Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Резвякова, О нулях производных кси-функции Римана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 3, 109–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/im642>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:15:30

УДК 511

И. С. Резвякова

О нулях производных кси-функции Римана

Доказано, что для любой производной кси-функции Римана порядка $k \geq 1$, доля нулей, лежащих на критической прямой, больше $1 - \frac{3}{5} k^{-2}$.

Библиография: 11 наименований.

§ 1. Формулировка основного результата

Пусть $\xi(s)$ – кси-функция Римана, определяемая равенством

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \quad s = \sigma + it;$$

здесь $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера, $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана. Функция $\xi(s)$ – целая, первого порядка, и ее нули являются нулями дзета-функции Римана, лежащими в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Гипотеза Римана утверждает, что все нули функции $\xi(s)$ лежат на критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Г. Харди [1] в 1914 г. доказал, что на критической прямой лежит бесконечно много нулей функции $\xi(s)$. А. Сельберг [2] в 1942 г. доказал, что по крайней мере миллионная часть всех нулей функции $\xi(s)$ лежит на критической прямой. Наконец, в 1974 г. Н. Левинсон [3] доказал, что треть всех нулей ξ -функции Римана лежит на критической прямой. Дальнейшие улучшения этого результата см. в [4], [5].

Пусть k – натуральное число, $\xi^{(k)}(s)$ – k -я производная кси-функции Римана. Если справедлива гипотеза Римана, то для каждого k все нули функции $\xi^{(k)}(s)$ лежат на критической прямой (см. далее лемму 3).

При $T, U > 0$ определим функции $N_k(T)$, $N_k^{(0)}(T)$, $a_k(T, U)$ равенствами

$$N_k(T) = \sum_{\substack{\xi^{(k)}(\rho)=0 \\ 0 < \operatorname{Im} \rho \leq T}} 1, \quad N_k^{(0)}(T) = \sum_{\substack{\xi^{(k)}(\rho)=0 \\ \operatorname{Re} \rho=1/2 \\ 0 < \operatorname{Im} \rho \leq T}} 1,$$

$$a_k(T, U) = \frac{N_k^{(0)}(T+U) - N_k^{(0)}(T)}{N_k(T+U) - N_k(T)}.$$

Заметим, что $0 \leq a_k(T, U) \leq 1$ и равенство $a_0(T, U) = 1$ эквивалентно гипотезе Римана.

Б. Конри [4] в 1983 г. доказал следующую теорему: пусть T – достаточно большое положительное число, $L = \ln \frac{T}{2\pi}$, $U = TL^{-10}$. Тогда

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} a_k(T, U) = 1 + O(k^{-2}), \quad k \rightarrow +\infty.$$

В настоящей статье доказывается аналогичная теорема, результат которой является равномерным по параметрам T и k .

ТЕОРЕМА. *Существует положительная постоянная T_1 такая, что для произвольного $T \geq T_1$, любого натурального k из промежутка $1 \leq k \leq \frac{1}{2} \frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}$ и $U = T \left(\ln \frac{T}{2\pi} \right)^{-10}$ справедлива следующая оценка:*

$$a_k(T, U) \geq 1 - \frac{e^2 + 2}{16} k^{-2}.$$

Заметим, что задача о нулях функций $\xi^{(k)}(s)$ похожа на задачу о нулях производных Z -функции Харди, задаваемой равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где

$$e^{i\theta(t)} = \pi^{-it/2} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \right|^{-1}.$$

Функция $Z(t)$ является вещественной при вещественных t , и вещественные нули функции $Z(t)$ являются нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой.

В 1981 г. А. А. Карацуба доказал [7], что для любого целого числа $k \geq 0$, $T \geq T_1(k) > 0$, $H \geq cT^{1/(6k+6)}(\ln T)^{2/(k+1)}$, где $c = c(k) > 0$, промежуток $(T, T + H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(k)}(t)$.

А. А. Лаврик [8] в 1989 г. распространила результат этой теоремы на случай растущих вместе с T значений k : существует постоянная $T_1 > 0$ такая, что при $T \geq T_1$, $0 \leq k \leq \frac{1}{6} \ln T$, $H \geq \max(9\pi \ln T, T^{1/(6k+6)}(\ln T)^{2/(k+1)})$ промежуток $(T, T + H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(k)}(t)$.

Доказательство нашей теоремы проводится в три этапа. В лемме 31 доказывается соотношение, связывающее интересующую нас величину $a_k(T, U)$ с некоторым интегралом J_k . Далее, в лемме 33 получена “явная” формула для J_k с хорошим остаточным членом. При доказательстве именно этой леммы возникает ограничение $k \leq \frac{\ln \ln T}{2 \ln \ln \ln T}$. В §5 (лемма 34) найдена асимптотика значения интеграла J_k при $k \rightarrow +\infty$. При доказательстве теоремы мы следуем рассуждениям, использованным в [3], [4]. Результаты всех лемм в настоящей работе являются равномерными по T и k .

Далее будем использовать следующие обозначения: T_1 – абсолютная положительная постоянная, постоянные в знаках O и знаках Виноградова $\ll$ – абсолютные; через θ обозначены комплексные числа, по модулю не превосходящие единицы, и в различных формулах, вообще говоря, разные.

§2. Вспомогательные леммы

В этом параграфе докажем несколько вспомогательных лемм, которые понадобятся далее.

ЛЕММА 1. *Пусть l – натуральное число, x – комплексное число, удовлетворяющее условию $l|x| \leq 1/2$. Тогда справедлива оценка*

$$|(1+x)^l - 1| \leq 2l|x|.$$

Доказательство проведем по индукции. При $l = 1$ утверждение леммы верно. Пусть доказана справедливость леммы для натурального числа $l = m$. Докажем, что утверждение леммы верно для $l = m + 1$. По предположению индукции при $|x| \leq \frac{1}{2(m+1)}$ имеем

$$(1+x)^m = 1 + 2\theta m|x|,$$

где $|\theta| \leq 1$, т.е.

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+2\theta m|x|) = 1+x+2\theta m|x|+2\theta mx|x|,$$

откуда следует, что при $|x| \leq \frac{1}{2(m+1)}$ справедливо неравенство

$$|(1+x)^{m+1} - 1| \leq 2|x| \left(m + \frac{1}{2} + m|x| \right) \leq 2(m+1)|x|,$$

что и требуется доказать.

ЛЕММА 2. Положим $H(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2})$, $\chi(s) = H(1-s)/H(s)$, $F(s) = H'(s)/H(s)$, где $s = \sigma + it$. Тогда:

а) при $t \geq 2$, $0 \leq \sigma \leq 10 \ln t$

$$\arg H(\sigma + it) = \frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} + O(\sigma + 1);$$

б) при $t \geq T_1$, $0 \leq \sigma \leq 10 \ln \ln t$

$$\chi(s) = \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{1/2-\sigma} \exp \left\{ \frac{\pi i}{4} - it \ln \frac{t}{2\pi e} \right\} (1 + O((\ln \ln t)^2 t^{-1}));$$

в) при $|t| \geq 1$ справедлива формула

$$F(s) = \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} + O(|t|^{-1}); \quad (1)$$

г) при $|t| \geq T_1$, $|\sigma| \leq 10 \ln |t|$ для произвольного натурального числа $k \leq \log_2 |t|$ справедливо следующее равенство:

$$H^{(k)}(s) = H(s)(F^k(s) + R_k(s)), \quad (2)$$

где $R_k(s)$ — многочлен от $F(s), F'(s), \dots, F^{(k-1)}(s)$ и

$$|R_k(s)| \leq 2^{k+2} \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^{k-2} |t|^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство утверждений а)–в) проводится с помощью формулы Стирлинга

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \ln \sqrt{2\pi} + \int_0^\infty \frac{\rho(u)}{u+s} du, \quad (3)$$

где $\rho(u) = 1/2 - \{u\}$, $-3\pi/4 \leq \arg s \leq 3\pi/4$ (см. [9, с. 329–331]).

Используя формулу [3], получим

$$\begin{aligned} \arg H(\sigma + it) &= \operatorname{Im}(\ln H(\sigma + it)) \\ &= \operatorname{Im}\left(\ln \Gamma\left(\frac{\sigma + it}{2}\right)\right) + \arg(\sigma + it) + \arg(\sigma - 1 + it) - \frac{t}{2} \ln \pi \\ &= \frac{t}{2} \ln\left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 + \sigma^2}\right) - \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \ln \pi + O(\sigma + 1) \\ &= \frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} + \frac{t}{2} \ln \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{t^2}} + O(\sigma + 1) \\ &= \frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} + O(\sigma + 1). \end{aligned}$$

Утверждение а) доказано.

Поскольку по определению $F(s) = (\ln H(s))'$, то из определения функции $H(s)$ и равенства (3) получим

$$F(s) = (\ln H(s))' = \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} + \frac{1}{2s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\rho(u) du}{(u+s/2)^2}. \quad (4)$$

Отсюда легко следует утверждение в).

Докажем утверждение б). Из оценки $|\int_0^\infty \frac{\rho(u) du}{u+s/2}| = O(|s|)^{-1}$ (см. [9, с. 330]) и формулы (3) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \exp\{\ln \Gamma(s)\} = \sqrt{2\pi} s^{s-1/2} \exp\{-s\} \exp\{O(|s|^{-1})\} \\ &= \sqrt{2\pi} t^{\sigma+it-1/2} \exp\left\{-\frac{\pi}{2}t + i\frac{\pi}{2}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) - it\right\} \left(1 + O\left(\frac{\sigma^2 + 1}{t}\right)\right). \end{aligned}$$

Отсюда найдем

$$\chi(s) = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \exp\left\{i\frac{\pi}{4} - it \ln \frac{t}{2\pi e}\right\} \left(1 + O\left(\frac{\sigma^2 + 1}{t}\right)\right),$$

что доказывает утверждение б) леммы.

Доказательство утверждения г) будем вести индукцией по номеру производной функции $H(s)$. Далее будем полагать, что $|t| \geq T_1$, $|\sigma| \leq 10 \ln |t|$ и $0 \leq k \leq \log_2 |t|$. Нам потребуется несколько вспомогательных равенств и оценок. Из формулы (4) при $k \geq 1$ получим

$$\begin{aligned} F^{(k)}(s) &= \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2s^k} + \frac{(-1)^k k!}{2s^{k+1}} + \frac{(-1)^k k!}{(s-1)^{k+1}} \\ &\quad + \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{2^{k+1}} \int_0^\infty \frac{\rho(u) du}{(u+s/2)^{k+2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для целого числа $k \geq 0$ определим $I_k = \int_0^{+\infty} \frac{\rho(u) du}{(u+s/2)^{k+2}}$. Используя лемму 1, найдем, что при $u \geq |t|/2$

$$\left(u - \frac{|\sigma|}{2}\right)^{k+2} = u^{k+2} \left(1 - \frac{|\sigma|}{2u}\right)^{k+2} \geq u^{k+2} \left(1 - \frac{(k+2)|\sigma|}{u}\right) \geq \frac{1}{2} u^{k+2},$$

поэтому

$$\begin{aligned} |I_k| &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^{|t|/2} \frac{du}{(|t|/2)^{k+2}} + \int_{|t|/2}^{+\infty} \frac{du}{(u - |\sigma|/2)^{k+2}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{2^{k+1}}{|t|^{k+1}} + 2 \int_{|t|/2}^{+\infty} \frac{du}{u^{k+2}} \right) \leq 2 \left(\frac{2}{|t|} \right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Из последней оценки и равенств (4) и (5) следует, что

$$|F(s)| \leq \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right| + \frac{1}{2|t|} + \frac{1}{|t|} + \frac{1}{2} \frac{4}{|t|} = \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right| + \frac{7}{2|t|} \leq 2 \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|, \quad (6)$$

и при $1 \leq k \leq \log_2 |t|$

$$|F^{(k)}(s)| \leq \frac{(k-1)!}{2|t|^k} + \frac{k!}{2|t|^{k+1}} + \frac{k!}{|t|^{k+1}} + \frac{(k+1)!}{2^{k+1}} \frac{2^{k+2}}{|t|^{k+1}} \leq \frac{(k-1)!}{|t|^k}. \quad (7)$$

Из определения функции $F(s)$ будем иметь

$$H'(s) = H(s)F(s) = H(s)(F(s) + R_1(s)), \quad \text{где } R_1(s) \equiv 0, \quad (8)$$

поэтому утверждение леммы при $k = 1$ верно. Докажем теперь по индукции, что при $k \geq 2$ верно равенство (2), где $R_k(s)$ – многочлен от $F(s), F'(s), \dots, F^{(k-1)}(s)$, и

$$|R_k(s)| \leq d_k \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^{k-2} |t|^{-1}, \quad d_k = 13 \cdot 2^{k-2} - 4k - 4. \quad (9)$$

Дифференцируя равенство (8), находим

$$H''(s) = H'(s)F(s) + H(s)F'(s) = H(s)(F^2(s) + R_2(s)), \quad R_2(s) = F'(s).$$

Из оценки (7) следует, что $|R_2(s)| \leq |t|^{-1}$, и база индукции доказана. Пусть мы доказали, что для $2 \leq k \leq l$ справедливо предположение индукции. Докажем утверждение индукции при $k = l + 1$. Продифференцируем l раз равенство (8); полагая $R_0(s) \equiv 0$, будем иметь следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} H^{(l+1)}(s) &= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} H^{(k)}(s) F^{(l-k)}(s) = H(s) \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (F^k(s) + R_k(s)) F^{(l-k)}(s) \\ &= H(s)(F^{l+1}(s) + R_{l+1}(s)), \end{aligned}$$

где

$$R_{l+1}(s) = F(s)R_l(s) + \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} (F^k(s) + R_k(s))F^{(l-k)}(s). \quad (10)$$

В силу того, что $R_0(s), R_1(s), \dots, R_l(s)$ по предположению индукции являются многочленами от функции $F(s)$ и ее производных порядка не больше, чем $l-1$, из равенства (10) следует, что $R_{l+1}(s)$ – многочлен от $F(s), F'(s), \dots, F^{(l)}(s)$. Одна часть утверждения доказана. Осталось получить оценку (9) для $R_{l+1}(s)$. При $1 \leq k \leq \log_2 |t|$, используя лемму 1 и промежуточную оценку из (6) для $|F(s)|$, получим

$$\begin{aligned} |F^k(s) + R_k(s)| &\leq \left(\left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right| + \frac{7}{2|t|} \right)^k + d_k \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^{k-2} |t|^{-1} \\ &\leq \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^k \left(\left(1 + \frac{7}{8|t|} \right)^k + \frac{d_k}{16|t|} \right) \\ &\leq \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^k \left(1 + \frac{7k}{4|t|} + \frac{d_k}{16|t|} \right) \leq 2 \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^k. \end{aligned}$$

Из этой оценки, равенства (10) и неравенств (6), (7) следует, что

$$\begin{aligned} |R_{l+1}| &\leq d_l \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^{l-2} |t|^{-1} \cdot 2 \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right| + \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} \cdot 2 \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^k \frac{(l-k-1)!}{|t|^{l-k}} \\ &= \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^{l-1} |t|^{-1} (2d_l + 2\Sigma_1), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} (l-k-1)! \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^{k-l+1} |t|^{k-l+1} = \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k+1} k! \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^{-k} |t|^{-k} \\ &\leq l + \frac{l(l-1)}{|t|} + \frac{l(l-1)(l-2)}{|t|^2} + \dots + \frac{l(l-1)\dots 2 \cdot 1}{|t|^{l-1}} \\ &\leq l(1 + |t|^{-1/2} + |t|^{-1} + |t|^{-3/2} + \dots) \leq 2l. \end{aligned}$$

Из неравенства (11) и последней оценки найдем, что $d_{l+1} \leq 2d_l + 4l$, а по предположению индукции $d_l \leq 13 \cdot 2^{l-2} - 4l - 4$. Тем самым,

$$d_{l+1} \leq 13 \cdot 2^{l-1} - 4(l+1) - 4,$$

и индукция проведена. Поскольку при $k \geq 2$

$$d_k \leq 13 \cdot 2^{k-2} - 4k - 4 \leq 2^{k+2},$$

то утверждение леммы полностью доказано.

ЛЕММА 3. Пусть $k \geq 0$ – целое число. Все нули функции $\xi^{(k)}(s)$ удовлетворяют условию $0 < \operatorname{Re} s < 1$; если справедлива гипотеза Римана, то все нули функции $\xi^{(k)}(s)$ лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будем вести индукцией по k . Функция $\xi(s)$ – целая первого порядка, вещественно-аналитическая и удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Ее нулями являются комплексные нули функции $\zeta(s)$, для которых утверждение леммы верно. При $k \geq 1$ функция $\xi^{(k)}(s)$ также является вещественно-аналитической, целой функцией первого порядка, которая удовлетворяет функциональному уравнению

$$\xi^{(k)}(s) = (-1)^k \xi^{(k)}(1-s). \quad (12)$$

При $k = 0$ утверждение леммы верно. Пусть лемма справедлива при $k = m$. Докажем утверждение леммы при $k = m + 1$. По теореме Вейерштрасса

$$\xi^{(m)}(s) = e^{As+B} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}},$$

где A и B – некоторые постоянные, а произведение берется по всем нулям функции $\xi^{(m)}(s)$. Взяв логарифмическую производную от обеих частей последнего равенства, получим следующее соотношение:

$$\frac{\xi^{(m+1)}(s)}{\xi^{(m)}(s)} = A + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho} \right). \quad (13)$$

Из функционального уравнения (12) следует, что

$$\frac{\xi^{(m+1)}(s)}{\xi^{(m)}(s)} = -\frac{\xi^{(m+1)}(1-s)}{\xi^{(m)}(1-s)}.$$

Заменим обе части последнего равенства по формуле (13) и придем к соотношению

$$A + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho} \right) = -A - \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-s-\rho} \right).$$

Возьмем в этом равенстве $s = 0$. Тогда получим

$$2A = - \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho} \right).$$

Из уравнения (12) легко понять, что если ρ пробегает множество всех нулей функции $\xi^{(m)}(s)$, то $1-\rho$ также пробегает множество всех нулей $\xi^{(m)}(s)$. Из этого замечания следует, что

$$A = - \sum_{\rho} \frac{1}{\rho},$$

где

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} \frac{1}{\rho}.$$

Отсюда и из соотношения (13) получим равенство

$$\frac{\xi^{(m+1)}(s)}{\xi^{(m)}(s)} = \sum_{\rho} \frac{1}{s - \rho},$$

или

$$\operatorname{Re} \frac{\xi^{(m+1)}(s)}{\xi^{(m)}(s)} = \sum_{\rho} \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2}, \quad (14)$$

где $s = \sigma + it$, $\rho = \beta + i\gamma$.

Пусть $s_1 = \sigma_1 + it_1$ — нуль функции $\xi^{(m+1)}(s)$, который не является нулем $\xi^{(m)}(s)$. Из равенства (14) следует, что

$$0 = \sum_{\rho} \frac{\sigma_1 - \beta}{(\sigma_1 - \beta)^2 + (t_1 - \gamma)^2}. \quad (15)$$

Пусть известно, что $0 < \operatorname{Re} \rho = \beta < 1$ для всех нулей ρ функции $\xi^{(m)}(s)$. Докажем тогда, что $0 < \operatorname{Re} s_1 = \sigma_1 < 1$. Действительно, если $\sigma_1 \geq 1$, то каждое слагаемое в правой части равенства (15) положительно, а левая часть равна нулю, и мы приходим к противоречию. Тем самым, функция $\xi^{(m+1)}(s)$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1$, а из функционального уравнения следует, что функция $\xi^{(m+1)}(s)$ также не имеет нулей при $\operatorname{Re} s \leq 0$, и первое утверждение леммы доказано.

Если известно, что $\operatorname{Re} \rho = 1/2$ для всех нулей $\xi^{(m)}(s)$, то аналогично доказываться, что $\operatorname{Re} s_1 = 1/2$ для произвольного нуля функции $\xi^{(m+1)}(s)$, и доказательство леммы завершено.

ЛЕММА 4 (теорема Йенсена). Пусть $f(s)$ — функция, аналитическая при $|s| < R$, $f(0) \neq 0$. Через $n(x)$ обозначим число нулей функции $f(s)$ в круге $|s| \leq x$. Тогда при $r < R$ справедливо равенство

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta - \ln |f(0)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10, с. 134–137].

ЛЕММА 5. Пусть $s = \sigma + it$, $f(s)$ — функция, аналитическая при $|s| < R$, $|f(s)| \leq M_1$ при $|s| < R$, $f(0) \neq 0$, $0 < r \leq R - 1/8$. Определим аргумент функции $f(s)$ на отрезке $[-r, 0]$, непрерывно продолжая $\arg f(0)$ вдоль прямой $\operatorname{Im} s = 0$. Если $\sigma_1 \in [-r, 0]$ — нуль функции $f(s)$ порядка n , то положим

$$\begin{aligned} \arg f(\sigma_1 - 0) &= \arg f(\sigma_1 + 0) + \pi n, \\ \arg f(\sigma_1) &= \arg f(\sigma_1 - 0). \end{aligned}$$

Пусть Γ — отрезок $[-r, 0]$ либо полуинтервал $(-r, 0]$. Тогда

$$\operatorname{vararg}_{\Gamma} f(\sigma) \ll rM_2,$$

где $M_2 = \ln(2M_1 + 1) + |\ln(2|\operatorname{Re} f(0)|)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}(s) = f(s) + \overline{f(\bar{s})}.$$

При $|s| < R$ функция $\mathcal{F}(s)$ является вещественно-аналитической и

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(s)| &\leq 2M_1 \quad \text{при } |s| < R, \\ 0 < |\mathcal{F}(0)| &= 2|\operatorname{Re} f(0)|. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть на Γ действительная часть функции $f(s)$ обращается в нуль q раз в точках $x_1, \dots, x_q$. Приращение аргумента функции $f(s)$ на каждом из интервалов $(0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_q, -r)$ по модулю не более π . В тех точках x_j , $j = 1, \dots, q$, где $f(x_j) = 0$, аргумент функции $f(s)$ имеет скачок, равный произведению кратности нуля x_j на π . Поскольку количество нулей функции $f(s)$ на Γ не превосходит q , то

$$|\operatorname{vararg}_{\Gamma} f(s)| \leq (2q + 1)\pi. \quad (17)$$

Так как $\mathcal{F}(s) = 2 \operatorname{Re} f(s)$ при вещественных s , то, обозначив через $n(x)$ число нулей функции $\mathcal{F}(s)$ в круге $|s| \leq x$, получим

$$q \leq n(r).$$

Из теоремы Йенсена (лемма 4) и неравенств (16) следует, что

$$\int_0^{r+1/16} \frac{n(x)}{x} dx \leq \ln(2M_1 + 1) + |\ln(2|\operatorname{Re} f(0)|)|.$$

Однако

$$\int_0^{r+1/16} \frac{n(x)}{x} dx \geq \int_r^{r+1/16} \frac{n(x)}{x} dx \geq n(r) \int_r^{r+1/16} \frac{dx}{x} \geq q \ln \frac{r+1/16}{r},$$

откуда получаем

$$q \leq \ln^{-1} \left(1 + \frac{1}{16r} \right) \int_0^{r+1/16} \frac{n(x)}{x} dx = O(rM_2).$$

Учитывая равенство (17), получим утверждение леммы.

ЛЕММА 6 (теорема Литтлвуда). Пусть $\mathcal{C}$ – прямоугольный контур в плоскости $\mathbb{C}$ с координатой $z = x + iy$, ограниченный прямыми $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$, где $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в замкнутом прямоугольнике, ограниченном контуром $\mathcal{C}$, аналитична и не обращается в нуль на стороне $x = x_2$ контура $\mathcal{C}$. Выберем произвольную ветвь функции $\ln f(z)$ на правой стороне контура $\mathcal{C}$. Для произвольного $z = x + iy$ из прямоугольника определим функцию $\ln f(z)$ непрерывным продолжением

значения $\ln f(x_2 + iy)$ вдоль прямой $y = \text{const}$, если на отрезке $[x + iy, x_2 + iy]$ нет нулей и полюсов функции $f(z)$. Иначе положим

$$\ln f(x + iy) = \ln f(x + i(y + 0)).$$

Тогда будет выполнено равенство

$$\int_{\mathcal{C}} \ln f(z) dz = -2\pi i \left(\sum_{\substack{\rho=\sigma+it \\ f(\rho)=0}} (\sigma - x_1) - \sum_{\substack{p=\sigma+it \\ f(p)=\infty}} (\sigma - x_1) \right),$$

где $\sum_{\rho}$ – сумма по всем нулям функции $f(z)$ внутри $\mathcal{C}$ и на стороне $y = y_2$ контура $\mathcal{C}$ с учетом кратности, а $\sum_p$ – сумма по полюсам функции $f(z)$ внутри контура $\mathcal{C}$ и на его стороне $y = y_2$ с учетом кратности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [11, с. 220–221].

ЛЕММА 7. При $T \geq T_1$, $0 < U \leq T$ и натуральном $k \leq \log_2 T$ имеет место следующее соотношение:

$$N_k(T+U) - N_k(T) = \left(\frac{T+U}{2\pi} \ln \frac{T+U}{2\pi} - \frac{T+U}{2\pi} \right) - \left(\frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} \right) + O(k \ln T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для заданного k определим число

$$\sigma_k = \max \left(9, 2 + \frac{k}{\ln 2} \right) \quad (18)$$

и рассмотрим в s -плоскости ($s = \sigma + it$) прямоугольный контур Γ , ограниченный прямыми $\sigma = \sigma_k$, $\sigma = 1 - \sigma_k$, $t = T$, $t = T + U$. Будем полагать, что на прямых $t = T$, $t = T + U$ нет нулей функции $\xi^{(k)}(s)$. По принципу аргумента

$$N_k(T+U) - N_k(T) = \frac{1}{2\pi} \text{vararg}_{\Gamma} \xi^{(k)}(s).$$

Пусть

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{s = \sigma + it : \sigma = \sigma_k, T \leq t \leq T + U\}, \\ \Gamma_2 &= \{s = \sigma + it : 1/2 \leq \sigma \leq \sigma_k, t = T\}, \\ \Gamma_3 &= \{s = \sigma + it : 1/2 \leq \sigma \leq \sigma_k, t = T + U\}, \\ \Delta_j &= \text{vararg}_{\Gamma_j} \xi^{(k)}(s), \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

причем будем считать, что Γ_j ориентированы в соответствии с положительным направлением обхода контура Γ . Принимая во внимание то, что функция $\xi^{(k)}(s)$ вещественно-аналитическая и удовлетворяет функциональному уравнению (12), легко прийти к равенству

$$N_k(T+U) - N_k(T) = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{\pi}. \quad (19)$$

Воспользовавшись леммой 2 и леммой 1, при $s = \sigma + it$, $t \geq T_1$, $0 \leq \sigma \leq 10 \ln t$, $1 \leq k \leq \log_2 t$ получим

$$\begin{aligned}
\xi^{(k)}(s) &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} H^{(l)}(s) \zeta^{(k-l)}(s) \\
&= H(s) \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \left(F^l(s) + O\left(2^l t^{-1} \left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^{l-2}\right) \right) \zeta^{(k-l)}(s) \\
&= H(s) \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} + O(t^{-1}) \right)^l + O\left(\left| \frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right|^{l-2} \right) \right) \zeta^{(k-l)}(s) \\
&= H(s) \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right)^l (1 + O(kt^{-1}) + O(\ln^{-2} t)) \zeta^{(k-l)}(s) \\
&= H(s) \left(\frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right)^k \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right)^{-l} \zeta^{(l)}(s) (1 + O(\ln^{-2} t)) \\
&= H(s) \left(\frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right)^k (1 + R_k(s)),
\end{aligned}$$

где

$$R_k(s) = (\zeta(s) - 1) + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right)^{-l} \zeta^{(l)}(s) (1 + O(\ln^{-2} t)) + O(|\zeta(s)| \ln^{-2} t). \quad (20)$$

Обозначив $G_k(s) = 1 + R_k(s)$, придем к равенствам

$$\xi^{(k)}(s) = H(s) \left(\frac{1}{2} \ln \frac{s}{2\pi} \right)^k G_k(s), \quad (21)$$

$$\Delta_j = \text{vararg}_{\Gamma_j} H(s) + k \text{vararg}_{\Gamma_j} \left(\ln \frac{s}{2\pi} \right) + \text{vararg}_{\Gamma_j} G_k(s). \quad (22)$$

Найдем Δ_1 . При $s \in \Gamma_1$ справедливы следующие оценки:

$$|\zeta(s) - 1| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma_k}} \leq \frac{1}{2^{\sigma_k}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\sigma_k}} \leq \frac{1}{2^{\sigma_k-1}};$$

при $1 \leq l \leq k$

$$|\zeta^{(l)}(s)| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^l}{n^{\sigma_k}} \leq \frac{(\ln 2)^l}{2^{\sigma_k}} + \int_2^{+\infty} \frac{(\ln x)^l dx}{x^{\sigma_k}}.$$

Поскольку из определения σ_k следует, что при любом $x \geq 2$ и $1 \leq l \leq k$

$$\frac{(\ln x)^l}{x^{\sigma_k}} \leq \frac{(\sigma_k - 1)(\ln x)^l}{x^{\sigma_k}} - \frac{l(\ln x)^{l-1}}{x^{\sigma_k}},$$

а

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{(\ln x)^l}{x^{\sigma_k-1}} \right) = \frac{(\sigma_k-1)(\ln x)^l}{x^{\sigma_k}} - \frac{l(\ln x)^{l-1}}{x^{\sigma_k}},$$

то получаем

$$\int_2^{+\infty} \frac{(\ln x)^l dx}{x^{\sigma_k}} \leq -\frac{(\ln x)^l}{x^{\sigma_k-1}} \Big|_{x=2}^{+\infty} = \frac{(\ln 2)^l}{2^{\sigma_k-1}}.$$

Поэтому при $1 \leq l \leq k$, $s \in \Gamma_1$ имеем

$$|\zeta^{(l)}(s)| \leq \frac{(\ln 2)^l}{2^{\sigma_k-2}}.$$

Таким образом, для $s \in \Gamma_1$ из формулы (20) и полученных выше оценок

$$\begin{aligned} |R_k(s)| &\leq (1 + O(\ln^{-2} t)) \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \left| \frac{2}{\ln \frac{s}{2\pi}} \right|^l \frac{(\ln 2)^l}{2^{\sigma_k-2}} + O(\ln^{-2} t) \\ &\leq (1 + O(\ln^{-2} t)) \cdot 2^{-\sigma_k+2} \left(1 + \frac{2 \ln 2}{\ln \frac{t}{2\pi}} \right)^k + O(\ln^{-2} t) \\ &\leq (1 + O(\ln^{-2} T)) \cdot 2^{k-\sigma_k+2} + O(\ln^{-2} T). \end{aligned}$$

В силу условия (18) выполнено неравенство

$$k - \sigma_k + 2 \leq -2,$$

поэтому при $T \geq T_1$, $s \in \Gamma_1$ имеем

$$|R_k(s)| \leq \frac{1}{2}. \quad (23)$$

Следовательно,

$$-\pi < \text{vararg}_{\Gamma_1}(1 + R_k(s)) < \pi.$$

Из этой оценки и равенства (22) легко найдем

$$\Delta_1 = \text{vararg}_{\Gamma_1} H(s) + k \cdot \text{vararg}_{\Gamma_1} \left(\ln \frac{s}{2\pi} \right) + O(1) = \text{vararg}_{\Gamma_1} H(s) + O(k).$$

Используя утверждение а) леммы 2 и последнее равенство, получим

$$\Delta_1 = \left(\frac{T+U}{2} \ln \frac{T+U}{2\pi} - \frac{T+U}{2} \right) - \left(\frac{T}{2} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2} \right) + O(k).$$

Перейдем к оценке Δ_2 (Δ_3 оценивается аналогично). Очевидна оценка

$$\left| \text{vararg}_{\Gamma_2} \left(\ln \frac{s}{2\pi} \right) \right| \leq \frac{\pi}{2},$$

а из леммы 2 следует, что

$$\text{vararg}_{\Gamma_2} H(s) = O(k).$$

Подставив эти результаты в (22), будем иметь

$$\Delta_2 = \text{vararg}_{\Gamma_2} G_k(s) + O(k). \quad (24)$$

Воспользуемся леммой 5 для оценки приращения аргумента функции $G_k(s)$ на Γ_2 . Применяв формулу суммирования Эйлера, найдем, что при $\text{Re } s > 0$

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + s \int_1^{+\infty} \rho(x) x^{-s-1} dx, \\ \zeta^{(l)}(s) &= \frac{(-1)^l l!}{(s-1)^{l+1}} + (-1)^{l-1} \int_1^{+\infty} \rho(x) \left(\frac{l \ln^{l-1} x - s \ln^l x}{x^{s+1}} \right) dx, \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Используя равенство $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^l x}{x^{\sigma+1}} dx = \frac{l!}{\sigma^{l+1}}$ и предыдущие соотношения, при $s = \sigma + it$, где $t \geq T_1$, $1/4 \leq \sigma \leq 10 \ln t$, получим несколько неравенств:

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\leq 1 + \frac{|s|}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} \leq 1 + \frac{t}{\sigma} \leq 5t, \\ |\zeta^{(l)}(s)| &\leq \frac{l!}{t^{l+1}} + \frac{1}{2} \left(\frac{l!}{\sigma^l} + 2t \frac{l!}{\sigma^{l+1}} \right) \leq 5t \cdot 4^l l!, \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда из соотношения (20) при $|s - (\sigma_k + iT)| \leq \sigma_k - 1/4$ получим

$$\begin{aligned} |G_k(s)| &\leq 2 \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \left| \frac{2}{\ln \frac{s}{2\pi}} \right|^l |\zeta^{(l)}(s)| \leq 10t \sum_{l=0}^k \frac{k!}{(k-l)!} \left(\frac{10}{\ln T} \right)^l \\ &\leq 20T \sum_{l=0}^k \left(\frac{16k}{\log_2 T} \right)^l \leq 20T \sum_{l=0}^k 16^l \leq 25T \cdot 16^k \leq 25T^5. \end{aligned}$$

В силу оценки (23) справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \leq \text{Re } G_k(\sigma_k + iT) \leq \frac{3}{2}.$$

Применяя теперь лемму 5 при $R = \sigma_k - 1/4$, $r = \sigma_k - 1/2$, $f(s) = G_k(s + \sigma_k + iT)$, $M_1 = 25T^5$, найдем

$$\text{vararg}_{\Gamma_2} G_k(s) = O(k \ln T).$$

Используя равенство (24), получим оценку

$$\Delta_2 = O(k \ln T).$$

Для Δ_3 выводится аналогичная оценка. Подставляя полученные соотношения для Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 в (19), приходим к утверждению леммы.

ЛЕММА 8. Через $0 \swarrow 1$ обозначим путь на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, который является прямой, пересекающей действительную ось между 0 и 1 под углом $\pi/4$ (идущий из первой четверти в третью). Справедливо равенство

$$\xi(s) = H(s)f(s) + H(1-s)\overline{f(1-\bar{s})},$$

где

$$f(s) = \int_{0 \swarrow 1} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} dz.$$

Это формула Римана–Зигеля (см. [6]). Заметим, что

$$\overline{f(1-\bar{s})} = \int_{0 \searrow 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} dz.$$

ЛЕММА 9. Пусть $s = \sigma + it$. Существует абсолютная положительная постоянная T_1 такая, что при $T \geq T_1$, $T \leq t \leq 2T$, $0 \leq \sigma \leq \frac{\ln T}{\ln \ln T}$ и произвольном целом неотрицательном числе $m \leq \frac{\ln T}{(\ln \ln T)^2}$ будут верны следующие формулы:

$$\begin{aligned} \int_{0 \swarrow 1} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (\ln z)^m dz &= \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{-s} \ln^m n + O(T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}}), \\ \int_{0 \searrow 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (\ln z)^m dz &= \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{s-1} \ln^m n + O(T^{\frac{\sigma-1}{2} + \frac{1}{100}}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем полагать, что m , σ , t удовлетворяют условиям леммы.

1. Докажем первую формулу леммы. Не ограничивая общности, будем считать, что прямая $0 \swarrow 1$ пересекает действительную ось в точке $z = 1/2$. Пусть $\eta = \sqrt{t/(2\pi)}$. Положим

$$\eta_1 = \begin{cases} \eta, & \text{если } \|\eta\| \geq \frac{1}{100}, \\ \eta - \frac{1}{50}, & \text{если } \|\eta\| < \frac{1}{100}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \eta_2 = \begin{cases} \eta, & \text{если } \|\eta\| \geq \frac{1}{100}, \\ \eta + \frac{1}{50}, & \text{если } \|\eta\| < \frac{1}{100}. \end{cases}$$

Тогда

$$\|\eta_j\| \geq \frac{1}{100} \quad \text{для } j = 1, 2. \quad (25)$$

В дальнейшем будем полагать $z = x + iy$, $s = \sigma + it$.

Рассмотрим при достаточно большом положительном числе A контур $\mathcal{G}(A)$, состоящий из участков $\Gamma_j(A)$, $j = 1, 2, 3, 4$, где $\Gamma_1(A)$ – часть прямой $0 \leq x \leq 1$ в z -плоскости с условием $|\operatorname{Im} z| \leq A$,

$$\Gamma_2(A) = \left\{ z = x + iy : y = A, A + \frac{1}{2} \leq x \leq A + \eta_2 \right\},$$

$$\Gamma_3(A) = \left\{ z = x + iy : y = -A, -A + \frac{1}{2} \leq x \leq -A + \eta_1 \right\},$$

а $\Gamma_4(A)$ описывается следующим образом (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} y &= x - \eta_2 && \text{при } \eta_2 \leq x \leq \eta_2 + A, \\ y &= x - \eta_1 && \text{при } -A + \eta_1 \leq x \leq \eta_1, \\ y &= \sqrt{(\eta_2 - \eta)^2 - (x - \eta)^2} && \text{при } \eta_1 \leq x \leq \eta_2. \end{aligned}$$

Рис. 1

Пусть

$$f(z) = \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (\ln z)^m = \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2 + \pi i z}}{e^{2\pi i z} - 1} (\ln z)^m.$$

Для натурального числа n вычет функции $f(z)$ в точке $z = n$ равен

$$\operatorname{Res}_{z=n} f(z) = \frac{n^{-s} \ln^m n}{2\pi i}.$$

Поэтому по теореме Коши о вычетах имеем

$$\int_{\mathcal{G}(A)} f(z) dz = \sum_{n \leq \eta_1} n^{-s} \ln^m n = \sum_{n \leq \eta} n^{-s} \ln^m n + O(T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}}). \quad (26)$$

Легко получить равенство

$$|f(z)| = \frac{|z|^{-\sigma} e^{t \arg z} |\ln z|^m}{|e^{2\pi i \operatorname{Re} z} e^{-2\pi \operatorname{Im} z} - 1|} e^{-2\pi \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z} e^{-\pi \operatorname{Im} z}. \quad (27)$$

Оценим по модулю интегралы от функции $f(z)$ вдоль отрезков $\Gamma_2(A)$ и $\Gamma_3(A)$. Поскольку $0 \leq \arg z < \pi/4$ при $z \in \Gamma_2(A)$, то при $A \geq \eta_2$ из равенства (27) будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2(A)} f(z) dz \right| &\leq \int_{\Gamma_2(A)} |f(z)| dz \\ &\leq \int_{A+1/2}^{A+\eta_2} \frac{(A^2 + x^2)^{-\sigma/2} e^{t\pi/4} |\ln(x + iA)|^m}{|e^{2\pi i x} e^{-2\pi A} - 1|} e^{-2\pi Ax - \pi A} dx \\ &\ll \int_{A+1/2}^{A+\eta_2} A^{-\sigma} e^{t\pi/4} \left(\ln(2A + \eta_2) + \frac{\pi}{4} \right)^m e^{-2\pi A^2 - \pi A} dx \\ &\ll A e^{t\pi/4} (\ln(9A))^m e^{-2\pi A^2 - \pi A} \rightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Если $A \geq 2\eta_1$, то $-3\pi/4 \leq \arg z \leq -\pi/2$ при $z \in \Gamma_3(A)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_3(A)} f(z) dz \right| &\leq \int_{-A+1/2}^{-A+\eta_1} \frac{(A^2 + x^2)^{-\sigma/2} |\ln(x - iA)|^m}{|e^{2\pi i x} e^{2\pi A} - 1|} e^{2\pi Ax + \pi A} dx \\ &\ll \int_{-A+1/2}^{-A+\eta_1} \frac{(\ln(2A) + 3\pi/4)^m}{e^{2\pi A}} e^{-2\pi A(A-\eta_1) + \pi A} dx \\ &\ll A (\ln(50A))^m e^{-\pi A^2 - \pi A} \rightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Теперь, перейдя к пределу при $A \rightarrow +\infty$ в равенстве (26), находим

$$\int_{0 \leq \arg z < \pi/4} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (\ln z)^m dz = \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{-s} \ln^m n - \int_{\Gamma_4} f(z) dz + O(T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}}),$$

где Γ_4 есть $\Gamma_4(+\infty)$.

Далее получим оценку модуля интеграла от функции $f(z)$ вдоль Γ_4 , которая войдет в остаточный член. Оценим сначала интеграл от функции $f(z)$ вдоль части кривой Γ_4 с условием $x \geq \eta_2$ (т.е. вдоль полупрямой $\{z = x + i(x - \eta_2), x \geq \eta_2\}$). Обозначим его через I_1 . Из равенства (27) и неравенств (25) следует, что

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \sqrt{2} \int_{\eta_2}^{+\infty} \frac{(x^2 + (x - \eta_2)^2)^{-\sigma/2} (\ln(2x) + \pi/4)^m}{|e^{2\pi i x} e^{-2\pi(x-\eta_2)} - 1|} e^{t \arctg \frac{x-\eta_2}{x}} e^{-2\pi x(x-\eta_2)} dx \\ &\ll \eta_2^{-\sigma} \int_0^{+\infty} e^{t \arctg \frac{x}{x+\eta_2}} e^{-2\pi x(x+\eta_2)} (\ln(6(x+\eta_2)))^m dx. \end{aligned}$$

Поскольку $\arctg x \leq x$ при $x \geq 0$, то

$$|I_1| \ll \eta_2^{-\sigma} \int_0^{+\infty} e^{t \frac{x}{x+\eta_2} - 2\pi x \eta_2} e^{-2\pi x^2} (\ln(6(x+\eta_2)))^m dx.$$

Из неравенства $\eta_2 \geq \sqrt{t/(2\pi)}$ получим, что

$$t \frac{x}{x + \eta_2} - 2\pi x \eta_2 \leq 0 \quad \text{при } x \geq 0. \quad (28)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |I_1| &\ll \eta_2^{-\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-2\pi x^2} (\ln(6(x + \eta_2)))^m dx \\ &\ll \eta_2^{-\sigma} \left(\int_0^{\eta_2} e^{-2\pi x^2} \ln^m(12\eta_2) dx + \int_{\eta_2}^{+\infty} e^{-2\pi x^2} \ln^m(12x) dx \right). \end{aligned}$$

Поскольку при $x \geq \eta_2$ справедливо неравенство $\ln^m(12x) \leq e^{\pi x^2}$, то в силу сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx < \infty$ получим

$$|I_1| \ll \eta_2^{-\sigma} \ln^m(12\eta_2) \ll T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}}.$$

Пусть I_2 – интеграл от функции $f(z)$ вдоль той части кривой Γ_4 , которая удовлетворяет условию $0 \leq x \leq \eta_1$ (т.е. вдоль отрезка $\{z = x + i(x - \eta_1), 0 \leq x \leq \eta_1\}$). Из неравенств (25) и равенства (27) получим

$$\begin{aligned} |I_2| &\ll \int_0^{\eta_1} \frac{(x^2 + (x - \eta_1)^2)^{-\sigma/2} (\ln \eta_1 + \pi/2)^m}{|e^{2\pi i x} e^{-2\pi(x - \eta_1)} - 1|} e^{t \operatorname{arctg} \frac{x - \eta_1}{x}} e^{-2\pi x(x - \eta_1) - \pi(x - \eta_1)} dx \\ &\ll \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}} \right)^{-\sigma} \ln^m(9\eta_1) \int_{-\eta_1}^0 e^{-t \operatorname{arctg} \frac{-x}{x + \eta_1} - 2\pi x \eta_1} e^{-2\pi x^2} dx. \end{aligned}$$

При $x \geq 0$ имеем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} \geq \int_0^x \frac{dt}{(1 + t)^2} = \frac{x}{1 + x},$$

поэтому

$$|I_2| \ll \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}} \right)^{-\sigma} \ln^m(9\eta_1) \int_{-\eta_1}^0 e^{t \frac{x}{\eta_1} - 2\pi x \eta_1} e^{-2\pi x^2} dx.$$

Поскольку $\eta_1 \leq \sqrt{t/(2\pi)}$, то

$$t \frac{x}{\eta_1} - 2\pi x \eta_1 \leq 0 \quad \text{при } x \leq 0.$$

Следовательно,

$$|I_2| \ll \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}} \right)^{-\sigma} \ln^m(9\eta_1) \int_0^{+\infty} e^{-2\pi x^2} dx \ll T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}}.$$

Обозначим через I_3 интеграл от функции $f(z)$ вдоль полупрямой $\{z = x + i(x - \eta_1), x \leq 0\}$. Модуль интеграла I_3 оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} |I_3| &\ll \int_{-\infty}^0 (x^2 + (x - \eta_1)^2)^{-\sigma/2} |\ln(x + i(x - \eta_1))|^m e^{-t(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{x}{x - \eta_1})} e^{-2\pi x(x - \eta_1)} \\ &\quad \times \frac{e^{-\pi(x - \eta_1)}}{|e^{2\pi i x} e^{-2\pi(x - \eta_1)} - 1|} dx \\ &\ll \eta_1^{-\sigma} \int_{-\infty}^{-\eta_1} (\ln(-2x) + \pi)^m e^{-t\pi/2 - 2\pi x \eta_1} e^{-2\pi x^2} dx. \end{aligned}$$

Поскольку при $x \leq -\eta_1$

$$-\frac{t\pi}{2} - 2\pi x \eta_1 - \pi x^2 \leq 0, \quad (29)$$

и $(\ln(-2x) + \pi)^m \leq e^{\frac{\pi}{2}x^2}$, то

$$\begin{aligned} |I_3| &\ll (\eta_1)^{-\sigma} \int_{\eta_1}^{+\infty} (\ln(2x) + \pi)^m e^{-\pi x^2} dx \\ &\ll T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}} \int_{\eta_1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}x^2} dx \ll T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}}. \end{aligned}$$

Осталось оценить интеграл от функции $f(z)$ вдоль полуокружности $\{z = \eta + \frac{1}{50}e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$. Обозначим его через I_4 . Записав функции $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ как функции $x = x(\varphi)$ и $y = y(\varphi)$ соответственно, используя (25) и (27), получим следующее соотношение:

$$|I_4| \ll \left(\eta - \frac{1}{50}\right)^{-\sigma} (\ln T)^m \int_0^\pi e^{t \arctg \frac{y(\varphi)}{x(\varphi)} - 2\pi x(\varphi)y(\varphi)} d\varphi.$$

Докажем, что

$$t \arctg \frac{y(\varphi)}{x(\varphi)} - 2\pi x(\varphi)y(\varphi) \leq 2\pi, \quad (30)$$

и, тем самым, получим необходимую оценку

$$|I_4| \ll \left(\eta - \frac{1}{50}\right)^{-\sigma} (\ln T)^m \ll T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}}.$$

Поскольку $\arctg x \leq x$ при $x \geq 0$, то неравенство (30) будет справедливо, если доказать, что

$$t \frac{y}{x} - 2\pi xy \leq 2\pi,$$

или

$$\eta^2 \frac{y}{x} - xy \leq 1.$$

В случае $y = 0$ последнее неравенство верно; при $y \neq 0$ оно эквивалентно следующему:

$$\eta^2 \leq x^2 + \frac{x}{y}.$$

Так как в нашем случае

$$x \geq \eta - \frac{1}{50} \quad \text{и} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{50},$$

то

$$x^2 + \frac{x}{y} \geq \left(\eta - \frac{1}{50}\right)^2 + 50\left(\eta - \frac{1}{50}\right) \geq \eta^2$$

при $\eta \geq 1$ (или $t \geq 2\pi$), и требуемое неравенство доказано.

2. Докажем вторую формулу леммы. Пусть η_1 и η_2 выбраны так же, как и в п. 1. Не ограничивая общности, будем считать, что прямая $0 \searrow 1$ пересекает действительную ось в точке $z = 1/2$. Рассмотрим контур $\mathcal{G}(A)$, состоящий из участков $\Gamma_j(A)$, $j = 1, 2, 3, 4$, где $\Gamma_1(A)$ – часть прямой $0 \searrow 1$ в z -плоскости с условием $|\operatorname{Im} z| \leq A$,

$$\begin{aligned} \Gamma_2(A) &= \left\{ z = x + iy : y = A, -A + \frac{1}{2} \leq x \leq -A + \eta_1 \right\}, \\ \Gamma_3(A) &= \left\{ z = x + iy : y = -A, A + \frac{1}{2} \leq x \leq A + \eta_2 \right\}, \end{aligned}$$

а $\Gamma_4(A)$ описывается следующим образом (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} y &= -x + \eta_2 && \text{при } \eta_2 \leq x \leq \eta_2 + A, \\ y &= -x + \eta_1 && \text{при } -A + \eta_1 \leq x \leq \eta_1, \\ y &= -\sqrt{(\eta_2 - \eta)^2 - (x - \eta)^2} && \text{при } \eta_1 \leq x \leq \eta_2. \end{aligned}$$

Рис. 2

Пусть

$$f(z) = \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (\ln z)^m = \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2 + \pi i z}}{e^{2\pi i z} - 1} (\ln z)^m.$$

Для натурального числа n вычет функции $f(z)$ в точке $z = n$ равен

$$\operatorname{Res}_{z=n} f(z) = \frac{n^{s-1} \ln^m n}{2\pi i}.$$

Поэтому по теореме Коши о вычетах

$$\int_{\mathcal{G}(A)} f(z) dz = \sum_{n \leq \eta_1} n^{s-1} \ln^m n. \quad (31)$$

Оценим по модулю интегралы от функции $f(z)$ вдоль кривых $\Gamma_2(A)$ и $\Gamma_3(A)$. Будем пользоваться следующим соотношением:

$$|f(z)| = \frac{|z|^{\sigma-1} e^{-t \arg z} |\ln z|^m}{|e^{2\pi i \operatorname{Re} z} e^{-2\pi \operatorname{Im} z} - 1|} e^{2\pi \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z} e^{-\pi \operatorname{Im} z}. \quad (32)$$

При $A \geq 2\eta_1$ справедливо неравенство $\pi/2 \leq \arg z \leq 3\pi/4$ для $z \in \Gamma_2(A)$ и

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2(A)} f(z) dz \right| &\ll \int_{-A+1/2}^{-A+\eta_1} \frac{(2A)^{\sigma-1} (\ln(2A) + 3\pi/4)^m}{1 - e^{-2\pi A}} e^{2\pi A x - \pi A} dx \\ &\ll \eta_1 (2A)^{\sigma-1} (\ln(50A))^m e^{-\pi A^2} \rightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Аналогично, при $A \geq \eta_2$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_3(A)} f(z) dz \right| &\ll \int_{A+1/2}^{A+\eta_2} \frac{(3A)^{\sigma-1} (\ln(3A) + \pi/4)^m}{e^{2\pi A} - 1} \\ &\quad \times e^{t\pi/4} e^{-2\pi A(A+1/2) + \pi A} dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $A \rightarrow +\infty$. Перейдя к пределу при $A \rightarrow +\infty$ в равенстве (31), получим

$$\int_{0 \searrow 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (\ln z)^m dz = \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{s-1} \ln^m n - \int_{\Gamma_4} f(z) dz + O(T^{\frac{\sigma-1}{2} + \frac{1}{100}}),$$

где контур Γ_4 есть $\Gamma_4(+\infty)$. Интеграл в правой части последнего равенства опять будем оценивать по модулю. Оценим сначала интеграл от функции $f(z)$ вдоль части кривой Γ_4 с условием $x \geq \eta_2$. Обозначим его через J_1 . Из равенства (32) и неравенств (25) следует, что

$$\begin{aligned} |J_1| &\ll \int_{\eta_2}^{+\infty} \frac{(x^2 + (x - \eta_2)^2)^{\frac{\sigma-1}{2}} (\ln(2x - \eta_2) + \pi/4)^m}{|e^{2\pi i x} e^{2\pi(x-\eta_2)} - 1|} e^{-t \arctg \frac{-x+\eta_2}{x}} \\ &\quad \times e^{-2\pi x(x-\eta_2) + \pi(x-\eta_2)} dx \\ &\ll \int_0^{+\infty} (x^2 + (x + \eta_2)^2)^{\frac{\sigma-1}{2}} (\ln(3(2x + \eta_2)))^m e^{t \arctg \frac{x}{x+\eta_2} - 2\pi x \eta_2} e^{-2\pi x^2} dx. \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{arctg} x \leq x$ при $x \geq 0$, то из неравенства (28) получим оценку

$$|J_1| \ll \int_0^{\eta_2} (3\eta_2)^{\sigma-1} \ln^m(9\eta_2) e^{-2\pi x^2} dx + \int_{\eta_2}^{+\infty} (3x)^{\sigma-1} \ln^m(9x) e^{-2\pi x^2} dx.$$

При $x \geq \eta_2$ имеет место неравенство

$$(3x)^{\sigma-1} \ln^m(3x) \leq e^{\pi x^2},$$

а интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx$ сходится. Поэтому

$$|J_1| \ll (3\eta_2)^{\sigma-1} \ln^m(9\eta_2) \ll T^{\frac{\sigma-1}{2} + \frac{1}{100}}.$$

Пусть J_2 – интеграл от функции $f(z)$ вдоль той части кривой Γ_4 , у которой $0 \leq x \leq \eta_1$. Из равенства (32) получим

$$\begin{aligned} |J_2| &\ll \int_0^{\eta_1} \frac{(x^2 + (x - \eta_1)^2)^{\frac{\sigma-1}{2}} (\ln \eta_1 + \pi/2)^m}{|e^{2\pi i x} e^{-2\pi(\eta_1-x)} - 1|} \\ &\quad \times e^{-t \operatorname{arctg} \frac{-x+\eta_1}{x}} e^{2\pi x(\eta_1-x) - \pi(\eta_1-x)} dx \\ &\ll (\eta_1)^{\sigma-1} \ln^m(3\eta_1) \int_{-\eta_1}^0 e^{-t \operatorname{arctg} \frac{-x}{x+\eta_1} - 2\pi x \eta_1} e^{-2\pi x^2} dx. \end{aligned}$$

Интеграл в правой части был оценен при рассмотрении I_2 как $O(1)$. Тем самым имеем

$$|J_2| \ll T^{\frac{\sigma-1}{2} + \frac{1}{100}}.$$

Пусть теперь J_3 – интеграл от функции $f(z)$ вдоль полупрямой $\{z = x + i(\eta_1 - x), x \leq 0\}$. В силу равенства (32) получим оценку

$$\begin{aligned} |J_3| &\ll \int_{-\infty}^0 (x^2 + (x - \eta_1)^2)^{\frac{\sigma-1}{2}} |\ln(x + i(-x + \eta_1))|^m \\ &\quad \times e^{-t(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{-x}{-x+\eta_1})} e^{2\pi x(\eta_1-x)} \frac{e^{-\pi(\eta_1-x)}}{|e^{2\pi i x} e^{-2\pi(-x+\eta_1)} - 1|} dx \\ &\ll \int_{-\infty}^{-\eta_1} (x^2 + (x + \eta_1)^2)^{\frac{\sigma-1}{2}} \left(\ln(-2x) + \frac{3\pi}{4} \right)^m \\ &\quad \times e^{-t(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x+\eta_1}{x}) - 2\pi x \eta_1} e^{-2\pi x^2} dx. \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{arctg} \frac{x+\eta_1}{x} \geq 0$ при $x \leq -\eta_1$, то из неравенства (29) следует, что

$$\begin{aligned} |J_3| &\ll \int_{\eta_1}^{+\infty} (2x)^{\sigma-1} (\ln(6x))^m e^{-\pi x^2} dx \\ &\ll \int_{\eta_1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2} x^2} dx \ll e^{-\frac{\pi}{2} \eta_1} \ll T^{-\frac{1}{2}} \ll T^{\frac{\sigma-1}{2}}. \end{aligned}$$

Осталось оценить интеграл от функции $f(z)$ вдоль полуокружности $\{z = \eta + \frac{1}{50} e^{i\varphi}, -\pi \leq \varphi \leq 0\}$. Обозначим его через J_4 . Записав функции $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ как функции от параметра φ , а именно $x = x(\varphi)$ и $y = y(\varphi)$, получим следующий результат:

$$|J_4| \ll \left(\eta + \frac{1}{50}\right)^{\sigma-1} (\ln T)^m \int_{-\pi}^0 e^{t \operatorname{arctg} \frac{-y(\varphi)}{x(\varphi)} - 2\pi x(\varphi)(-y(\varphi))} d\varphi.$$

Из оценки (30) следует, что

$$|J_4| \ll \left(\eta + \frac{1}{50}\right)^{\sigma-1} (\ln T)^m \ll T^{\frac{\sigma-1}{2} + \frac{1}{100}},$$

и вторая формула леммы доказана.

ЛЕММА 10. Пусть $0 < A < B$, $f_n(t)$ – комплекснозначные, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[A, B]$ функции такие, что при некотором $\delta > 0$

$$|f_n(t)| \leq \delta \quad \text{и} \quad \int_A^B |df_n(t)| \leq \delta. \quad (33)$$

Тогда для любых комплексных чисел a_n справедливы следующие формулы:

$$\text{а) } \int_A^B \left| \sum_{n=1}^N a_n f_n(t) n^{-it} \right|^2 dt = \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \int_A^B |f_n(t)|^2 dt + O\left(\delta^2 N \ln N \sum_{n=1}^N |a_n|^2\right);$$

б) если $N(t)$ – непрерывная, строго монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условиям $N(t) > 0$ при $t > 0$, $N(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то

$$\int_A^B \left| \sum_{N_1 \leq n \leq N(t)} a_n f_n(t) n^{-it} \right|^2 dt \ll \delta^2 \sum_{N_1 \leq n \leq N_2} |a_n|^2 (B - A + N_2 \ln(N_2 + 1)),$$

где $N_1 = N(A)$, $N_2 = N(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство утверждения а) см. в [4, с. 53]. Докажем утверждение б) леммы. Не ограничивая общности, будем считать, что $\delta = 1$. Последовательно находим:

$$\begin{aligned} \int_A^B \left| \sum_{N_1 \leq n \leq N(t)} a_n f_n(t) n^{-it} \right|^2 dt &= \int_A^B \sum_{N_1 \leq n, m \leq N(t)} a_n \overline{a_m} f_n(t) \overline{f_m(t)} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} dt \\ &\ll \int_A^B \sum_{N_1 \leq n \leq N(t)} |a_n|^2 |f_n(t)|^2 dt \\ &\quad + \left| \int_A^B \sum_{N_1 \leq n < m \leq N(t)} a_n \overline{a_m} f_n(t) \overline{f_m(t)} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} dt \right| \\ &\leq (B - A) \sum_{N_1 \leq n \leq N_2} |a_n|^2 \\ &\quad + \sum_{N_1 \leq n < m \leq N_2} |a_n a_m| \left| \int_{A_1}^B f_n(t) \overline{f_m(t)} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} dt \right|, \end{aligned} \quad (34)$$

где $A_1 = \max(A, N^{-1}(m))$, а $N^{-1}(t)$ – функция, обратная к $N(t)$. Применим формулу интегрирования по частям к следующему интегралу:

$$\begin{aligned} \int_{A_1}^B f_n(t) \overline{f_m(t)} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} dt &= \frac{f_n(t) \overline{f_m(t)}}{i \ln(m/n)} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} \Big|_{A_1}^B \\ &\quad - \frac{1}{i \ln(m/n)} \int_{A_1}^B \left(\frac{m}{n}\right)^{it} d(f_n \overline{f_m}(t)). \end{aligned}$$

Отсюда, используя условия (33), получим

$$\left| \int_{A_1}^B f_n(t) \overline{f_m(t)} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} dt \right| \leq \frac{4}{\ln(m/n)}.$$

Из (34) следует, что для доказательства утверждения б) нам осталось получить оценку

$$S = \sum_{N_1 \leq n < m \leq N_2} \frac{|a_n a_m|}{\ln(m/n)} \ll N_2 \ln(N_2 + 1) \sum_{N_1 \leq n \leq N_2} |a_n|^2.$$

Положим $m = n + r$, где $1 \leq r \leq N_2 - n$. Поскольку $\ln(1 + r/n) \geq r/(2n)$ при $r \leq n$, то

$$\begin{aligned} S &= \sum_{N_1 \leq n \leq N_2-1} \sum_{r=1}^{[N_2-n]} \frac{|a_n a_{n+r}|}{\ln(1 + r/n)} \\ &\leq \sum_{N_1 \leq n \leq N_2-1} \sum_{r=[n/2]}^{[N_2-n]} \frac{|a_n a_{n+r}|}{\ln 2} + \sum_{N_1 \leq n \leq N_2-1} \sum_{r=1}^{[N_2-n]} |a_n a_{n+r}| \cdot \frac{2n}{r} \\ &\ll \left(\sum_{N_1 \leq n \leq N_2} |a_n| \right)^2 + N_2 \sum_{r=1}^{[N_2-N_1]} \frac{1}{r} \sum_{N_1 \leq n \leq N_2-r} (|a_n|^2 + |a_{n+r}|^2) \\ &\ll N_2 \ln(N_2 + 1) \sum_{N_1 \leq n \leq N_2} |a_n|^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть $f(u)$ – комплекснозначная непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[1, X]$, $X > 1$, удовлетворяющая условиям

$$|f(u)| \ll u^{-1}, \quad |f'(u)| \ll u^{-2}. \quad (35)$$

Тогда при $1 \leq x \leq X$ справедлива формула

$$\sum_{1 \leq j \leq x} f(j) = \int_1^x f(u) du + f(1) + \int_1^X \{u\} f'(u) du + O(x^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этого утверждения легко следует из формулы суммирования Эйлера (см. [9, с. 315]):

$$\sum_{1 \leq j \leq x} f(j) = \int_1^x f(u) du + f(1) - \int_1^x \rho(u) f'(u) du + \rho(x) f(x) - \rho(1) f(1).$$

Поскольку

$$\int_1^x \rho(u) f'(u) du = \int_1^x \left(\frac{1}{2} - \{u\} \right) f'(u) du = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(1) - \int_1^x \{u\} f'(u) du,$$

то, подставляя это равенство в формулу суммирования Эйлера, получим

$$\sum_{1 \leq j \leq x} f(j) = \int_1^x f(u) du + f(1) + \int_1^X \{u\} f'(u) du + R,$$

где

$$R = -\{x\} f(x) - \int_x^X \{u\} f'(u) du.$$

Теперь из условий (35) нетрудно заметить, что $|R| = O(x^{-1})$, и лемма доказана.

ЛЕММА 12. Пусть $d = (d_1, d_2)$, $y \geq 2$. Тогда

$$\sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{d}{d_1 d_2} \ll \ln^3 y.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представляя $d_1 = dj_1$, $d_2 = dj_2$, где $(j_1, j_2) = 1$, получим

$$\sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{d}{d_1 d_2} = \sum_{d \leq y} \sum_{\substack{j_1, j_2 \leq y/d \\ (j_1, j_2) = 1}} \frac{d}{d^2 j_1 j_2} \leq \sum_{d \leq y} \sum_{j_1, j_2 \leq y} \frac{1}{dj_1 j_2} \ll \ln^3 y.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 13. Пусть j — достаточно большое натуральное число. Определим $\theta = 1/\ln \ln j$. Тогда

$$\sum_{p|j} \frac{\ln p}{p^{1-2\theta}} = O(\ln \ln j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если j — достаточно велико, то функция $\frac{\ln x}{x^{1-2\theta}}$ монотонно убывает при $x \geq 3$ и, кроме того, $\frac{\ln 2}{2^{1-2\theta}} > \frac{\ln 5}{5^{1-2\theta}}$. Пусть натуральное число n таково, что

$$p_1 p_2 \dots p_n \leq j, \quad p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1} > j,$$

где $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_n - n$ -е простое число. Тогда

$$\sum_{p|j} \frac{\ln p}{p^{1-2\theta}} \leq \sum_{r \leq n} \frac{\ln p_r}{p_r^{1-2\theta}}.$$

Поскольку $p_r > r$, то из выбора числа n следует неравенство

$$n! \leq j.$$

Отсюда получим, что $n \leq \frac{2 \ln j}{\ln \ln j}$. И из теоремы Чебышева найдем, что

$$p_n \ll \ln j. \quad (36)$$

Тогда $p_r^{2\theta} \ll 1$ при $r = 1, \dots, n$, т. е.

$$\sum_{p|j} \frac{\ln p}{p^{1-2\theta}} \ll \sum_{r \leq n} \frac{\ln p_r}{p_r}.$$

Оценка последней суммы есть $O(\ln p_n)$. Поэтому из (36) следует, что

$$\sum_{p|j} \frac{\ln p}{p^{1-2\theta}} = O(\ln \ln j),$$

и доказательство леммы завершено.

ЛЕММА 14. Пусть k – целое неотрицательное число. При $b, T > 0$ имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s^{k+1}} ds = \begin{cases} \frac{\ln^k a}{k!} + O\left(\frac{a^b}{T^{k+1} |\ln a|}\right), & \text{если } a > 1, \\ O\left(\frac{a^b}{T^{k+1} |\ln a|}\right), & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы при $k = 0$ известно [9, с. 335–337]. При произвольном натуральном числе k лемма доказывается аналогично.

ЛЕММА 15. Пусть j, k – натуральные числа, $y > 0$ – достаточно велико. Определим функции $G_j(\beta)$ равенством

$$G_j(\beta) = \sum_{\substack{n \leq y/j \\ (n,j)=1}} \frac{\mu(n)}{n^\beta} \left(\frac{\ln \frac{y}{nj}}{\ln y} \right)^k.$$

Тогда выполнено соотношение

$$G_j^{(l)}(\beta) = M_{l,j}(\beta) + O(E_{l,j}),$$

где

$$\begin{aligned} M_{0,j}(\beta) &= \frac{1}{F(j, \beta)} \left((\beta - 1) \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y} \right)^k + \frac{k}{\ln y} \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y} \right)^{k-1} \right), \\ M_{1,j}(\beta) &= \frac{1}{F(j, \beta)} \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y} \right)^k, \\ M_{l,j}(\beta) &= 0, \quad l \geq 2, \\ E_{l,j} &= (\ln y)^{l-2} (\ln \ln y)^2 \left(k + \ln y \cdot \left(\frac{j}{y} \right)^b \right) F_1(j, 1 - 2\delta), \\ F(j, s) &= \prod_{p|j} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right), \quad F_1(j, s) = \prod_{p|j} \left(1 + \frac{1}{p^s} \right), \end{aligned}$$

$\delta = (\ln \ln y)^{-1}$, $b = (M \ln \ln y)^{-1}$, M – абсолютная положительная постоянная, $M \geq 1$, и оценка остаточного члена является равномерной по $j \leq y$, $k \leq \ln \ln y$, $0 \leq l \leq k + 1$, $0 < |\beta - 1| \leq \ln^{-1} y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = y/j$. Из леммы 14 следует, что

$$\begin{aligned} G_j(\beta) &= \frac{k!}{\ln^k y} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (n,j)=1}} \frac{\mu(n)}{n^\beta} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\beta-i\infty}^{2-\beta+i\infty} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s^{k+1}} \\ &= \frac{k!}{\ln^k y} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{s-\beta}}{(s-\beta)^{k+1}} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (n,j)=1}} \frac{\mu(n)}{n^s} ds. \end{aligned}$$

При $\operatorname{Re} s > 1$ запишем цепочку равенств:

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ (n,j)=1}} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{(p,j)=1} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) = (\zeta(s) F(j, s))^{-1}.$$

Отсюда получим, что

$$G_j(\beta) = \frac{k!}{\ln^k y} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{s-\beta}}{\zeta(s) F(j, s) (s-\beta)^{k+1}} ds. \quad (37)$$

Пусть A – достаточно большое положительное число, $b = (M \ln \ln y)^{-1}$, M – достаточно большая положительная постоянная. Определим следующие интегралы от подынтегральной функции из равенства (37). Пусть $I_0(\beta, A)$ – интеграл вдоль пути $\{s = 2 + it, -A \leq t \leq A\}$, $I_1(\beta, A)$ – вдоль пути $\{s = \sigma + iA, 1 \leq \sigma \leq 2\}$, $I_2(\beta, A)$ – вдоль пути $\{s = 1 + it, \ln^{10} y \leq t \leq A\}$, $I_3(\beta, A)$ – интеграл вдоль пути $\{s = \sigma + i \ln^{10} y, 1 - b \leq \sigma \leq 1\}$, $I_4(\beta, A)$ – вдоль пути $\{s = 1 - b + it, -\ln^{10} y \leq t \leq \ln^{10} y\}$, $I_5(\beta, A)$, $I_6(\beta, A)$, $I_7(\beta, A)$ – интегралы вдоль путей, полученных комплексным сопряжением и сменой ориентации путей интегрирования в $I_3(\beta, A)$, $I_2(\beta, A)$, $I_1(\beta, A)$ соответственно. В замкнутом контуре, образованном

всеми описанными выше отрезками, подынтегральная функция имеет единственный полюс порядка $k + 1$ в точке $s = \beta$. Через $R(\beta)$ обозначим ее вычет в точке $s = \beta$. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$I_0(\beta, A) - \sum_{r=1}^7 I_r(\beta, A) = 2\pi i R(\beta). \quad (38)$$

Оценим интеграл $I_1(\beta, A)$. Поскольку при $1 \leq \sigma \leq 2$ справедлива оценка $|\zeta(\sigma + iA)|^{-1} = O(\ln^7 A)$ (см. [11, с. 51]), то

$$\begin{aligned} |I_1(\beta, A)| &\leq \int_1^2 \left| \frac{x^{\sigma-\beta+iA}}{\zeta(\sigma+iA)F(j, \sigma+iA)(\sigma-\beta+iA)^{k+1}} d\sigma \right| \\ &\ll F_1(j, 1) \frac{y^{2-\beta} \ln^7 A}{A^{k+1}} \rightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что $|I_7(\beta, A)| \rightarrow 0$ при $A \rightarrow +\infty$. Тогда, переходя в (38) к пределу при $A \rightarrow +\infty$, получим следующее равенство:

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{s-\beta}}{\zeta(s)F(j, s)(s-\beta)^{k+1}} ds = 2\pi i R(\beta) + \sum_{r=2}^6 I_r(\beta), \quad (39)$$

где $I_r(\beta) = I_r(\beta, +\infty)$. Из (37) и (39) следует, что

$$G_j^{(l)}(\beta) = \frac{k!}{\ln^k y} \left(R^{(l)}(\beta) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=2}^6 I_r^{(l)}(\beta) \right). \quad (40)$$

Далее получим оценки интегралов из соотношения (40), которые войдут в остаточный член. Если s лежит на пути интегрирования в $I_3(\beta)$, $I_4(\beta)$, $I_5(\beta)$, то (см. [11, с. 60])

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq M_1 \ln \ln y, \quad (41)$$

где M_1 — абсолютная положительная постоянная. При оценке интегралов $I_2(\beta)$ и $I_6(\beta)$ будем пользоваться оценкой

$$\left| \frac{1}{\zeta(1+it)} \right| = O(\ln t). \quad (42)$$

Из интегральной формулы Коши получим

$$\frac{d^l}{d\beta^l} \left(\frac{x^{s-\beta}}{(s-\beta)^{k+1}} \right) = \frac{l!}{2\pi i} \int_{|w-\beta|=(\ln y)^{-1}} \frac{x^{s-w} dw}{(s-w)^{k+1}(w-\beta)^{l+1}}.$$

Нетрудно показать, что если $s = \sigma + it$ лежит на пути интегрирования $I_r(\beta)$, $r = 2, \dots, 6$, а $|w-\beta| = (\ln y)^{-1}$, то

$$|s-w|^{k+1} \geq \frac{1}{2}((\sigma-1)^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}, \quad k \leq \ln \ln y.$$

Действительно, пусть s лежит на пути интегрирования $I_2(\beta)$, т. е. $s = 1 + it$, $t \geq \ln^{10} y$. Тогда

$$|s - \omega|^{k+1} \geq (t - 2(\ln y)^{-1})^{k+1} = t^{k+1}(1 - 2(t \ln y)^{-1})^{k+1} \geq t^{k+1}(1 - 2(\ln y)^{-11})^{k+1}$$

и из леммы 1 при $k \leq \ln \ln y$ получим

$$|s - \omega|^{k+1} \geq \frac{1}{2} t^{k+1},$$

что и требуется доказать. В остальных случаях оценка доказывается аналогично с применением леммы 1. Поэтому при s и ω , удовлетворяющих вышеупомянутым свойствам, будет выполняться следующая оценка:

$$\frac{d^l}{d\beta^l} \left(\frac{x^{s-\beta}}{(s-\beta)^{k+1}} \right) \ll l! \frac{x^{\sigma-1} \ln^l y}{((\sigma-1)^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}. \quad (43)$$

Используя неравенство $l! \leq (k+1)^k$, из (42) и (43) найдем

$$\begin{aligned} |I_2^{(l)}(\beta)|, |I_6^{(l)}(\beta)| &\ll F_1(j, 1) l! \ln^l y \int_{\ln^{10} y}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{k+1}} dt \\ &\ll F_1(j, 1) l! (\ln y)^{l-10k} \ln \ln y \\ &\ll F_1(j, 1) (\ln y)^{l-9k} \left(\frac{k+1}{\ln y} \right)^k \ln \ln y \ll F_1(j, 1) (\ln y)^{l-9}. \end{aligned}$$

Из оценок (41) и (43) получим

$$|I_3^{(l)}(\beta)|, |I_5^{(l)}(\beta)| \ll F_1(j, 1-b) l! (\ln y)^{l-10(k+1)} \ln \ln y \int_{1-b}^1 x^{\sigma-1} d\sigma.$$

Поскольку при $x > 1$

$$\int_{1-b}^1 x^{\sigma-1} d\sigma = \frac{1 - x^{-b}}{\ln x} \leq b,$$

то

$$\begin{aligned} |I_3^{(l)}(\beta)|, |I_5^{(l)}(\beta)| &\ll F_1(j, 1-b) \left(\frac{k+1}{\ln y} \right)^k (\ln y)^{l-9(k+1)} \frac{1}{\ln y} \\ &\ll F_1(j, 1-b) \ln^{l-19} y. \end{aligned}$$

Используя равенство $x = y/j$, получим

$$\begin{aligned} |I_4^{(l)}(\beta)| &\ll F_1(j, 1-b) l! (\ln y)^l \ln \ln y \int_0^{\ln^{10} y} \frac{x^{-b}}{(b^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}} dt \\ &\ll F_1(j, 1-b) l! (\ln y)^l \left(\frac{j}{y} \right)^b (M \ln \ln y)^{k+1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{k!}{\ln^k y} |I_4^{(l)}(\beta)| &\ll F_1(j, 1-b)(\ln y)^{l-1} \left(\frac{j}{y}\right)^b (\ln \ln y)^2 \left(\frac{Mk(k+1) \ln \ln y}{\ln y}\right)^{k-1} \\ &\ll F_1(j, 1-b)(\ln y)^{l-1} (\ln \ln y)^2 \left(\frac{j}{y}\right)^b. \end{aligned}$$

С помощью полученных оценок и равенства (40) придем к соотношению

$$G_j^{(l)}(\beta) = \frac{k!}{\ln^k y} R^{(l)}(\beta) + O(E_{l,j}). \quad (44)$$

Пусть $Z(s) = 1/(\zeta(s)F(j, s))$. Тогда

$$R^{(l)}(\beta) = \frac{1}{k!} \sum_{q=0}^k \binom{k}{q} (\ln x)^{k-q} Z^{(q+l)}(\beta).$$

При $j \leq y$, $|s-1| \leq 2\delta$ из леммы 13 следует, что

$$\frac{F'(j, s)}{F(j, s)} = \sum_{p|j} \frac{\ln p}{p^s - 1} \ll \sum_{p|j} \frac{\ln p}{p^{1-2\delta}} \ll \ln \ln j \ll \ln \ln y.$$

Используя эту оценку и очевидное равенство

$$Z(s) = \frac{1}{F(j, s)} ((s-1) + O(|s-1|^2)),$$

при $|s-1| \leq 2\delta$ найдем

$$\begin{aligned} Z'(s) &= -\left(\frac{F'}{F}(j, s) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) Z(s) \\ &= \frac{1}{F(j, s)} + O(F_1(j, 1-2\delta) \ln \ln y \cdot |s-1|). \end{aligned}$$

При $q \geq 2$ из интегральной формулы Коши и последнего равенства следует

$$\begin{aligned} Z^{(q)}(\beta) &= \frac{(q-1)!}{2\pi i} \int_{|w-\beta|=(\ln \ln y)^{-1}} \frac{Z'(w) dw}{(w-\beta)^q} \\ &\ll (q-1)! F_1(j, 1-2\delta) (\ln \ln y)^{q-1}. \end{aligned}$$

Используя полученные результаты, будем иметь несколько соотношений:

$$\begin{aligned} G_j(\beta) &= \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y}\right)^k Z(\beta) + \frac{k}{\ln y} \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y}\right)^{k-1} Z'(\beta) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\ln y} \sum_{q=2}^k \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{\ln \ln y}{\ln y}\right)^{q-1} F_1(j, 1-2\delta)\right) + O(E_{0,j}) \\ &= \frac{1}{F(j, \beta)} \left((\beta-1) \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y}\right)^k + \frac{k}{\ln y} \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y}\right)^{k-1}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{k}{\ln y} \sum_{q=2}^k \left(\frac{k \ln \ln y}{\ln y}\right)^{q-1} F_1(j, 1-2\delta)\right) + O(E_{0,j}) \\ &= M_{0,j}(\beta) + O(E_{0,j}); \end{aligned}$$

для $G'_j(\beta)$ получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} G'_j(\beta) &= \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y} \right)^k Z'(\beta) + O\left(\sum_{q=1}^k \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{\ln \ln y}{\ln y} \right)^q F_1(j, 1-2\delta) \right) + O(E_{1,j}) \\ &= M_{1,j}(\beta) + O(E_{1,j}); \end{aligned}$$

при $2 \leq l \leq k+1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} G_j^{(l)}(\beta) &\ll F_1(j, 1-2\delta) \sum_{q=0}^k \binom{k}{q} (q+l-1)! \frac{(\ln \ln y)^{q+l-1}}{(\ln y)^q} + E_{l,j} \\ &\ll F_1(j, 1-2\delta) (l-1)! (\ln \ln y)^{l-1} \sum_{q=0}^k k^q (2k)^q \left(\frac{\ln \ln y}{\ln y} \right)^q + E_{l,j} \\ &\ll F_1(j, 1-2\delta) (l-1)! (\ln \ln y)^{l-1} + E_{l,j} \ll E_{l,j}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы завершено.

ЛЕММА 16. Пусть $P(u)$ – многочлен степени N , $0 < A < B$, $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int_A^B P(\ln u) u^\alpha du = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{P^{(n)}(\ln u)}{(1+\alpha)^{n+1}} u^{1+\alpha} \Big|_A^B.$$

Доказательство леммы проводится интегрированием по частям столько раз, какова степень многочлена $P(u)$.

ЛЕММА 17. При $y \geq 1$, неотрицательном целом числе $d \leq \ln y$ определим функцию

$$J_d(y) = \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} f(j) \left(\ln \frac{y}{j} \right)^d,$$

где $f(1) = 1$, для простого числа p

$$0 < |f(p) - 1| \leq M p^{-c}, \quad M > 0, \quad c > 0, \quad (45)$$

а для произвольного натурального числа $j \geq 2$

$$f(j) = \prod_{p|j} f(p).$$

Тогда справедлива формула

$$J_d(y) = \left(\prod_p \left(1 + \frac{f(p) - 1}{p + 1} \right) (1 - p^{-2}) \right) \frac{\ln^{d+1} y}{d+1} + O(\ln^d y).$$

Константа в знаке O зависит лишь от M и c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для простого числа p

$$A(p) = \frac{p(f(p) - 1)}{p + 1}, \quad B(p) = \frac{p + f(p)}{p(f(p) - 1)}.$$

Следовательно, будем иметь равенство

$$f(p) = A(p)(B(p) + 1).$$

Положим

$$\begin{aligned} A(j) &= \prod_{p|j} A(p), & B(j) &= \prod_{p|j} B(p), \\ A(1) &= 1, & B(1) &= 1. \end{aligned}$$

Используя введенные обозначения, получим

$$\begin{aligned} J_d(y) &= \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) \sum_{m|j} B(m) \left(\ln \frac{y}{j} \right)^d \\ &= \sum_{jm \leq y} \frac{\mu^2(jm)}{jm} A(jm) B(m) \left(\ln \frac{y}{jm} \right)^d \\ &= \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} A(m) B(m) \sum_{\substack{j \leq y/m \\ (j,m)=1}} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) \left(\ln \frac{y}{jm} \right)^d \\ &= \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} A(m) B(m) \left(\ln \frac{y}{m} \right)^d \sum_{(j,m)=1} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) - R_1 - R_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} A(m) B(m) \sum_{\substack{j \leq y/m \\ (j,m)=1}} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) \left(\left(\ln \frac{y}{m} \right)^d - \left(\ln \frac{y}{jm} \right)^d \right), \\ R_2 &= \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} A(m) B(m) \left(\ln \frac{y}{m} \right)^d \sum_{\substack{j > y/m \\ (j,m)=1}} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j). \end{aligned}$$

Заметим, что для натурального числа m

$$A(m) B(m) \sum_{(j,m)=1} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) = \prod_p \left(1 + \frac{A(p)}{p} \right) \prod_{p|m} \frac{A(p) B(p)}{1 + A(p)/p} = \prod_p \left(1 + \frac{A(p)}{p} \right),$$

поэтому

$$J_d(y) = \left(\prod_p \left(1 + \frac{f(p) - 1}{p + 1} \right) \right) \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} \left(\ln \frac{y}{m} \right)^d - R_1 - R_2. \quad (46)$$

Воспользуемся равенством $\mu^2(m) = \sum_{j^2|m} \mu(j)$ и получим

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq y} \frac{\mu^2(m)}{m} \ln^d \frac{y}{m} &= \sum_{m \leq y} \frac{(\ln(y/m))^d}{m} \sum_{j^2|m} \mu(j) \\ &= \sum_{rj^2 \leq y} \frac{(\ln(y/(rj^2)))^d}{rj^2} \mu(j) = \sum_{r \leq y} \frac{1}{r} \sum_{j^2 \leq y/r} \frac{\mu(j)}{j^2} \left(\ln \frac{y}{rj^2} \right)^d \\ &= \sum_{r \leq y} \frac{(\ln(y/r))^d}{r} \sum_{j \geq 1} \frac{\mu(j)}{j^2} - R_3 - R_4, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} R_3 &= \sum_{r \leq y} \frac{1}{r} \sum_{j^2 \leq y/r} \frac{\mu(j)}{j^2} \left(\left(\ln \frac{y}{r} \right)^d - \left(\ln \frac{y}{rj^2} \right)^d \right), \\ R_4 &= \sum_{r \leq y} \frac{(\ln(y/r))^d}{r} \sum_{j^2 > y/r} \frac{\mu(j)}{j^2}. \end{aligned}$$

По формуле суммирования Эйлера найдем

$$\begin{aligned} \sum_{r \leq y} \frac{(\ln(y/r))^d}{r} &= \int_1^y \frac{(\ln(y/r))^d}{r} dr + O(\ln^d y) + O\left(\int_1^y \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{\ln^d(y/r)}{r} \right) \right| dr\right) \\ &= \frac{\ln^{d+1} y}{d+1} + O(\ln^d y). \end{aligned} \quad (48)$$

Из соотношений (46)–(48) следует, что

$$\begin{aligned} J_d(y) &= \left(\prod_p \left(1 + \frac{f(p)-1}{p+1} \right) \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \right) \frac{\ln^{d+1} y}{d+1} + O(\ln^d y) \\ &\quad + O(|R_1| + |R_2| + |R_3| + |R_4|). \end{aligned} \quad (49)$$

Оценим $|R_4|$:

$$|R_4| \leq (\ln y)^d \sum_{r \leq y} \frac{1}{r} \sum_{j^2 \geq y/r} \frac{1}{j^2} \ll \ln^d y.$$

Оценим модуль R_2 . Из (45) следует, что

$$|A(p)| \leq \frac{M}{p^c}. \quad (50)$$

Пусть $\omega(j)$ – число простых делителей натурального числа j . Тогда для бесквадратного числа j следует, что

$$|A(j)| \leq \frac{M^{\omega(j)}}{j^c}.$$

Если j_1 – достаточно велико, то для всех бесквадратных чисел $j \geq j_1$ справедливо неравенство $\omega(j) \leq \frac{2 \ln j}{\ln \ln j}$. Возьмем j_2 таким большим, что при $j \geq j_2$ выполнено предыдущее неравенство и неравенство

$$\frac{2 \ln M}{\ln \ln j} \leq \frac{c}{2}.$$

Тогда $M^{\omega(j)} \leq j^{c/2}$ при $j \geq j_1$, и, значит, найдется положительная постоянная M_1 такая, что

$$M^{\omega(j)} \leq M_1 j^{c/2} \quad \text{для всех } j \geq 1.$$

Из последней оценки следует, что при всех натуральных бесквадратных числах j

$$|A(j)| \leq \frac{M_1}{j^{c/2}}, \quad (51)$$

а из оценки (50) получим неравенство

$$|A(m)B(m)| = \prod_{p|m} \left(1 + \frac{A(p)}{p}\right) \leq \prod_{p|m} \left(1 + \frac{M}{p^{1+c}}\right) \leq M_2. \quad (52)$$

Тем самым, из определения R_2 и оценок (51), (52) находим

$$|R_2| \ll \ln^d y \sum_{m \leq y} \frac{1}{m} \sum_{j > y/m} \frac{1}{j^{1+c/2}} \ll \ln^d y.$$

Перейдем к оценкам $|R_1|$ и $|R_3|$. Заметим, что $R_1 = R_3 = 0$ при $d = 0$. Поэтому ниже будем считать, что целое число $d \geq 1$. Из неравенств (51) и (52) получим

$$|R_1| \ll \sum_{m < y} \frac{1}{m} \sum_{j \leq y/m} \frac{1}{j^{1+c/2}} \left(\ln^d \frac{y}{m} - \ln^d \frac{y}{jm} \right). \quad (53)$$

Воспользовавшись легко проверяемым неравенством

$$1 - (1 - a)^d \leq da \quad \text{при } 0 \leq a \leq 1, \quad d \geq 1,$$

найдем, что при всех $m < y$ и $j \leq y/m$

$$\left(\ln^d \frac{y}{m} - \ln^d \frac{y}{jm} \right) = \ln^d \frac{y}{m} \left(1 - \left(1 - \frac{\ln j}{\ln(y/m)} \right)^d \right) \leq d \ln j \cdot \ln^{d-1} \frac{y}{m}. \quad (54)$$

Подставив (54) в (53) и применив формулу (48), будем иметь оценку

$$\begin{aligned} |R_1| &\ll d \sum_{m < y} \frac{1}{m} \left(\ln \frac{y}{m} \right)^{d-1} \sum_{j \leq y/m} \frac{\ln j}{j^{1+c/2}} \ll d \sum_{m < y} \frac{1}{m} \left(\ln \frac{y}{m} \right)^{d-1} \\ &\ll d \ln^{d-1} y + \ln^d y \ll \ln^d y. \end{aligned}$$

Осталось оценить $|R_3|$. Из (54) получим, что

$$|R_3| \ll d \sum_{m < y} \frac{1}{m} \ln^{d-1} \frac{y}{m} \sum_{j^2 \leq y/m} \frac{\ln j}{j^2} \ll \ln^d y.$$

Из полученных оценок для $|R_1|$, $|R_2|$, $|R_3|$, $|R_4|$ и формулы (49) следует утверждение леммы.

Далее до конца работы будем использовать следующие обозначения: $T \geq T_1$, $L = \ln \frac{T}{2\pi}$, $U = TL^{-10}$, $y = T^{1/2}L^{-20}$, $\tau = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}$, $\tau_1 = \sqrt{\frac{T+U}{2\pi}}$, $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{L}$.

ЛЕММА 18. Пусть функция $F(j, s)$ определена, как в лемме 15. При каждом целом неотрицательном числе $d \leq \ln y$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} \frac{F(j, 1 - 2/L)}{F^2(j, 1 - 1/L)} \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y} \right)^d = \frac{\ln y}{d+1} + O(1); \\ \text{б)} \quad & \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} \frac{F(j, 1 + 2/L)}{F^2(j, 1 + 1/L)} \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y} \right)^d = \frac{\ln y}{d+1} + O(1). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждения а) и б) леммы одновременно. Положим $\beta = 1 - L^{-1}$ для доказательства п. а) и $\beta = 1 + L^{-1}$ для доказательства п. б). Тогда

$$2\beta - 1 = \begin{cases} 1 + 2L^{-1}, & \text{если } \beta = 1 + L^{-1}, \\ 1 - 2L^{-1}, & \text{если } \beta = 1 - L^{-1}. \end{cases}$$

Определим функцию

$$f(p) = \frac{1 - p^{1-2\beta}}{(1 - p^{-\beta})^2}.$$

Из леммы 17 следует, что утверждения а) и б) верны, если выполнено соотношение

$$\prod_p \left(1 + \frac{f(p) - 1}{p+1} \right) (1 - p^{-2}) = 1 + O(L^{-1}). \quad (55)$$

Преобразуем следующее выражение:

$$f(p) - 1 = \frac{2p^{-\beta} - p^{-2\beta} - p^{1-2\beta}}{(1 - p^{-\beta})^2} = \frac{2p^{1-\beta} - p^{1-2\beta} - p^{2-2\beta}}{p(1 - p^{-\beta})^2}.$$

Пусть

$$Y(\beta) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p) - 1}{p+1} \right) = \prod_p \left(1 + \frac{2p^{1-\beta} - p^{1-2\beta} - p^{2-2\beta}}{p(p+1)(1 - p^{-\beta})^2} \right).$$

Поскольку

$$Y(1) = \prod_p \left(1 + \frac{1 - p^{-1}}{p(p+1)(1 - p^{-1})^2} \right) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2 - 1} \right) = \prod_p \frac{p^2}{p^2 - 1}$$

и $Y(\beta)$ — аналитическая функция при $|\beta - 1| < \frac{1}{2}$, то для β из окрестности $|\beta - 1| \ll L^{-1}$ справедливо равенство

$$Y(\beta) = Y(1) + O(|\beta - 1|) = \prod_p \frac{p^2}{p^2 - 1} + O(L^{-1}).$$

Отсюда следует, что соотношение (55) выполнено и утверждение леммы доказано.

ЛЕММА 19. Пусть функция $F_1(j, s)$ определена, как в лемме 15. При $\delta = 1/\ln \ln y$ и положительном числе $\varepsilon < 1/10$ справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} F_1^3(j, 1 - 2\delta) = O(\ln y); \\ \text{б)} \quad & \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j^{1-\varepsilon}} F_1^3(j, 1 - 2\delta) = O\left(\frac{y^\varepsilon}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) леммы является очевидным следствием леммы 17. Докажем утверждение б). Поскольку

$$\left(1 + \frac{1}{p^{1-2\delta}}\right)^3 \leq \left(1 + \frac{7}{p^{1-2\delta}}\right),$$

то, обозначив через $d_7(n)$ коэффициент при n^{-s} ряда Дирихле для $\zeta^7(s)$, получим оценку

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j^{1-\varepsilon}} F_1^3(j, 1 - 2\delta) &\leq \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j^{1-\varepsilon}} \sum_{n|j} \frac{d_7(n)}{n^{1-2\delta}} \leq \sum_{n \leq y} \frac{d_7(n)}{n^{2-2\delta-\varepsilon}} \sum_{r \leq y/n} \frac{1}{r^{1-\varepsilon}} \\ &\ll \sum_{n \leq y} \frac{d_7(n)}{n^{2-2\delta-\varepsilon}} \left(\frac{y}{n}\right)^\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = O\left(\frac{y^\varepsilon}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

и доказательство завершено.

ЛЕММА 20. Пусть N_1, N_2 – целые неотрицательные числа, k – натуральное число. Для двух натуральных чисел d_1, d_2 положим $d = (d_1, d_2)$. Определим

$$b_k(n) = \frac{\mu(n)}{n^{1/2-a}} \left(\frac{\ln(y/n)}{\ln y}\right)^k$$

и

$$S_{N_1, N_2}(\alpha) = \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1) b_k(d_2)}{d_1^\alpha d_2^\alpha} d^{2\alpha-2a} \left(L^{-1} \ln \frac{d_1}{d}\right)^{N_1} \left(L^{-1} \ln \frac{d_2}{d}\right)^{N_2}.$$

Тогда при $\alpha = 1$ или $\alpha = 2a$ имеем

$$S_{N_1, N_2}(\alpha) = L^{-N_1-N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} (-1)^{n_1+n_2} V_{N, n_1, n_2}(\alpha),$$

где

$$\begin{aligned} N &= N_1 - n_1 + N_2 - n_2, \\ V_{N, n_1, n_2}(\alpha) &= \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} g_j(N, 2\alpha - 2a) G_j^{(n_1)}\left(\frac{1}{2} - a + \alpha\right) G_j^{(n_2)}\left(\frac{1}{2} - a + \alpha\right), \\ G_j(s) &= \sum_{\substack{n \leq y/j \\ (n, j)=1}} \mu(n) n^{-s} \left(\frac{\ln(y/(jn))}{\ln y}\right)^k, \\ g_j(N, s) &= \sum_{d|j} \mu(d) d^{-s} (\ln d)^N. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве используются рассуждения, аналогичные приведенным в работе [4, с. 67–68]. Для произвольной функции $f(d)$ натурального аргумента d справедливо равенство

$$\sum_{j|d} \sum_{n|j} \mu(n) f\left(\frac{j}{n}\right) = \sum_{nm|d} \mu(n) f(m) = \sum_{m|d} f(m) \sum_{n|\frac{d}{m}} \mu(n) = f(d).$$

Отсюда получим, что

$$\begin{aligned} d^{2\alpha-2a} \left(\ln \frac{d_1}{d}\right)^{N_1} \left(\ln \frac{d_2}{d}\right)^{N_2} &= \sum_{j|d} \sum_{n|j} \mu(n) \left(\frac{j}{n}\right)^{2\alpha-2a} \left(\ln \frac{d_1 n}{j}\right)^{N_1} \left(\ln \frac{d_2 n}{j}\right)^{N_2} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} \sum_{j|d} j^{2\alpha-2a} \left(\ln \frac{d_1}{j}\right)^{n_1} \left(\ln \frac{d_2}{j}\right)^{n_2} g_j(N, 2\alpha-2a), \end{aligned}$$

где $N = N_1 - n_1 + N_2 - n_2$. Подставим это соотношение в выражение для $S_{N_1, N_2}(\alpha)$ и, представляя $d_1 = jn$, а $d_2 = jm$, последовательно найдем

$$\begin{aligned} L^{N_1+N_2} S_{N_1, N_2}(\alpha) &= \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} \\ &\quad \times \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{\mu(d_1) \mu(d_2)}{d_1^{1/2-a+\alpha} d_2^{1/2-a+\alpha}} \left(\frac{\ln(y/d_1)}{\ln y}\right)^k \left(\frac{\ln(y/d_2)}{\ln y}\right)^k \\ &\quad \times \sum_{j|d} j^{2\alpha-2a} \left(\ln \frac{d_1}{j}\right)^{n_1} \left(\ln \frac{d_2}{j}\right)^{n_2} g_j(N, 2\alpha-2a) \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} g_j(N, 2\alpha-2a) \\ &\quad \times \sum_{\substack{n \leq y/j \\ (n, j)=1}} \frac{\mu(n)}{n^{1/2-a+\alpha}} \left(\frac{\ln(y/(jn))}{\ln y}\right)^k (\ln n)^{n_1} \\ &\quad \times \sum_{\substack{m \leq y/j \\ (m, j)=1}} \frac{\mu(m)}{m^{1/2-a+\alpha}} \left(\frac{\ln(y/(jm))}{\ln y}\right)^k (\ln m)^{n_2} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} (-1)^{n_1+n_2} V_{N, n_1, n_2}(\alpha). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 21. Пусть $k \leq \ln \ln y$ – натуральное число, $H_k = \frac{1}{2k+1}$, $H'_k = \frac{k^2}{2k-1}$. При $\alpha = 1$ или $\alpha = 2a$ справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} V_{0,0,0}(\alpha) &= L^{-1} \left(\frac{H_k}{2} + \left(\alpha - a - \frac{1}{2} \right) L + 2H'_k \right) + O(kL^{-2} \ln^3 L), \\ V_{0,1,0}(\alpha) &= \left(\alpha - a - \frac{1}{2} \right) L \frac{H_k}{2} + \frac{1}{2} + O(kL^{-1} \ln^3 L), \\ V_{0,1,1}(\alpha) &= \frac{LH_k}{2} + O(\ln^3 L); \end{aligned}$$

здесь использованы обозначения леммы 20.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha = 2a$ или $\alpha = 1$. Тогда

$$2\alpha - 2a = \begin{cases} 1 + 2L^{-1} & \text{при } \alpha = 1, \\ 1 - 2L^{-1} & \text{при } \alpha = 2a, \end{cases} \quad \alpha - a + \frac{1}{2} = \begin{cases} 1 + L^{-1} & \text{при } \alpha = 1, \\ 1 - L^{-1} & \text{при } \alpha = 2a. \end{cases} \quad (56)$$

По определению

$$V_{0,0,0}(\alpha) = \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} F(j, 2\alpha - 2a) G_j^2 \left(\frac{1}{2} - a + \alpha \right),$$

где $F(j, s)$ определена в лемме 15. Из лемм 15 и 19 следует равенство

$$\begin{aligned} V_{0,0,0}(\alpha) &= \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} \frac{F(j, 2\alpha - 2a)}{F^2(j, 1/2 - a + \alpha)} \\ &\quad \times \left[\left(\alpha - a - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y} \right)^k + \frac{k}{\ln y} \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y} \right)^{k-1} \right]^2 + R, \end{aligned}$$

где

$$R \ll \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} F_1^3(j, 1 - 2\delta) k L^{-1} \left(L^{-2} \ln^3 L + L^{-1} \ln^2 L \left(\frac{j}{y} \right)^b \right) \ll k L^{-2} \ln^3 L;$$

функция $F_1(j, s)$ определена в лемме 15. Пользуясь леммой 18, получим следующую асимптотическую формулу:

$$V_{0,0,0}(\alpha) = \left(\alpha - a - \frac{1}{2} \right)^2 \ln y \cdot H_k + \left(\alpha - a - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\ln y} \cdot H'_k + O(kL^{-2} \ln^3 L).$$

Поскольку

$$\ln y = \frac{L}{2} + O(\ln L), \quad (57)$$

то

$$\begin{aligned} V_{0,0,0}(\alpha) &= L^{-1} \left(\left(\alpha - a - \frac{1}{2} \right)^2 L^2 \cdot \frac{H_k}{2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\alpha - a - \frac{1}{2} \right) L + 2H'_k \right) + O(kL^{-2} \ln^3 L). \end{aligned} \quad (58)$$

Из этого равенства и соотношения (56) следует первая формула леммы.

Получим теперь асимптотическую формулу для $V_{0,1,0}(\alpha)$:

$$V_{0,1,0}(\alpha) = \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} F(j, 2\alpha - 2a) G_j \left(\frac{1}{2} - a + \alpha \right) G'_j \left(\frac{1}{2} - a + \alpha \right).$$

Из лемм 15 и 19 следует равенство

$$\begin{aligned} V_{0,1,0}(\alpha) &= \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} \frac{F(j, 2\alpha - 2a)}{F^2(j, 1/2 - a + \alpha)} \\ &\quad \times \left[\left(\alpha - a - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y} \right)^k + \frac{k}{\ln y} \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y} \right)^{k-1} \right] \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y} \right)^k \\ &\quad + O(kL^{-1} \ln^3 L). \end{aligned}$$

В силу леммы 18 справедлива следующая формула:

$$V_{0,1,0}(\alpha) = \left(\alpha - a - \frac{1}{2} \right) \ln y \cdot H_k + \frac{1}{2} + O(kL^{-1} \ln^3 L).$$

Из равенства (57) получим

$$V_{0,1,0}(\alpha) = \left(\alpha - a - \frac{1}{2} \right) L \cdot \frac{H_k}{2} + \frac{1}{2} + O(kL^{-1} \ln^3 L). \quad (59)$$

Аналогично найдем

$$\begin{aligned} V_{0,1,1}(\alpha) &= \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} F(j, 2\alpha - 2a) \left(G'_j \left(\frac{1}{2} - a + \alpha \right) \right)^2 \\ &= \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} \frac{F(j, 2\alpha - 2a)}{F^2(j, 1/2 - a + \alpha)} \left(\frac{\ln(y/j)}{\ln y} \right)^{2k} + O(\ln^3 L) \\ &= \ln y \cdot H_k + O(\ln^3 L) = \frac{LH_k}{2} + O(\ln^3 L). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 22. Пусть $\alpha = 1$ или $\alpha = 2a$. Равномерно по k, n_1, n_2, N , где $1 \leq k \leq \ln \ln y, 0 \leq n_1, n_2 \leq k+1$, для функций $V_{N,n_1,n_2}(\alpha)$, определенных в лемме 20, справедлива оценка

$$V_{N,n_1,n_2}(\alpha) \ll N! (\ln L)^N (\delta(n_1)\delta(n_2)L + L^{n_1+n_2-2} \ln^5 L),$$

где

$$\delta(n) = \begin{cases} kL^{-1} & \text{при } n = 0, \\ 1 & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве этой леммы мы сохраним обозначения лемм 15 и 20. Вспомним, что

$$V_{N,n_1,n_2}(\alpha) = \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} g_j(N, 2\alpha - 2a) G_j^{(n_1)}\left(\frac{1}{2} - a + \alpha\right) G_j^{(n_2)}\left(\frac{1}{2} - a + \alpha\right).$$

При $|z - 1| \leq 2\delta$, где $\delta = 1/\ln \ln y$, справедлива оценка

$$g_j(0, z) = \sum_{d|j} \mu(d) d^{-z} = \prod_{p|j} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) \leq F_1(j, 1 - 2\delta).$$

Из равенства

$$g_j(N, z) = \sum_{d|j} \mu(d) d^{-z} (\ln d)^N = (-1)^N \frac{d^N}{dz^N} g_j(0, z),$$

предыдущей оценки и интегральной формулы Коши получим, что при $|\gamma - 1| \leq 2L^{-1}$ справедлива оценка

$$|g_j(N, \gamma)| = \frac{N!}{2\pi} \left| \int_{|z-\gamma|=\ln^{-1} L} \frac{g_j(0, z) dz}{(z-\gamma)^{N+1}} \right| \leq F_1(j, 1 - 2\delta) N! \ln^N L.$$

Воспользовавшись этой оценкой и результатом леммы 15, найдем

$$\begin{aligned} V_{N,n_1,n_2}(\alpha) &\ll N! \ln^N L \sum_{j \leq y} \frac{\mu^2(j)}{j} F_1^3(j, 1 - 2\delta) \\ &\quad \times \left[\delta(n_1) + L^{n_1-2} \ln^2 L \left(\ln L + L \left(\frac{j}{y} \right)^b \right) \right] \\ &\quad \times \left[\delta(n_2) + L^{n_2-2} \ln^2 L \left(\ln L + L \left(\frac{j}{y} \right)^b \right) \right]. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки в последней формуле и используя лемму 19, найдем

$$\begin{aligned} V_{N,n_1,n_2}(\alpha) &\ll N! \ln^N L (\delta(n_1)\delta(n_2)L + \delta(n_1)L^{n_2-1} \ln^3 L \\ &\quad + \delta(n_2)L^{n_1-1} \ln^3 L + L^{n_1+n_2-2} \ln^5 L) \\ &\ll N! \ln^N L (\delta(n_1)\delta(n_2)L + L^{n_1+n_2-2} \ln^5 L). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 23. При $\alpha = 2a$ или $\alpha = 1$ и натуральном $k \leq \ln \ln y$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} S_{0,0}(\alpha) &= L^{-1} \left(\frac{H_k}{2} + \left(\alpha - \frac{1}{2} - a \right) L + 2H'_k \right) + O(L^{-2} \ln^5 L), \\ S_{0,1}(\alpha) &= -L^{-1} \left(\frac{H_k}{2} \left(\alpha - \frac{1}{2} - a \right) L + \frac{1}{2} \right) + O(L^{-2} \ln^5 L), \\ S_{1,1}(\alpha) &= L^{-1} \frac{H_k}{2} + O(L^{-2} \ln^5 L). \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения лемм 20, 21.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 20 и 22 следует, что

$$\begin{aligned} S_{0,0}(\alpha) &= V_{0,0,0}(\alpha), \\ S_{0,1}(\alpha) &= L^{-1}(-V_{0,1,0}(\alpha) + V_{1,0,0}(\alpha)) = -L^{-1}V_{0,1,0}(\alpha) + k^2 L^{-2} \ln L, \\ S_{1,1}(\alpha) &= L^{-2}(V_{0,1,1}(\alpha) - 2V_{1,1,0}(\alpha) + V_{2,0,0}(\alpha)) = L^{-2}V_{0,1,1}(\alpha) + kL^{-2} \ln L. \end{aligned}$$

Из асимптотических формул леммы 21 получим утверждение леммы.

ЛЕММА 24. Пусть $1 \leq k \leq \ln \ln y$, $2 \leq \max(N_1, N_2) \leq k+1$. Тогда при $\alpha = 1$ или $\alpha = 2a$ равномерно по k справедлива оценка

$$S_{N_1, N_2}(\alpha) = O(L^{-2} \ln^5 L)$$

для функций $S_{N_1, N_2}(\alpha)$, введенных в лемме 20.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 20

$$|S_{N_1, N_2}(\alpha)| \leq L^{-N_1 - N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} |V_{N, n_1, n_2}(\alpha)|.$$

Поскольку $N = N_1 - n_1 + N_2 - n_2 \leq 4 \ln L$, то

$$N! \leq N^N \leq (4 \ln L)^{N_1 - n_1 + N_2 - n_2}.$$

Из этой оценки и леммы 22 следует, что

$$\begin{aligned} |S_{N_1, N_2}(\alpha)| &\leq \left(\frac{4 \ln^2 L}{L} \right)^{N_1 + N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} (4 \ln^2 L)^{-n_1 - n_2} \\ &\quad \times (\delta(n_1) \delta(n_2) L + L^{n_1 + n_2 - 2} \ln^5 L) \\ &\ll \left(\frac{4 \ln^2 L}{L} \right)^{N_1 + N_2} \left(k^2 L^{-1} + k(N_1 + N_2)(4 \ln^2 L)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + N_1 N_2 (4 \ln^2 L)^{-2} L + L^{-2} \ln^5 L \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} \left(\frac{L}{4 \ln^2 L} \right)^{n_1 + n_2} \right) \\ &\ll L^{-2} \ln^5 L + \left(\frac{4 \ln^2 L}{L} \right)^{N_1 + N_2} L^{-2} \ln^5 L \left(1 + \frac{L}{4 \ln^2 L} \right)^{N_1 + N_2} \ll L^{-2} \ln^5 L. \end{aligned}$$

Здесь мы пользовались тем, что в условиях леммы если $N_1 N_2 \neq 0$, то $N_1 + N_2 \geq 3$. Лемма доказана.

ЛЕММА 25. Пусть

$$I(r) = \int_T^{T+U} \exp \left\{ it \ln \frac{t}{2\pi r e} \right\} dt.$$

Для произвольного числа r из отрезка $T/(2\pi) \leq r \leq (T+U)/(2\pi)$ справедливо равенство

$$I(r) = 2\pi r^{1/2} e^{-2\pi i r + i\pi/4} + O(E(r)),$$

где

$$E(r) = 1 + \frac{T}{|T - 2\pi r| + T^{1/2}} + \frac{T+U}{|T+U - 2\pi r| + (T+U)^{1/2}}.$$

Если $r < T/(2\pi)$ или $r > (T+U)/(2\pi)$, то $I(r) = O(E(r))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [3, с. 394–396].

ЛЕММА 26. Пусть функция $E(r)$ определена, как в лемме 25. Верна следующая оценка:

$$\sum_{d_1, d_2 \leq T^{1/2} L^{-20}} d_1^{-1/2} d_2^{-1/2} \sum_{j_1, j_2 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} j_1^{-1/2} j_2^{-1/2} E\left(\frac{j_1 j_2 d_1}{d_2}\right) \ll UL^{-7}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве этой леммы мы применим рассуждения, приведенные в работе [3, с. 413–414]. Из определения функции $E(r)$ следует, что если $2\pi r \leq 3T/4$ или $2\pi r \geq 5T/4$, то $E(r) = O(1)$. Поэтому исходная сумма оценивается как $O(S_1 + S_2)$, где

$$S_1 = \sum_{d_1, d_2 \leq T^{1/2} L^{-20}} d_1^{-1/2} d_2^{-1/2} \sum_{j_1, j_2 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} j_1^{-1/2} j_2^{-1/2},$$

$$S_2 = \sum_{d_1, d_2 \leq T^{1/2} L^{-20}} d_1^{-1/2} d_2^{-1/2} \sum'_{j_1, j_2 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} j_1^{-1/2} j_2^{-1/2} \frac{\widehat{T}}{|\widehat{T} - 2\pi j_1 j_2 d_1 / d_2| + \widehat{T}^{1/2}},$$

$\widehat{T} = T$ или $\widehat{T} = T+U$, а штрих во внутренней сумме в выражении для S_2 означает, что суммирование ведется с условием

$$\frac{3T}{4} \leq \frac{2\pi j_1 j_2 d_1}{d_2} \leq \frac{5T}{4}. \quad (60)$$

Легко найдем, что $S_1 \ll TL^{-20} \ll UL^{-10}$.

Перейдем к оценке суммы S_2 . Из условия (60) следует, что

$$S_2 \ll T^{-1/2} \sum_{d_1, d_2 \leq T^{1/2} L^{-20}} d_2^{-1} \sum_{j_1, j_2 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{\widehat{T}}{|\widehat{T} - 2\pi j_1 j_2 d_1 / d_2| + \widehat{T}^{1/2}}$$

$$= T^{-1/2} \sum_{d_1, d_2 \leq T^{1/2} L^{-20}} d_2^{-1} \sum_{j_1, j_2 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{\widehat{T} d_2 / (2\pi j_2 d_1)}{|j_1 - \widehat{T} d_2 / (2\pi j_2 d_1)| + \widehat{T}^{1/2} d_2 / (2\pi j_2 d_1)}.$$

Разобьем последнюю сумму на две, в первой из которых на область суммирования налагается дополнительное условие

$$\left| j_1 - \frac{\hat{T}d_2}{2\pi j_2 d_1} \right| \leq 1, \quad (61)$$

а во второй – дополнительное условие

$$\left| j_1 - \frac{\hat{T}d_2}{2\pi j_2 d_1} \right| > 1. \quad (62)$$

Поскольку при фиксированных числах d_1, d_2, j_2 количество натуральных чисел j_1 , удовлетворяющих (61), не превосходит трех, то первая сумма есть

$$O\left(\sum_{d_1, d_2 \leq T^{1/2} L^{-20}} d_2^{-1} \sum_{j_2 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} 1 \right) = O(TL^{-19}) = O(UL^{-9}).$$

Вторая сумма оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} & T^{-1/2} \sum_{d_1, d_2 \leq T^{1/2} L^{-20}} d_2^{-1} \sum_{\substack{j_1, j_2 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \\ |j_1 - \hat{T}d_2/(2\pi j_2 d_1)| > 1}} \frac{\hat{T}d_2/(2\pi j_2 d_1)}{|j_1 - \hat{T}d_2/(2\pi j_2 d_1)|} \\ & \ll T^{1/2} \sum_{d_1, d_2 \leq T^{1/2} L^{-20}} d_1^{-1} \sum_{j_2 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} j_2^{-1} \sum'_{j_1 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{1}{|j_1 - \hat{T}d_2/(2\pi j_2 d_1)|}, \end{aligned}$$

причем штрих в $\sum'_{j_1}$ означает суммирование по натуральным числам j_1 , удовлетворяющим условию (62). При фиксированных d_1, d_2, j_2 имеем

$$\sum'_{j_1 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{1}{|j_1 - \hat{T}d_2/(2\pi j_2 d_1)|} = O(L),$$

поэтому вторая сумма есть

$$O(L^3)T^{1/2}T^{1/2}L^{-20} = O(UL^{-7}).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 27. Пусть $\varphi(x) = (1-x)(1-2x+\pi i/(2L))^k$, где $1 \leq k \leq \ln L$. Тогда для произвольного числа x из промежутка $0 \leq x \leq 1$

$$|\varphi^{(j)}(x)| \leq 2^{j+2}k^j \quad \text{при } 0 \leq j \leq k+1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $0 \leq x \leq 1$ имеем

$$|\varphi(x)| \leq \left(1 + \frac{\pi}{2L}\right)^k,$$

откуда по лемме 1 получим оценку $|\varphi(x)| \leq 1 + \frac{k\pi}{L} \leq 2$, и утверждение леммы при $j = 0$ доказано.

Из формулы Лейбниша следует, что при $1 \leq j \leq k$

$$\begin{aligned} \varphi^{(j)}(x) = & (-1)^j \left(j 2^{j-1} \frac{k!}{(k-j+1)!} \left(1 - 2x + \frac{\pi i}{2L} \right)^{k-j+1} \right. \\ & \left. + 2^j \frac{k!}{(k-j)!} (1-x) \left(1 - 2x + \frac{\pi i}{2L} \right)^{k-j} \right) \end{aligned}$$

и

$$\varphi^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} (k+1)! 2^k.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$|\varphi^{(k+1)}(x)| \leq 2^k (k+1) k^k \leq 2^{k+1} k^{k+1},$$

поэтому при $j = k+1$ утверждение леммы верно, а при $1 \leq j \leq k$ из полученных формул следует, что

$$\begin{aligned} |\varphi^{(j)}(x)| & \leq \left(j 2^{j-1} k^{j-1} \left(1 + \frac{\pi}{2L} \right)^{k-j+1} + 2^j k^j \left(1 + \frac{\pi}{2L} \right)^{k-j} \right) \\ & \leq 2^j k^j + 2^{j+1} k^j \leq 2^{j+2} k^j, \end{aligned}$$

и требуемые оценки получены.

ЛЕММА 28. Пусть $\psi(x)$ – многочлен. Тогда

$$\int_0^1 e^{2x\psi(x)} dx = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n} (e^2 \psi^{(n)}(1) - \psi^{(n)}(0)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям достаточное количество раз, приходим к утверждению леммы.

ЛЕММА 29. Пусть $g(x) = f'(x)/2$, где $f(x)$ – многочлен. Тогда выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n} (f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)) = f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭТОЙ ЛЕММЫ ОЧЕВИДНО.

ЛЕММА 30. Пусть $f(x) \in C^4[0, 1]$, n – натуральное число. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) (1-2x)^n dx & = \frac{(-1)^n f(1) + f(0)}{2(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1} f'(1) + f'(0)}{4(n+1)(n+2)} \\ & + \frac{(-1)^n f''(1) + f''(0)}{8(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{(-1)^{n+1} f'''(1) + f'''(0)}{16(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ & + \theta \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| \frac{1}{16(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}, \end{aligned}$$

где $|\theta| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя четыре раза формулу интегрирования по частям и используя равенство

$$\int_0^1 |1-2x|^{n+4} dx = \frac{1}{n+5},$$

получим утверждение леммы.

§ 3. Зависимость $a_k(T, U)$ от интеграла J_k

Далее будем использовать обозначения, введенные перед леммой 18, и полагать, что k – произвольное натуральное число из промежутка $1 \leq k \leq \frac{1}{2} \frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}$. Все оценки проводятся равномерно по k .

ЛЕММА 31. *Справедливо неравенство*

$$N_k^{(0)}(T+U) - N_k^{(0)}(T) \geq N_k(T+U) - N_k(T) - \frac{UL}{2\pi} \ln \frac{J_k}{U} + O(kU),$$

где

$$\begin{aligned} J_k &= \int_T^{T+U} |V_k^* \psi_k(a+it)|^2 dt, \\ V_k^*(s) &= \sum_{n \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \left(1 - \frac{\ln n}{L}\right) \left(1 + \frac{i\pi}{2L} - \frac{2 \ln n}{L}\right)^k n^{-s} \\ &\quad + e \exp\left\{\frac{\pi i}{4} - it \ln \frac{t}{2\pi e}\right\} \sum_{n \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{\ln n}{L} \left(\frac{2 \ln n}{L} + \frac{i\pi}{2L} - 1\right)^k n^{s-1}, \\ \psi_k(s) &= \sum_{n \leq y} \frac{\mu(n)}{n^{1/2-a}} \left(\frac{\ln(y/n)}{\ln y}\right)^k n^{-s}, \end{aligned} \quad (63)$$

а $\mu(n)$ – функция Мёбиуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 8 следует, что

$$\xi(s) = Q(s) + \overline{Q(1-\bar{s})}, \quad (64)$$

где

$$Q(s) = H(s) \int_{0 \nearrow 1} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} \left(1 - \frac{\ln z}{L}\right) dz + H(1-s) \int_{0 \searrow 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} \frac{\ln z}{L} dz.$$

Дифференцируя k раз равенство (64), получим

$$\xi^{(k)}(s) = Q_k(s) + (-1)^k \overline{Q_k(1-\bar{s})}, \quad (65)$$

где

$$\begin{aligned} Q_k(s) &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} H^{(m)}(s) \int_{0 \nearrow 1} \frac{z^{-s} e^{\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (-\ln z)^{k-m} \left(1 - \frac{\ln z}{L}\right) dz \\ &\quad + \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^m H^{(m)}(1-s) \int_{0 \searrow 1} \frac{z^{s-1} e^{-\pi i z^2}}{2i \sin(\pi z)} (\ln z)^{k-m} \frac{\ln z}{L} dz. \end{aligned} \quad (66)$$

Из формулы (65) следует, что $\xi^{(k)}(\frac{1}{2} + it)$ есть сумма (если k четное) или разность (если k нечетное) двух комплексно-сопряженных величин. Поэтому $\xi^{(k)}(\frac{1}{2} + it) = 0$ в одном из следующих случаев:

- а) $\arg Q_k(\frac{1}{2} + it) \equiv \frac{k+1}{2} \pi \pmod{\pi}$;
- б) $Q_k(\frac{1}{2} + it) = 0$.

Эти условия не зависят от того, как определен $\arg Q_k(\frac{1}{2} + it)$. Определим $\arg Q_k(\frac{1}{2} + it)$ для $T \leq t \leq T + U$ непрерывным продолжением $\arg Q_k(\frac{1}{2} + iT)$ вдоль прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Если $s_1 = \frac{1}{2} + it_1$ есть нуль функции $Q_k(s)$ порядка n , то определим

$$\begin{aligned} \arg Q_k\left(\frac{1}{2} + i(t_1 + 0)\right) &= \arg Q_k\left(\frac{1}{2} + i(t_1 - 0)\right) + \pi n, \\ \arg Q_k\left(\frac{1}{2} + it_1\right) &= \arg Q_k\left(\frac{1}{2} + i(t_1 + 0)\right). \end{aligned}$$

Из равенства (65) следует, что $s_1 = \frac{1}{2} + it_1$ есть нуль функции $\xi^k(s)$ порядка не меньше n . Значит,

$$N_k^{(0)}(T + U) - N_k^{(0)}(T) \geq \frac{1}{\pi} \left(\arg Q_k\left(\frac{1}{2} + i(T + U - 0)\right) - \arg Q_k\left(\frac{1}{2} + iT\right) \right) - 1.$$

Пользуясь леммами 2 и 7, найдем

$$\frac{1}{\pi} \left(\arg H\left(\frac{1}{2} + i(T + U)\right) - \arg H\left(\frac{1}{2} + iT\right) \right) = N_k(T + U) - N_k(T) + O(k \ln T).$$

Определим функцию $V_k(s) = Q_k(s)/H(s)$. Тогда из последнего равенства следует, что

$$\begin{aligned} N_k^{(0)}(T + U) - N_k^{(0)}(T) &\geq N_k(T + U) - N_k(T) + O(k \ln T) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left(\arg V_k\left(\frac{1}{2} + i(T + U - 0)\right) - \arg V_k\left(\frac{1}{2} + iT\right) \right). \end{aligned} \quad (67)$$

Вообще говоря, здесь и далее можно без ограничения общности полагать, что функции $V_k(s), \psi_k(s)$ не равны нулю на прямых $\operatorname{Im} s = T, \operatorname{Im} s = T + U(T)$, $\operatorname{Re} s = a(T) = 1/2 - 1/L$. Действительно, если это не так, то можно взять $T' > T$ из произвольно малой окрестности T , причем уже на прямых $\operatorname{Im} s = T', \operatorname{Im} s = T' + U(T')$, $\operatorname{Re} s = a(T')$ не будет нулей $V_k(s), \psi_k(s)$. Если мы докажем справедливость леммы для T' , сколь угодно близкого к T , то утверждение леммы будет справедливо и для T в силу того, что:

а) функция $V_k^* \psi_k(a + it)$ непрерывна справа по T , и, следовательно, интеграл $J_k(T) = \int_T^{T+U} |V_k^* \psi_k(a + it)|^2 dt$ непрерывен справа по T ; поэтому можно взять такое $T' > T$, что разница при замене $J_k(T)$ на $J_k(T')$ в исходной формуле уйдет в остаток;

б) справедливы следующие неравенства при $|T - T'| \leq 1$:

$$N_k^0(T + U(T)) - N_k^0(T) \geq N_k^0(T' + U(T')) - N_k^0(T') - (N_k(T' + U(T')) - N_k(T + U(T))),$$

$$N_k(T' + U(T')) - N_k(T + U) = O(k \ln T) = N_k(T') - N_k(T).$$

При доказательстве этой леммы мы будем использовать теорему Литтлвуда в общей формулировке и лемму 5, которые позволяют нам проводить рассуждения и в случае, когда функции $V_k(s)$, $\psi_k(s)$ имеют нули на упомянутых выше прямых.

Получим “явную” формулу для функции $V_k(s)$ в области $T \leq t \leq T + U$, $0 \leq \sigma \leq 10 \ln \ln T$. Применив лемму 9 к формуле (66), придем к равенству

$$Q_k(s) = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} H^{(m)}(s) \left(\sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (-\ln n)^{k-m} \left(1 - \frac{\ln n}{L} \right) n^{-s} + O(T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}}) \right) + \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^m H^{(m)}(1-s) \left(\sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (\ln n)^{k-m} \frac{\ln n}{L} n^{s-1} + O(T^{\frac{\sigma-1}{2} + \frac{1}{100}}) \right).$$

Заменим в этом равенстве $H^{(m)}(s)$ по формуле (2); разделив потом обе части равенства на $H(s)$, получим

$$V_k(s) = \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (F(s) - \ln n)^k \left(1 - \frac{\ln n}{L} \right) n^{-s} + \chi(s) \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (\ln n - F(1-s))^k \cdot \frac{\ln n}{L} n^{s-1} + O(j_1(s) + j_2(s) + j_3(s) + j_4(s)), \quad (68)$$

и с помощью леммы 2 найдем следующие оценки:

$$j_1(s) \ll T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} |F^m(s)| \ll T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (\ln T)^m \ll T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{100}} (\ln T + 1)^k \ll T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{50}},$$

$$j_2(s) \ll |\chi(s)| T^{\frac{\sigma-1}{2} + \frac{1}{100}} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} |F^m(1-s)| \ll T^{-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{50}},$$

$$j_3(s) \ll T^{-1} \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{-\sigma} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (\ln T)^m (\ln n)^{k-m} \ll T^{-1} \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{-\sigma} (\ln n T)^k \ll T^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{50}},$$

$$j_4(s) \ll T^{-1} |\chi(s)| \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{\sigma-1} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (\ln T)^m (\ln n)^{k-m} \ll T^{-\frac{1}{2} - \sigma} (2 \ln T)^k \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{\sigma-1} \ll T^{-\frac{\sigma+1}{2} + \frac{1}{50}}.$$

Для оценки $\text{vararg} V_k(1/2 + it)|_{t=T}^{T+U-0}$ применим принцип аргумента к функции $V_k(s)$ на прямоугольном контуре $\mathcal{D}$ с вершинами в точках $1/2 + iT$, $8 + iT$, $8 + i(T + U)$, $1/2 + i(T + U)$. Из формулы (68) получим, что на правой стороне контура

$$\begin{aligned} |V_k(s) - F^k(s)| &\leq \sum_{2 \leq n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} |F(s) - \ln n|^k n^{-8} \\ &\quad + |\chi(s)| \sum_{2 \leq n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} |F(1-s) - \ln n|^k n^7 + O(T^{-24/50}) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} + O(1) \right)^k \left(\frac{1}{2^8} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^8} + 2T^{1/2-\sigma} \int_1^{\sqrt{T}} x^7 dx \right) \\ &\quad + O(T^{-24/50}) \\ &\leq 2 \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} \right)^k \left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{4} T^{1/2-8+4} \right) + O(T^{-24/50}) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} \right)^k \end{aligned}$$

при $T \geq T_1$, поэтому

$$\begin{aligned} \left| V_k(s) - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} \right)^k \right| &= \left| V_k(s) - F^k(s) + F^k(s) - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} \right)^k \right| \\ &\leq |V_k(s) - F^k(s)| + \left| F^k(s) - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} \right)^k \right| \\ &\leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} \right)^k + \left| \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} + O(1) \right)^k - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} \right)^k \right| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} \right)^k, \end{aligned}$$

следовательно, модуль приращения аргумента функции $V_k(s)$ на правой стороне прямоугольного контура меньше π . Далее с помощью леммы 5 найдем приращение аргумента функции $V_k(s)$ на горизонтальных сторонах контура $\mathcal{D}$. Пусть $\hat{T} = T$ или $\hat{T} = T + U$. Из последней оценки следует, что

$$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\hat{T}}{2\pi} \right)^k \leq \text{Re } V_k(8 + i\hat{T}) \leq \frac{5}{4} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\hat{T}}{2\pi} \right)^k.$$

В круге $|s - (8 + i\hat{T})| \leq 7\frac{3}{4}$ из формулы (68) получим

$$\begin{aligned} |V_k(s)| &\ll (\ln T)^k \left(\sum_{1 \leq n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{-1/4} + T^{1/4} \sum_{2 \leq n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} n^{-3/4} \right) + T^{-1/16} \\ &\ll (\ln T)^k T^{3/8}. \end{aligned}$$

В лемме 5 положим $f(s) = V_k(s + 8 + i\hat{T})$, $R = 7\frac{3}{4}$, $r = 7\frac{1}{2}$. Тогда из полученных выше оценок найдем, что приращение аргумента функции $V_k(s)$ на горизонтальных сторонах контура $\mathcal{D}$ есть

$$O(k \ln \ln T) + O(\ln T) = O(\ln T).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{vararg} V_k \left(\frac{1}{2} + it \right) \Big|_{t=T}^{T+U} = -2N + O(\ln T), \quad (69)$$

где N – количество нулей функции $V_k(s)$ внутри контура $\mathcal{D}$ и на его верхней стороне, за исключением точки $1/2 + i(T+U)$.

Далее получим верхнюю оценку для N . Применим теорему Литтлвуда (лемма 6) к функции $2^k L^{-k} V_k(s) \psi_k(s)$ на прямоугольном контуре $\mathcal{E}$ с вершинами $a + iT$, $\sigma_1 + iT$, $\sigma_1 + i(T+U)$, $a + i(T+U)$, где $\sigma_1 = \ln L / \ln 2$, функция $\psi_k(s)$ определена формулой (63). Тогда

$$2\pi i \sum_{\rho=\beta+i\gamma} (\beta - a) = - \int_{\mathcal{E}} \ln \left(\left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k(s) V_k(s) \right) ds, \quad (70)$$

где суммирование ведется по всем нулям ρ функции $V_k(s) \psi_k(s)$ внутри прямоугольного контура $\mathcal{E}$ и на его верхней стороне. Поскольку интеграл в правой части равенства (70) не зависит от выбора ветви аргумента функции, стоящей под знаком логарифма, то выберем $\arg \left(\left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(\sigma_1 + iT) \right) \in [0, 2\pi)$ для каждого натурального k . Взяв мнимые части от обеих сторон равенства (70), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{\rho=\beta+i\gamma} (\beta - a) &= \int_T^{T+U} \ln \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(a + it) \right| dt \\ &\quad - \int_T^{T+U} \ln \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(\sigma_1 + it) \right| dt \\ &\quad + \int_a^{\sigma_1} \arg \left(\left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(\sigma + i(T+U)) \right) d\sigma \\ &\quad - \int_a^{\sigma_1} \arg \left(\left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(\sigma + iT) \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (71)$$

На правой стороне прямоугольного контура $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k V_k(s) - 1 \right| &\leq \left(\frac{2}{L} \right)^k |V_k(s) - F^k(s)| + \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k F^k(s) - 1 \right| \\ &\ll \left(\frac{\ln(t/(2\pi))}{\ln(T/(2\pi))} \right)^k \frac{1}{2^{\sigma_1}} + \left| \left(\frac{\ln(t/(2\pi))}{\ln(T/(2\pi))} \right)^k (1 + O(L^{-1}))^k - 1 \right| \\ &\ll \left(1 + O\left(\frac{U}{TL} \right) \right)^k \frac{1}{2^{\sigma_1}} + |(1 + O(L^{-1}))^k - 1| \\ &\ll \frac{1}{2^{\sigma_1}} + O(kL^{-1}) \ll \frac{k}{L} \end{aligned}$$

и

$$|\psi_k(s) - 1| \leq \frac{1}{2^{\sigma_1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\sigma_1}} \leq \frac{2}{2^{\sigma_1}} = \frac{2}{L}.$$

Отсюда следует, что при $T \leq t \leq T + U$

$$\left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(\sigma_1 + it) - 1 \right| = O(kL^{-1}), \quad (72)$$

поэтому

$$\int_T^{T+U} \ln \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(\sigma_1 + it) \right| dt = O(kUL^{-1}).$$

Из формулы (72) также следует, что модуль приращения аргумента функции $2^k L^{-k} V_k(s) \psi_k(s)$ вдоль правой стороны контура $\mathcal{E}$ меньше π . Отсюда

$$\arg \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(\sigma_1 + i(T + U)) \in (-\pi, 3\pi). \quad (73)$$

Поскольку $|\psi_k(s)| \ll T^{3/8}$ при $\operatorname{Re} s \geq 1/4$, то в круге $|s - (\sigma_1 + i\hat{T})| \leq \sigma_1 - 1/4$, где $\hat{T} = T$ или $\hat{T} = T + U$, справедлива оценка

$$\left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(s) \right| \ll T^{3/8} (\ln T)^k T^{3/8}.$$

Из равенства (72) следует, что

$$\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(\sigma_1 + i\hat{T}) < \frac{3}{2}.$$

Теперь, применив лемму 5 при $f(s) = \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(s + \sigma_1 + i\hat{T})$, $R = \sigma_1 - 1/4$ и произвольном числе r из промежутка $0 \leq r \leq \sigma_1 - a$, найдем

$$\operatorname{vararg} f(\sigma) \Big|_{\sigma=0}^{-r} = O(\sigma_1 \ln T).$$

Принимая во внимание (73), получим, что аргумент функции $2^k L^{-k} V_k(s) \psi_k(s)$ на горизонтальных сторонах контура $\mathcal{E}$ есть $O(\sigma_1 L)$. Отсюда следует, что каждый из двух последних интегралов правой части равенства (71) оценивается как $O(\sigma_1^2 L)$.

Поскольку множество всех нулей функции $V_k(s) \psi_k(s)$ в прямоугольнике $\mathcal{E}$ содержит нули функции $V_k(s)$ из прямоугольника $\mathcal{D}$, то

$$\sum_{\rho=\beta+i\gamma} (\beta - a) \geq \left(\frac{1}{2} - a \right) N,$$

поэтому из соотношения (71) имеем

$$2\pi \left(\frac{1}{2} - a \right) N \leq \int_T^{T+U} \ln \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(a + it) \right| dt + O(kUL^{-1}).$$

Из выпуклости функции $\ln t$ следует, что

$$\int_T^{T+U} \ln \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(a+it) \right| dt \leq U \ln \left(\frac{I_k}{U} \right),$$

где

$$I_k = \int_T^{T+U} \left| \left(\frac{2}{L} \right)^k \psi_k V_k(a+it) \right| dt.$$

Следовательно, будем иметь

$$2N \leq \frac{UL}{\pi} \ln \frac{I_k}{U} + O(kU). \quad (74)$$

Далее упростим выражение для интеграла I_k . Ниже будем полагать $s = a + it$, $T \leq t \leq T + U$. Пусть

$$C(s) = \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (F(s) - \ln n)^k \left(1 - \frac{\ln n}{L} \right) n^{-s}.$$

Из формулы (1) и леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} (F(s) - \ln n)^k &= \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \ln n + \frac{i\pi}{4} + O(T^{-1}) \right)^k \\ &= \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \ln n + \frac{i\pi}{4} \right)^k \left(1 + O(kT^{-1}) \right). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$C(s) = \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} + \frac{\pi i}{4} - \ln n \right)^k \left(1 - \frac{\ln n}{L} \right) n^{-s} + O\left(kT^{-3/4} \left(\frac{L}{2} \right)^k \right),$$

или

$$\left| \left(\frac{2}{L} \right)^k C(s) \right| = C_1(s) + C_2(s) + C_3(s) + O(kT^{-3/4}),$$

где

$$\begin{aligned} C_1(s) &= \sum_{n \leq \sqrt{T/(2\pi)}} \left(1 - \frac{\ln n}{L} \right) \left(1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \ln n}{L} \right)^k n^{-s}, \\ C_2(s) &= \sum_{n \leq \sqrt{T/(2\pi)}} \left(1 - \frac{\ln n}{L} \right) \left(\left(\frac{\ln(t/(2\pi))}{\ln(T/(2\pi))} + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \ln n}{L} \right)^k - \left(1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \ln n}{L} \right)^k \right) n^{-s}, \\ C_3(s) &= \sum_{\sqrt{T/(2\pi)} < n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} \left(1 - \frac{\ln n}{L} \right) \left(\frac{\ln(t/(2\pi))}{\ln(T/(2\pi))} + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \ln n}{L} \right)^k n^{-s}. \end{aligned}$$

По лемме 10 с $\delta \ll k \ln \frac{T+U}{T} \ll kL^{-10}$ получим

$$\int_T^{T+U} |C_2(a+it)|^2 dt \ll k^2 L^{-20} U \sum_{n \leq \sqrt{T/(2\pi)}} \frac{|1 - L^{-1} \ln n|^2}{n} \ll k^2 U L^{-19}. \quad (75)$$

Опять применим лемму 10 для оценки приведенного ниже интеграла с $\delta \ll 1$:

$$\int_T^{T+U} |C_3(a+it)|^2 dt \ll U \sum_{\sqrt{T/(2\pi)} < n \leq \sqrt{(T+U)/(2\pi)}} \frac{|1 - L^{-1} \ln n|^2}{n} \ll U L^{-10}. \quad (76)$$

Определив

$$D(s) = \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} (\ln n - F(1-s))^k \frac{\ln n}{L} n^{s-1},$$

получим следующую формулу:

$$\left| \left(\frac{2}{L} \right)^k D(s) \right| = D_1(s) + D_2(s) + D_3(s) + O(kT^{-3/4}),$$

где

$$D_1(s) = \sum_{n \leq \sqrt{T/(2\pi)}} \frac{\ln n}{L} \left(\frac{2 \ln n}{L} + \frac{\pi i}{2L} - 1 \right)^k n^{s-1},$$

а функции $D_2(s)$ и $D_3(s)$ определены аналогично функциям $C_2(s)$ и $C_3(s)$, и для них справедливы оценки (75) и (76) соответственно. В силу леммы 10

$$\begin{aligned} \int_T^{T+U} |\psi_k(a+it)|^2 dt &\ll U \sum_{n \leq y} \frac{1}{n} \ll UL, \\ \int_T^{T+U} |D_1(a+it)|^2 dt &\ll UL. \end{aligned}$$

Положим $\chi^*(t) = e \exp\{\pi i/4 - it \ln(t/(2\pi e))\}$. Из леммы 2 имеем

$$\chi(a+it) - \chi^*(t) \ll \left(\frac{T+U}{2\pi} \right)^{1/L} - \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{1/L} \ll \left(1 + \frac{U}{T} \right)^{1/L} - 1 \ll \frac{U}{TL} = L^{-11}$$

при $T \leq t \leq T+U$. Отсюда и из полученных выше оценок следует, что

$$\begin{aligned} &\int_T^{T+U} |\chi(a+it) - \chi^*(t)| |D_1 \psi_k(a+it)| dt \\ &\ll L^{-11} \left(\int_T^{T+U} |D_1(a+it)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_T^{T+U} |\psi_k(a+it)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\ll L^{-11} UL = UL^{-10}. \end{aligned}$$

Собирая полученные результаты вместе и применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$I_k = \int_T^{T+U} |V_k^* \psi_k(a + it)| dt + O(UL^{-9/2});$$

здесь

$$V_k^*(s) = C_1(s) + \chi^*(t)D_1(s). \quad (77)$$

Пусть теперь

$$J_k = \int_T^{T+U} |V_k^* \psi_k(a + it)|^2 dt.$$

Тогда по неравенству Коши–Буняковского

$$I_k \leq U^{1/2} J_k^{1/2} + O(UL^{-9/2}). \quad (78)$$

Поскольку левая часть неравенства (74) неотрицательна, то $I_k \gg U$. Из последней оценки следует, что $J_k \gg U$. Теперь из (74) и (78) получим, что

$$2N \leq \frac{UL}{2\pi} \ln \frac{J_k}{U} + O(kU).$$

Подставим эту оценку в формулу (69). Тогда из неравенства (67) следует результат леммы.

§ 4. “Явная” формула для интеграла J_k

Пусть $b_k(n) = \frac{\mu(n)}{n^{1/2-a}} \left(\frac{\ln(y/n)}{\ln y} \right)^k$, $\phi(u) = (1-u)(1-2u + \frac{i\pi}{2L})^k$.

ЛЕММА 32. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \frac{J_k}{U} &= \frac{Le^2}{2} \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1 d_2} \cdot d^{2-2a} \sum_{n=0}^{2k+2} \frac{(-1)^n}{2^n} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \phi^{(j)} \left(1 - \frac{\ln(d_1/d)}{L} \right) \overline{\phi^{(n-j)} \left(1 - \frac{\ln(d_2/d)}{L} \right)} \\ &\quad - \frac{L}{2} \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{2a} d_2^{2a}} \cdot d^{2a} \sum_{n=0}^{2k+2} \frac{(-1)^n}{2^n} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \phi^{(j)} \left(\frac{\ln(d_1/d)}{L} \right) \overline{\phi^{(n-j)} \left(\frac{\ln(d_2/d)}{L} \right)} + O(kL^{-1}), \end{aligned}$$

где $d = (d_1, d_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возвращаясь к формуле (77) леммы 31, получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} J_k &= \int_T^{T+U} |V_k^* \psi_k(a+it)|^2 dt \\ &= \int_T^{T+U} (C_1 \psi_k(a+it) + \chi^*(t) D_1 \psi_k(a+it)) \\ &\quad \times (\overline{C_1 \psi_k(a+it)} + \overline{\chi^*(t) D_1 \psi_k(a+it)}) dt \\ &= I_1 + 2 \operatorname{Re} I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_T^{T+U} |C_1 \psi_k(a+it)|^2 dt, \\ I_2 &= \int_T^{T+U} \overline{\chi^*(t) D_1 C_1(a+it)} |\psi_k(a+it)|^2 dt, \\ I_3 &= e^2 \int_T^{T+U} |\overline{D_1} \psi_k(a+it)|^2 dt. \end{aligned}$$

Положим $\tau = \sqrt{T/(2\pi)}$ и

$$c_k(n) = \left(1 - \frac{\ln n}{L}\right) \left(1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \ln n}{L}\right)^k.$$

Тогда по лемме 10

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_T^{T+U} \left| \sum_{n \leq y} \frac{b_k(n)}{n^{a+it}} \sum_{m \leq \tau} \frac{c_k(m)}{m^{a+it}} \right|^2 dt = \int_T^{T+U} \left| \sum_{\substack{nm \leq \tau y \\ n \leq y \\ m \leq \tau}} \frac{b_k(n) c_k(m)}{(nm)^{a+it}} \right|^2 dt \\ &= \int_T^{T+U} \left| \sum_{n \leq \tau y} \frac{1}{n^{a+it}} \sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{\tau} \leq d \leq y}} b_k(d) c_k\left(\frac{n}{d}\right) \right|^2 dt \\ &= U(1 + O(\tau y L U^{-1})) \sum_{n \leq \tau y} \frac{1}{n^{2a}} \left| \sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{\tau} \leq d \leq y}} b_k(d) c_k\left(\frac{n}{d}\right) \right|^2 \\ &= U(1 + O(L^{-9})) \sum_{n \leq \tau y} \frac{1}{n^{2a}} \left| \sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{\tau} \leq d \leq y}} b_k(d) c_k\left(\frac{n}{d}\right) \right|^2. \end{aligned}$$

Возведя в последнем выражении сумму по d в квадрат, получим двойную сумму $\sum_{d_1} \sum_{d_2}$ по натуральным числам d_1, d_2 с условиями $d_1|n, d_2|n, n\tau^{-1} \leq d_1, d_2 \leq y$. Теперь переставим местами суммы $\sum_{d_1} \sum_{d_2}$ и сумму $\sum_n$. Обозначим через d наибольший общий делитель чисел d_1 и d_2 . Тогда число n представимо в виде

$$n = \frac{d_1 d_2}{d} \cdot j, \quad j \leq \frac{\tau d}{\max(d_1, d_2)}.$$

Отсюда будем иметь следующую формулу для I_1 :

$$I_1 = U \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{2a}d_2^{2a}} \cdot d^{2a} \sum_{j \leq \frac{\tau d}{\max(d_1, d_2)}} c_k\left(\frac{jd_1}{d}\right) \overline{c_k\left(\frac{jd_2}{d}\right)} j^{-2a} + O(UL^{-5}), \quad (80)$$

где оценка остаточного члена получена с помощью леммы 12.

Пусть

$$d_k(n) = \frac{\ln n}{L} \left(\frac{2 \ln n}{L} - 1 + \frac{\pi i}{2L} \right)^k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_3 &= e^2 \int_T^{T+U} \left| \sum_{n \leq y} \frac{b_k(n)}{n^{a+it}} \sum_{m \leq \tau} \overline{d_k(m) m^{a+it-1}} \right|^2 dt \\ &= e^2 \int_T^{T+U} \left| \sum_{\substack{nm \leq \tau y \\ n \leq y \\ m \leq \tau}} \frac{b_k(n) \overline{d_k(m)}}{n^a m^{1-a}} (nm)^{-it} \right|^2 dt \\ &= e^2 \int_T^{T+U} \left| \sum_{n \leq \tau y} \frac{1}{n^{1-a+it}} \sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{d} \leq d \leq y}} b_k(d) \overline{d_k\left(\frac{n}{d}\right)} d^{1-2a} \right|^2 dt \\ &= e^2 U (1 + O(L^{-9})) \sum_{n \leq \tau y} \frac{1}{n^{2-2a}} \left| \sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{d} \leq d \leq y}} b_k(d) \overline{d_k\left(\frac{n}{d}\right)} d^{1-2a} \right|^2. \end{aligned}$$

Опять, возводя сумму по d в квадрат и меняя порядки суммирования, получим следующую формулу для I_3 , аналогичную формуле (80):

$$\begin{aligned} I_3 &= e^2 U \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1 d_2} \cdot d^{2-2a} \\ &\quad \times \sum_{j \leq \frac{\tau d}{\max(d_1, d_2)}} d_k\left(\frac{jd_1}{d}\right) \overline{d_k\left(\frac{jd_2}{d}\right)} j^{2a-2} + O(UL^{-5}). \end{aligned} \quad (81)$$

Теперь получим аналогичную формулу для I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_T^{T+U} \overline{\chi^*(t)} \overline{D_1} C_1(a+it) |\psi_k(a+it)|^2 dt \\ &= e e^{-\pi i/4} \int_T^{T+U} e^{it \ln \frac{t}{2\pi e}} \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{a+it} d_2^{a-it}} \sum_{j_1, j_2 \leq \tau} \frac{c_k(j_1) \overline{d_k(j_2)}}{j_1^{a+it} j_2^{1-a+it}} dt \\ &= e e^{-\pi i/4} \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^a d_2^a} \\ &\quad \times \sum_{j_1, j_2 \leq \tau} \frac{c_k(j_1) \overline{d_k(j_2)}}{j_1^a j_2^{1-a}} \int_T^{T+U} \exp\left\{ it \ln \frac{td_2}{2\pi e d_1 j_1 j_2} \right\} dt. \end{aligned}$$

Вследствие лемм 25 и 26, положив $\tau_1 = \sqrt{(T+U)/(2\pi)}$, придем к следующему соотношению:

$$I_2 = 2\pi e \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{a-1/2}d_2^{a+1/2}} \times \sum_{\substack{j_1, j_2 \leq \tau \\ \tau^2 \leq j_1 j_2 d_1/d_2 \leq \tau_1^2}} \frac{c_k(j_1)\overline{d_k(j_2)}}{j_1^{a-1/2}j_2^{1/2-a}} \exp\left\{-\frac{2\pi i j_1 j_2 d_1}{d_2}\right\} + O(UL^{-7}). \quad (82)$$

Обозначим в последней формуле сумму по d_1, d_2, j_1, j_2 с условием $\frac{j_2 d_1}{d_2} \notin \mathbb{N}$ через S . По формуле суммирования Абеля имеем

$$\sum_{\substack{j_1 \leq \tau \\ \tau^2 \leq j_1 j_2 d_1/d_2 \leq \tau_1^2}} \frac{c_k(j_1)}{j_1^{a-1/2}} \exp\left\{-2\pi i j_1 \frac{j_2 d_1}{d_2}\right\} = - \int_{A_1}^{A_2} \mathbb{C}(u) dv(u) + \mathbb{C}(A_2)v(A_2), \quad (83)$$

где

$$A_1 = \tau^2 \frac{d_2}{j_2 d_1} - 1, \quad A_2 = \min\left(\tau, \tau_1^2 \frac{d_2}{j_2 d_1}\right),$$

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{A_1 < j_1 \leq u} \exp\left\{-2\pi i j_1 \frac{j_2 d_1}{d_2}\right\},$$

$$v(u) = \frac{c_k(u)}{u^{a-1/2}} = \left(1 - \frac{\ln u}{L}\right) \left(1 - \frac{2 \ln u}{L} + \frac{\pi i}{2L}\right)^k u^{1/2-a}.$$

Поскольку при $1 \leq u \leq \tau$

$$|v'(u)| \ll \frac{k}{Lu},$$

а из условия $\frac{j_2 d_1}{d_2} \notin \mathbb{N}$ следует, что

$$|\mathbb{C}(u)| \leq \frac{1}{|\sin(\pi \frac{j_2 d_1}{d_2})|} \leq \frac{1}{\|\frac{j_2 d_1}{d_2}\|},$$

то из соотношения (83) получим, что внутренняя сумма по j_1 в S есть $O(k \|\frac{j_2 d_1}{d_2}\|^{-1})$. Тогда

$$|S| \ll k \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{1}{d_2} \sum_{\substack{j_2 \leq \tau \\ j_2 \not\equiv 0 \pmod{\frac{d_2}{d}}}} \frac{1}{\|\frac{j_2 d_1}{d_2}\|}. \quad (84)$$

Поскольку при $(n, q) = 1$

$$\sum_{1 \leq x \leq q-1} \frac{1}{\|\frac{xn}{q}\|} \ll (q \ln q + 1),$$

то, применив эту формулу к сумме по j_2 в (84) с натуральными числами $q = \frac{d_2}{d}$ и $n = \frac{d_1}{d}$, будем иметь

$$\begin{aligned} |S| &\ll k \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{1}{d_2} \left(\frac{\tau}{q} + 1 \right) (q \ln q + 1) \\ &\ll k\tau L \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{1}{d_2} \ll k\tau y L^2 \ll kUL^{-8}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_2 = 2\pi e \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{a-1/2}d_2^{a+1/2}} \sum_{\substack{j_1, j_2 \leq \tau \\ \tau^2 \leq j_1 j_2 d_1/d_2 \leq \tau_1^2 \\ j_2 \equiv 0 \pmod{\frac{d_2}{d}}}} \frac{c_k(j_1)\overline{d_k(j_2)}}{j_1^{a-1/2}j_2^{1/2-a}} + O(UL^{-7}).$$

Положим в последней формуле $j_2 = j \frac{d_2}{d}$ и перепишем сумму по j_1, j_2 как сумму по j, j_1 . Тогда условия суммирования определяются следующей системой неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{\tau d}{d_1} &\leq j \leq \frac{\tau d}{d_2}, \\ \frac{\tau^2 d}{j d_1} &\leq j_1 \leq \min\left(\tau, \frac{\tau_1^2 d}{j d_1}\right). \end{aligned}$$

Если в сумме по j_1 не учитывать условие $j_1 \leq \tau$, то в I_2 внесем погрешность, которая не будет превосходить с точностью до некоторой абсолютной постоянной следующей величины:

$$\begin{aligned} \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{1}{d_2} \sum_{\substack{\frac{\tau d}{d_1} \leq j \leq \frac{\tau d}{d_2} \\ \tau \leq \frac{\tau_1^2 d}{j d_1}}} \left(\frac{\tau_1^2 d}{j d_1} - \tau \right) &\leq \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{1}{d_2} \sum_{\frac{\tau d}{d_1} \leq j \leq \frac{\tau_1^2 d}{\tau d_1}} \left(\frac{\tau_1^2 d}{j d_1} - \frac{\tau^2 d}{j d_1} \right) \\ &\ll (\tau_1^2 - \tau^2) \ln \frac{\tau_1}{\tau} \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{d}{d_1 d_2} \ll \frac{U^2}{T} \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{d}{d_1 d_2} \ll UL^{-7} \end{aligned}$$

по лемме 12. Тогда

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\pi e \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq y \\ d_1 \geq d_2}} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{a-1/2}d_2} d^{1/2-a} \\ &\times \sum_{\substack{\frac{\tau d}{d_1} \leq j \leq \frac{\tau d}{d_2}}} \frac{\overline{d_k(j d_2/d)}}{j^{1/2-a}} \sum_{\substack{\frac{\tau^2 d}{j d_1} \leq j_1 \leq \frac{\tau_1^2 d}{j d_1}}} \frac{c_k(j_1)}{j_1^{a-1/2}} + O(UL^{-7}). \end{aligned} \quad (85)$$

Для произвольной C^1 -гладкой комплекснозначной функции $f(x)$ действительной переменной x и любого числа $h > 0$ справедливо следующее неравенство:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 2h \max_{x \leq z \leq x+h} |f'(z)|. \quad (86)$$

Поскольку

$$\left| \frac{d}{dj_1} \left(\frac{c_k(j_1)}{j_1^{a-1/2}} \right) \right| \ll \frac{k}{Lj_1},$$

то из неравенства (86) следует, что для всех j_1 из промежутка $\frac{\tau^2 d}{jd_1} \leq j_1 \leq \frac{\tau_1^2 d}{jd_1}$

$$\frac{c_k(j_1)}{j_1^{a-1/2}} = c_k \left(\frac{\tau^2 d}{jd_1} \right) \left(\frac{\tau^2 d}{jd_1} \right)^{1/2-a} + O \left(\left(j_1 - \frac{\tau^2 d}{jd_1} \right) \frac{kjd_1}{L\tau^2 d} \right).$$

Воспользуемся в последнем соотношении равенствами $\tau^{1-2a} = e$ и $c_k \left(\frac{\tau^2 d}{jd_1} \right) = d_k \left(\frac{jd_1}{d} \right)$; получим

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{\tau^2 d}{jd_1} \leq j_1 \leq \frac{\tau_1^2 d}{jd_1}} \frac{c_k(j_1)}{j_1^{a-1/2}} &= e \left(\frac{jd_1}{d} \right)^{a-1/2} \left(\frac{\tau_1^2 d}{jd_1} - \frac{\tau^2 d}{jd_1} \right) d_k \left(\frac{jd_1}{d} \right) \\ &+ O(1) + O \left(kL^{-1}T^{-1} \frac{jd_1}{d} \sum_{x \leq \frac{Ud}{jd_1}} x \right) \\ &= \frac{Ue}{2\pi} \left(\frac{jd_1}{d} \right)^{a-3/2} d_k \left(\frac{jd_1}{d} \right) + O(1) + O(kUL^{-11}(jd_1)^{-1}d). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства (85) следует, что

$$\begin{aligned} I_2 &= Ue^2 \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq y \\ d_1 \geq d_2}} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1 d_2} d^{2-2a} \\ &\times \sum_{\frac{\tau d}{d_1} \leq j \leq \frac{\tau d}{d_2}} d_k \left(\frac{jd_1}{d} \right) \overline{d_k \left(\frac{jd_2}{d} \right)} j^{2a-2} + O(UL^{-7}) + R, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |R| &\ll \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{1}{d_2} \sum_{\frac{\tau d}{d_1} \leq j \leq \frac{\tau d}{d_2}} (1 + kUL^{-11}j^{-1}d_1^{-1}d) \\ &\ll \tau yL + kUL^{-10} \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{d}{d_1 d_2} \ll kUL^{-7} \end{aligned}$$

по лемме 12. Пусть $d_M = \max(d_1, d_2)$, а $d_m = \min(d_1, d_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} I_2 &= I_2 + \overline{I_2} = Ue^2 \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq y \\ d_1 \geq d_2}} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1 d_2} d^{2-2a} \\ &\times \sum_{\frac{\tau d}{d_1} \leq j \leq \frac{\tau d}{d_2}} d_k \left(\frac{jd_1}{d} \right) \overline{d_k \left(\frac{jd_2}{d} \right)} j^{2a-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Ue^2 \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq y \\ d_2 \geq d_1}} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1 d_2} d^{2-2a} \\
& \times \sum_{\substack{\frac{\tau d}{d_2} \leq j \leq \frac{\tau d}{d_1}}} d_k \left(\frac{j d_1}{d} \right) \overline{d_k \left(\frac{j d_2}{d} \right)} j^{2a-2} + O(UL^{-6}) \\
& = Ue^2 \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1 d_2} d^{2-2a} \\
& \times \sum_{\substack{\frac{\tau d}{d_M} \leq j \leq \frac{\tau d}{d_m}}} d_k \left(\frac{j d_1}{d} \right) \overline{d_k \left(\frac{j d_2}{d} \right)} j^{2a-2} + O(UL^{-6}). \quad (87)
\end{aligned}$$

Здесь случай $d_1 = d_2$ считался дважды, но его вклад есть $O(ULT^{-1/2})$, который уходит в остаток. Подставив формулы (80), (81), (87) в (79), получим равенство

$$\frac{J_k}{U} = I_4 + I_5 + O(L^{-5}), \quad (88)$$

где

$$\begin{aligned}
I_4 &= \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{2a} d_2^{2a}} d^{2a} \sum_{j \leq \frac{\tau d}{d_M}} c_k \left(\frac{j d_1}{d} \right) \overline{c_k \left(\frac{j d_2}{d} \right)} j^{-2a}, \\
I_5 &= e^2 \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1 d_2} d^{2-2a} \sum_{j \leq \frac{\tau d}{d_m}} d_k \left(\frac{j d_1}{d} \right) \overline{d_k \left(\frac{j d_2}{d} \right)} j^{2a-2}.
\end{aligned}$$

Опять при сложении I_3 и $2 \operatorname{Re} I_2$ случай $j = \frac{\tau d}{d_M}$ считался, быть может, дважды, но он дает вклад $\ll L^{-19}$, который уходит в остаток. Воспользуемся формулой суммирования Эйлера для замены суммы по j в двух последних формулах интегралом. Положим

$$f(u) = c_k \left(\frac{u d_1}{d} \right) \overline{c_k \left(\frac{u d_2}{d} \right)} u^{-2a},$$

а

$$x = \frac{\tau d}{d_M}.$$

Поскольку при $1 \leq u \leq \tau$, $1 \leq d_1, d_2 \leq y$ выполнены оценки

$$|f(u)| \ll u^{-1}, \quad |f'(u)| \ll u^{-2},$$

то из леммы 11 придем к равенству

$$\sum_{j \leq x} f(j) = \int_1^x f(u) du + f(1) + \int_1^\tau \{u\} f'(u) du + O\left(\frac{d_M}{\tau d}\right).$$

Тогда

$$I_4 = \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{2a}d_2^{2a}} d^{2a} \int_1^{\frac{\tau d}{d_M}} c_k\left(\frac{ud_1}{d}\right) \overline{c_k\left(\frac{ud_2}{d}\right)} u^{-2a} du + R_1 + R_2 + R_3,$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{2a}d_2^{2a}} d^{2a} c_k\left(\frac{d_1}{d}\right) \overline{c_k\left(\frac{d_2}{d}\right)}, \\ R_2 &= \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{2a}d_2^{2a}} d^{2a} \int_1^{\tau} \{u\} f'(u) du, \\ R_3 &= O\left(\tau^{-1} \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{|b_k(d_1)b_k(d_2)|}{d_1^{2a}d_2^{2a}} d^{2a} \frac{d_M}{d}\right). \end{aligned}$$

Оценим R_3 :

$$R_3 \ll \tau^{-1} \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{d_M}{d_1 d_2} \ll \tau^{-1} y L \ll L^{-19}.$$

Оценим R_1 . Используя определение функции $c_k(u)$, найдем

$$\begin{aligned} c_k\left(\frac{d_1}{d}\right) \overline{c_k\left(\frac{d_2}{d}\right)} &= \left(1 - \frac{\ln(d_1/d)}{L}\right) \left(1 - \frac{\ln(d_2/d)}{L}\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2\ln(d_1/d)}{L}\right)^k \left(1 - \frac{\pi i}{2L} - \frac{2\ln(d_2/d)}{L}\right)^k \\ &= \left(1 - \frac{\ln(d_1/d)}{L}\right) \left(1 - \frac{\ln(d_2/d)}{L}\right) \\ &\quad \times \sum_{n_1=0}^k \binom{k}{n_1} \left(1 + \frac{\pi i}{2L}\right)^{k-n_1} \left(\frac{-2\ln(d_1/d)}{L}\right)^{n_1} \\ &\quad \times \sum_{n_2=0}^k \binom{k}{n_2} \left(1 - \frac{\pi i}{2L}\right)^{k-n_2} \left(\frac{-2\ln(d_2/d)}{L}\right)^{n_2} \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^k C_{n_1, n_2} \left(\frac{\ln(d_1/d)}{L}\right)^{n_1} \left(\frac{\ln(d_2/d)}{L}\right)^{n_2} \\ &\quad - \sum_{n_1, n_2=0}^k C_{n_1, n_2} \left(\frac{\ln(d_1/d)}{L}\right)^{n_1+1} \left(\frac{\ln(d_2/d)}{L}\right)^{n_2} \\ &\quad - \sum_{n_1, n_2=0}^k C_{n_1, n_2} \left(\frac{\ln(d_1/d)}{L}\right)^{n_1} \left(\frac{\ln(d_2/d)}{L}\right)^{n_2+1} \\ &\quad + \sum_{n_1, n_2=0}^k C_{n_1, n_2} \left(\frac{\ln(d_1/d)}{L}\right)^{n_1+1} \left(\frac{\ln(d_2/d)}{L}\right)^{n_2+1}, \end{aligned}$$

где

$$C_{n_1, n_2} = \binom{k}{n_1} \binom{k}{n_2} (-2)^{n_1+n_2} \left(1 + \frac{\pi i}{2L}\right)^{k-n_1} \left(1 - \frac{\pi i}{2L}\right)^{k-n_2}.$$

Используя обозначения леммы 20 и утверждения лемм 23 и 24, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq \left| \sum_{n_1, n_2=0}^k C_{n_1, n_2} S_{n_1, n_2}(2a) \right| + \left| \sum_{n_1, n_2=0}^k C_{n_1, n_2} S_{n_1+1, n_2}(2a) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{n_1, n_2=0}^k C_{n_1, n_2} S_{n_1, n_2+1}(2a) \right| + \left| \sum_{n_1, n_2=0}^k C_{n_1, n_2} S_{n_1+1, n_2+1}(2a) \right| \\ &\ll S_{0,0}(2a) + k(S_{1,0}(2a) + S_{0,1}(2a)) + k^2 S_{1,1}(2a) \\ &\quad + \sum_{n_1, n_2=0}^k \binom{k}{n_1} \binom{k}{n_2} 2^{n_1} 2^{n_2} L^{-2} \ln^5 L \\ &\ll kL^{-1} + 3^{2k} L^{-2} \ln^5 L \ll kL^{-1} + L^{-2} \ln^5 L \cdot e^{\ln 3 \frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}} \ll kL^{-1}. \end{aligned}$$

Теперь оценим R_2 . Преобразуем выражение для $f(u)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f(u) &= c_k \left(\frac{ud_1}{d} \right) \overline{c_k \left(\frac{ud_2}{d} \right)} u^{-2a} \\ &= \left(1 - \frac{\ln u}{L} - \frac{\ln(d_1/d)}{L} \right) \left(1 - \frac{\ln u}{L} - \frac{\ln(d_2/d)}{L} \right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \ln u}{L} - \frac{2 \ln(d_1/d)}{L} \right)^k \left(1 - \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \ln u}{L} - \frac{2 \ln(d_2/d)}{L} \right)^k u^{-2a} \\ &= \left(1 - \frac{\ln u}{L} - \frac{\ln(d_1/d)}{L} \right) \left(1 - \frac{\ln u}{L} - \frac{\ln(d_2/d)}{L} \right) \\ &\quad \times \sum_{n_1=0}^k \binom{k}{n_1} \left(1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \ln u}{L} \right)^{k-n_1} \left(\frac{-2 \ln(d_1/d)}{L} \right)^{n_1} \\ &\quad \times \sum_{n_2=0}^k \binom{k}{n_2} \left(1 - \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \ln u}{L} \right)^{k-n_2} \left(\frac{-2 \ln(d_2/d)}{L} \right)^{n_2} u^{-2a} \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^k C'_{n_1, n_2} \frac{g_{n_1, n_2}(u)}{u^{2a}} \left(1 - \frac{\ln u}{L} \right)^2 \left(\frac{\ln(d_1/d)}{L} \right)^{n_1} \left(\frac{\ln(d_2/d)}{L} \right)^{n_2} \\ &\quad - \sum_{n_1, n_2=0}^k C'_{n_1, n_2} \frac{g_{n_1, n_2}(u)}{u^{2a}} \left(1 - \frac{\ln u}{L} \right) \left(\frac{\ln(d_1/d)}{L} \right)^{n_1+1} \left(\frac{\ln(d_2/d)}{L} \right)^{n_2} \\ &\quad - \sum_{n_1, n_2=0}^k C'_{n_1, n_2} \frac{g_{n_1, n_2}(u)}{u^{2a}} \left(1 - \frac{\ln u}{L} \right) \left(\frac{\ln(d_1/d)}{L} \right)^{n_1} \left(\frac{\ln(d_2/d)}{L} \right)^{n_2+1} \\ &\quad + \sum_{n_1, n_2=0}^k C'_{n_1, n_2} \frac{g_{n_1, n_2}(u)}{u^{2a}} \left(\frac{\ln(d_1/d)}{L} \right)^{n_1+1} \left(\frac{\ln(d_2/d)}{L} \right)^{n_2+1}, \end{aligned}$$

где

$$C'_{n_1, n_2} = \binom{k}{n_1} \binom{k}{n_2} (-2)^{n_1 + n_2},$$

$$g_{n_1, n_2}(u) = \left(1 + \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \ln u}{L}\right)^{k-n_1} \left(1 - \frac{\pi i}{2L} - \frac{2 \ln u}{L}\right)^{k-n_2}.$$

Заметим, что C'_{n_1, n_2} , $g_{n_1, n_2}(u)$ не зависят от d_1 , d_2 . Из леммы 1 легко получить, что $|g_{n_1, n_2}(u)| \leq 4$ при $1 \leq u \leq \tau$.

Производная функции $f(u)$ имеет вид

$$f'(u) = -u^{-2a-1} \left(2a \sum_{n_1, n_2=0}^k C'_{n_1, n_2} g_{n_1, n_2}(u) \left(1 - \frac{\ln u}{L}\right)^2 \right. \\ \left. \times \left(\frac{\ln(d_1/d)}{L} \right)^{n_1} \left(\frac{\ln(d_2/d)}{L} \right)^{n_2} + \dots \right),$$

где мы выписали лишь одно слагаемое, чтобы не загромождать формулу, а оставшиеся слагаемые выписываются аналогично. Далее оценки проводятся подобно тому, как это сделано выше при оценке $|R_1|$. Мы получим, что

$$|R_2| \ll \int_1^\tau \frac{du}{u^{1+2a}} \sum_{n_1, n_2=0}^k |C'_{n_1, n_2}| (|S_{n_1, n_2}(2a)| + |S_{n_1+1, n_2}(2a)| \\ + |S_{n_1, n_2+1}(2a)| + |S_{n_1+1, n_2+1}(2a)|) \\ \ll kL^{-1} + 3^{2k} L^{-2} \ln^5 L \ll kL^{-1}.$$

Итак, мы приходим к следующему равенству:

$$I_4 = \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{2a}d_2^{2a}} d^{2a} \int_1^{\frac{\tau d}{d_M}} c_k\left(\frac{ud_1}{d}\right) \overline{c_k\left(\frac{ud_2}{d}\right)} u^{-2a} du + O(kL^{-1}).$$

Аналогично получим

$$I_5 = e^2 \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1 d_2} d^{2-2a} \int_1^{\frac{\tau d}{d_m}} d_k\left(\frac{vd_2}{d}\right) \overline{d_k\left(\frac{vd_1}{d}\right)} v^{2a-2} dv + O(kL^{-1}).$$

В интеграле из последней формулы сделаем замену переменных $v = \frac{\tau^2 d^2}{ud_1 d_2}$. Замечая опять, что $d_k\left(\frac{\tau^2}{u}\right) = c_k(u)$, будем иметь равенство

$$\int_1^{\frac{\tau d}{d_m}} d_k\left(\frac{vd_2}{d}\right) \overline{d_k\left(\frac{vd_1}{d}\right)} v^{2a-2} dv \\ = e^{-2} \int_{\frac{\tau d}{d_M}}^{\frac{\tau^2 d^2}{d_1 d_2}} c_k\left(\frac{ud_1}{d}\right) \overline{c_k\left(\frac{ud_2}{d}\right)} \left(\frac{d^2}{d_1 d_2}\right)^{2a-1} u^{-2a} du.$$

Тогда

$$I_5 = \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{2a}d_2^{2a}} d^{2a} \int_{\frac{\tau d}{d_M}}^{\frac{\tau^2 d^2}{d_1 d_2}} c_k\left(\frac{ud_1}{d}\right) \overline{c_k\left(\frac{ud_2}{d}\right)} u^{-2a} du + O(kL^{-1}).$$

Подставив окончательные равенства для I_4 и I_5 в формулу (88), получим

$$\frac{J_k}{U} = I_6 + O(kL^{-1}),$$

где

$$I_6 = \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{2a}d_2^{2a}} d^{2a} \int_1^{\frac{\tau^2 d^2}{d_1 d_2}} c_k\left(\frac{ud_1}{d}\right) \overline{c_k\left(\frac{ud_2}{d}\right)} u^{-2a} du.$$

Пусть

$$\phi(u) = (1-u) \left(1 - 2u + \frac{\pi i}{2L}\right)^k. \quad (89)$$

Тогда $c_k(u) = \phi(L^{-1} \ln u)$. Применим лемму 16 к интегралу в выражении для I_6 и придем к равенству

$$I_6 = I_7 - I_8,$$

где

$$I_7 = \frac{Le^2}{2} \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1 d_2} d^{2-2a} \sum_{n=0}^{2k+2} \frac{(-1)^n}{2^n} \times \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \phi^{(j)}\left(1 - \frac{\ln(d_1/d)}{L}\right) \overline{\phi^{(n-j)}\left(1 - \frac{\ln(d_2/d)}{L}\right)}, \quad (90)$$

$$I_8 = \frac{L}{2} \sum_{d_1, d_2 \leq y} \frac{b_k(d_1)b_k(d_2)}{d_1^{2a}d_2^{2a}} d^{2a} \sum_{n=0}^{2k+2} \frac{(-1)^n}{2^n} \times \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \phi^{(j)}\left(\frac{\ln(d_1/d)}{L}\right) \overline{\phi^{(n-j)}\left(\frac{\ln(d_2/d)}{L}\right)}, \quad (91)$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 33. Пусть $\phi_k(x) = (1-x)(1-2x)^k$,

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \int_0^1 e^{2x} (\phi_k(x))^2 dx, & \Phi'_k &= \int_0^1 e^{2x} (\phi'_k(x))^2 dx, \\ H_k &= \frac{1}{2k+1}, & H'_k &= \frac{k^2}{2k-1}. \end{aligned}$$

Справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\frac{J_k}{U} = \frac{1}{2} (1 + \Phi_k(4H'_k - H_k) + H_k(\Phi'_k - 1)) + \frac{\theta}{1000} k^{-3}, \quad (92)$$

где $|\theta| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскладывая в формуле (90) функции $\phi^{(j)}(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$, а в формуле (91) – в окрестности точки $x = 0$, получим (в обозначениях леммы 20) следующие равенства:

$$\begin{aligned} I_7 &= \frac{Le^2}{2} \sum_{n=0}^{2k+2} \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\phi^{(j)}(1) \overline{\phi^{(n-j)}(1)} S_{0,0}(1) \right. \\ &\quad - \left(\phi^{(j+1)}(1) \overline{\phi^{(n-j)}(1)} + \phi^{(j)}(1) \overline{\phi^{(n-j+1)}(1)} \right) S_{0,1}(1) \\ &\quad \left. + \phi^{(j+1)}(1) \overline{\phi^{(n-j+1)}(1)} S_{1,1}(1) \right) + R_1, \\ I_8 &= \frac{L}{2} \sum_{n=0}^{2k+2} \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\phi^{(j)}(0) \overline{\phi^{(n-j)}(0)} S_{0,0}(2a) \right. \\ &\quad + \left(\phi^{(j+1)}(0) \overline{\phi^{(n-j)}(0)} + \phi^{(j)}(0) \overline{\phi^{(n-j+1)}(0)} \right) S_{0,1}(2a) \\ &\quad \left. + \phi^{(j+1)}(2a) \overline{\phi^{(n-j+1)}(0)} S_{1,1}(2a) \right) + R_2, \end{aligned}$$

где

$$R_1 = \frac{Le^2}{2} \sum_{n=0}^{2k+2} \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \sum_{l_1, l_2} \frac{(-1)^{l_1+l_2}}{l_1! l_2!} \phi^{(j+l_1)}(1) \overline{\phi^{(n-j+l_2)}(1)} S_{l_1, l_2}(1),$$

$$R_2 = \frac{L}{2} \sum_{n=0}^{2k+2} \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \sum_{l_1, l_2} \frac{1}{l_1! l_2!} \phi^{(j+l_1)}(0) \overline{\phi^{(n-j+l_2)}(0)} S_{l_1, l_2}(2a)$$

и $\sum_{l_1, l_2}$ – сумма по всем положительным целым числам l_1, l_2 с условиями

$$\begin{aligned} \max(l_1, l_2) &\geq 2, \\ 0 &\leq l_1 \leq k+1-j, \\ 0 &\leq l_2 \leq k+1-n+j. \end{aligned}$$

Из лемм 24 и 27 следует, что

$$\begin{aligned} |R_1|, |R_2| &\ll L \sum_{n=0}^{2k+2} \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \sum_{l_1=0}^{k+1-j} \sum_{l_2=0}^{k+1-n+j} (2k)^{j+l_1} (2k)^{n-j+l_2} L^{-2} \ln^5 L \\ &\ll (2k)^{2k+2} L^{-1} \ln^5 L \sum_{n=0}^{2k+2} \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \ll (2k)^{2k+3} L^{-1} \ln^5 L. \end{aligned}$$

В силу леммы 23 получим равенства

$$\begin{aligned} I_7 &= \frac{e^2}{2} \sum_{n=0}^{2k+2} \frac{(-1)^n}{2^n} \left(\left(\phi(x) \overline{\phi(x)} \right)^{(n)} \Big|_{x=1} \left(\frac{H_k}{2} + 1 + 2H'_k \right) \right. \\ &\quad + \left(\phi'(x) \overline{\phi(x)} + \phi(x) \overline{\phi'(x)} \right)^{(n)} \Big|_{x=1} \left(\frac{H_k}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\phi'(x) \overline{\phi'(x)} \right)^{(n)} \Big|_{x=1} \frac{H_k}{2} \Big) \\ &\quad + O((2k)^{2k+3} L^{-1} \ln^5 L), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8 = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2k+2} \frac{(-1)^n}{2^n} \left((\phi(x)\overline{\phi(x)})^{(n)} \Big|_{x=0} \left(\frac{H_k}{2} - 1 + 2H'_k \right) \right. \\
& + (\phi'(x)\overline{\phi(x)} + \phi(x)\overline{\phi'(x)})^{(n)} \Big|_{x=0} \left(\frac{H_k}{2} - \frac{1}{2} \right) + (\phi'(x)\overline{\phi'(x)})^{(n)} \Big|_{x=0} \frac{H_k}{2} \Big) \\
& + O((2k)^{2k+3} L^{-1} \ln^5 L).
\end{aligned}$$

Используя леммы 28 и 29, придем к следующему соотношению:

$$\begin{aligned}
I_7 - I_8 = & \left(\frac{H_k}{2} + 2H'_k \right) \int_0^1 e^{2x} \phi(x) \overline{\phi(x)} dx \\
& + \frac{H_k}{2} \int_0^1 e^{2x} (\phi'(x) \overline{\phi(x)} + \phi(x) \overline{\phi'(x)}) dx \\
& + \frac{H_k}{2} \int_0^1 e^{2x} (\phi'(x) \overline{\phi'(x)}) dx + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi^2}{4L^2} \right)^k + O((2k)^{2k+3} L^{-1} \ln^5 L).
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{2x} (\phi'(x) \overline{\phi(x)} + \phi(x) \overline{\phi'(x)}) dx &= \int_0^1 e^{2x} d(\phi(x) \overline{\phi(x)}) \\
&= e^{2x} \phi(x) \overline{\phi(x)} \Big|_{x=0}^1 - 2 \int_0^1 e^{2x} \phi(x) \overline{\phi(x)} dx \\
&= - \left(1 + \frac{\pi^2}{4L^2} \right)^k - 2 \int_0^1 e^{2x} \phi(x) \overline{\phi(x)} dx,
\end{aligned}$$

а из леммы 1 следует, что

$$\left(1 + \frac{\pi^2}{4L^2} \right)^k = 1 + O(kL^{-2}).$$

Подставим эти соотношения в последнюю формулу для разности $I_7 - I_8$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
I_7 - I_8 = & \frac{1}{2} + \left(2H'_k - \frac{H_k}{2} \right) \int_0^1 e^{2x} \phi(x) \overline{\phi(x)} dx - \frac{H_k}{2} \\
& + \frac{H_k}{2} \int_0^1 e^{2x} (\phi'(x) \overline{\phi'(x)}) dx + O((2k)^{2k+3} L^{-1} \ln^5 L). \quad (93)
\end{aligned}$$

Определим функцию $\phi_k(x) = (1-x)(1-2x)^k$ и положим

$$\Phi_k = \int_0^1 e^{2x} (\phi_k(x))^2 dx, \quad \Phi'_k = \int_0^1 e^{2x} (\phi'_k(x))^2 dx.$$

Подставив в следующий интеграл явное выражение (89) для функции $\phi(x)$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{2x} \phi(x) \overline{\phi(x)} dx &= \int_0^1 e^{2x} (1-x)^2 \left((1-2x)^2 + \frac{\pi^2}{4L^2} \right)^k dx \\ &= \int_0^1 e^{2x} (1-x)^2 (1-2x)^{2k} dx \\ &\quad + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \left(\frac{\pi^2}{4L^2} \right)^l \int_0^1 e^{2x} (1-x)^2 (1-2x)^{2(k-l)} dx \\ &= \Phi_k + O(kL^{-2}). \end{aligned} \quad (94)$$

Аналогично, используя равенство

$$\phi'(x) = - \left(1 - 2x + \frac{\pi i}{2L} \right)^{k-1} \left(2k + 1 - (2k + 2)x + \frac{\pi i}{2L} \right),$$

найдем

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{2x} (\phi'(x) \overline{\phi'(x)}) dx &= \int_0^1 e^{2x} \left((1-2x)^2 + \frac{\pi^2}{4L^2} \right)^{k-1} \\ &\quad \times \left((2k + 1 - (2k + 2)x)^2 + \frac{\pi^2}{4L^2} \right) dx \\ &= \Phi'_k + O(k^3 L^{-2}). \end{aligned} \quad (95)$$

Подставим (94), (95) в соотношение (93); используя оценки $H_k \ll k^{-1}$, $H'_k \ll k$ и равенство $\frac{J_k}{U} = I_7 - I_8 + O(kL^{-1})$, получим следующую асимптотическую формулу:

$$\frac{J_k}{U} = \frac{1}{2} (1 + \Phi_k(4H'_k - H_k) + H_k(\Phi'_k - 1)) + O((2k)^{2k+3} L^{-1} \ln^5 L). \quad (96)$$

Поскольку $k \leq \frac{1}{2} \frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}$, то при $T \geq T_1$ остаток в последней формуле не будет превосходить $(10k)^{-3}$. Лемма доказана.

§5. Асимптотическая формула для интеграла J_k . Доказательство теоремы

ЛЕММА 34. При всех натуральных $k \geq 1$ правая часть равенства (92) меньше $1 + \frac{e^2+2}{16} k^{-2} - \frac{1}{4} k^{-3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$F_k = \frac{1}{2} (1 + \Phi_k(4H'_k - H_k) + H_k(\Phi'_k - 1)), \quad (97)$$

где обозначения в правой части равенства взяты из леммы 33. Применим лемму 30 для вычисления интегралов Φ_k и Φ'_k . Для функции $f(x) = e^{2x}(1-x)^2$ найдем первые четыре производные:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x}x(x-1), & f''(x) &= 2e^{2x}(2x^2-1), \\ f'''(x) &= 4e^{2x}(2x^2+2x-1), & f^{(4)}(x) &= 16e^{2x}(x^2+2x). \end{aligned}$$

Поскольку $\max_{x \in [0,1]} f^{(4)}(x) = 48e^2$, то по лемме 30

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \int_0^1 e^{2x}(1-x)^2(1-2x)^{2k} dx \\ &= \frac{1}{2(2k+1)} + \frac{e^2-1}{4(2k+1)(2k+2)(2k+3)} \\ &\quad - \frac{3e^2+1}{4(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)} + j_1, \end{aligned}$$

где $|j_1| \leq \frac{3e^2}{32k^5}$. Разложим слагаемые в правой части последнего равенства в ряды по степеням $\frac{1}{k}$ до членов порядка k^{-4} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(2k+1)} &= \frac{1}{4k} - \frac{1}{8k^2} + \frac{1}{16k^3} - \frac{1}{32k^4} + \frac{1}{32k^4(2k+1)}, \\ \frac{e^2-1}{4(2k+1)(2k+2)(2k+3)} &= \frac{e^2-1}{4} \left(\frac{1}{8k^3} - \frac{3}{8k^4} + \frac{25k^2+30k+9}{4k^4(2k+1)(2k+2)(2k+3)} \right), \\ -\frac{3e^2+1}{4(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)} &= -\frac{3e^2+1}{4} \left(\frac{1}{16k^4} - \frac{20k^3+35k^2+25k+6}{4k^4(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получим, что

$$\Phi_k = \frac{1}{4k} - \frac{1}{8k^2} + \frac{e^2+1}{32k^3} - \frac{9e^2-3}{64k^4} + r_1, \quad (98)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{32k^4(2k+1)} + \frac{(e^2-1)(25+30/k+9/k^2)}{16k^2(2k+1)(2k+2)(2k+3)} \\ &\quad + \frac{(3e^2+1)(20+35/k+25/k^2+6/k^3)}{16k(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)} + \theta \frac{3e^2}{32k^5}, \quad |\theta| \leq 1. \end{aligned}$$

При $k \geq 10$ имеем

$$r_1 \leq \frac{1}{k^5} \left(\frac{1}{64} + \frac{(e^2-1) \cdot 29}{128} + \frac{(3e^2+1) \cdot 24}{256} + \frac{3e^2}{32} \right) = \frac{77e^2-15}{128k^5}. \quad (99)$$

Опять применим лемму 30 для вычисления Φ'_k . Пусть теперь $f(x) = e^{2x}((2k+2)x - (2k+1))^2$. Тогда

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x}((2k+2)^2x^2 - 2k(2k+2)x - (2k+1)), \\ f''(x) &= 4e^{2x}((2k+2)^2x^2 + 2(2k+2)x - (2k^2 + 4k + 1)), \\ f'''(x) &= 8e^{2x}((2k+2)^2x^2 + (2k+2)(2k+4)x - (2k^2 + 2k - 1)), \\ f^{(4)}(x) &= 16e^{2x}((2k+2)^2x^2 + (2k+2)(4k+6)x + (4k+5)). \end{aligned}$$

Легко проверить, что $\max_{x \in [0,1]} f^{(4)}(x) = 16e^2(12k^2 + 32k + 21)$. Тогда получим, что

$$\begin{aligned} \Phi'_k &= \int_0^1 e^{2x}((2k+2)x - (2k+1))^2(1-2x)^{2k-2} dx \\ &= \frac{e^2 + (2k+1)^2}{2(2k-1)} - \frac{e^2(2k+3) + (2k+1)}{2(2k-1)2k} + \frac{e^2(2k^2 + 8k + 7) - (2k^2 + 4k + 1)}{2(2k-1)2k(2k+1)} \\ &\quad - \frac{e^2(6k^2 + 18k + 13) + (2k^2 + 2k - 1)}{2(2k-1)2k(2k+1)(2k+2)} + j_2, \end{aligned}$$

где

$$|j_2| \leq \frac{e^2(12k^2 + 32k + 21)}{(2k-1)2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)}.$$

При $k \geq 10$ имеем

$$|j_2| \leq \frac{e^2(12 + 32/k + 21/k^2)}{32k^3(1 - 1/2k)} \leq \frac{e^2}{2k^3} \frac{20}{19}.$$

Разложим в ряды до членов порядка k^{-2} следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{e^2 + (2k+1)^2}{2(2k-1)} &= k + \frac{3}{2} + \frac{e^2 + 4}{4k} + \frac{e^2 + 4}{8k^2} + \frac{e^2 + 4}{8k^2(2k-1)}, \\ -\frac{e^2(2k+3) + (2k+1)}{2(2k-1)2k} &= -\frac{e^2 + 1}{4k} - \frac{2e^2 + 1}{4k^2} - \frac{2e^2 + 1}{4k^2(2k-1)}, \\ \frac{e^2(2k^2 + 8k + 7) - (2k^2 + 4k + 1)}{2(2k-1)2k(2k+1)} &= \frac{e^2 - 1}{8k} + \frac{2e^2 - 1}{4k^2} + \frac{15e^2 - 3}{8k(4k^2 - 1)} + \frac{2e^2 - 1}{4k^2(4k^2 - 1)}, \\ -\frac{e^2(6k^2 + 18k + 13) + (2k^2 + 2k - 1)}{2(2k-1)2k(2k+1)(2k+2)} &= -\frac{3e^2 + 1}{16k^2} + \frac{(3e^2 + 1)(4k^2 - k - 1)}{8k^2(4k^2 - 1)(2k+2)} \\ &\quad - \frac{9e^2 + 1}{2(4k^2 - 1)(2k+2)} - \frac{13e^2 - 1}{4k(4k^2 - 1)(2k+2)}. \end{aligned}$$

Из полученных результатов будем иметь равенство

$$\Phi'_k = k + \frac{3}{2} + \frac{e^2 + 5}{8k} - \frac{e^2 + 1}{16k^2} + r_2, \quad (100)$$

и при $k \geq 10$ справедлива оценка

$$r_2 < \frac{1}{2k-1} \left(-\frac{3e^2-2}{8k^2} + \frac{15e^2-3}{8k(2k+1)} - \frac{6e^2}{2(2k+1)(2k+2)} \right) + \frac{e^2}{2k^3} \frac{20}{19}.$$

Таким образом, при $k \geq 10$ будем иметь

$$r_2 \leq \frac{1}{2k} \frac{20}{19} \left(-\frac{3e^2-2}{8k^2} + \frac{15e^2-3}{16k^2} + \frac{e^2}{k^2} \right) - \frac{6e^2}{16k^3} \frac{10}{11} < \frac{4}{k^3}. \quad (101)$$

Для H_k и H'_k запишем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} H_k &= \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k(2k+1)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{4k^2(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2k} - \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{8k^3} - \frac{1}{8k^3(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2k} - \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{8k^3} - \frac{1}{16k^4} + \frac{1}{16k^4(2k+1)}, \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} H'_k &= \frac{k^2}{2k-1} = \frac{k}{2} + \frac{k}{2(2k-1)} = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2k-1)} \\ &= \frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8k} + \frac{1}{8k(2k-1)} = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8k} + \frac{1}{16k^2} + \frac{1}{16k^2(2k-1)}. \end{aligned} \quad (103)$$

Подставим формулы (98), (100), (102) и (103) в соотношение (97) и получим следующее:

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{k} \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8k} + \frac{1}{16k^2} + \frac{1}{16k^2(2k-1)} \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2k^2} \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8k} + \frac{1}{8k(2k-1)} \right) + \frac{e^2+1}{8k^3} \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2k-1)} \right) \\ &\quad - \frac{9e^2-3}{16k^4} \left(\frac{k}{2} + \frac{k}{2(2k-1)} \right) - \left(\frac{1}{4k} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{4k^2(2k+1)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8k^2} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k(2k+1)} \right) + \frac{e^2+1}{32k^3(2k+1)} - \frac{9e^2-3}{64k^4(2k+1)} \right) \\ &\quad + r_1 \left(\frac{4k^2}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{16k^3} + \frac{1}{16k^3(2k+1)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{8k^3} - \frac{1}{8k^3(2k+1)} \right) + \frac{e^2+5}{8k} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{4k^2(2k+1)} \right) \\ &\quad \left. - \frac{e^2+1}{16k^2} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k(2k+1)} \right) + r_2 \frac{1}{2k+1} \right] \\ &= 1 + \frac{e^2+2}{16k^2} - \frac{5e^2-1}{32k^3} + r, \end{aligned}$$

где

$$2r = -\frac{2e^2 - 1}{8k^3(2k - 1)} + \frac{e^2 + 1}{32k^3(2k + 1)} + \frac{9e^2 - 3}{64k^4(2k + 1)} \\ + r_1 \left(\frac{4k^2}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} \right) + r_2 \frac{1}{2k + 1}.$$

При $k \geq 10$ из оценок (99) и (101) получим

$$r \leq \frac{1}{10k^3} \left(\frac{e^2 + 1}{128} - \frac{2e^2 - 1}{32} + \frac{3e^2 - 1}{7 \cdot 128} + \frac{77e^2 - 15}{128} \frac{20}{19} + 1 \right) \leq 0,6k^{-3}.$$

Отсюда следует, что

$$F_k \leq 1 + \frac{e^2 + 2}{16k^2} - \frac{1}{2k^3}$$

при $k \geq 10$. При $k \leq 9$ приведем численные значения F_k с точностью до седьмого знака после запятой:

k	F_k	k	F_k
1	1,3269950	6	1,0127746
2	1,0893128	7	1,0096489
3	1,0438839	8	1,0075519
4	1,0264242	9	1,0060749
5	1,0177475		

Тогда при всех натуральных $k \geq 1$ справедлива оценка

$$F_k + (10k)^{-3} < 1 + \frac{e^2 + 2}{16k^2} - \frac{1}{4k^3},$$

а это и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В силу леммы 7 справедливо равенство

$$N_k(T + U) - N_k(T) = \frac{UL}{2\pi} + O(U).$$

Тогда вместе с леммой 31 оно дает следующее соотношение при $T \geq T_1$:

$$a_k(T, U) \geq 1 - \frac{1}{1 + O(L^{-1})} \ln \frac{J_k}{U} + O(kL^{-1}).$$

Из формулы (92) и леммы 34 получим неравенство

$$a_k(T, U) \geq 1 - \frac{1}{1 + O(L^{-1})} \ln \left(1 + \frac{e^2 + 2}{16k^2} - \frac{1}{4k^3} \right) + O(kL^{-1}) > 1 - \frac{e^2 + 2}{16k^2}$$

при $T \geq T_1$. Теорема доказана.

Автор искренне благодарит А. А. Карацубу за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. *Hardy G. H.* Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // *Compt. Rend. Acad. Sci.* 1914. V. 158. P. 1012–1014.
2. *Selberg A.* On the zeros of Riemann's zeta-function // *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo.* 1942. V. 10. P. 1–59.
3. *Levinson N.* More than one-third of zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$ // *Adv. in Math.* 1974. V. 13. P. 383–436.
4. *Conrey B.* Zeros of derivatives of Riemann's ξ -function on the critical line // *J. of Number Theory.* 1983. V. 16. P. 49–74.
5. *Conrey B.* More than $2/5$ of the zeros of the Riemann's zeta-function are on the critical line // *J. Reine Angew. Math.* 1989. V. 399. P. 1–26.
6. *Siegel C. L.* Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie // *Quellen Stud. Geschichte Math. Astronom. Phys. Abt. B. Stud. 2.* 1932. S. 45–80.
7. *Карацуба А. А.* О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // *Тр. МИАН.* 1981. Т. 157. С. 49–63.
8. *Лаверик А. А.* Равномерные приближения и нули в коротких интервалах производных Z -функции Харди // *Anal. Math.* 1991. Т. 17. С. 257–279.
9. *Воронин С. М., Карацуба А. А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
10. *Титчмарш Е. К.* Теория функций. Пер. с англ. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1980.
11. *Titchmarsh E. C.* The theory of the Riemann Zeta-function. 2nd ed. revised by D. R. Heath-Brown. N. Y.–Oxford: Oxford University Press, 2001. – 412 p.

Поступило в редакцию
03.02.2005