосредоточен на отрезке $[0, 1]$, и каждому собственному значению $\lambda_\xi = e^{-\xi^2/4}$, $-\infty < \xi < \infty$, соответствуют две собственные функции:*

$$\varphi_\xi(t) = \begin{cases} \cos(\xi t), \sin(\xi t), & \text{если } \xi \neq 0, \\ 1, t, & \text{если } \xi = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Этими функциями исчерпываются все решения уравнения (6.2) при $\lambda = \lambda_\xi$ в классе обобщенных функций медленного роста S' , они образуют плотное множество в пространстве L_2^α , $\alpha > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in S'$ – решение уравнения (6.2), представленного в виде свертки $\lambda \varphi = \varphi \star d\mu_1$. Переходя в нем к преобразованию Фурье $\tilde{\varphi}(\xi)$ и пользуясь теоремой о преобразовании Фурье свертки [13], получим уравнение

$$\lambda \tilde{\varphi}(\xi) = e^{-\xi^2/4} \tilde{\varphi}(\xi), \quad (6.4)$$

откуда выводим, что либо $\tilde{\varphi}(\xi) = 0$, либо при $\lambda = \lambda_{\xi_0}$ носитель $\tilde{\varphi}$ суть точки $\pm \xi_0$ (при $\xi_0 = 0$ – точка 0). В таком случае $\tilde{\varphi}$ представляется в виде

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \sum_{k=0}^n c_k \delta^{(k)}(\xi - \xi_0) + d_k \delta^{(k)}(\xi + \xi_0) \quad (6.5)$$

при некоторых (комплексных) c_k и d_k . Подставляя выражение (6.5) в уравнение (6.2) и пользуясь линейной независимостью обобщенных функций $\delta^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, n$, после естественных преобразований получим, что $c_k = d_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, при $\xi_0 \neq 0$ и $c_k = d_k = 0$, $k = 2, 3, \dots$, $d_1 = 0$ при $\xi_0 = 0$. Следовательно,

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \begin{cases} c_0 \delta(\xi - \xi_0) + d_0 \delta'(\xi - \xi_0) & \text{при } \xi_0 \neq 0, \\ c_0 \delta(\xi) + c_1 \delta'(\xi) & \text{при } \xi_0 = 0, \end{cases}$$

откуда и следует представление (6.3).

Полученные решения (6.3) образуют плотное множество в L_2^α , $\alpha > 0$. Действительно, если существует $f \in L_2^\alpha$, ортогональная ко всем функциям (6.3),

$$(f, \varphi_\xi)_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\alpha \tau^2} e^{i \xi \tau} d\tau = 0$$

при всех $\xi \in \mathbb{R}$, то, поскольку $f(\tau) e^{-\alpha \tau^2} \in L_1(\mathbb{R})$, имеем $f(\tau) e^{-\alpha \tau^2} = 0$ и, значит, $f(\tau) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}$.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Оператор K ограниченный, самосопряженный и положительный в $L_2(\mathbb{R})$, причем*

$$\|Kf\| \leq \|f\|, \quad (Kf, f) \geq 0, \quad f \in l_2(\mathbb{R}).$$

По теореме 6.1 уравнение (6.1) имеет два линейно независимых решения из S' : 1 и t . Решения уравнения (6.1) из $L_2^{1/2}$, если существуют, разлагаются в ряды (4.1), (4.3), (4.6) и (4.8) с $a_n = b_n = (\varphi, H_n)_1$, $n = 0, 1, \dots$. При этом бесконечные системы (2.21) и (2.22) принимают вид

$$\sum_{\substack{m=n+2 \\ m \equiv n}}^{\infty} (-1)^{\frac{m-n}{2}} 2^{n-m} \left(\frac{m-n}{2} ! \right)^{-1} a_m = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.6)$$

$$\sum_{\substack{m=n+2 \\ m \equiv n}}^{\infty} 2^{n-m} \left(\frac{m-n}{2} ! \right)^{-1} a_m = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.7)$$

Линейные системы (6.6) и (6.7) треугольные, они не содержат коэффициентов a_0 и a_1 и распадаются на четыре независимые блочно-треугольные системы при соответствующих значениях вычета n по модулю 4.

Действительно, вычитая и суммируя системы (6.6) и (6.7), получим четыре группы (при $\varkappa = 0, 1, 2, 3$) независимых блочно-треугольных систем для величин a_m , $m = 2 + 4k + 4l + \varkappa$, $l, k = 0, 1, \dots$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{2+4k+4l+\varkappa} \frac{1}{2^{4l}(2l+1)!} = 0, \quad \sum_{l=0}^{\infty} a_{2+4k+4l+\varkappa} \frac{1}{2^{4l}(2l+2)!} = 0. \quad (6.8)$$

Оказывается, что существуют нетривиальные решения системы (6.8) (кроме случая, когда a_0 и a_1 – произвольные и $a_2 = a_3 = \dots = 0$), удовлетворяющие условию $\sum a_m^2/m! < \infty$, т.е. существуют решения уравнения (6.1) из $L_2^{1/2}$ вида

$$\varphi_k^{\pm}(t) = e^{\pm 2\sqrt{k\pi}t} \cos(2\sqrt{k\pi}t), \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.9)$$

Это вытекает из существования периодических по x с периодом 1 решений уравнения теплопроводности (5.1):

$$u_k^{\pm}(x, t) = e^{\pm 2\sqrt{k\pi}t} \cos(2\sqrt{k\pi}t \pm 2k\pi x), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6.10)$$

так что $\varphi_k^{\pm}(t) = u_k^{\pm}(1, t)$.

§ 7. Случай четного $p = 2q$

Уравнение (1.3) принимает вид

$$\varphi^{2q}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-(t-\tau)^2} d\tau, \quad q = 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

Заметим, что наряду с решением $\varphi(t)$ уравнение (7.1) имеет решения $\varphi(-t)$ и $\varphi(t + t_0)$ при любом t_0 .

Пусть существует кусочно непрерывное решение $\varphi(t)$ краевой задачи (7.1), (1.5). Тогда в силу [9, теорема 2] $|\varphi(t)| < 1$ и $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi^{2q}(t) = A(t), \quad (7.2)$$

где $A(t) \geq 0$ – след целой функции $A(z)$, удовлетворяющей оценке (4.2). Существует два вещественных решения уравнения (7.2) в окрестности каждой точки t :

$$\varphi(t) = \pm A^{\frac{1}{2q}}(t). \quad (7.3)$$

Поэтому глобальная структура решения $\varphi(t)$ зависит от ее точек разрыва I-го рода T_k и от вещественных нулей t_k целой функции $A(z)$. Множества $\{T_k\}$ и $\{t_k\}$ ограничены сверху, конечны либо счетны.

В окрестности нуля t_k функция $\varphi^{2q}(t)$ в силу (7.2) имеет представление

$$\varphi^{2q}(t) = \frac{a_{2\sigma_k}}{(2\sigma_k)!} (t - t_k)^{2\sigma_k} [1 + O(|t - t_k|)], \quad (7.4)$$

где $a_{2\sigma_k} > 0$, кратность нуля $2\sigma_k$ – четное число, так что функция $\varphi(t)$ в окрестности точки t_k имеет вид

$$\varphi(t) = \pm \left[\frac{a_{2\sigma_k}}{(2\sigma_k)!} \right]^{\frac{1}{2q}} |t - t_k|^{\frac{\sigma_k}{q}} [1 + O(|t - t_k|)] \quad (7.5)$$

и справедливы равенства

$$\frac{2^{2\sigma_k}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) (t_k - \tau)^n e^{-(t_k - \tau)^2} d\tau = \begin{cases} a_{2\sigma_k} > 0, & n = 2\sigma_k, \\ 0, & n = 0, 1, \dots, 2\sigma_k - 1. \end{cases} \quad (7.6)$$

В окрестности точки разрыва I-го рода T_k функция $\varphi(t)$ в силу (7.3) имеет представление

$$\varphi(t) = \pm \operatorname{sgn} t A^{\frac{1}{2q}}(t) \quad (7.7)$$

и поэтому имеет скачок в точке T_k , равный

$$2A^{\frac{1}{2q}}(T_k + 0) \quad \text{или} \quad -2A^{\frac{1}{2q}}(T_k + 0).$$

Рассмотрим различные случаи.

а) Функция $A(t)$ не имеет нулей, так что $A(t) > 0$ при всех t . По теореме 3 из [9] функция $\varphi(t) = A^{1/(2q)}(t) > 0$ не может быть решением краевой задачи (7.1), (1.5). Поэтому она должна менять знак, а значит, существует точка T_0 , в окрестности которой $\varphi(t)$ представляется в виде (7.7).

Отметим, что если $\varphi(t)$ имеет только один разрыв I-го рода в точке T_0 , т.е. $\varphi(t) > 0$ при $t > T_0$ и $\varphi(t) < 0$ при $t < T_0$, то необходимо, чтобы

$$A'(T_0) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)(T_0 - \tau)e^{-(T_0 - \tau)^2} d\tau > 0. \quad (7.8)$$

б) Пусть функция $A(t)$ имеет только один нуль t_0 , так что $A(t_0) = A'(t_0) = 0$. Тогда непрерывного решения $\varphi(t)$ краевой задачи (7.1), (1.5) не существует. Действительно, в этом случае $\varphi(t) > 0$ при $t > t_0$ и $\varphi(t) < 0$ при $t < t_0$, и поэтому в силу (7.8) с заменой T_0 на t_0 было бы $A'(t_0) > 0$, что противоречит соотношению $A'(t_0) = 0$. Поэтому и в этом случае могут существовать разрывы I-го рода.

с) Пусть функция $A(t)$ имеет только два нуля: $t_0 = 0$ и $t_1 < 0$, так что $A(0) = A'(0) = 0$ и $A(t_1) = A'(t_1) = 0$. Для непрерывных решений возможны следующие четыре случая:

$$\varphi(t) = \begin{cases} A^{\frac{1}{2q}}(t), & t > 0, \\ \pm A^{\frac{1}{2q}}(t), & t_1 < t < 0, \\ \pm A^{\frac{1}{2q}}(t), & t < t_1. \end{cases} \quad (7.9)$$

Докажем, что из этих четырех случаев возможен лишь один:

$$\varphi(t) = \begin{cases} A^{\frac{1}{2q}}(t), & t > 0, \\ -A^{\frac{1}{2q}}(t), & t_1 < t < 0, \\ A^{\frac{1}{2q}}(t), & t < t_1. \end{cases} \quad (7.10)$$

Действительно, случай $(+, +)$ противоречит теореме 3 из [9]. Случай $(-, -)$ противоречит соотношению $A'(0) = 0$ (см. (7.8) при $T_0 = 0$), а случай $(+, -)$ – соотношению $A'(t_1) = 0$ (см. (7.8) при $T_0 = t_1$).

д) Пусть решение $\varphi(t)$ непрерывно и функция $\varphi^{2q}(t)$ имеет нуль t_0 кратности $2n$. Тогда $\varphi(t)$ имеет по крайней мере $2n$ перемен знака.

Действительно, без ограничения общности можно считать, что $t_0 = 0$, и в силу (7.6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \tau^k e^{-\tau^2} d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2n - 1. \quad (7.11)$$

Пусть, напротив, $\varphi(t)$ имеет $m < 2n$ перемен знака. Обозначим через (a_k, b_k) , $k = 1, 2, \dots, m \leq 2n - 1$, интервалы, в которых функция $\varphi(t)$ отрицательна, а в дополнительных отрезках – неотрицательна. Существует полином степени m такой, что $P(t) > 0$ при $t \in (a_k, b_k)$ и $P(t) \geq 0$ в дополнительных отрезках. Но тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) P(\tau) e^{-\tau^2} d\tau > 0,$$

что противоречит (7.11).

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7.1. Если φ – решение краевой задачи (7.1), (1.5), то:

- 1) если $\varphi^{2q}(t)$ не имеет нулей или имеет только один нуль, то $\varphi(t)$ может иметь разрывы I-го рода в точках T_k со скачками $\pm 2\varphi(T_k + 0)$;
- 2) если $\varphi^{2q}(t)$ имеет только два нуля t_0 и t_1 и $\varphi(t)$ непрерывна, то она имеет структуру (7.10);
- 3) в окрестности нуля t_k решение $\varphi(t)$ имеет представление (7.5) и справедливы соотношения (7.6);
- 4) если решение $\varphi(t)$ непрерывно, то число перемен знака его не превосходит числа нулей функции $\varphi^{2q}(t)$ и не меньше $\sup_k 2\sigma_k$, где $2\sigma_k$ – кратность нуля t_k ;
- 5) решение $\varphi(t)$ – кусочно вещественно-аналитическое всюду, за исключением его нулей и точек разрыва I-го рода.

Для нулей интерполирующей функции $u(x, t)$ докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7.2 (о ветвлении нулей). Пусть $u(x, t)$ – интерполирующая функция между решением φ краевой задачи (5.1), (5.2) и φ^{2q} такая, что $u(1, t)$ имеет в точке $t = 0$ нуль кратности $2n$. Тогда уравнение

$$u(1 - \varepsilon, t) = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad (7.12)$$

имеет ровно $2n$ простых вещественных корней

$$t_k^\pm(\varepsilon) = \frac{1}{2} \lambda_k^\pm \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.13)$$

где $\lambda_k^\pm$ – корни уравнения

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{\lambda^{2n-2m}}{(2n-2m)! m!} = 0. \quad (7.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу изложенного в §5 функция $u(x, t)$ допускает голоморфное продолжение в область $T^+ \times \mathbb{C}$. Далее, ввиду положительности функции $u(1, t) = \varphi^{2q}(t) > 0$ кратность ее нуля $t = 0$ четная, $2n$, и, стало быть,

$$u(1, 0) = u'(1, 0) = \dots = u^{(2n-1)}(1, 0) = 0, \quad u^{(2n)}(1, 0) = a > 0. \quad (7.15)$$

Разложим функцию $u(1 - \varepsilon, t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(1, 0)$:

$$u(1 - \varepsilon, t) = \sum_{m=0}^{2n} \frac{1}{m!} \sum_{s=0}^m C_m^s \frac{\partial^m u(1, 0)}{\partial x^s \partial t^{m-s}} (-\varepsilon)^s t^{m-s} + R_1(\varepsilon, t), \quad (7.16)$$

где остаточный член $R_1 \in C^\infty$ при некотором $\theta \in (0, 1)$ вычисляется по формуле

$$R_1 = \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{s=0}^{2n+1} C_{2n+1}^s \frac{\partial^{2n+1} u(1 - \theta\varepsilon, \theta t)}{\partial x^s \partial t^{2n+1-s}} (-\varepsilon)^s t^{2n+1-s}. \quad (7.17)$$

Учитывая, что все производные функции $u(x, t)$ ограничены в окрестности точки $(1, 0)$, для R_1 из (7.17) выводим оценку

$$|R_1(\varepsilon, t)| \leq C_1 \sum_{s=0}^{2n+1} |\varepsilon|^s |t|^{2n+1-s}.$$

Воспользовавшись равенствами (7.15) и уравнением теплопроводности (5.1), приведем равенство (7.16) к виду

$$u(1 - \varepsilon, t) = a \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{t^{2n-2m}}{(2n-2m)! m!} \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{n-m} + R_2(\varepsilon, t), \quad (7.18)$$

причем для R_2 справедлива оценка

$$|R_2(\varepsilon, t)| \leq C_2 \sum_{s=1}^{2n} \varepsilon^s t^{2n-s}.$$

Введем новую независимую переменную

$$\lambda = \frac{2t}{\varepsilon}, \quad t = \frac{\lambda \varepsilon}{2}. \quad (7.19)$$

В результате уравнение (7.18) примет вид

$$u(1 - \varepsilon, t) = a 4^{-n} \varepsilon^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{\lambda^{2n-2m}}{(2n-2m)! m!} + R_3(\varepsilon, \lambda), \quad (7.20)$$

$$|R_3(\varepsilon, \lambda)| \leq C_3 \varepsilon^{n+1/2}. \quad (7.21)$$

Для нулей $t(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon}/2$ функции $u(1 - \varepsilon, t)$ (см. (7.12)) из равенства (7.20) следует, после сокращения на $a 4^{-n} \varepsilon^n$, уравнение

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{\lambda^{2n-2m}}{(2n-2m)! m!} = R_4(\varepsilon, \lambda), \quad |R_4(\varepsilon, \lambda)| \leq C_4 \sqrt{\varepsilon}. \quad (7.22)$$

Уравнение

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{\Lambda^{n-m}}{(2n-2m)! m!} = 0 \quad (7.23)$$

имеет n положительных корней Λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, и, значит, уравнение (7.14) имеет $2n$ вещественных корней $\lambda_k^\pm = \pm \sqrt{\Lambda_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. При этом уравнение (7.22) в окрестности корня λ_m^+ (и аналогично – корня λ_k^-) принимает вид

$$\lambda - \lambda_k^+ = \frac{r(\varepsilon, \lambda)}{(\lambda - \lambda_k^-) \prod_{i \neq k} (\lambda^2 - \Lambda_i)} \equiv R_5(\varepsilon, \lambda), \quad (7.24)$$

где в силу (7.23) остаточный член R_5 обладает свойствами

$$|R_5(\varepsilon, \lambda)| \leq C_5 \sqrt{\varepsilon}, \quad |R_5(\varepsilon, \lambda) - R_5(\varepsilon, \lambda')| \leq C_5 \sqrt{\varepsilon} |\lambda - \lambda'|.$$

Поэтому в силу принципа сжатых отображений в окрестности корня λ_k^+ уравнение (7.24) имеет единственное непрерывное решение

$$\lambda_k^+(\varepsilon) = \lambda_k^+ + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

а значит, в силу (7.19) существует ровно $2n$ корней (7.13) уравнения (7.12) в ε -окрестности, $\varepsilon > 0$, точки $(1, 0)$.

ПРИМЕР. При $n = 1$ уравнение (7.14) принимает вид $\lambda^2 = 2$; при $n = 2$ – вид

$$\lambda^4 - 12\lambda^2 + 12 = 0,$$

$$\lambda_1^\pm = \pm\sqrt{6 + 2\sqrt{6}}, \quad \lambda_2^\pm = \pm\sqrt{6 - 2\sqrt{6}};$$

при $n = 3$ – вид

$$\lambda^6 - 30\lambda^4 + 180\lambda^2 - 120 = -0,$$

$$\lambda_1^\pm \approx \pm 0,76, \quad \lambda_2^\pm \approx \pm 7,14, \quad \lambda_3^\pm \approx \pm 22,10.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. Если $\varphi(t)$ – решение уравнения (7.1), удовлетворяющее оценке (5.4), то при всех $x > 1/(2q - 1)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{2q}(\tau) \exp\left\{-\frac{(t-\tau)^2}{x}\right\} d\tau$$

$$\leq x^{\frac{q}{2q-1}} (1+x)^{-\frac{1}{4q-2}} \sqrt{\frac{2q-1}{2qx-x-1}}. \quad (7.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначая левую часть неравенства (7.25) через $J(x, t)$, пользуясь краевыми условиями (5.2) и свойствами решений уравнения теплопроводности, при всех $x > 1/(2q - 1)$ получим в силу неравенства Гёльдера цепочку соотношений

$$J(x, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{2q}(\tau) \exp\left\{-\frac{(t-\tau)^2}{x}\right\} d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+x)}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \exp\left\{-\frac{(t-\tau)^2}{1+x}\right\} d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi(1+x)}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \exp\left\{-\frac{(t-\tau)^2}{2qx}\right\} \exp\left\{-\frac{(t-\tau)^2(2qx-x-1)}{(1+x)2qx}\right\} d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+x)}} [\sqrt{\pi t J}]^{\frac{1}{2q}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(t-\tau)^2(2qx-x-1)}{x(1+x)(2q-1)}\right\} d\tau \right)^{1-\frac{1}{2q}},$$

откуда выводим неравенство

$$J^{1-\frac{1}{2q}} \leq \frac{(\pi x)^{\frac{1}{4q}}}{\sqrt{\pi x(1+x)}} \left(\sqrt{\frac{\pi x(1+x)(2q-1)}{2qx-x-1}} \right)^{1-\frac{1}{2q}}$$

и, следовательно, получаем неравенство (7.25).

СЛЕДСТВИЕ 7.1. При $x = 1$ оценка (7.25) при $q = 2, 3, \dots$ принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{2q}(\tau) \exp\{-(t-\tau)^2\} d\tau \leq 2^{-\frac{1}{4q-2}} \sqrt{\frac{2q-1}{2q-2}}. \quad (7.26)$$

§ 8. Случай $p = 2$, решение уравнения

Уравнение (1.3) при $p = 2$ принимает вид

$$\varphi^2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-(t-\tau)^2} d\tau. \quad (8.1)$$

Пусть $\varphi(t)$ – решение уравнения (8.1) из L_2^1 . Выведем формально бесконечную систему нелинейных уравнений для коэффициентов a_n в разложении (4.3) функции φ^2 и в разложении (4.1) функции φ . Ряд Тейлора для $\varphi(t)$ вытекает из ряда (4.1) с помощью переразложения (2.7) полиномов Эрмита по степеням t . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi^2(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{2^m m!} H_m(t) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{2^s s!} H_s(t) \\ &= \sum_{\substack{m=0 \\ s=0}}^{\infty} \frac{a_m a_s}{2^{m+s}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv m}}^m c_{m,k} t^k \sum_{\substack{i=0 \\ i \equiv s}}^s c_{s,i} t^i \\ &= \sum_{\substack{m=0 \\ s=0}}^{\infty} \frac{a_m a_s}{2^{m+s}} \sum_{n=0}^{m+s} t^n \sum_{\substack{k \equiv m \\ i \equiv s}}^{k+i=n} c_{m,k} c_{s,i} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{m+s \geq n} \sum_{\substack{m=k \\ m \equiv k}}^{\infty} \frac{a_m a_s}{2^{m+s}} \sum_{\substack{s=i \\ s \equiv i}}^{k+i=n} c_{m,k} c_{s,i} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k+i=n} \sum_{\substack{m=k \\ m \equiv k}}^{\infty} \sum_{\substack{s=i \\ s \equiv i}}^{\infty} \frac{a_m a_s}{2^{m+s}} c_{m,k} c_{s,i} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k+i=n} \left(\sum_{\substack{m=k \\ m \equiv k}}^{\infty} \frac{a_m}{2^m} c_{m,k} \right) \left(\sum_{\substack{s=i \\ s \equiv i}}^{\infty} \frac{a_s}{2^s} c_{s,i} \right). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Сравнивая разложение (8.2) с разложением (4.3), получим искомую систему нелинейных уравнений для коэффициентов a_n :

$$a_n = n! \sum_{k+i=n} \left(\sum_{\substack{m=k \\ m \equiv k}}^{\infty} \frac{a_m}{2^m} c_{m,k} \right) \left(\sum_{\substack{s=i \\ s \equiv i}}^{\infty} \frac{a_s}{2^s} c_{s,i} \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.3)$$

Отметим, что ряды в (8.3) сходятся в силу равенства Парсеваля–Стеклова (4.1) и неравенства Коши–Буняковского.

Выпишем первые четыре уравнения системы (8.3) при $n = 0, 1, 2, 3$, используя равенства (2.9) для коэффициентов $c_{m,k}$. При $n = 0$

$$a_0 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m}}{4^m m!} \right)^2, \quad (8.4)$$

откуда следует линейное уравнение для чисел a_{2m} , $m \geq 1$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m}}{4^m m!} = \varepsilon \sqrt{a_0}, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (8.5)$$

Рассмотрим сперва случай $a_0 > 0$. При $n = 1$

$$a_1 = 2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m}}{4^m m!} \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{a_{2s+1}}{4^s s!} \right), \quad (8.6)$$

откуда в силу (8.5) выводим линейное уравнение для чисел a_{2m+1} , $m \geq 0$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m+1}}{4^m m!} = \frac{a_1}{2\varepsilon\sqrt{a_0}}. \quad (8.7)$$

При $n = 2$

$$\begin{aligned} a_2 = & 2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m+1}}{4^m m!} \right)^2 \\ & - 8 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m}}{4^m m!} \right) \left(\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{a_{2s}}{4^s (s-1)!} \right), \end{aligned} \quad (8.8)$$

откуда и из (7.5) и (7.7) имеем линейное уравнение для чисел a_{2m} , $m \geq 1$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m}}{4^m (m-1)!} = \frac{1}{8\varepsilon\sqrt{a_0}} \left[\frac{a_1^2}{2a_0} - a_2 \right]. \quad (8.9)$$

Наконец, при $n = 3$

$$\begin{aligned} a_3 = & -8 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m}}{4^m m!} \right) \left(\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{a_{2s+1}}{4^s (s-1)!} \right) \\ & - 24 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m+1}}{4^m m!} \right) \left(\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{a_{2s}}{4^s (s-1)!} \right), \end{aligned} \quad (8.10)$$

откуда в силу (8.5), (8.7) и (8.9) вытекает линейное уравнение для чисел a_{2m+1} , $m \geq 1$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m+1}}{4^m (m-1)!} = -\frac{1}{8\varepsilon\sqrt{a_0}} \left[a_3 - \frac{3a_1}{2a_0} \left(\frac{a_1^2}{\varepsilon\sqrt{a_0}} - a_2 \right) \right]. \quad (8.11)$$

Таким образом, нелинейная система уравнений (8.3) при $n = 0, 1, 2, 3$ распадается на четыре линейных уравнения – уравнения (8.5) и (8.9) относительно коэффициентов с четными номерами a_{2m} , $m \geq 1$, и уравнения (8.7) и (8.11) относительно коэффициентов с нечетными номерами a_{2m+1} , $m \geq 1$. Подобная структура системы (8.3) сохраняется и при любом n .

Пусть теперь $a_0 = 0$, т. е. в силу (8.5)

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m}}{4^m m!} = 0. \quad (8.12)$$

Тогда из уравнения (8.6) следует $a_1 = 0$, а из (8.8) вытекает

$$a_2 = 2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m+1}}{4^m m!} \right)^2 \geq 0. \quad (8.13)$$

Если $a_2 = 0$, т.е. в силу (8.13)

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m+1}}{4^m m!} = 0, \quad (8.14)$$

то из (8.10) вытекает $a_3 = 0$. Далее аналогично. Наконец, найдется целое число $\sigma \geq 1$ такое, что $a_{2\sigma} > 0$, и тогда $a_{2\sigma+1} = 0$ (если решение ненулевое).

Разрешая систему (8.3) при $a_0 = a_1 = \dots = a_{2\sigma-1} = 0$, как и в случае $a_0 > 0$, построим по формуле (4.1) формальное решение уравнения (8.1).

В случае $a_2 > 0$ в силу (8.13) справедливы равенства

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m+1}}{4^m m!} = \pm \sqrt{\frac{a_2}{2}}. \quad (8.15)$$

Отсюда и из (8.10) выводим равенство

$$a_3 = \pm 24 \sqrt{\frac{a_2}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{2m}}{4^m (m-1)!}. \quad (8.16)$$

Для приближенного решения системы (8.3) необходимо положить $a_n = a_{n+1} = \dots = 0$ в первых n уравнениях ($(n-1)$ -приближение). В результате получим систему из n уравнений относительно n неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

Рассмотрим n -приближение, $n = 3$, при $a_0 > 0$. Из уравнений (8.5), (8.7), (8.9) и (8.11) получим следующую систему уравнений для коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 :

$$a_0 = \varepsilon \sqrt{a_0} + \frac{a_2}{4}, \quad a_0 \geq 0, \quad (8.17_0)$$

$$a_1 = 2\varepsilon \sqrt{a_0} \left(a_1 - \frac{a_3}{4} \right), \quad (8.17_1)$$

$$a_2 = \frac{a_1^2}{2a_0} + 2\varepsilon \sqrt{a_0} a_2, \quad (8.17_2)$$

$$a_3 = 2\varepsilon \sqrt{a_0} a_3 + \frac{3a_1 a_2}{\varepsilon \sqrt{a_0}}. \quad (8.17_3)$$

Рассмотрим линейную систему относительно коэффициентов a_1 и a_3 , состоящую из уравнений (8.17₁) и (8.17₃):

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon \sqrt{a_0}) a_1 + \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{a_0} a_3 &= 0, \\ -3 \frac{a_2 a_1}{\varepsilon \sqrt{a_0}} + (1 - 2\varepsilon \sqrt{a_0}) a_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Выпишем определитель этой системы:

$$D = 1 + 4a_0 - 4\varepsilon\sqrt{a_0} + \frac{3}{2}a_2,$$

что с учетом уравнения (8.17₀) дает

$$D = 1 + 10a_0 - 10\varepsilon\sqrt{a_0}. \quad (8.19)$$

Аналогично, при $a_0 = 0$ и $a_2 > 0$ из (8.15) и (8.16) получим систему уравнений для коэффициентов a_2 , a_3 :

$$a_3 = \pm\sqrt{8a_2}, \quad a_3 = \pm 3\sqrt{2}a_2^{3/2}. \quad (8.20)$$

Для решений систем (8.17) и (8.20) справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.1. Если $a_0 > 0$ и $D \neq 0$, то:

а) $a_0 = 1$ и $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, что соответствует тривиальному решению $\varphi(t) = 1$;

б) $a_0 = 1/4$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$ (и тогда $\varepsilon = 1$), что соответствует приближенному решению

$$\varphi \approx \frac{1}{2}(1 - t^2). \quad (8.21)$$

Если $a_0 > 0$ и $D = 0$ (и тогда $\varepsilon = 1$), то:

с) $a_0 = 0,4000 + \sqrt{0,15} \approx 0,7873$, $a_1 \approx \pm 0,6984$, $a_2 = -0,4000$, $a_3 \approx \pm 1,219$, что соответствует двум приближенным решениям

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\approx 0,7873 \pm 0,6984t - 0,05000H_2(t) \pm 0,02540H_3(t) \\ &= 0,8873 \pm 0,3936t - 0,2000t^2 \pm 0,2032t^3. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Если $a_0 = 0$ (и тогда $a_1 = 0$), то:

д) либо $a_2 = a_3 = 0$, либо $a_2 = 2/3$ и $a_3 = \pm 4/\sqrt{3}$, что соответствует либо тривиальному решению $\varphi(t) = 0$, либо двум приближенным решениям

$$\varphi(t) \approx \frac{1}{12}H_2(t) \pm \frac{1}{12\sqrt{3}}H_3(t). \quad (8.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a_0 > 0$, $D \neq 0$, то $a_1 = a_3 = 0$, а тогда уравнения (8.17₀) и (8.17₂) дают решения а) и б) (и $\varepsilon = 1$). Если $a_0 > 0$, $D = 0$, то $\varepsilon = 1$ и $a_0 = 0,4 \pm \sqrt{0,15}$. Из уравнения (8.17₀) следует $a_2 = -0,4$, а тогда из уравнений (8.17₂) и (8.17₃) следует, что $a_0 = 0,4 + \sqrt{0,15}$, и два приближенных решения с): при $a_1 \approx \pm 0,6984$ и $a_3 \approx \pm 1,219$. Если $a_0 = a_1 = 0$, то из (8.20) вытекает д).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Являются ли приближенные решения (8.21)–(8.23) “паразитными” или это первые члены неизвестных решений из L_2^1 ? По крайней мере до t^4 квадраты решений (8.22) совпадают с квадратами этих же решений

$$\varphi^2(t) \approx 0,7873 \pm 0,6984t - 0,2000t^2 \pm 0,2032t^3, \quad (8.24)$$

вычисленными по формуле (4.3).

§ 9. Случай $p = 2$, краевая задача

Изложенный в § 8 метод для решения уравнения (8.1) применим к решению краевой задачи (8.1), (1.5).

Пусть φ – решение краевой задачи (8.1), (1.5). Ищем это решение в виде

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + e^{-(\alpha^2-1)t^2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m H_m(\alpha t), \quad (9.1)$$

где α – некоторый параметр больше 1 и

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(t), \quad \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx. \quad (9.2)$$

Правая часть (9.1) удовлетворяет граничным условиям (1.5).

Для использования представления (9.1) необходимо убедиться в том, что система функций

$$\chi_n(t) = e^{-(\alpha^2-1)t^2} H_n(t), \quad n = 0, 1, \dots,$$

является базисом в сепарабельном гильбертовом пространстве L_2^1 . Для этого достаточно доказать ее полноту, т. е. если $f \in L_2^1$ такова, что

$$(f, \chi_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\alpha^2-1)t^2} H_n(t) dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

то $f = 0$. Это сразу следует из полноты системы полиномов Эрмита в L_2^1 .

Вычислим коэффициенты разложения $a_n = (\varphi, H_n)$ функции φ по полиномам Эрмита. Имеем

$$\begin{aligned} e_n = (\varphi_0, H_n) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\tau) H_n(\tau) e^{-\tau^2} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \delta_{n0} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{erf}(\tau) H_n(\tau) e^{-\tau^2} d\tau \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right), & n \equiv 1, \\ 0, & n \equiv 0, \quad n \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Здесь мы использовали [11, формула 2.20.10.1, с. 497] при $b = c = 1$.

Теперь, воспользовавшись [11, формула 2.20.16.4, с. 502] при $p = \alpha^2$, $b = \alpha$, $c = 1$, вычислим интеграл

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \tau^2} H_m(\alpha \tau) H_n(\tau) d\tau \\ &= \begin{cases} n! 2^m \left(\frac{n-m}{2}\right)!^{-1} (1-\alpha^2)^{\frac{n-m}{2}} \alpha^{-n-1}, & m \leq n \text{ и } m \equiv n, \\ 0, & m > n \text{ или } m \not\equiv n. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда и из (9.1), (9.3) получаем формулу для коэффициентов Эрмита функции φ :

$$a_n = e_n + n! \alpha^{-n-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \equiv n}}^n c_m 2^m \left(\frac{n-m}{2}! \right)^{-1} (1-\alpha^2)^{\frac{n-m}{2}}. \quad (9.4)$$

В частности,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} + \frac{c_0}{\alpha}, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2c_1}{\alpha^2}, \quad a_2 = -2c_0 \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3} + \frac{8c_2}{\alpha^3}, \\ *a_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - 12c_1 \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^4} + \frac{48c_3}{\alpha^4}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Подставляя выражения (9.4) для a_n в формулу (8.3), получим бесконечную систему нелинейных уравнений для определения неизвестных чисел c_m , входящих в формулу (9.1) для решения φ .

В рамках 3-приближения, полагая в (9.5) для определенности $a_0 = 0,7873$, $a_1 = 0,6984$, $a_2 = -0,4000$, $a_3 = 1,219$ (см. утверждение 7.1), получим уравнения для определения величин c_0 , c_1 , c_2 и c_3 :

$$\begin{aligned} 0,7873 &= \frac{1}{2} + \frac{c_0}{\alpha}, \quad 0,6984 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2c_1}{\alpha^2}, \\ -0,4000 &= -2c_0 \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3} + \frac{8c_2}{\alpha^3}, \quad 1,219 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - 12c_1 \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^4} + \frac{48c_3}{\alpha^4}. \end{aligned}$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} c_0 &= 0,2873\alpha, \quad c_1 = 0,1498\alpha^2, \\ c_2 &= 0,02182\alpha^3 - 0,07182\alpha, \quad c_3 = 0,07120\alpha^4 - 0,03746\alpha^2. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Полагая в (9.6) $\alpha^2 = 1,1$, получим

$$c_0 = 0,3014, \quad c_1 = 0,1648, \quad c_2 = -0,05016, \quad c_3 = 0,04494.$$

Подставляя найденные величины в формулу (9.1), получим приближенное решение краевой задачи (8.1), (1.5) в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(t) + e^{-0,1t^2} (0,3014 + 0,1648H_1(\sqrt{1,1}t) \\ &\quad - 0,05016H_2(\sqrt{1,1}t) + 0,04494H_3(\sqrt{1,1}t)) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(t) + e^{-0,1t^2} (0,4017 - 0,2200t - 0,2207t^2 + 0,4149t^3). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Аналогично строится и второе решение, если взять величины a_1 и a_3 со знаком “минус”.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Выбор $\alpha = \sqrt{1,1} \approx 1,049$ произвольный, метод не зависит от величины $\alpha > 1$ в разумных пределах. Для нахождения оптимального α необходимы дополнительные вычисления.

§ 10. Случай нечетного $p = 2q + 1$

Уравнение (1.3) при $p = 2q + 1$ принимает вид

$$\varphi^{2q+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-(t-\tau)^2} d\tau, \quad q = 1, 2, \dots \quad (10.1)$$

Отметим, что наряду с решением $\varphi(t)$, уравнение (10.1) имеет решения: $-\varphi(t)$, $\varphi(-t)$ и $\varphi(t + t_0)$ при любом t_0 .

Для построения решений уравнения (10.1) можно применить метод разложения по полиномам Эрмита, изложенный в § 7–9, однако вычисления будут довольно громоздкими даже в случае $p = 3$. Наконец, для решения краевой задачи (10.1), (1.6) может оказаться полезной подстановка, аналогичная подстановке (9.1):

$$\varphi(t) = \operatorname{erf}(t) + e^{-(\alpha^2-1)t^2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m H_m(\alpha t).$$

В работе [9] доказано существование непрерывного нечетного вещественно-аналитического при $t \neq 0$ решения краевой задачи (10.1), (1.6) с единственным вещественным нулем в точке $t = 0$, причем

$$\varphi(t) = (a_1 t)^{\frac{1}{2q+1}} [1 + O(|t|)], \quad t \rightarrow 0, \quad (10.2)$$

где

$$a_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\tau) e^{-\tau^2} \tau d\tau > 0. \quad (10.3)$$

Как и в случае четного p (см. § 7), справедлива следующая

ТЕОРЕМА 10.1. *Если $\varphi(t)$ – решение краевой задачи (10.1), (1.6), то оно непрерывно, функция $\varphi^{2q+1}(t)$ имеет конечное число нулей t_k конечной кратности σ_k , $k = 1, 2, \dots, l$, $\sum_{k=1}^l \sigma_k$ – нечетное число, причем*

$$\varphi(t) = \left[\frac{a_{\sigma_k}}{(\sigma_k)!} \right]^{\frac{1}{2q+1}} (t - t_k)^{\frac{\sigma_k}{2q+1}} [1 + O(|t - t_k|)], \quad t \rightarrow t_k, \quad (10.4)$$

где

$$\frac{2^{\sigma_k}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) (\tau - t_k)^n e^{-(t_k-\tau)^2} d\tau = \begin{cases} a_{\sigma_k}, & n = \sigma_k, \\ 0, & n = 0, 1, \dots, \sigma_k - 1. \end{cases} \quad (10.5)$$

Число перемен знака функций $\varphi(t)$ и $\varphi^{2q+1}(t)$ одинаково, нечетное, не больше l и не меньше $\max_{1 \leq k \leq l} \sigma_k$.

Выражаю глубокую благодарность В. И. Воловичу, А. К. Гушину и В. П. Михайлову за полезные обсуждения затронутых здесь вопросов.

Список литературы

1. *Brekke L., Freund P. G. O., Olson M., Witten E.* Non-Archimedean string dynamics // Nucl. Phys. B. 1988. V. 302. № 3. P. 365–402.
2. *Frampton P. H., Okada Y.* Effective scalar field theory of p -adic string // Phys. Rev. D. 1988. V. 37. № 10. P. 3077–3079.
3. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* p -Адитический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
4. *Brekke L., Freund P. G. O.* p -Adic Numbers in Physics // Phys. Rep. (Rev. Sect. Phys. Lett.). 1993. V. 233. № 1. P. 1–66.
5. *Moeller N., Zwiebach B.* Dynamics with Infinitely Many Time Derivatives and Rolling Tachyons // JHEP. 2002. V. 10. Paper 034. 39 p.
6. *Sen A.* Rolling Tachyon // JHEP. 2002. V. 4. Paper 048. 18 p.
7. *Ghoshal D., Sen A.* Tachyon Condensation and Brane Descent Relations in p -Adic String Theory // Nucl. Phys. B. 2000. V. 584. № 1–2. P. 300–312.
8. *Aref'eva I. Ja., Joukovskaja L. V., Koshelev A. S.* Time Evolution in Superstring Field Theory on non-BPS brane. I. Rolling Tachyon and Energy-Momentum Conservation // JHEP. 2003. V. 9. Paper 012. 15 p.
9. *Владимиров В. С., Волович Я. И.* О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны // ТМФ. 2004. Т. 138. № 3. С. 355–368.
10. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
12. *Градиштейн И. С., Рыжик М. И.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
13. *Minahan J. A.* Mode Interactions of the Tachyon Condensate in p -Adic String Theory // JHEP. 2001. V. 3. Paper 028. 16 p.
14. *Moeller N., Schnabl M.* Tachyon condensation in open-closed p -adic string theory // JHEP. 2004. V. 1. Paper 011. 18 p.
15. *Barnaby N.* Caustic Formation in Tachyon Effective Field Theories // JHEP. 2004. V. 7. Paper 025. 23 p.; arXiv:hep-th/0406120.