Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Скалыга, Границы производных от полиномов на центрально-симметричных выпуклых телах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 3, 179–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/im643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 06:09:17

УДК 517.16

В. И. Скалыга

Границы производных от полиномов на центрально-симметричных выпуклых телах

Получены точные многомерные аналоги неравенства В. А. Маркова для производных от полиномов на центрально-симметричных выпуклых телах.
Библиография: 17 наименований.

§ 1. Введение

Пусть $\mathfrak{P}_n$ – множество всех алгебраических полиномов от одной переменной степени не выше $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathfrak{P}_n$ и $\|P_n\|_{[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)|$. Известное [1], [2] неравенство А. А. Маркова и В. А. Маркова утверждает, что для любого $P_n \in \mathfrak{P}_n$

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq \frac{n^2(n^2-1)\dots(n^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!!} \|P_n\|_{[-1,1]}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

причем равенство в (1) достигается только для полиномов $cT_n(\cdot)$ в точках $x = \pm 1$, где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $|x| \leq 1$. Неравенство (1) доказано А. А. Марковым для $k = 1$ и В. А. Марковым для $k \geq 2$. А. Шеффер и Р. Даффин [3] получили при $\|P_n\|_{[-1,1]} \leq 1$ оценку

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq N_{n,k}(x) = \begin{cases} M_{n,k}(x) = |T_n^{(k)}(x) + iS_n^{(k)}(x)|, & |x| \leq \xi_1^{(k)}, \\ |T_n^{(k)}(x)|, & |x| \geq \xi_1^{(k)}, \end{cases} \quad (2)$$

где $S_n(x) = \sin(n \arccos x) = n^{-1}(1-x^2)^{1/2}T_n'(x)$, $\xi_1^{(k)}$ – максимальный нуль функции $S_n^{(k)}(\cdot)$ на $[-1, 1]$, $i^2 = -1$. Функция $N_{n,k}(\cdot)$ возрастает на $[0, \infty]$. Оценка (2) точна в $n - k + 1$ нулях функции $S_n^{(k)}(\cdot)$ и при $|x| \geq \xi_1^{(k)}$. При $k = 1$ оценка (2) получена А. А. Марковым. Обобщению неравенства (1) в различных пространствах и для различных метрик полиномов посвящено большое число работ (см. обзоры [4] и [5]). В настоящей работе рассматриваются многомерные аналоги неравенства (1) с чебышевской нормой для полиномов.

Пусть X и Y – нормированные векторные пространства над $\mathbb{R}$. Через $\mathfrak{P}_n(X, Y)$ обозначим пространство всех полиномов степени не выше n , отображающих X в Y , т. е. множество всех отображений вида

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n u_j(x, \dots, x), \quad x \in X,$$

где $u_j: X^j \rightarrow Y$ – j -линейное непрерывное отображение. Далее $\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k}$ – норма оператора k -й производной Фреше полинома P_n в точке x в пространстве $\mathcal{L}^k = \mathcal{L}^k(X, Y)$ ограниченных k -линейных операторов из X^k в Y . Значение k -линейного симметричного отображения $P_n^{(k)}(x)$ на кортеже векторов $(h_1, \dots, h_k)$ будем обозначать через $P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k]$. Если $h_1 = \dots = h_s = h$, то

$$P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k] = P_n^{(k)}(x)[h^s, h_{s+1}, \dots, h_k].$$

В настоящей работе K – выпуклое ограниченное замкнутое тело, симметричное относительно θ_X – нуля пространства X , ∂K – граница тела K , $\overset{\circ}{K} = K \setminus \partial K$, $B(x_0, r) = \{x \in X: \|x - x_0\| \leq r\}$, $B = B(\theta_X, 1)$. Для ограниченного множества $G \subset X$ положим

$$\|P_n\|_G = \sup_{x \in G} \|P_n(x)\|_Y, \quad \|P_n^{(k)}\|_G = \sup_{x \in G} \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, Y)}.$$

Мы будем использовать следующие характеристики тела K : $\rho(\cdot)$ – функция Минковского для тела K ;

$$r_h = \frac{\|h\|}{\rho(h)}, \quad r(K) = \inf_{\|h\|=1} r_h.$$

В 1928 г. О. Д. Келлог [6] доказал для шара B в евклидовом пространстве E^m и $P_n \in \mathfrak{P}_n(E^m, \mathbb{R})$ неравенство

$$\|P_n^{(1)}(x)\|_{\mathcal{L}^1} \leq N_{n,1}(\|x\|) \cdot \|P_n\|_B. \quad (3)$$

Для шара B из любого банахова пространства X и $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, Y)$ неравенство (3) получил Я. Сарантопулос [7]. В работах [8] и [9] независимо и одновременно соответственно для $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ и $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, Y)$, $X \neq \mathbb{R}$, установлено равенство

$$\sup_{V \in W, \|P_n\|_V \leq 1} \|P_n^{(1)}\|_V \omega_V = 2n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n},$$

где W – класс всех выпуклых ограниченных замкнутых тел в X , ω_V – ширина тела V .

Для высших производных от полиномов несколько точных оценок получены автором в [10], [16], среди которых – точные аналоги неравенства Шеффера–Даффина для полиномов, нормированных на теле, ограниченном эллипсоидом в евклидовом пространстве E^m :

$$K = \left\{ x \in E^m: \sum_{i=1}^m \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1 \right\}, \quad P_n \in \mathfrak{P}_n(E^m, \mathbb{R}), \quad \|P_n\|_K \leq 1, \quad \|h\| = 1,$$

$$|P_n^{(k)}(x)[h^k]| \leq \frac{N_{n,k}(\rho(x))}{r_h^k},$$

$$\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} \leq \frac{N_{n,k}(\rho(x))}{r^k(K)}.$$

Последнее неравенство для евклидова шара позднее получили Г.А. Муньос и Я. Сарантопулос [17]. В настоящей работе будут доказаны, в частности, неравенства для полиномов $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ и центрально-симметричного выпуклого тела K :

$$\begin{aligned} |P_n^{(k)}(x)[h^k]| &\leq \frac{T_n^{(k)}(\rho_1(x))\|P_n\|_K}{r_h^k}, \quad \|h\| = 1, \quad K \subset X, \\ \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} &\leq \frac{T_n^{(k)}(\rho_1(x))\|P_n\|_K}{r^k(K)}, \quad K \subset H, \end{aligned}$$

где $\rho_1(x) = \max(1, \rho(x))$, H – предгильбертово пространство.

Все результаты формулируются для $Y = \mathbb{R}$, но, как показано в [11], оценки вида

$$\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} \leq C(x, n, k)\|P_n\|_K, \quad P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R}),$$

переносятся без изменений на полиномы $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, Y)$.

§ 2. Оценки производных от полиномов

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ квадрат $K_2 = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$. Пусть

$$\begin{aligned} \bar{T}_n(x, y) &= \frac{T_n(x+y) + T_n(x-y)}{2}, \quad \tilde{T}_n(x, y) = \frac{T_n(x+y) - T_n(x-y)}{2}, \\ S_0 &= \{(x, y) \in K_2 : |\bar{T}_n(x, y)| = 1\}, \quad S_1 = \{(x, y) \in K_2 : |\tilde{T}_n(x, y)| = 1\}, \\ S &= S_0 \cup S_1. \end{aligned}$$

Множество S_0 состоит из точек пересечения прямых $x+y = \cos(i\pi/n)$ с прямыми $x-y = \cos(j\pi/n)$, $i, j = \overline{0, n}$, при $i-j \equiv 0 \pmod{2}$, а множество S_1 состоит из точек пересечения прямых того же вида, но при $i-j \equiv 1 \pmod{2}$. Множества S_0 и S_1 симметричны, каждое относительно прямых $y=0$ и $x=0$. Пусть $\bar{P}_n$ и $\tilde{P}_n$ – полиномы из $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, соответственно четный и нечетный по переменной y , т. е. полиномы вида

$$\bar{P}_n(x, y) = \sum_{0 \leq i+2j \leq n} \alpha_{ij} x^i y^{2j}, \quad \tilde{P}_n(x, y) = \sum_{1 \leq i+2j+1 \leq n} \beta_{ij} x^i y^{2j+1}.$$

Сформулируем теорему, являющуюся по сути основной в настоящей работе. Две другие теоремы с аналогами неравенства В.А. Маркова вытекают из нее.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k, s \in \mathbb{Z}$, $k, s \geq 0$. Справедливы следующие неравенства:

$$|\bar{P}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y)| \leq |\bar{T}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y)| \|\bar{P}_n\|_{S_0} = \bar{T}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(|x|, |y|) \|\bar{P}_n\|_{S_0}, \quad |x| \geq 1, \quad (4)$$

$$|\tilde{P}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y)| \leq |\tilde{T}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y)| \|\tilde{P}_n\|_{S_1} = \tilde{T}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(|x|, |y|) \|\tilde{P}_n\|_{S_1}, \quad |x| \geq 1, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} |P_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y)| &\leq T_n^{(s+k)}(|x| + |y|) \|P_n\|_S, \quad \max\{|x|, |y|\} \geq 1, \\ P_n &\in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательству теоремы 1 предположим несколько лемм. Пусть $E(a)$ – множество всех точек эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1-a^2} = 1, \quad 0 < a^2 < 1.$$

Эллипс $E(a)$ содержится в квадрате K_2 и касается прямой $x + y = 1$ в точке $(a^2, 1 - a^2)$. Пусть ∂K_2 – граница квадрата K_2 , множество D состоит из четырех крайних точек K_2 и точки начала координат, а множество $D_1 = \{(x, y) \in K_2 : xy = 0\}$. Каждая точка из множества $\partial K_2 \cup D_1 \setminus D$ принадлежит только одному эллипсу вида $E(a)$. Каждая точка $(x_*, y_*) \in \overset{\circ}{K}_2 \setminus D_1$ принадлежит ровно двум эллипсам: $E(a_*^0)$ и $E(a_*^1)$. Это следует из свойств квадратного уравнения относительно a^2 :

$$\frac{x_*^2}{a^2} + \frac{y_*^2}{1-a^2} - 1 = 0.$$

Пусть $I(n) = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq [(n+1)/2] - 1\}$, $J(n) = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq [n/2]\}$, где $[x]$ – целая часть x ,

$$\begin{aligned} a_i &= \cos \frac{i\pi}{n}, & b_i &= \sin \frac{i\pi}{n}, & i &\in I(n), \\ d_i &= \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, & e_i &= \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n}, & i &\in J(n). \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Для множеств S_0 и S_1 выполнены соотношения

$$S_0 \setminus D \subset \bigcup_{i \in I(n)} E(a_i), \quad (7)$$

$$S_1 \setminus D \subset \bigcup_{i \in J(n)} E(d_i). \quad (8)$$

Множество $S_0 \cap E(a_i)$, $i \in I(n)$, состоит из точек

$$\left(a_i \cos \frac{j\pi}{n}, b_i \sin \frac{j\pi}{n} \right), \quad j = \overline{0, 2n-1},$$

а множество $S_1 \cap E(d_i)$, $i \in J(n)$, состоит из точек

$$\left(d_i \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, e_i \sin \frac{(2j-1)\pi}{2n} \right), \quad j = \overline{1, 2n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x, y) \in E(a)$. Тогда

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta, & y &= b \sin \theta, & b &= \sqrt{1-a^2}, & \theta &\in [0, 2\pi), \\ x+y &= a \cos \theta + b \sin \theta = \cos(\theta - \varphi), & \cos \varphi &= a, & \sin \varphi &= b, \\ x-y &= a \cos \theta - b \sin \theta = \cos(\theta + \varphi), \\ T_n(x+y) &= \cos n \arccos(\cos(\theta - \varphi)) = \cos(n(\theta - \varphi)), \\ T_n(x-y) &= \cos n \arccos(\cos(\theta + \varphi)) = \cos(n(\theta + \varphi)), \end{aligned}$$

$$\bar{T}_n(x, y) = \frac{T_n(x + y) + T_n(x - y)}{2} = \cos(n\theta) \cos(n\varphi), \quad (9)$$

$$\tilde{T}_n(x, y) = \frac{T_n(x + y) - T_n(x - y)}{2} = \sin(n\theta) \sin(n\varphi). \quad (10)$$

Из (9), (10) следует, что на эллипсе $E(a)$ при $a > 0$ и $a \neq a_i$, $i \in I(n)$, выполнено неравенство

$$|\bar{T}_n(x, y)| < 1,$$

а на эллипсе $E(d)$ при $d > 0$ и $d \neq d_i$, $i \in J(n)$, – неравенство

$$|\tilde{T}_n(x, y)| < 1.$$

Отсюда следуют соотношения (7) и (8). Из равенств (9), (10) вытекает:

а) полином $\bar{T}_n(\cdot, \cdot)$ имеет на эллипсе $E(a_i)$ $2n$ -альтернанс в точках

$$\left(a_i \cos \frac{j\pi}{n}, b_i \sin \frac{j\pi}{n} \right), \quad j = \overline{0, 2n-1};$$

б) полином $\tilde{T}_n(\cdot, \cdot)$ имеет на эллипсе $E(d_i)$ $2n$ -альтернанс в точках

$$\left(d_i \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, e_i \sin \frac{(2j-1)\pi}{2n} \right), \quad j = \overline{1, 2n}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства леммы 1 следует, что точка пересечения эллипсов $E(a_i)$ и $E(a_j)$, находящаяся в квадранте с неотрицательными координатами, имеет координаты $(\cos(i\pi/n) \cos(j\pi/n), \sin(i\pi/n) \sin(j\pi/n))$, $i, j \in I(n)$, $i \neq j$, и принадлежит множеству S_0 . Точка пересечения эллипсов $E(d_i)$ и $E(d_j)$ в первом квадранте принадлежит S_1 и имеет координаты

$$\left(\cos \frac{(2i-1)\pi}{2n} \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n} \sin \frac{(2j-1)\pi}{2n} \right), \quad i, j \in J(n), \quad i \neq j.$$

ЛЕММА 2. Пусть полином $\bar{P}_n(\cdot, \cdot)$ в точках множества $S_0 \cap E(a_i)$ равен нулю. Тогда на эллипсе $E(a_i)$ полином $\bar{P}_n(\cdot, \cdot)$ тождественно равен нулю. Если полином $\tilde{P}_n(\cdot, \cdot)$ в точках множества $S_1 \cap E(d_i)$ равен нулю, то он равен нулю во всех точках эллипса $E(d_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\bar{P}_n(\cdot, \cdot)$ – четный полином по переменной y , а $\tilde{P}_n(\cdot, \cdot)$ – нечетный полином по y . Для точек (x, y) эллипса $E(a_i)$ имеем $x = a_i \cos \theta$, $y = b_i \sin \theta$, поэтому при выполнении условия леммы $R_n(\theta) = \bar{P}_n(a_i \cos \theta, b_i \sin \theta)$ является четным тригонометрическим полиномом порядка n , имеющим в силу леммы 1 $2n + 2$ нулей на интервале $[0, 2\pi)$, с учетом кратности нулей при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Аналогично, при выполнении условия леммы $Q_n(\theta) = \tilde{P}_n(d_i \cos \theta, e_i \sin \theta)$ является нечетным тригонометрическим полиномом порядка n , имеющим $2n + 2$ нулей в точках $\theta = (2j-1)\pi/(2n)$, $j = \overline{1, 2n}$, и $\theta = 0$, $\theta = \pi$.

Пусть $S_0^+ = \{(x, y) \in S_0 : y \geq 0\}$ и $S_1^+ = \{(x, y) \in S_1 : y > 0\}$.

ЛЕММА 3. Если полином $\bar{P}_n(\cdot, \cdot)$ равен нулю в точках множества S_0^+ , то он тождественно равен нулю. Если полином $\tilde{P}_n(\cdot, \cdot)$ равен нулю в точках множества S_1^+ , то он тождественно равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия леммы, и пусть n – четное число. Тогда точки $(0, \cos(i\pi/n))$, $(\cos(i\pi/n), 0)$, где $i = \overline{0, n}$, принадлежат S_0 , и поэтому полином $\bar{P}_n(\cdot, \cdot)$ имеет вид

$$\bar{P}_n(x, y) = xy^2 \bar{Q}_{n-3}(x, y). \quad (11)$$

Из леммы 2 следует, что полином $\bar{P}_n(\cdot, \cdot)$ равен нулю на эллипсах $E(a_i)$, $a_i = \cos(i\pi/n)$, $i = \overline{1, (n-2)/2}$. Пусть $M_0 = S_0 \setminus (0, 0)$. Рассмотрим сужение полинома $\bar{P}_n(\cdot, \cdot)$ на прямую $y = qx$, $q \in \mathbb{R}$, не содержащую точек из M_0 :

$$P_n^0(x) = \bar{P}_n(x, qx).$$

Полином $P_n^0(\cdot)$ степени не выше n имеет $n - 2$ нуля в точках x_j , для которых $(x_j, qx_j) \in \cup E(a_i)$, и в силу (11) тройной нуль при $x = 0$. Поэтому $P_n^0(\cdot) \equiv 0$, и так как множество M_0 конечно, то множество возможных значений параметра q плотно в $\mathbb{R}$. Следовательно, $\bar{P}_n(\cdot, \cdot) \equiv 0$.

При нечетном n доказательство для $\bar{P}_n(\cdot, \cdot)$ аналогично. В этом случае из условий леммы имеем

$$\bar{P}_n(x, y) = y^2 \bar{Q}_{n-2}(x, y)$$

и число точек пересечения соответствующей прямой $y = qx$ с эллипсами $E(a_i)$, $i = \overline{1, (n-1)/2}$, равно $n - 1$.

Рассмотрим теперь полином $\tilde{P}_n(\cdot, \cdot)$. Пусть n – четное. Тогда

$$\tilde{P}_n(x, y) = y \bar{Q}_{n-1}(x, y). \quad (12)$$

Рассмотрим прямую $y = \alpha$, где $\alpha > 0$ настолько мало, что прямая не содержит точек из S_1 и пересекает семейство эллипсов $E(d_i)$ в n точках. Из (12) и леммы 2 следует, что сужение полинома $\tilde{P}_n(\cdot, \cdot)$ на прямую $y = \alpha$ является полиномом степени не выше $n - 1$ от переменной x и имеет n нулей. Следовательно, $\tilde{P}_n(\cdot, \alpha) \equiv 0$. Поскольку значения α заполняют некоторый отрезок, то $\tilde{P}_n(\cdot, \cdot)$ равен нулю на множестве положительной лебеговой меры. Отсюда следует, что он тождественно равен нулю. Для нечетного n доказательство аналогично. В этом случае число эллипсов $E(d_i)$ равно $(n - 1)/2$ и полином $\tilde{P}_n(\cdot, \cdot)$ имеет вид

$$\tilde{P}_n(x, y) = xy \bar{Q}_{n-2}(x, y), \quad (13)$$

так как точки $(0, \cos(i\pi/n))$, $i = \overline{0, n}$, принадлежат S_1 . Поэтому, с учетом (13), сужение полинома $\tilde{P}_n(\cdot, \cdot)$ на соответствующую прямую $y = \alpha$ будет полиномом степени не выше $n - 1$ по переменной x и будет иметь n нулей.

Обозначим через $\bar{\mathfrak{P}}_n(S_0^+)$ и $\tilde{\mathfrak{P}}_n(S_1^+)$ соответственно пространства четных и нечетных по переменной y полиномов из $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ с нормами $\|\cdot\|_{S_0^+}$ и $\|\cdot\|_{S_1^+}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Число элементов множества S_0^+ равно размерности пространства $\bar{\mathfrak{P}}_n(S_0^+)$, т. е. равно $(n/2+1)^2$, если n четное, и $(n+3)(n+1)/4$, если n нечетное. Соответственно, число элементов множества S_1^+ равно размерности пространства $\tilde{\mathfrak{P}}_n(S_1^+)$, т. е. равно $(n+2)n/4$, если n четное, и $(n+1)^2/4$, если n нечетное. Это показывается суммированием арифметических прогрессий.

Пусть множество G равно либо S_0^+ , либо S_1^+ и пространство $\mathcal{P}_n(G)$ является соответственно либо $\overline{\mathfrak{P}}_n(S_0^+)$, либо $\widetilde{\mathfrak{P}}_n(S_1^+)$.

Из замечания 2 и леммы 3 следует, что для каждой точки $(x_*, y_*) \in G$ существует единственный полином $P_n \in \mathcal{P}_n(G)$ со свойствами:

- 1) $P_n(x, y) = 0$, если $(x, y) \in G \setminus (x_*, y_*)$;
- 2) $P_n(x_*, y_*) = 1$.

ЛЕММА 4. Пусть точка $(x_*, y_*) \in G$ и два ненулевых полинома $P_{n,1}$ и $P_{n,2}$ из $\mathcal{P}_n(G)$ равны нулю в точках множества $G \setminus (x_*, y_*)$. Тогда $P_{n,1}(\cdot, \cdot) = cP_{n,2}(\cdot, \cdot)$, $c \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим полином

$$P_{n,3}(x, y) = P_{n,1}(x_*, y_*)P_{n,2}(x, y) - P_{n,2}(x_*, y_*)P_{n,1}(x, y).$$

В силу леммы 3 $P_{n,1}(x_*, y_*) \neq 0$ и $P_{n,2}(x_*, y_*) \neq 0$, а полином $P_{n,3}(\cdot, \cdot) \equiv 0$.

Назовем элементарным полиномом на G с носителем в точке $z_* = (x_*, y_*) \in G$ полином $P_{n,z_*}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{P}_n(G)$ такой, что $P_{n,z_*}(x, y) = 0$ для точек $(x, y) \in G \setminus z_*$ и в точке z_* равный либо $\overline{T}_n(x_*, y_*)$, либо $\widetilde{T}_n(x_*, y_*)$, в зависимости от того, каким пространством является $\mathcal{P}_n(G)$.

ЛЕММА 5. Для элементарных полиномов $P_{n,z_*}(\cdot, \cdot)$ справедливы неравенства

$$P_{n,z_*}^{(k+s)}(x, y)[(0, 1)^k, (1, 0)^s] \geq 0, \quad x \geq 1, \quad y \geq 0, \quad z_* \in G. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{P}_n(G) = \overline{\mathfrak{P}}_n(S_0^+)$. Положим $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $U_0(x, y) = y^2$,

$$U_i(x, y) = \frac{x^2}{a_i^2} + \frac{y^2}{b_i^2} - 1, \quad i \in I(n).$$

Пусть $n \equiv 0 \pmod{2}$, $a_{n/2} = 0$, $b_{n/2} = 1$, $U_{n/2}(x, y) = x$, и пусть $z_* = (x_*, y_*) \in S_0^+$, $x_* \geq 0$. В силу леммы 1 для точки z_* имеем представление

$$z_* = (a_{i_0}a_{i_1}, b_{i_0}b_{i_1}), \quad 0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \frac{n}{2}.$$

Докажем равенство для полинома $\overline{P}_{n,z_*}(\cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned} \overline{P}_{n,z_*}(x, y) &= c_{i_0, i_1} (R_{i_0, i_1}(x, y))^\beta (x + a_{i_0}a_{i_1})^\alpha \prod_{\substack{0 \leq i \leq n/2 \\ i \neq i_0, i_1}} U_i(x, y) \\ &= c_{i_0, i_1} \overline{Q}_n(x, y), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\alpha = \text{sign}(a_{i_0}a_{i_1})$, $\beta = \text{sign}(i_1 - i_0)$,

$$R_{i_0, i_1}(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad a^2 = \frac{d - 2a_{i_0}^2 a_{i_1}^2}{2 - d}, \quad b^2 = \frac{d - 2a_{i_0}^2 a_{i_1}^2}{d},$$

$d = a_{i_0}^2 + a_{i_1}^2$. Эллипс $R_{i_0, i_1}(x, y) = 0$ пересекает прямую $x + y = 1$ в точках $(a_{i_0}^2, 1 - a_{i_0}^2)$ и $(a_{i_1}^2, 1 - a_{i_1}^2)$. Поэтому из леммы 1 и замечания 1 следует, что полином

$\overline{Q}_n(\cdot, \cdot)$ равен нулю в точках множества $S_0^+ \setminus z_*$. Тогда из леммы 4 вытекает равенство (15). Легко проверяются неравенства

$$\begin{aligned} a^2 \leq 1, \quad b^2 \leq 1, \quad 0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \frac{n}{2}, \\ R_{i_0, i_1}(a_{i_0}a_{i_1}, b_{i_0}b_{i_1}) < 0, \quad i_0 \neq i_1, \end{aligned} \quad (16)$$

причем $a = 1$ только при $i_0 = 0$ и $b = 1$ только при $i_1 = n/2$. Следовательно,

$$R_{i_0, i_1}(x, y) \geq 0, \quad x \geq 1.$$

Для доказательства неравенства (14) достаточно показать, что $c_{i_0, i_1} > 0$. Тогда все сомножители в разложении полинома $\overline{P}_{n, z_*}(\cdot, \cdot)$ и их производные любого порядка по координатам x и y неотрицательны при $x \geq 1$, $y \geq 0$. Поэтому из формулы для производной произведения функций

$$\left(\prod_{1 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \right)' = \sum_{i=1}^m \varphi_i'(x) \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \varphi_j(x)$$

получаем неравенство (14) для $z_* = (a_{i_0}a_{i_1}, b_{i_0}b_{i_1})$, $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq n/2$.

Пусть $i_0 < i_1$. Определим знаки чисел $\overline{P}_{n, z_*}(a_{i_0}a_{i_1}, b_{i_0}b_{i_1})$ и $\overline{Q}_n(a_{i_1}a_{i_0}, b_{i_1}b_{i_0})$. Имеем

$$\overline{P}_{n, z_*}(a_{i_0}a_{i_1}, b_{i_0}b_{i_1}) = \overline{T}_n(a_{i_0}a_{i_1}, b_{i_0}b_{i_1}) = \cos(i_0\pi) \cos(i_1\pi) = (-1)^{i_0+i_1}. \quad (17)$$

В первом квадранте эллипс $E(a_i)$ пересекает эллипс $E(a_{i_1})$ в точке $(a_{i_1}a_i, b_{i_1}b_i)$ и прямые $y = 0$ и $x = 0$ в точках $(a_i, 0)$ и $(0, b_i)$. Тогда $U_i(a_{i_0}a_{i_1}, b_{i_0}b_{i_1}) > 0$ при $i < i_0$ и $i > i_1$ и $U_i(a_{i_0}a_{i_1}, b_{i_0}b_{i_1}) < 0$ при $i_0 < i < i_1$. Отсюда и из (16) следует

$$\text{sign } \overline{Q}_n(a_{i_0}a_{i_1}, b_{i_0}b_{i_1}) = (-1)^{i_1-i_0-1} \cdot (-1) = (-1)^{i_1-i_0}. \quad (18)$$

Из (17) и (18) получаем, что $c_{i_0, i_1} > 0$.

Пусть $i_0 = i_1$. Тогда $\beta = 0$. Эллипс $E(a_i)$ касается прямой $x + y = 1$ в точке $(a_i^2, 1 - a_i^2)$. Поэтому $U_i(a_{i_0}^2, 1 - a_{i_0}^2) > 0$ при $i \neq i_0$. Отсюда получаем неравенства

$$\overline{P}_{n, z_*}(a_{i_0}^2, 1 - a_{i_0}^2) = \overline{T}_n(a_{i_0}^2, 1 - a_{i_0}^2) = 1 > 0, \quad \overline{Q}_n(a_{i_0}^2, 1 - a_{i_0}^2) > 0.$$

Следовательно, $c_{i_0, i_0} > 0$.

Пусть $z_* = (x_*, y_*) \in S_0^+$ и $x_* < 0$. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \overline{P}_{n, z_*}(x, y) &= cx(x + x_*)\overline{Q}_{n-2}(x, y), \quad \overline{Q}_{n-2}(-x, y) = \overline{Q}_{n-2}(x, y), \\ \overline{P}_{n, \bar{z}_*}(x, y) &= \gamma x(x - x_*)\overline{Q}_{n-2}(x, y), \quad \bar{z}_* = (-x_*, y_*), \\ \overline{P}_{n, z_*}(x_*, y_*) &= \overline{T}_n(x_*, y_*) = \overline{T}_n(-x_*, y_*) = \overline{P}_{n, \bar{z}_*}(-x_*, y_*). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $c = \gamma > 0$.

Для $n \equiv 1 \pmod{2}$, $\bar{P}_{n,z_*} \in \bar{\mathfrak{P}}_n(S_0^+)$ и $\tilde{P}_{n,z_*} \in \bar{\mathfrak{P}}_n(S_1^+)$ и произвольного n доказательство аналогично. Мы лишь приведем формулы для различных видов P_{n,z_*} при $x_* \geq 0$.

Пусть $n \equiv 1 \pmod{2}$ и $\mathcal{P}_n(G) = \bar{\mathfrak{P}}_n(S_0^+)$, и пусть $z_* = (a_{i_0}a_{i_1}, b_{i_0}b_{i_1})$, $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq (n-1)/2$. Тогда

$$\bar{P}_{n,z_*}(x, y) = \lambda_{i_0, i_1} (R_{i_0, i_1}(x, y))^\beta (x + a_{i_0}a_{i_1}) \prod_{\substack{0 \leq i \leq (n-1)/2 \\ i \neq i_0, i_1}} U_i(x, y), \quad \lambda_{i_0, i_1} > 0.$$

Пусть $\mathcal{P}_n(G) = \bar{\mathfrak{P}}_n(S_1^+)$. Положим

$$V_i(x, y) = \frac{x^2}{d_i^2} + \frac{y^2}{e_i^2} - 1, \quad i \in J(n).$$

Пусть $n \equiv 0 \pmod{2}$. Если $z_* = (d_{i_0}d_{i_1}, e_{i_0}e_{i_1})$, $1 \leq i_0 \leq i_1 \leq n/2$, то

$$\tilde{P}_{n,z_*}(x, y) = \gamma_{i_0, i_1} (R_{i_0, i_1}^*(x, y))^\beta y(x + d_{i_0}d_{i_1}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n/2 \\ i \neq i_0, i_1}} V_i(x, y), \quad \gamma_{i_0, i_1} > 0,$$

где $R_{i_0, i_1}^*(x, y) = x^2/d^2 + y^2/b^2 - 1$, $a^2 = (d - 2d_{i_0}^2 d_{i_1}^2)/(2 - d)$, $b^2 = (d - 2d_{i_0}^2 d_{i_1}^2)/d$, $d = d_{i_0}^2 + d_{i_1}^2$ (см. описание полинома $R_{i_0, i_1}(\cdot, \cdot)$), $\beta = \text{sign}(i_1 - i_0)$.

Пусть $\mathcal{P}_n(G) = \bar{\mathfrak{P}}_n(S_1^+)$ и $n \equiv 1 \pmod{2}$. Положим $d_{(n+1)/2} = 0$, $e_{(n+1)/2} = 1$, $V_{(n+1)/2}(x, y) = x$. Если $z_* = (d_{i_0}d_{i_1}, e_{i_0}e_{i_1})$, $1 \leq i_0 \leq i_1 \leq (n+1)/2$, то

$$\tilde{P}_{n,z_*}(x, y) = \mu_{i_0, i_1} (R_{i_0, i_1}^*(x, y))^\beta y(x + d_{i_0}d_{i_1})^\alpha \prod_{\substack{1 \leq i \leq (n+1)/2 \\ i \neq i_0, i_1}} V_i(x, y),$$

где $\alpha = \text{sign}(d_{i_0}d_{i_1})$, $\mu_{i_0, i_1} > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем сначала неравенство (4). Из определения элементарного полинома и леммы 3 имеем равенства для любого $\bar{P}_n(\cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned} \bar{P}_n(x, y) &= \sum_{i=1}^r \bar{P}_n(x_i, y_i) \bar{T}_n(x_i, y_i) \bar{P}_{n, (x_i, y_i)}(x, y), \\ \bar{P}_{n, x^s y^k}^{(s+k)}(x, y) &= \sum_{i=1}^r \bar{P}_n(x_i, y_i) \bar{T}_n(x_i, y_i) \bar{P}_{n, (x_i, y_i) x^s y^k}^{(s+k)}(x, y), \end{aligned} \quad (19)$$

где $(x_i, y_i) \in S_0^+$ и r — число точек множества S_0^+ . Из (19) и леммы 5 следует, что максимум левой части (19) в точке (x, y) при $\|\bar{P}_n\|_{S_0^+} \leq 1$ и $x \geq 1$, $y \geq 0$ достигается только на $\bar{P}_n(\cdot, \cdot)$, для которых выполнено равенство

$$\bar{P}_n(x_i, y_i) = \bar{T}_n(x_i, y_i) \quad (20)$$

во всех точках (x_i, y_i) , где

$$\overline{P}_{n, (x_i, y_i)_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y) > 0.$$

Поскольку полином $\overline{T}_n(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет условиям (20), то отсюда следует неравенство (4) при $x \geq 1, y \geq 0$.

Неравенство (5) при $x \geq 1, y \geq 0$ доказывается аналогично.

Из определений полиномов $\overline{P}_n(\cdot, \cdot)$ и $\tilde{P}_n(\cdot, \cdot)$ и равенства

$$P_n(x, y) = \overline{P}_n(x, y) + \tilde{P}_n(x, y)$$

вытекает неравенство

$$|\overline{P}_n(x, y)| + |\tilde{P}_n(x, y)| \leq \|P_n\|_S, \quad (x, y) \in S.$$

Поэтому при $x \geq 1, y \geq 0$ и $\|P_n\|_S \leq 1$ из неравенств (4), (5) получаем

$$\begin{aligned} P_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y) &= \overline{P}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y) + \tilde{P}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y) \leq \overline{T}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y) \\ &+ \tilde{T}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y) = T_n^{(s+k)}(x + y), \end{aligned}$$

т. е. при $x \geq 1, y \geq 0$ неравенство (6) доказано.

Если $x \geq 1$ и $y < 0$, то, сделав замену $Q_n(x, y) = P_n(x, -y)$, мы вернемся к рассмотренному случаю. Если $x \leq -1$, то, сделав замену $Q_n(x, y) = P_n(-x, y)$, мы также придем к уже рассмотренному случаю.

Если мы поменяем местами переменные x и y , то множество S не изменится, при $n \equiv 0 \pmod{2}$ множества S_0 и S_1 тоже не изменятся, при $n \equiv 1 \pmod{2}$ множества S_0 и S_1 поменяются местами. При этом для четных и нечетных по x полиномов мы получим для $|y| \geq 1$ неравенства, аналогичные (4), (5), и, следовательно, неравенство (6) для $|y| \geq 1$.

Приведем условия, при которых в неравенствах (4) и (5) равенство будет только для полиномов $c\overline{T}_n(\cdot, \cdot)$ и $c\tilde{T}_n(\cdot, \cdot)$ соответственно. Это будет при условии выполнения следующего неравенства для всех элементарных полиномов $P_{n, z_*} \in \mathcal{P}_n(G)$:

$$P_{n, z_*_{x^s y^k}}^{(s+k)}(|x|, |y|) > 0, \quad z_* \in G, \quad k + s \leq n.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $X = \ell_1^{(2)}$, $K = B$. Тогда при $\max\{|x|, |y|\} \geq 1$

$$\|P_n^{(k)}(x, y)\|_{\mathcal{L}^k} = \max_{k_1+k_2=k} \left| \frac{\partial^k P_n(x, y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right| \leq T_n^{(k)}(\rho(x, y)) \|P_n\|_S,$$

где $\rho(x, y) = |x| + |y|$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $X = \ell_\infty^{(2)}$, $K = B$. Если $\max\{|x+y|, |x-y|\} \geq 2$, то выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|P_n^{(k)}(x, y)\|_{\mathcal{L}^k} &= \max_{k_1+k_2=k} |P_n^{(k)}(x, y)[(1, 1)^{k_1}, (-1, 1)^{k_2}]| \\ &\leq T_n^{(k)}(\rho(x, y)) \|P_n\|_{S'}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\rho(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$, а S' – множество точек вида $(\cos(i\pi/n), \cos(j\pi/n))$, $i, j = \overline{0, n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для точки $z = (x, y)$ имеют место равенства

$$\|z\|_{\ell_\infty^{(2)}} = \rho(x, y) = \|z\|_{\ell_1^*} = \frac{|x'| + |y'|}{\sqrt{2}} = \frac{|x+y| + |x-y|}{2}, \quad (22)$$

где x' и y' – координаты z в базисе $\{e'_1, e'_2\}$, повернутом на $\pi/4$ относительно первичного базиса $\{e_1, e_2\}$. Из (22) и следствия 1 вытекает (21).

Далее X – нормированное векторное пространство над $\mathbb{R}$, если иное специально не оговорено; K – симметричное относительно нуля выпуклое ограниченное замкнутое тело в X , $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $h \in X$, $\|h\| = 1$, $\bar{x} = x/\|x\|$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K \subset X$. Тогда

$$\max_{\substack{\|P_n\|_K \leq 1 \\ x \in K}} |P_n^{(k)}(x)[h^k]| = \frac{T_n^{(k)}(1)}{r_h^k}, \quad (23)$$

$$\max_{\substack{\|P_n\|_K \leq 1 \\ h \in \partial B}} |P_n^{(k+s)}(x)[h^k, \bar{x}^s]| r_h^k = \frac{T_n^{(k+s)}(\rho(x))}{r_{\bar{x}}^s}, \quad x \notin K. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in K$. Параллелограмм

$$t_1x + t_2r_hh, \quad |t_1| + |t_2| \leq 1,$$

содержится в K . Произведем замену

$$Q_n(t_1, t_2) = P_n(t_1x + t_2r_hh); \quad (25)$$

тогда

$$Q_{n_{t_2^k}}^{(k)}(1, 0) = P_n^{(k)}(x)[h^k]r_h^k. \quad (26)$$

Из соотношений (25), (26) и теоремы 1 следует неравенство

$$|P_n^{(k)}(x)[h^k]| \leq \frac{T_n^{(k)}(1)}{r_h^k}, \quad \|P_n\|_K \leq 1. \quad (27)$$

Для оценок снизу применим конструкцию, предложенную в [15]. Пусть x_h и $-x_h$ – точки пересечения прямой th с границей ∂K . Из теоремы Хана–Банаха

следует существование двух параллельных опорных к телу K гиперплоскостей H_1 и H_2 соответственно в точках x_h и $-x_h$. Построим полином

$$P_{n,h}(x) = T_n\left(\frac{x_1}{r_h}\right),$$

где x_1 – проекция точки x на прямую th параллельно гиперплоскости H_1 . Тогда

$$|P_{n,h}^{(k)}(x_h)[h^k]| = \frac{T_n^{(k)}(1)}{r_h^k}. \quad (28)$$

Из соотношений (27), (28) следует (23).

Пусть $x \notin K$ и $x_0 = x/\rho(x)$. Ясно, что $x_0 = r_{\bar{x}} \bar{x}$. Произведем замену $\hat{Q}_n(t_1, t_2) = P_n(t_1 x_0 + t_2 r_h h)$. Имеем соотношения

$$\begin{aligned} |\hat{Q}_n(t_1, t_2)| &\leq 1, \quad |t_1| + |t_2| \leq 1, \\ \hat{Q}_{n_{t_1^s t_2^k}}^{(s+k)}(\rho(x), 0) &= P_n^{(s+k)}(x)[\bar{x}^s, h^k] r_{\bar{x}}^s r_h^k. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим полином $P_{n,h}(\cdot)$ при $h = \bar{x}$. Получим

$$|P_{n,\bar{x}}^{(k+s)}(x)[\bar{x}^{k+s}]| = \frac{T_n^{(k+s)}(\rho(x))}{r_{\bar{x}}^{k+s}}. \quad (30)$$

Из равенств (29), (30) и теоремы 1 следует (24).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для симметричных непрерывных k -линейных функционалов $f: X^k \rightarrow \mathbb{R}$ известны неравенства [12]

$$\sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, k}} |f(x_1, x_2, \dots, x_k)| \leq c_k \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x, x, \dots, x)|, \quad c_k \leq \frac{k^k}{k!}.$$

Если X – гильбертово пространство, то (см. [13], [14]) $c_k = 1$. В работе [14] в действительности доказано равенство $c_k = 1$ для предгильбертова пространства, хотя это не формулируется явно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $K \subset X$. Справедливо неравенство

$$\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} \leq c_k T_n^{(k)}(\rho_1(x)) \frac{\|P_n\|_K}{r^k(K)}, \quad (31)$$

где $c_k \leq k^k/k!$, $\rho_1(x) = \max\{1, \rho(x)\}$. Если X – предгильбертово пространство, то $c_k = 1$ и выполнены равенства

$$\sup_{\|P_n\|_K \leq 1} \|P_n^{(k)}\|_K = \frac{T_n^{(k)}(1)}{r^k(K)}, \quad (32)$$

$$\sup_{\substack{\|P_n\|_K \leq 1 \\ \rho(x) = \rho_0 > 1}} \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} = \frac{T_n^{(k)}(\rho_0)}{r^k(K)}. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (31) следует из теоремы 2 и замечания 3, для доказательства равенств (32), (33) достаточно получить соответствующие оценки снизу. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем h такое, что $\|h\| = 1$ и

$$r(K) \leq r_h \leq r(K) + \varepsilon.$$

Тогда для полинома $P_{n,h}(\cdot)$, построенного при доказательстве теоремы 2, получим неравенства

$$\sup_{\|P_n\|_K \leq 1} \|P_n^{(k)}\|_K \geq |P_{n,h}^{(k)}(x_h)[h^k]| = \frac{T_n^{(k)}(1)}{r_h^k} \geq \frac{T_n^{(k)}(1)}{(r(K) + \varepsilon)^k}, \quad (34)$$

$$\sup_{\substack{\|P_n\|_K \leq 1 \\ \rho(x) = \rho_0}} \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} \geq |P_{n,h}^{(k)}(x_0)[h^k]| = \frac{T_n^{(k)}(\rho_0)}{r_h^k} \geq \frac{T_n^{(k)}(\rho_0)}{(r(K) + \varepsilon)^k}, \quad (35)$$

где $\rho_0 > 1$, $x_0 = \rho_0 x_h$. Из (34), (35) и (31) при $c_k = 1$ получаем (32), (33).

Приведем оценки для производных от полиномов, нормированных на выпуклом ограниченном замкнутом теле V , являющиеся простыми следствиями полученных результатов.

Пусть $h \in X$ и $\|h\| = 1$. Обозначим через $V(h)$ множество

$$V(h) = \{[y_1, y_2]: y_1, y_2 \in V \text{ и } \exists c \in \mathbb{R}: y_1 - y_2 = ch\},$$

а через $\omega_V(h)$ и ω_V – ширину тела V по направлению h и ширину тела V :

$$\omega_V(h) = \sup_{[y_1, y_2] \in V(h)} \|y_1 - y_2\|, \quad \omega_V = \inf_{h \in \partial B} \omega_V(h).$$

Пусть $\overset{\circ}{V} = V \setminus \partial V$, $x_0 \in \overset{\circ}{V}$, $r(x_0, V) = \sup\{r: B(x_0, r) \subset V\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $V \subset X$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_V \leq 1$, $\|h\| = 1$. Имеют место неравенства

$$|P_n^{(k)}(x)[h^k]| \leq \frac{2^{2k} T_n^{(k)}(1)}{\omega_V^k(h)}, \quad x \in V, \quad (36)$$

$$\|P_n^{(k)}\|_V \leq \frac{c_k 2^{2k} T_n^{(k)}(1)}{\omega_V^k}, \quad (37)$$

$$\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} \leq \frac{c_k 2^{2k} T_n^{(k)}(\rho_0(x))}{r^k(x_0, V)}, \quad x \notin V, \quad (38)$$

где c_k определены в замечании 3 и $x_0 \in \overset{\circ}{V}$, $\rho_0(x) = \|2x - x_1 - x_0\| / \|x_1 - x_0\|$, $x_1 \in \partial V$, $x_1 \in [x_0, x]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in V$, $[y_1, y_2] \in V(h)$, $x_* = (y_1 + y_2)/2$, $x_2 \in \partial V$, $x \in [x_*, x_2]$. Тогда в теле V содержится параллелограмм

$$\frac{x_2 + x_*}{2} + t_1 \frac{x_2 - x_*}{2} + t_2 \frac{y_1 - y_2}{4}, \quad |t_1| + |t_2| \leq 1.$$

Поэтому из теоремы 2 и замечания 3 следуют неравенства (36), (37).

Пусть $x \notin V$, $x_0 \in \overset{\circ}{V}$, $x_1 \in \partial V$, $x_1 \in [x_0, x]$. Тогда в теле V содержится параллелограмм

$$\frac{x_1 + x_0}{2} + t_1 \frac{x_1 - x_0}{2} + t_2 \frac{r(x_0, V)h}{2}, \quad \|h\| = 1, \quad |t_1| + |t_2| \leq 1,$$

и из теоремы 2 и замечания 3 следует неравенство (38).

Список литературы

1. Марков А. А. Об одном вопросе Д. И. Менделеева. Избранные труды. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. Марков В. А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб.: Изд-во Имп. АН, 1892.
3. Schaeffer A. C., Duffin R. J. On some inequalities of S. Bernstein and W. Markov for derivatives of polynomials // Bull. Amer. Math. Soc. 1938. V. 44. № 4. P. 289–297.
4. Теляковский С. А. О работах по теории приближения функций, выполненных в МИАН // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 182. С. 128–179.
5. Andrianov A. V. On some open problems for algebraic polynomials on bounded convex sets // EAST J. Approx. 1999. V. 5. № 1. P. 117–123.
6. Kellogg O. D. On bounded polynomials on several variables // Math. Zeit. 1928. V. 27. № 1. P. 55–64.
7. Sarantopoulos Y. Bounds on derivatives of polynomials on Banach spaces // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1991. V. 110. P. 307–312.
8. Субботин Ю. Н., Васильев Ю. С. Неравенства Маркова в $\mathbb{R}^m$, не улучшаемые на классе всех выпуклых компактных тел // Докл. РАН. 1998. Т. 360. № 6. С. 734–735.
9. Скалыга В. И. Оценки производных полиномов на выпуклых телах // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 374–384.
10. Скалыга В. И. Многомерные аналоги неравенств В. А. Маркова и С. Н. Бернштейна. // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 6. С. 129–172.
11. Скалыга В. И. Аналоги неравенств Марковых и Бернштейна на выпуклых телах в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 2. С. 169–192.
12. Taylor A. E. Additions to the theory of polynomials in normed spaces // Tohoku Math. J. 1938. V. 44. P. 302–318.
13. Banach S. Über homogene Polynome in L^2 // Studia Math. 1938. V. 7. P. 36–44.
14. Harris L. A. Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors // Analyse Fonctionnelle et Applications / Ed. L. Nachbin. Paris: Hermann, 1975. P. 145–163.
15. Андрианов А. В. Аналоги неравенств А. Маркова и С. Бернштейна для многочленов в банаховых пространствах // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 5. С. 13–21.
16. Скалыга В. И. Аналоги неравенств В. Маркова, А. Шеффера и Р. Даффина на выпуклых телах // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 1. С. 146–150.
17. Miñoz G. A., Sarantopoulos Y. Bernstein and Markov-type inequalities for polynomials on a real Banach space // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2002. V. 133. P. 515–530.