Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Фарков, Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 3, 193–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/im644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 04:30:22

УДК 517.58

Ю. А. Фарков

Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах

Дополняются и уточняются результаты У. Лэнга (1998) о вейвлет-анализе на канторовой диадической группе $\mathcal{C}$. Построение ведется на локально компактной абелевой группе G , определяемой по целому $p \geq 2$ и совпадающей при $p = 2$ с группой $\mathcal{C}$. Для любых целых $p, n \geq 2$ в пространстве $L^2(G)$ указывается функция φ , которая:

- 1) является суммой лакунарного ряда по обобщенным функциям Уолша;
- 2) имеет ортонормированную в $L^2(G)$ систему “целочисленных” сдвигов;
- 3) удовлетворяет “масштабирующему уравнению” с p^n числовыми коэффициентами;
- 4) имеет компактный носитель, мера Хаара которого пропорциональна p^n ;
- 5) генерирует кратномасштабный анализ в $L^2(G)$.

По функциям φ определяются ортогональные вейвлеты ψ с компактными носителями на G . Семейство функций φ во многих отношениях аналогично хорошо известному семейству масштабирующих функций Добеши. Излагается метод оценки модулей гладкости функций φ , приводящий при малых значениях p и n к точным оценкам. Кроме того, показано, что предложенная недавно Бл. Сендовым концепция адаптивного кратномасштабного анализа применима в рассматриваемой ситуации.

Библиография: 24 наименования.

§ 1. Введение

Кратномасштабный анализ в L^2 -пространствах на локально компактных абелевых группах относится к числу фундаментальных понятий теории вейвлетов (см., например, [1], [2]) и определяется следующим образом.

Пусть G – локально компактная абелева группа и $L^2(G)$ – соответствующее пространство Лебега (см. [3]). Предположим, что H – дискретная подгруппа в G такая, что факторгруппа G/H компактна, и A – автоморфизм группы G такой, что $A(H)$ – собственная подгруппа в H . *Кратномасштабным анализом* в $L^2(G)$, ассоциированным с H и A , называется семейство замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(G)$, $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) $\overline{V_j} \subset V_{j+1}$ для $j \in \mathbb{Z}$;
- (ii) $\bigcup V_j = L^2(G)$ и $\bigcap V_j = \{0\}$;
- (iii) $f(\cdot) \in V_j \iff f(A \cdot) \in V_{j+1}$ для $j \in \mathbb{Z}$;
- (iv) $f(\cdot) \in V_0 \implies f(\cdot - h) \in V_0$ для $h \in H$;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00386).

(v) существует функция $\varphi \in L^2(G)$ такая, что система $\{\varphi(\cdot - h) \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом в V_0 .

Функция φ из условия (v) называется *масштабирующей функцией* в $L^2(G)$.

Из условий (iii) и (v) следует, что система $\{\varphi(A \cdot -h) \mid h \in H\}$ является ортогональным базисом в V_1 . Поскольку $\varphi \in V_0 \subset V_1$, то имеет место разложение

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H} c(h) \varphi(Ax - h).$$

Функция ψ называется *ортогональным вейвлетом* в $L^2(G)$, если система функций $\{\psi(A^j \cdot -h) \mid j \in \mathbb{Z}, h \in H\}$ является ортогональным базисом в $L^2(G)$. Если факторгруппа $H/A(H)$ состоит из двух смежных классов (т.е. индекс подгруппы $A(H)$ в H равен двум), то по коэффициентам $\{c(h)\}$ находятся коэффициенты $\{d(h)\}$ такие, что формула

$$\psi(x) = \sum_{h \in H} d(h) \varphi(Ax - h)$$

задает ортогональный вейвлет в $L^2(G)$. Если же $\text{card} H/A(H) = i > 2$, то по масштабирующей функции φ могут быть определены *вейвлеты* $\psi_1, \dots, \psi_{i-1}$ таким образом, что система функций

$$\{\psi_l(A^j \cdot -h) \mid 1 \leq l \leq i-1, j \in \mathbb{Z}, h \in H\}$$

является ортогональным базисом в $L^2(G)$.

Классический вейвлет-анализ на прямой отвечает случаю $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}$, $Ax = 2x$ для $x \in \mathbb{R}$ (см., например, [1]). В случае $G = \mathbb{R}^d$ подгруппа H является решеткой в $\mathbb{R}^d$ и автоморфизм A может быть задан невырожденной матрицей размера $d \times d$ (см. [1, § 10.3] и [4]–[6]). Для некоторых групп G , отличных от $\mathbb{R}^d$, кратномасштабные анализы изучались в [7]–[11]. В частности, в работах [7] и [8] определены групповые аналоги B -сплайновых вейвлет-базисов в $L^2(\mathbb{R})$. Структурные особенности локально компактных абелевых групп G , для которых существуют подгруппы H и автоморфизмы A с указанными выше свойствами ($A(H) \subset H$, $A(H) \neq H$, H дискретна и факторгруппа G/H компактна), приведены в [12].

В настоящей работе семейство масштабирующих функций построено на локально компактной группе G , определяемой по целому $p \geq 2$ и состоящей из последовательностей вида

$$x = (x_j) = (\dots, 0, 0, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots),$$

где $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и $x_j = 0$ для $j < k = k(x)$. Групповая операция на G обозначается $\oplus$ и определяется как покомпонентное сложение по модулю p :

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \pmod{p} \quad \text{для } j \in \mathbb{Z},$$

а топология в G вводится полной системой окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j \leq l\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Операция, обратная $\oplus$, обозначается $\ominus$ (так что $x \ominus x = \theta$, где θ – нулевая последовательность). Очевидно, каждая из окрестностей U_l является подгруппой в G , $U_{l+1} \subset U_l$ для $l \in \mathbb{Z}$ и $\bigcap U_l = \{\theta\}$.

Положим $U = U_0$. При $p = 2$ подгруппа U изоморфна канторовой диадической группе, т.е. топологическому прямому произведению счетного множества циклических групп второго порядка, рассматриваемых с дискретной топологией. Хорошо известно, что U , будучи совершенным нигде не плотным вполне несвязным метризуемым топологическим пространством, гомеоморфно канторову множеству (см. [13, с. 138]). Иногда (см., например, [10]) под канторовой группой понимают саму группу G при $p = 2$.

Элементы гармонического анализа на группе G и некоторые их приложения в задачах кодирования и обработки цифровой информации изложены, например, в [14] и [15]. О применениях канторовой группы в теории рядов Фурье см. в [16, гл. 14 и 15].

Пространства Лебега $L^q(G)$, $1 \leq q \leq \infty$, определяются по мере Хаара μ , заданной на борелевских множествах группы G и нормированной условием $\mu(U) = 1$ (см., например, [3]). Обозначим через $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ скалярное произведение и норму в $L^2(G)$.

Группа, двойственная G , обозначается G^* и состоит из последовательностей вида

$$\omega = (\omega_j) = (\dots, 0, 0, \omega_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \dots),$$

где $\omega_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и $\omega_j = 0$ для $j < k = k(\omega)$. Операции сложения и вычитания, окрестности нуля $\{U_l^*\}$ и мера Хаара μ^* вводятся для G^* так же, как и для G . Значение характера $\omega \in G^*$ на элементе $x \in G$ находится по формуле

$$\chi(x, \omega) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j=1}^{\infty} x_j \omega_{1-j}\right),$$

а преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$ определяется равенством

$$\widehat{f}(\omega) = \int_G f(x) \overline{\chi(x, \omega)} d\mu(x).$$

Основные сведения о преобразовании Фурье на пространстве $L^2(G)$ см. в [3, гл. 8]. По формуле Планшереля

$$(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g}), \quad f, g \in L^2(G).$$

Выделим в G дискретную подгруппу $H = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0, j > 0\}$ и определим автоморфизм $A \in \text{Aut } G$ по формуле $(Ax)_j = x_{j+1}$. Легко видеть, что факторгруппа $H/A(H)$ содержит p элементов, а аннулятор $H^\perp$ подгруппы H состоит из последовательностей $(\omega_j) \in G^*$, у которых $\omega_j = 0$ для $j > 0$.

Для произвольной функции $\varphi \in L^2(G)$ положим

$$\begin{aligned} \varphi_{j,h}(x) &= p^{j/2} \varphi(A^j x \ominus h), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H, \\ V_j &= \text{clos}_{L^2(G)} \text{span}\{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Если система $\{\varphi(\cdot - h) \mid h \in H\}$ ортонормирована и заданное формулой (1.1) семейство $\{V_j\}$ является кратномасштабным анализом в $L^2(G)$, то φ является масштабирующей функцией. В этом случае при каждом $j \in \mathbb{Z}$ система $\{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом в V_j и по функции φ стандартным методом (см., например, [4], [8]) определяются вейвлеты $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ таким образом, что функции

$$\psi_{l,j,h}(x) = p^{j/2} \psi_l(A^j x \ominus h), \quad 1 \leq l \leq p-1, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H,$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(G)$. При $p = 2$ получается один вейвлет ψ и система $\{2^{j/2} \psi(A^j \cdot \ominus h) \mid j \in \mathbb{Z}, h \in H\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(G)$ (см. [10, §3]).

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Отображение $\lambda: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ определим равенством

$$\lambda(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j p^{-j}, \quad x = (x_j) \in G.$$

Отметим, что отображение λ переводит подгруппу U в отрезок $[0, 1]$ и задает изоморфизм пространств с мерой (G, μ) и $(\mathbb{R}_+, \nu)$, где ν – мера Лебега на $\mathbb{R}_+$ (ср. с [16, с. 256]). образом подгруппы H при отображении λ является множество целых неотрицательных чисел: $\lambda(H) = \mathbb{Z}_+$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{N}$ через $h_{[\alpha]}$ и $h_{[\alpha]}^-$ обозначим элементы из G такие, что

$$\lambda(h_{[\alpha]}) = \lambda(h_{[\alpha]}^-) = \alpha,$$

где все компоненты последовательности $h_{[\alpha]}$ (соответственно, $h_{[\alpha]}^-$), начиная с некоторого номера, равны нулю (соответственно, $p-1$). Положим также $h_{[\alpha]} = \theta$ для $\alpha = 0$ (так что $h_{[\alpha]} \in H$ при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+$). Отображение $\lambda^*: G^* \rightarrow \mathbb{R}_+$, автоморфизм $B \in \text{Aut} G^*$, подгруппа U^* в G^* и элементы $\omega_{[\alpha]}$, $\omega_{[\alpha]}^-$ из $H^\perp$ определяются аналогично λ , A , U , $h_{[\alpha]}$ и $h_{[\alpha]}^-$ соответственно. Отметим, что

$$\chi(Ax, \omega) = \chi(x, B\omega), \quad x \in G, \quad \omega \in G^*.$$

Обобщенные функции Уолша $\{W_\alpha\}$ для группы G могут быть заданы равенством

$$W_\alpha(x) = \chi(x, \omega_{[\alpha]}), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in G$$

(иногда семейство функций $\{W_\alpha\}$ называют *системой Прайса*; см. [14, с. 30]). Эти функции непрерывны на G и удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$\int_U W_\alpha(x) \overline{W_\beta(x)} d\mu(x) = \delta_{\alpha,\beta} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера. Известно также, что система $\{W_\alpha\}$ полна в $L^2(U)$. Соответствующая система для группы G^* определяется равенством

$$W_\alpha^*(\omega) = \chi(h_{[\alpha]}, \omega), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \quad \omega \in G^*.$$

Система $\{W_\alpha^*\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(U^*)$.

Для $s \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$U_{n,s}^* = B^{-n}(\omega_{[s]}) \oplus B^{-n}(U^*),$$

так что $\lambda^*(U_{n,s}^*) = [sp^{-n}, (s+1)p^{-n}]$. Множества $U_{n,s}^*$, $0 \leq s \leq p^n - 1$, являются смежными классами группы U^* по подгруппе $B^{-n}(U^*)$.

В настоящей работе для произвольных $p, n \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, определены коэффициенты a_α такие, что функциональное уравнение

$$\varphi(x) = p \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}) \quad (1.2)$$

имеет решение $\varphi \in L^2(G)$ со следующими свойствами:

- 1) система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$;
- 2) $\text{supp } \varphi \subset U_{1-n}$;
- 3) φ генерирует по формуле (1.1) кратномасштабный анализ в $L^2(G)$.

Например, при $n = 1$ все $a_\alpha = 1/p$ и решением уравнения (1.2) является функция Хаара: $\varphi = \mathbf{1}_U$ (через $\mathbf{1}_E$ обозначается характеристическая функция множества $E \subset G$). В общем случае φ может быть задана разложением в обобщенный ряд Уолша, а коэффициенты a_α находятся из некоторой системы линейных алгебраических уравнений с помощью дискретного преобразования Вилленкина–Крестенсона. Об аналогичной конструкции масштабирующих функций в L^2 -пространстве на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ сообщалось автором в [17].

Для формулировки теоремы введем некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{N}_0(p, n)$ – множество всех натуральных чисел $m \geq p^{n-1}$, у которых в p -арном разложении

$$m = \sum_{j=0}^k \mu_j p^j, \quad \mu_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \quad \mu_k \neq 0, \quad k = k(m) \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.3)$$

среди упорядоченных наборов $(\mu_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_{j+n-1})$ отсутствуют наборы

$$(0, 0, \dots, 0, 1), (0, 0, \dots, 0, 2), \dots, (0, 0, \dots, 0, p-1).$$

Положим $\mathbb{N}(p, n) = \{1, 2, \dots, p^{n-1} - 1\} \cup \mathbb{N}_0(p, n)$. Имеем, в частности,

$$\begin{aligned} \mathbb{N}(2, 2) &= \{2^{j+1} - 1 \mid j \in \mathbb{Z}_+\} = \{1, 3, 7, 15, 31, \dots\}, \\ \mathbb{N}(p, 2) &= \left\{ \sum_{j=0}^k m_j p^j \mid m_j \in \{1, 2, \dots, p-1\}, k \in \mathbb{Z}_+ \right\}, \quad p \geq 3. \end{aligned}$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}(p, n)$, $1 \leq m \leq p^n - 1$, выберем (действительное или комплексное) число b_m такое, чтобы для всех $j \in \{1, 2, \dots, p^{n-1} - 1\}$ выполнялись условия

$$b_j \neq 0 \quad \text{и} \quad |b_j|^2 + |b_{p^{n-1}+j}|^2 + |b_{2p^{n-1}+j}|^2 + \dots + |b_{(p-1)p^{n-1}+j}|^2 = 1. \quad (1.4)$$

В частности, для $p = n = 2$ требуется только одно равенство: $|b_1|^2 + |b_3|^2 = 1$, а для $p = 3, n = 2$ имеем

$$|b_1|^2 + |b_4|^2 + |b_7|^2 = |b_2|^2 + |b_5|^2 + |b_8|^2 = 1.$$

Условия (1.4) будут использованы при доказательстве ортонормированности системы $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ в сформулированной ниже теореме (в связи с неравенством $b_j \neq 0$ см. замечание 1.1 и (3.4)).

Далее, для $m \in \mathbb{N}(p, n)$, $1 \leq m \leq p^n - 1$, положим

$$\gamma(i_1, i_2, \dots, i_n) = b_m, \quad \text{если } m = i_1 p^0 + i_2 p^1 + \dots + i_n p^{n-1}, \quad i_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

После этого представим каждое $m \in \mathbb{N}(p, n)$ в виде p -арного разложения (1.3) и определим коэффициенты $\{c(m)\}$ с помощью равенств:

$$\begin{aligned} c(m) &= \gamma(\mu_0, 0, 0, \dots, 0, 0), \quad \text{если } k(m) = 0; \\ c(m) &= \gamma(\mu_1, 0, 0, \dots, 0, 0) \gamma(\mu_0, \mu_1, 0, \dots, 0, 0), \quad \text{если } k(m) = 1; \\ &\dots\dots\dots \\ c(m) &= \gamma(\mu_k, 0, 0, \dots, 0, 0) \gamma(\mu_{k-1}, \mu_k, 0, \dots, 0, 0) \dots \gamma(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}), \end{aligned}$$

если $k = k(m) \geq n - 1$. Отметим, что в последнем произведении индексы каждого множителя, начиная со второго, получаются “сдвигом” индексов предыдущего множителя на одну позицию вправо и добавлением на освободившееся первое место одной новой цифры из p -арного разложения (1.3) числа m (так что, например, за множителем $\gamma(\mu_{k-l}, \mu_{k-l+1}, \dots, \mu_k, 0, 0, \dots, 0)$ следует $\gamma(\mu_{k-l-1}, \mu_{k-l}, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k, 0, \dots, 0)$).

Для $s \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ положим

$$d_s^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = 0, \\ b_s, & \text{если } s = j + lp^{n-1}, \quad 1 \leq j \leq p^{n-1} - 1, \quad 0 \leq l \leq p - 1, \\ 0, & \text{если } s = p^n - lp^{n-1}, \quad 1 \leq l \leq p - 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть функция φ задана разложением

$$\varphi(x) = p^{1-n} \mathbf{1}_U(A^{1-n}x) \left(1 + \sum_{m \in \mathbb{N}(p, n)} c(m) W_m(A^{1-n}x) \right), \quad x \in G, \quad (1.6)$$

а коэффициенты a_α определены формулами

$$a_\alpha = \frac{1}{p^n} \sum_{s=0}^{p^n-1} d_s^{(n)} W_\alpha^*(B^{-n} \omega_{[s]}), \quad 0 \leq \alpha \leq p^n - 1. \quad (1.7)$$

Тогда:

- (а) функция φ удовлетворяет уравнению (1.2);
- (б) система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$;
- (в) заданное формулой (1.1) семейство $\{V_j\}$ является кратномасштабным анализом в $L^2(G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Уравнение (1.2) в терминах преобразования Фурье записывается следующим образом:

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(B^{-1}\omega) \widehat{\varphi}(B^{-1}\omega), \quad (1.8)$$

где

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)}.$$

Применяя дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона (см., например, [18]), получаем, что заданные формулами (1.7) коэффициенты a_α удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(B^{-n}\omega_{[s]})} = d_s^{(n)}, \quad 0 \leq s \leq p^n - 1,$$

и обратно, из этой системы следуют формулы (1.7). Поскольку полином $m_0(\omega)$ постоянен на $U_{n,s}^*$, равенства (1.7) эквивалентны тому, что

$$m_0(\omega) = d_s^{(n)} \quad \text{для } \omega \in U_{n,s}^*, \quad 0 \leq s \leq p^n - 1. \quad (1.9)$$

Так как $d_0^{(n)} = 1$, из соотношения (1.8) следует, что

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(B^{-j}\omega),$$

где для каждого $\omega \in G^*$ все множители, начиная с некоторого, равны 1. Отсюда видно, что $\widehat{\varphi}$ непрерывна на G^* . Учитывая, что

$$\bigcup_{s=0}^{p^{n-1}-1} U_{n,s}^* = B^{-1}(U^*),$$

из формул (1.4), (1.5) и (1.9) получаем

$$m_0(B^{-1}\omega) \neq 0, \quad \omega \in U^*.$$

Кроме того, из соотношения (1.6) следует, что $\text{supp } \varphi \subset U_{1-n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Обобщенные функции Уолша $\{w_m\}$ на положительной полу-прямой $\mathbb{R}_+$ определяются равенствами

$$w_0(t) \equiv 1, \quad w_m(t) = \prod_{j=0}^k (r(p^j t))^{\mu_j}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где μ_j берутся из p -арного разложения (1.3) числа m , а r – функция, заданная на $[0, 1)$ формулой

$$r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, 1/p), \\ \exp(2\pi i l), & \text{если } t \in [lp^{-1}, (l+1)p^{-1}), \quad l = 1, 2, \dots, p-1, \end{cases}$$

и продолженная на $\mathbb{R}_+$ так, что $r(t+1) = r(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Ряды по ортогональным системам $\{W_m\}$ и $\{w_m\}$ изучаются (см., например, [14] и [15]) параллельно, причем преобразование Фурье в пространстве $L^2(G)$ заменяется (при $p = 2$) преобразованием Уолша–Фурье или (при $p > 2$) соответствующим мультипликативным преобразованием в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (см. [14, с. 127]). Поэтому наряду с масштабирующими функциями φ вида (1.6) естественно изучать их аналоги Φ на $\mathbb{R}_+$, определяемые формулой

$$\Phi(t) = p^{1-n} \mathbf{1}_{[0,1)}(p^{1-n}t) \left(1 + \sum_{m \in \mathbb{N}(p,n)} c(m) w_m(p^{1-n}t) \right), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\mathbb{N}(p, n)$ и $c(m)$ – такие же, как в (1.6). Каждая такая функция Φ удовлетворяет уравнению вида

$$\Phi(t) = p \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \Phi(pt \ominus_p \alpha), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и генерирует кратномасштабный анализ в L^2 -пространстве на $(\mathbb{R}_+, \oplus_p)$ (через $\oplus_p$ и $\ominus_p$ обозначены операции “сложения” и “вычитания” по модулю p , определяемые по p -арным разложениям чисел из $\mathbb{R}_+$; см. [14], [15]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Пользуясь равенством

$$\sum_{m=0}^{p^{n-1}-1} \chi(y, m) = \begin{cases} p^{n-1}, & \text{если } y \in U_{n-1}, \\ 0, & \text{если } y \in U \setminus U_{n-1}, \end{cases}$$

нетрудно проверить, что из (1.6) при $b_1 = b_2 = \dots = b_{p^{n-1}-1} = 1$ получается функция $\varphi = \mathbf{1}_{U_{1-n}}$. Отсюда видно, что теорема верна и при $n = 1$ (случай Хаара), если положить $\mathbb{N}(p, 1) = \emptyset$.

ПРИМЕР 1.4. При $p = n = 2$ после подстановки $b_1 = a$, $b_3 = b$ формула (1.6) приводится к виду

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_U(A^{-1}x) \left(1 + a \sum_{j=0}^{\infty} b^j W_{2^{j+1}-1}(A^{-1}x) \right), \quad x \in G, \quad (1.10)$$

где $a \neq 0$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Коэффициенты уравнения (1.2) в этом случае определяются равенствами

$$a_0 = \frac{1+a+b}{4}, \quad a_1 = \frac{1+a-b}{4}, \quad a_2 = \frac{1-a-b}{4}, \quad a_3 = \frac{1-a+b}{4}.$$

Формула (1.10) была найдена Лэнгом (см. [10]).

ПРИМЕР 1.5. Для $p = 2$, $n = 3$ согласно (1.4) имеем

$$|b_1|^2 + |b_5|^2 = |b_2|^2 + |b_6|^2 = |b_3|^2 + |b_7|^2 = 1.$$

Полагая $b_1 = a$, $b_2 = b$, $b_3 = c$, $b_5 = \alpha$, $b_6 = \beta$, $b_7 = \gamma$, из (1.7) находим

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{8}(1 + a + b + c + \alpha + \beta + \gamma), \\ a_1 &= \frac{1}{8}(1 + a + b + c - \alpha - \beta - \gamma), \\ a_2 &= \frac{1}{8}(1 + a - b - c + \alpha - \beta - \gamma), \\ a_3 &= \frac{1}{8}(1 + a - b - c - \alpha + \beta + \gamma), \\ a_4 &= \frac{1}{8}(1 - a + b - c - \alpha + \beta - \gamma), \\ a_5 &= \frac{1}{8}(1 - a + b - c + \alpha - \beta + \gamma), \\ a_6 &= \frac{1}{8}(1 - a - b + c - \alpha - \beta + \gamma), \\ a_7 &= \frac{1}{8}(1 - a - b + c + \alpha + \beta - \gamma). \end{aligned}$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \gamma(1, 0, 0) &= a, & \gamma(0, 1, 0) &= b, & \gamma(1, 1, 0) &= c, \\ \gamma(1, 0, 1) &= \alpha, & \gamma(0, 1, 1) &= \beta, & \gamma(1, 1, 1) &= \gamma \end{aligned}$$

и

$$c(m) = \gamma(\mu_k, 0, 0)\gamma(\mu_{k-1}, \mu_k, 0) \dots \gamma(\mu_0, \mu_1, \mu_2),$$

где

$$m = \sum_{i=0}^k \mu_i 2^i, \quad \mu_k \neq 0, \quad \mu_i \in \{0, 1\}.$$

Учитывая, что

$$\mathbb{N}(2, 3) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 26, 27, 29, 30, 31, 42, \dots\},$$

и полагая $y = A^{-2}x$, из (1.6) получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{4} \mathbf{1}_U(y) \left(1 + \sum_{m \in \mathbb{N}(2, 3)} c(m) W_m(y) \right) \\ &= \frac{1}{4} \mathbf{1}_U(y) (1 + aW_1(y) + abW_2(y) + acW_3(y) + ab\alpha W_5(y) \\ &\quad + ac\beta W_6(y) + ac\gamma W_7(y) + ab^2\alpha W_{10}(y) + ab\alpha W_{11}(y) \\ &\quad + ac\alpha\beta W_{13}(y) + ac\beta\gamma W_{14}(y) + ac\gamma^2 W_{15}(y) + ab^2\alpha^2 W_{21}(y) \\ &\quad + ab\alpha\beta W_{22}(y) + ab\alpha\beta\gamma W_{23}(y) + ab\alpha\beta W_{26}(y) \\ &\quad + ac^2\alpha\beta W_{27}(y) + ac\alpha\beta\gamma W_{29}(y) + ac\beta\gamma^2 W_{30}(y) + \dots). \end{aligned} \quad (1.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. В работе [10] разложение (1.11) было найдено в следующих случаях:

- 1) $a = 1$, $b = 0$, $|c| < 1$ (соответственно, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $|\gamma| < 1$);
- 2) $|a| < 1$, $b = 1$, $c = 0$ (соответственно, $|\alpha| < 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$).

Кроме этих двух случаев формула (1.6) была известна только при $p = n = 2$ (пример 1.4). Приведенные выше (и легко компьютеризуемые) правила вычисления коэффициентов a_α , $c(m)$ и элементов множества $\mathbb{N}(p, n)$ являются новыми. При вычислении коэффициентов a_α рекомендуется использовать формулу (1.7) и алгоритмы быстрого преобразования Виленкина–Крестенсона [18, § 4].

В § 2 дано доказательство сформулированной выше теоремы, а в § 3 показано, что предложенная в [19] конструкция адаптивного кратномасштабного анализа после соответствующей модификации может быть применена к решению задачи об “оптимальном” выборе параметров b_m для аппроксимации “сигнала” f его проекциями на подпространства в $L^2(G)$. В заключительном § 4 обсуждается вопрос о гладкости построенных масштабирующих функций. Например, при $p = n = 2$ гладкость функции φ характеризуется последовательностью

$$\Omega_j(\varphi) := \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid x, y \in U_{-1}, x \ominus y \in U_j\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Установлено, в частности, что если φ задана формулой (1.10), то имеет место точная по порядку оценка $\Omega_j(\varphi) \leq C 2^{-\mu j}$, где $\mu = \log_2(1/|b|)$ (ср. с [1, с. 319], [10, с. 541]).

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Последовательность $\omega = (\omega_j)$, у которой $\omega_1 = l$ и $\omega_j = 0$ для $j \neq 1$, обозначим через δ_l (в частности, $\delta_0 = \theta$). Легко видеть, что

$$\{\omega \in H^* \mid \chi(x, \omega) = 1, x \in A(H)\} = \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}\}, \quad (2.1)$$

т. е. множество последовательностей $\{\delta_l\}$ является аннулятором подгруппы $A(H)$ в H .

ЛЕММА 2.1. Пусть полином

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)} \quad (2.2)$$

удовлетворяет условиям:

- (a) $m_0(\theta) = 1$;
- (b) $m_0(B^{-1}\omega) \neq 0$ для $\omega \in U^*$;
- (c) $\sum_{l=0}^{p-1} |m_0(B^{-n}\omega_{[s]} \oplus \delta_l)|^2 = 1$ для $s \in \{0, 1, \dots, p^{n-1}-1\}$.

Тогда функция g , заданная равенством

$$g(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(B^{-j}\omega), \quad (2.3)$$

принадлежит классу $L^2(G^*)$. Более того, если функция φ получена из g обратным преобразованием Фурье (так что $\varphi \in L^2(G)$ и $\widehat{\varphi} = g$), то система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$ и φ генерирует по формуле (1.1) кратномасштабный анализ в $L^2(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция g определена равенством (2.3), где $m_0(\omega)$ имеет вид (2.2) и удовлетворяет условиям (а)–(с). Поскольку $m_0(\omega \oplus h^*) = m_0(\omega)$ для $h^* \in H^\perp$ и полином $m_0(\omega)$ постоянен на каждом из классов $U_{n,s}^*$, $s \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$, условие (с) эквивалентно тому, что

$$\sum_{l=0}^{p-1} |m_0(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1, \quad \omega \in G^*. \quad (2.4)$$

Шаг 1. Установим, что

$$\int_{G^*} |g(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) \leq 1. \quad (2.5)$$

Для произвольного натурального k положим

$$\mu^{[k]}(\omega) = \prod_{j=1}^k m_0(B^{-j}\omega) \mathbf{1}_{U^*}(B^{-k}\omega), \quad \omega \in G^*.$$

Согласно условию (а) $m_0(\omega) = 1$ для $\omega \in U_{n,0}^*$. Поэтому из равенства (2.3) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu^{[k]}(\omega) = g(\omega), \quad \omega \in G^*. \quad (2.6)$$

Учитывая, что $B^{-n}\omega \in U_{n,0}^*$ для $\omega \in U^*$, имеем

$$g(\omega) = \prod_{j=1}^{n-1} m_0(B^{-j}\omega), \quad \omega \in U^*.$$

В силу условия (b) существует константа $c_1 > 0$ такая, что

$$|m_0(B^{-j}\omega)| \geq c_1, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \omega \in U^*,$$

и, значит, $c_1^{1-n}|g(\omega)| \geq \mathbf{1}_{U^*}(\omega)$ для $\omega \in G^*$. Отсюда получаем

$$|\mu^{[k]}(\omega)| = \prod_{j=1}^k |m_0(B^{-j}\omega)| \mathbf{1}_{U^*}(B^{-k}\omega) \leq c_1^{1-n} \prod_{j=1}^k |m_0(B^{-j}\omega)| |g(B^{-k}\omega)|$$

и, учитывая (2.3), имеем

$$|\mu^{[k]}(\omega)| \leq c_1^{1-n} |g(\omega)|, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \omega \in G^*. \quad (2.7)$$

Пусть теперь

$$I_k(s) := \int_{G^*} |\mu^{[k]}(\omega)|^2 \overline{W_s^*(\omega)} d\mu^*(\omega), \quad k \in \mathbb{N}, \quad s \in \mathbb{Z}_+.$$

Полагая $\zeta = B^{-k}\omega$, находим

$$\begin{aligned} I_k(s) &= \int_{U_{k,0}^*} \prod_{j=1}^k |m_0(B^{-j}\omega)|^2 \overline{W_s^*(\omega)} d\mu^*(\omega) \\ &= p^k \int_{U^*} |m_0(\zeta)|^2 \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(B^j\zeta)|^2 \overline{W_s^*(B^k\zeta)} d\mu^*(\zeta). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Поскольку $U^* = \bigcup_{l=0}^{p-1} (B^{-1}(U^*) \oplus \delta_l)$, где δ_l из (2.1), то

$$I_k(s) = p^{k-1} \int_{U^*} \sum_{l=0}^{p-1} |m_0(B^{-1}\omega \oplus \delta_l)|^2 \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(B^{j-1}\omega)|^2 \overline{W_s^*(B^{k-1}\omega)} d\mu^*(\omega),$$

и в силу (2.4) имеем

$$I_k(s) = p^{k-1} \int_{U^*} \prod_{j=0}^{k-2} |m_0(B^j\omega)|^2 \overline{W_s^*(B^{k-1}\omega)} d\mu^*(\omega).$$

Отсюда и из соотношения (2.8) следует, что

$$I_k(s) = I_{k-1}(s).$$

Аналогично, при $k = 1$

$$I_1(s) = p \int_{U^*} |m_0(\omega)|^2 \overline{W_s^*(B\omega)} d\mu^*(\omega) = \int_{U^*} \overline{W_s^*(\omega)} d\mu^*(\omega),$$

где последний интеграл равен $\delta_{0,s}$ в силу ортонормированности системы $\{W_\alpha^*\}$ в $L^2(U^*)$. Значит,

$$I_k(s) = \delta_{0,s}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.9)$$

В частности, для всех $k \in \mathbb{N}$

$$I_k(0) = \int_{G^*} |\mu^{[k]}(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) = 1.$$

В силу (2.6) отсюда по лемме Фату получаем (2.5).

Шаг 2. Определим функцию φ из $L^2(G)$ условием $\widehat{\varphi} = g$, где g задана по формуле (2.3). Применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, из соотношений (2.6), (2.7) и (2.9) находим

$$\int_{G^*} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \overline{W_s^*(\omega)} d\mu^*(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k(s) = \delta_{0,s}.$$

Отсюда по формуле Планшереля следует, что система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$.

Шаг 3. Заметим, что функция φ удовлетворяет уравнению (1.2), если коэффициенты a_α в этом уравнении выбраны, как у полинома (2.2). Действительно, из (2.3) следует, что

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(B^{-1}\omega) \widehat{\varphi}(B^{-1}\omega). \quad (2.10)$$

Применив к обеим частям этого равенства обратное преобразование Фурье, получаем (1.2). Отсюда видно, что для семейства подпространств $\{V_j\}$, заданного по функции φ с помощью формулы (1.1), условие $V_j \subset V_{j+1}$ выполнено. Из доказанного на шаге 2 следует, что выполнено также и условие (v) приведенного выше определения кратномасштабного анализа, а условия (iii) и (iv) непосредственно следуют из (1.1).

Шаг 4. Докажем, что $\bigcap V_j = \{0\}$. Из условия (v) и равенства (1.1) следует, что при каждом $j \in \mathbb{Z}$ система $\{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом пространства V_j . Поэтому ортогональный проектор $P_j: L^2(G) \rightarrow V_j$ действует по формуле

$$P_j f = \sum_{h \in H} (f, \varphi_{j,h}) \varphi_{j,h}, \quad f \in L^2(G). \quad (2.11)$$

Предположим, что $f \in \bigcap V_j$, и фиксируем $\varepsilon > 0$. Множество $C_0(G)$ непрерывных на G функций с компактным носителем плотно в $L^2(G)$ (см. [3, (12.10)]). Выберем $f_0 \in C_0(G)$ так, чтобы $\|f - f_0\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|f - P_j f_0\| \leq \|P_j(f - f_0)\| \leq \|f - f_0\| < \varepsilon$$

и, значит,

$$\|f\| \leq \|P_j f_0\| + \varepsilon \quad (2.12)$$

для каждого $j \in \mathbb{Z}$. Если $\text{supp } f_0 \subset U_l$, то

$$(P_j f_0, \varphi_{j,h}) = (f_0, \varphi_{j,h}) = p^{j/2} \int_{U_l} f_0(x) \overline{\varphi(A^j x \ominus h)} d\mu(x),$$

где число l зависит от f_0 . Пользуясь неравенством Коши–Буняковского, отсюда получаем

$$\|P_j f_0\|^2 = \sum_{h \in H} |(P_j f_0, \varphi_{j,h})|^2 \leq \|f_0\|^2 \sum_{h \in H} p^j \int_{U_l} |\varphi(A^j x \ominus h)|^2 d\mu(x).$$

Для $j < l$ имеем

$$\sum_{h \in H} p^j \int_{U_l} |\varphi(A^j x \ominus h)|^2 d\mu(x) = \int_{S_{l,j}} |\varphi(x)|^2 d\mu(x),$$

где

$$S_{l,j} := \bigcup_{h \in H} \{y \ominus h \mid y \in U_{l-j}\}.$$

Следовательно,

$$\|P_j f_0\|^2 \leq \|f_0\|^2 \int_G \mathbf{1}_{S_{l,j}}(x) |\varphi(x)|^2 d\mu(x). \quad (2.13)$$

Легко видеть, что $\lim_{j \rightarrow -\infty} \mathbf{1}_{S_{l,j}}(x) = 0$ для всех $x \notin H$. По теореме Лебега из (2.13) получаем, что

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j u\| = 0.$$

Учитывая (2.12), заключаем, что $\|f\| \leq \varepsilon$, и поэтому $\bigcap V_j = \{0\}$.

Шаг 5. Покажем, что

$$\overline{\bigcup V_j} = L^2(G). \quad (2.14)$$

Пусть $f \in (\bigcup V_j)^\perp$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $u \in L^2(G)$ так, чтобы $\hat{u} \in C_0(G^*)$ и $\|\hat{f} - \hat{u}\| < \varepsilon$. Для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ согласно (2.11) имеем

$$\|P_j f\|^2 = (P_j f, P_j f) = (f, P_j f) = 0$$

и, значит,

$$\|P_j u\| = \|P_j(f - u)\| \leq \|f - u\| = \|\hat{f} - \hat{u}\| < \varepsilon. \quad (2.15)$$

Фиксируем номер $j \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\text{supp } \hat{u} \subset U_{-j}^*$ и $B^{-j}\omega \in U_{n-1}^*$ для всех $\omega \in \text{supp } \hat{u}$. Пользуясь тем, что система $\{p^{-j/2}W_\alpha^*(B^{-j}\cdot)\}$ ортонормирована и полна в $L^2(U_{-j}^*)$, для функции $\Gamma(\omega) = \hat{u}(\omega)\hat{\varphi}(B^{-j}\omega)$ имеем

$$p^{-j} \int_{U_{-j}^*} |\Gamma(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+} |c_\alpha(\Gamma)|^2, \quad (2.16)$$

где

$$c_\alpha(\Gamma) = p^{-j/2} \int_{U_{-j}^*} \Gamma(\omega) \overline{W_\alpha^*(B^{-j}\omega)} d\mu^*(\omega).$$

Замечая, что

$$\int_G \varphi(A^j x \ominus h_{[\alpha]}) \overline{\chi(x, \omega)} d\mu(x) = p^{-j} \hat{\varphi}(B^{-j}\omega) \overline{W_\alpha^*(B^{-j}\omega)},$$

получаем

$$p^{-j/2}(u, \varphi_{j,h}) = p^{-j} \int_{U_{-j}^*} \Gamma(\omega) \overline{W_\alpha^*(B^{-j}\omega)} d\mu^*(\omega).$$

Отсюда и из равенства (2.16) находим

$$\|P_j u\|^2 = \sum_{h \in H} |(u, \varphi_{j,h})|^2 = \int_{U_{-j}^*} |\hat{u}(\omega)|^2 |\hat{\varphi}(B^{-j}\omega)|^2 d\mu^*(\omega). \quad (2.17)$$

По условию, $m_0(\omega) = 1$ на $U_{n,0}^*$, а число j выбрано так, что $B^{-j}\omega \in U_{n+1}^*$ для $\omega \in \text{supp } \hat{u}$. Отсюда и из (2.3) (напомним, что $\hat{\varphi} = g$) видно, что $\hat{\varphi}(B^{-j}\omega) = 1$ для всех $\omega \in \text{supp } \hat{u}$. Учитывая, что $\text{supp } \hat{u} \subset U_{-j}^*$, из соотношений (2.15) и (2.17) получаем

$$\varepsilon > \|P_j u\| = \|\hat{u}\| = \|u\|.$$

Следовательно, $\|f\| < \varepsilon + \|u\| < 2\varepsilon$. Таким образом, $(\bigcup V_j)^\perp = \{0\}$, и поэтому верно (2.14). Лемма доказана

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В связи с условием (b) леммы 2.1 отметим, что, вообще говоря, существуют точки $\omega \in U^*$, для которых $m_0(\omega) = 0$ (см. примеры 1.4, 1.5 и предложение 3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Положим $X_{n-1} = \mathbf{1}_{U_{n-1}^*}$. Для любых $x \in G$, $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_G X_{n-1}(\omega \ominus B^{1-n}\omega_{[m]})\chi(x, \omega) d\mu^*(\omega) &= \chi(x, B^{1-n}\omega_{[m]}) \int_{U_{n-1}} \chi(x, \omega) d\mu^*(\omega) \\ &= p^{1-n} \mathbf{1}_U(A^{1-n}x) \chi(A^{1-n}x, \omega_{[m]}) = p^{1-n} \mathbf{1}_U(A^{1-n}x) W_m(A^{1-n}x). \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.6), применяя преобразование Фурье, получим

$$\widehat{\varphi}(\omega) = X_{n-1}(\omega) + \sum_{m \in \mathbb{N}(p, n)} c(m) X_{n-1}(\omega \ominus B^{1-n}\omega_{[m]}).$$

Следовательно, для $m \in \mathbb{N}(p, n)$

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in U_{n-1}^*, \\ c(m), & \text{если } \omega \in U_{n-1, m}^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.18)$$

Предположим теперь, что коэффициенты a_α заданы формулой (1.7). Согласно (1.9) полином

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)}$$

удовлетворяет условиям

$$m_0(B^{-n}(\omega_{[s]})) = d_s^{(n)}, \quad 0 \leq s \leq p^n - 1.$$

Отсюда и из (2.18), учитывая определение коэффициентов $c(m)$, имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(B^{-j}\omega)$$

и, значит,

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(B^{-1}\omega) \widehat{\varphi}(B^{-1}\omega).$$

Отсюда следует утверждение (a). Пользуясь леммой 2.1, заключаем, что верны также утверждения (b) и (c). Теорема доказана.

§ 3. Об условиях ортонормированности в $L^2(G)$ и оптимизации параметров

Следующее утверждение может быть выведено из обобщенной формулы суммирования Пуассона (см., например, [2, с. 377]) и приводится здесь с элементарным доказательством для полноты изложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\varphi \in L^2(G)$. Система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{h^* \in H^\perp} |\widehat{\varphi}(\omega \ominus h^*)|^2 = 1 \quad \text{для п. в. } \omega \in G^*. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$\Phi(\omega) = \sum_{h^* \in H^\perp} |\widehat{\varphi}(\omega \ominus h^*)|^2$$

является $H^\perp$ -периодической: $\Phi(\omega \oplus h^*) = \Phi(\omega)$ для всех $h^* \in H^\perp$. Кроме того, она имеет конечную L^1 -норму на U^* , так как

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{U^*} \Phi(\omega) d\mu^*(\omega) = \int_{U^*} \sum_{h^* \in H^\perp} |\widehat{\varphi}(\omega \ominus h^*)|^2 d\mu^*(\omega) \\ &= \sum_{h^* \in H^\perp} \int_{U^* \oplus h^*} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) = \int_{G^*} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) < +\infty. \end{aligned}$$

Обозначим через $\{\widehat{\Phi}(h)\}$ коэффициенты Фурье функции Φ по системе $\{\chi(h, \cdot)\}$. Для любого $h \in H$ с помощью подстановки $\eta = \omega \ominus h^*$ имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(h) &= \int_{U^*} \Phi(\omega) \overline{\chi(h, \omega)} d\mu^*(\omega) = \int_{U^*} \overline{\chi(h, \omega)} \sum_{h^* \in H^\perp} |\widehat{\varphi}(\omega \ominus h^*)|^2 d\mu^*(\omega) \\ &= \sum_{h^* \in H^\perp} \int_{U^* \oplus h^*} \overline{\chi(h, \eta)} |\widehat{\varphi}(\eta)|^2 d\mu^*(\eta) = \int_{G^*} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \overline{\chi(h, \omega)} d\mu^*(\omega). \end{aligned}$$

Применив равенство Планшереля, отсюда получаем

$$\int_G \varphi(x \ominus h) \overline{\varphi(x)} d\mu(x) = \widehat{\Phi}(h), \quad h \in H.$$

Остается отметить, что условие (3.1) равносильно тому, что $\widehat{\Phi}(h) = \delta_{\theta, h}$ для $h \in H$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если функция $\varphi \in L^2(G)$ удовлетворяет уравнению (1.2) и система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$, то

$$\sum_{l=0}^{p-1} |m_0(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1 \quad \text{для всех } \omega \in G^*, \quad (3.2)$$

где

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ положим

$$H_l^\perp = \{h^* \in H^\perp \mid B^{-1}h^* \ominus \delta_l \in H^\perp\}$$

(отметим, что $h_0^* = l$ для $h^* = (h_j^*) \in H_l^\perp$). Поскольку $\widehat{\varphi}$ непрерывна на G^* (см. замечание 1.1), из (3.1) для любого $\omega \in G^*$ получаем

$$\sum_{h^* \in H_l^\perp} |\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega \oplus B^{-1}h^*)|^2 = 1, \quad l \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Отсюда и из формулы (1.8) следует, что

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{h^* \in H^\perp} |m_0(B^{-1}(\omega \oplus h^*))|^2 |\widehat{\varphi}(B^{-1}(\omega \oplus h^*))|^2 \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} |m_0(B^{-1}\omega \oplus \delta_l)|^2 \sum_{h^* \in H_l^\perp} |\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega \oplus B^{-1}h^*)|^2 = \sum_{l=0}^{p-1} |m_0(B^{-1}\omega \oplus \delta_l)|^2. \end{aligned}$$

Поэтому верно соотношение (3.2). Предложение доказано.

Множество E , расположенное в G^* , называется *конгруэнтным* U^* по модулю $H^\perp$, если $\mu^*(E) = 1$ и для любого $\omega \in E$ существует элемент $h^* \in H^\perp$ такой, что $\omega \oplus h^* \in U^*$. Имеет место (см. [20]) следующий аналог известной теоремы Коэна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть m_0 – полином вида

$$m_0(\omega) = \sum_{h \in H} a(h) \overline{\chi(h, \omega)},$$

где $a(\cdot)$ – финитная на H функция. Следующие два утверждения эквивалентны:

1) полином m_0 удовлетворяет условиям

$$m_0(\theta) = 1, \quad \sum_{l=0}^{p-1} |m_0(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1, \quad \omega \in G^*, \quad (3.3)$$

и существует компактное множество E , конгруэнтное U^* по модулю $H^\perp$, содержащее окрестность нулевого элемента и такое, что

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{\omega \in E} |m_0(B^{-j}\omega)| > 0; \quad (3.4)$$

2) существует функция $\varphi \in L^2(G)$, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(B^{-j}\omega)$$

и для которой система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$.

Отметим, что в силу компактности множества E существует номер j_0 такой, что $m_0(B^{-j}\omega) = 1$ для всех $j > j_0$, $\omega \in E$. Поэтому (3.4) верно, если полином $m_0(\omega)$ не обращается в нуль на множествах $B^{-1}(E), \dots, B^{-j_0}(E)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если φ удовлетворяет условиям предложения 3.3, то заданное формулой (1.1) семейство $\{V_j\}$ является кратномасштабным анализом в $L^2(G)$ (ср. с [1, с. 248]).

Пусть функция φ задана разложением (1.6), а коэффициенты a_α найдены по формуле (1.7) (согласно замечанию 1.1 тогда (3.4) выполнено для $E = U^*$). Как и выше, для каждого $j \in \mathbb{Z}$ через P_j обозначается ортогональный проектор пространства $L^2(G)$ на подпространство

$$V_j = \text{clos}_{L^2(G)} \text{span}\{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}.$$

Для данной функции f из $L^2(G)$ естественно выбрать параметры b_m в (1.4) так, чтобы аппроксимации $f \approx P_j f$ были оптимальны. Если известно, что f принадлежит некоторому классу $\mathcal{M}$ в $L^2(G)$, то методами теории приближений (см., например, [14, гл. 10] и [21, гл. 2]) можно искать параметры b_m , минимизирующие для некоторого фиксированного значения j величину

$$\sup\{\|f - P_j f\| \mid f \in \mathcal{M}\},$$

а также изучать поведение этой величины при $j \rightarrow +\infty$. По аналогии с недавно опубликованной работой [19] обсудим здесь иной подход к проблеме оптимизации аппроксимаций $f \approx P_j f$ данной функции f .

Для каждого $j \in \mathbb{Z}$ обозначим через W_j ортогональное дополнение V_j в V_{j+1} и через Q_j ортогональный проектор пространства $L^2(G)$ на W_j . Поскольку $\{V_j\}$ является кратномасштабным анализом, то для любой $f \in L^2(G)$

$$f = \sum_j Q_j f = P_0 f + \sum_{j \geq 0} Q_j f$$

и

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|f - P_j f\| = 0, \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\| = 0.$$

Легко видеть также, что

$$P_j f = Q_{j-1} f + Q_{j-2} f + \cdots + Q_{j-s} f + P_{j-s} f, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Равенство $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ показывает, что W_{j-1} содержит “детали”, необходимые для перехода от $(j-1)$ -го уровня аппроксимации к более точному j -му уровню. Так как $\|P_j f\|^2 = \|P_{j-1} f\|^2 + \|Q_{j-1} f\|^2$, то параметры b_m естественно выбирать так, чтобы норма $\|P_{j-1} f\|$ была максимальной (и, соответственно, норма $\|Q_{j-1} f\|$ была минимальной).

Запишем равенство (1.2) в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{p} \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} \tilde{a}_\alpha \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}),$$

где

$$\tilde{a}_\alpha = \sqrt{p} a_\alpha = \sqrt{p} (\varphi(\cdot), \varphi(A \cdot \ominus h_{[\alpha]})).$$

Положим $\varphi_j(x) = p^{j/2} \varphi(A^j x)$. Тогда

$$\varphi_{j-1}(x) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} \tilde{a}_\alpha \varphi_j(x \ominus A^{-j} h_{[\alpha]}) \quad (3.5)$$

и

$$\varphi_j(x \ominus A^{-j} h) = \varphi_{j,h}(x) = p^{j/2} \varphi_j(A^j x \ominus h), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H.$$

Для данной $f \in L^2(G)$ положим

$$f(j, h) := (f, \varphi_{j,h}) = \int_G f(x) \overline{\varphi_j(x \ominus A^{-j} h)} d\mu(x), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H.$$

Пользуясь соотношениями (3.5), получаем

$$\begin{aligned} f(j-1, h) &= \int_G f(x) \overline{\varphi_{j-1}(x \ominus A^{-j+1} h)} d\mu(x) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} \tilde{a}_\alpha \int_G f(x) \overline{\varphi_j(x \ominus A^{-j}(Ah \oplus h_{[\alpha]}))} d\mu(x) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$f(j-1, h) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} \tilde{a}_\alpha f(j, Ah \oplus h_{[\alpha]}). \quad (3.6)$$

Поскольку

$$P_j f = \sum_{h \in H} f(j, h) \varphi_{j,h}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

то согласно (3.6) имеем

$$\begin{aligned} \|P_{j-1}f\|^2 &= \sum_{h \in H} |f(j-1, h)|^2 = \sum_{h \in H} \left| \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} \tilde{a}_\alpha f(j, Ah \oplus h_{[\alpha]}) \right|^2 \\ &= \sum_{h \in H} \left(\sum_{\alpha, \beta=0}^{p^n-1} \tilde{a}_\alpha \tilde{a}_\beta f(j, Ah \oplus h_{[\alpha]}) \overline{f(j, Ah \oplus h_{[\beta]})} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для $0 \leq \alpha, \beta \leq p^n - 1$ положим

$$F_{\alpha, \beta}(j) := \sum_{h \in H} f(j, Ah \oplus h_{[\alpha]}) \overline{f(j, Ah \oplus h_{[\beta]})}.$$

Тогда $F_{\beta, \alpha}(j) = \overline{F_{\alpha, \beta}(j)}$ и из (3.7) имеем

$$\|P_{j-1}f\|^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^{p^n-1} F_{\alpha, \beta}(j) \tilde{a}_\alpha \tilde{a}_\beta. \quad (3.8)$$

Обозначим через $\mathcal{U}(p, n)$ множество векторов $u = (u_0, u_1, \dots, u_{p^n-1})$ таких, что

$$u_0 = 1, \quad u_j = 0, \quad j \in \{p^{n-1}, 2p^{n-1}, \dots, (p-1)p^{n-1}\},$$

и

$$u_j \neq 0, \quad \sum_{l=0}^{p-1} |u_{lp^{n-1}+j}|^2 = 1, \quad j \in \{1, 2, \dots, p^{n-1} - 1\}.$$

Для каждого $u = (u_0, u_1, \dots, u_{p^n-1})$ из $\mathcal{U}(p, n)$ коэффициенты $a_\alpha(u)$ определим из системы

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha(u) \overline{W_\alpha^*(B^{-n}\omega_{[s]})} = u_s, \quad 0 \leq s \leq p^n - 1.$$

Пусть j_0 – фиксированное натуральное число. Если вектор u^* является решением экстремальной задачи

$$\sum_{\alpha, \beta=0}^{p^n-1} F_{\alpha, \beta}(j_0) \overline{a_\alpha(u)} a_\beta(u) \rightarrow \max, \quad u \in \mathcal{U}(p, n), \quad (3.9)$$

то функция $\varphi_{j_0-1}^*$ определяется по формуле

$$\varphi_{j_0-1}^*(x) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha(u^*) \varphi_{j_0}(x \ominus A^{-j_0} h_{[\alpha]}).$$

Из (3.8) и (3.9) видно, что $\|P_j^* f\| \geq \|P_j f\|$ для $j = j_0 - 1$. Аналогично по $\varphi_{j_0-1}^*$ конструируется $\varphi_{j_0-2}^*$ и т. д. После этого для $j \in \{j_0 - 1, \dots, j_0 - s\}$ (число s фиксировано) ортогональные проекции $P_j f$ заменяются ортогональными проекциями $P_j^* f$ функции f на подпространства V_j^* , заданные равенствами

$$V_j^* = \text{clos}_{L^2(G)} \text{span}\{\varphi_j^*(\cdot - A^{-j} h) \mid h \in H\}.$$

Эффективность этого метода адаптации может быть продемонстрирована на числовых примерах с помощью энтропийного критерия (аналогичные примеры для кратномасштабного анализа Добеши и вейвлет-пакетов приведены в [19] и [22]).

§ 4. О гладкости масштабирующих функций

Пусть φ – масштабирующая функция в $L^2(G)$, определенная по формуле (1.6) (так что $\text{supp } \varphi \subset U_{1-n}$). Напомним, что для $l \in \mathbb{Z}$

$$U_l = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j \leq l\} \quad \text{и} \quad U_l \supset U_{l+1}.$$

Модулем непрерывности произвольной непрерывной на U_{1-n} комплекснозначной функции f назовем последовательность $\{\Omega_j(f)\}$, заданную равенством

$$\Omega_j(f) := \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in U_{1-n}, x \ominus y \in U_j\}$$

для целых $j \geq 1 - n$. Для любой невозрастающей и сходящейся к нулю числовой последовательности

$$\varepsilon_{1-n} \geq \varepsilon_{2-n} \geq \varepsilon_{3-n} \geq \dots, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0,$$

существует (см. [23]) функция $f \in C(U_{1-n})$ такая, что $\Omega_j(f) = \varepsilon_j$ для всех $j \geq 1 - n$. Ограничиваясь для краткости случаем $p = 2$, покажем, как применить предложенный в [24] метод оценки гладкости масштабирующих функций к оценке модуля непрерывности функции φ . Коэффициенты a_α будем предполагать вещественными, хотя все последующие рассуждения легко распространяются на комплексный случай.

Итак, пусть $p = 2$ и $c_\alpha = 2a_\alpha$ для $\alpha \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, где a_α вещественны и определены по формуле (1.7). Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha=0}^{2^n-1} c_\alpha \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}), \quad x \in G, \quad (4.1)$$

$$\sum_{\alpha=0}^{2^n-1} c_\alpha = 2, \quad \sum_{\alpha=0}^{2^{n-1}-1} c_{2\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{2^{n-1}-1} c_{2\alpha+1} = 1. \quad (4.2)$$

Положим $N = 2^{n-1}$. Из формулы (1.6) и легко проверяемых равенств

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} W_m(A^{1-n} h_{[\alpha]}) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} W_m(A^{1-n} h_{[\alpha+1]}^-) = 0, \quad m \in \mathbb{N}(2, n),$$

следует, что

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} \varphi(h_{[\alpha]}) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \varphi(h_{[\alpha+1]}^-) = 1. \quad (4.3)$$

Для $i, j, k \in \{1, 2, \dots, 2N - 1\}$ равенство $k = i \oplus_2 j$ по определению означает, что

$$k_s = i_s + j_s \pmod{2}, \quad s \in \{0, 1, \dots, 2N - 1\},$$

где i_s, j_s, k_s – цифры двоичных разложений

$$i = \sum_{s=0}^{2N-1} i_s 2^s, \quad j = \sum_{s=0}^{2N-1} j_s 2^s, \quad k = \sum_{s=0}^{2N-1} k_s 2^s.$$

Зададим $(N \times N)$ -матрицы T_0 и T_1 формулами

$$(T_0)_{i,j} = c_{2(i-1) \oplus_2 (j-1)}, \quad (T_1)_{i,j} = c_{(2i-1) \oplus_2 (j-1)}, \quad (4.4)$$

где $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$. В частности, для $n = 2$

$$T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix},$$

а для $n = 3$

$$T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ c_6 & c_7 & c_4 & c_5 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_5 & c_4 & c_7 & c_6 \\ c_7 & c_6 & c_5 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Пусть $e_1 = (1, 1, \dots, 1)$ – N -мерный вектор, все компоненты которого равны 1. Согласно (4.2) имеем

$$e_1 T_0 = e_1 T_1 = e_1. \quad (4.5)$$

Для любых двух N -мерных векторов $v = (v_1, \dots, v_N)$ и $w = (w_1, \dots, w_N)$ полагаем

$$v \cdot w^T := \sum_{j=1}^N v_j w_j, \quad \|v\| := \sqrt{v \cdot v^T},$$

где v^T и w^T – векторы-столбцы, получаемые из векторов-строк v и w транспонированием.

Обозначим через E_1 подпространство в $\mathbb{R}^N$, ортогональное вектору e_1 :

$$E_1 := \{u = (u_1, \dots, u_N)^T \mid e_1 \cdot u = 0\}.$$

Для произвольной вещественной $(N \times N)$ -матрицы M положим

$$\|M\| := \sup\{\|Mu\|/\|u\| \mid u \in \mathbb{R}^N, u \neq 0\}, \\ \|M|_{E_1}\| := \sup\{\|Mu\|/\|u\| \mid u \in E_1, u \neq 0\}.$$

Хорошо известно, что значение $\|M\|$ совпадает с квадратным корнем из наибольшего собственного значения матрицы $M^T M$.

Имеет место следующий аналог теоремы 2.2 работы [24].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть функция φ задана формулой (1.6) и коэффициенты a_α определены равенством (1.7) при $p = 2$. Предположим, что элементы $(N \times N)$ -матриц T_0, T_1 имеют вид (4.4), где $N = 2^{n-1}$ и $c_\alpha = 2a_\alpha$. Если для всех $m \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m}|_{E_1}\| \mid d_j \in \{0, 1\}, 1 \leq j \leq m\} \leq Cq^m, \quad (4.6)$$

где $0 < q < 1$ и $C > 0$, то φ непрерывна на U_{1-n} и для любого целого $j \geq n-1$ справедливо неравенство

$$\Omega_j(\varphi) \leq Cq^j. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $x \in U$ и $\alpha \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ положим

$$\varphi_0(x \oplus h_{[\alpha]}) := (1 - \lambda(x)) \varphi(h_{[\alpha]}) + \lambda(x) \varphi(h_{[\alpha+1]}^-). \quad (4.8)$$

По подгруппе $A^{-1}(U)$ группа U имеет два смежных класса:

$$U_{1,0} := A^{-1}(U), \quad U_{1,1} := A^{-1}(h_{[1]}) \oplus A^{-1}(U).$$

Последовательность вектор-функций $v_j(x)$ для $j \in \mathbb{Z}_+$, $x \in U$ определим равенствами

$$\begin{aligned} v_0(x) &:= (\varphi_0(x), \varphi_0(x \oplus h_{[1]}), \dots, \varphi_0(x \oplus h_{[N-1]}))^T, \\ v_{j+1}(x) &:= \begin{cases} T_0 v_j(Ax), & \text{если } x \in U_{1,0}, \\ T_1 v_j(Ax \ominus h_{[1]}), & \text{если } x \in U_{1,1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Для каждого $x = (x_j)$ из U положим $d_j(x) = x_j$, и пусть

$$\tau(x) := \begin{cases} Ax, & \text{если } x \in U_{1,0}, \\ Ax \ominus h_{[1]}, & \text{если } x \in U_{1,1}. \end{cases}$$

Тогда

$$v_{j+1}(x) = T_{d_1(x)} v_j(\tau x)$$

и, следовательно,

$$v_j(x) = T_{d_1(x)} T_{d_2(x)} \dots T_{d_j(x)} v_0(\tau^j x). \quad (4.9)$$

Из соотношений (4.3) и (4.8) находим

$$\begin{aligned} e_1 \cdot v_0(x) &= \sum_{\alpha=0}^{N-1} \varphi_0(x \oplus h_{[\alpha]}) \\ &= (1 - \lambda(x)) \sum_{\alpha=0}^{N-1} \varphi(h_{[\alpha]}) + \lambda(x) \sum_{\alpha=0}^{N-1} \varphi(h_{[\alpha+1]}^-) = 1. \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношений (4.6), (4.9) получаем

$$e_1 \cdot v_j(x) = e_1 T_{d_1(x)} T_{d_2(x)} \dots T_{d_j(x)} v_0(\tau^j x) = e_1 \cdot v_0(\tau^j x) = 1.$$

Следовательно, для каждого $l \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$e_1 \cdot (v_{j+l}(x) - v_l(x)) = 0.$$

Таким образом, для всех $x \in U$ и всех $j, l \in \mathbb{Z}_+$

$$e_1 \cdot v_j(x) = 1, \quad v_{j+l}(x) - v_l(x) \in E_1, \quad (4.10)$$

и согласно (4.9) имеем

$$v_{j+l}(x) - v_j(x) = T_{d_1(x)} T_{d_2(x)} \dots T_{d_j(x)} [v_l(\tau^j x) - v_0(\tau^j x)]. \quad (4.11)$$

При $l = 1$ из соотношений (4.6), (4.10) и (4.11) получаем

$$\|v_{j+1}(x) - v_j(x)\| \leq Cq^j \sup_{y \in U} \|v_1(y) - v_0(y)\|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|v_j(x)\| &\leq \|v_0(x)\| + \sum_{l=1}^j \|v_l(x) - v_{l-1}(x)\| \\ &\leq \sup_{y \in U} \|v_0(y)\| + C(1-q)^{-1} \sup_{y \in U} \|v_1(y) - v_0(y)\|. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{v_j(\cdot)\}$ равномерно ограничена на U :

$$\sup\{\|v_j(x)\| \mid x \in U, j \in \mathbb{Z}_+\} < \infty. \quad (4.12)$$

Как и выше, для любых $x \in U$ и $l \in \mathbb{N}$ в силу (4.6), (4.10) и (4.11) имеем

$$\|v_{j+l}(x) - v_j(x)\| \leq Cq^j \sup_{y \in U} \|v_l(y) - v_0(y)\|.$$

Отсюда и из (4.12) следует неравенство

$$\sup_{x \in U} \|v_{j+l}(x) - v_j(x)\| \leq Cq^j, \quad (4.13)$$

где C не зависит от l . Значит, последовательность $\{v_j(\cdot)\}$ является фундаментальной в пространстве $[C(U)]^N = C(U) \times \dots \times C(U)$.

Предельная вектор-функция $\tilde{v}(\cdot)$ последовательности $\{v_j(\cdot)\}$ непрерывна на U , и в силу (4.13) имеем

$$\sup_{x \in U} \|\tilde{v}(x) - v_j(x)\| \leq Cq^j. \quad (4.14)$$

Пусть

$$v(x) := (\varphi(x), \varphi(x \oplus h_{[1]}), \dots, \varphi(x \oplus h_{[N-1]}))^T.$$

Тогда для $x \in U$

$$v(x) = T_{d_1(x)} v(\tau x),$$

и, полагая $j \rightarrow \infty$ в равенстве $v_{j+1}(x) = T_{d_1(x)} v_j(\tau x)$, заключаем, что $\tilde{v}(x) = v(x)$. Отсюда и из (4.14) для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\sup_{x \in U_{1-n}} \|\varphi(x) - \varphi_j(x)\| \leq Cq^j. \quad (4.15)$$

Фиксируем целое $j \geq n$ и выберем в U_{1-n} элементы

$$\begin{aligned} x &= (\dots, 0, 0, x_{2-n}, x_{3-n}, \dots, x_0, x_1, \dots), \\ y &= (\dots, 0, 0, y_{2-n}, y_{3-n}, \dots, y_0, y_1, \dots) \end{aligned}$$

так, чтобы $y \ominus x \in U_j \setminus U_{j+1}$. Тогда $x_i = y_i$ для $2 - n \leq i \leq j$ и $x_{j+1} \neq y_{j+1}$. Следовательно, оба элемента x и y принадлежат классу $A^{-j}(h_{[m]} \oplus U)$, где

$$m = \sum_{i=2-n}^j x_i 2^{j-i} = \sum_{i=2-n}^j y_i 2^{j-i}.$$

Согласно (4.15) имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq |\varphi(x) - \varphi_j(x)| + |\varphi_j(x) - \varphi_j(A^{-j}h_{[m]})| \\ &\quad + |\varphi_j(A^{-j}h_{[m]}) - \varphi_j(y)| + |\varphi_j(y) - \varphi(y)| \\ &\leq 2Cq^j + |\varphi_j(x) - \varphi_j(A^{-j}h_{[m]})| + |\varphi_j(y) - \varphi_j(A^{-j}h_{[m]})|. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Предположим, что $x \in U$, т.е. $x_0 = x_{-1} = \dots = x_{2-n} = 0$. Тогда

$$m = x_1 2^{j-1} + x_2 2^{j-2} + \dots + x_j 2^0$$

и, аналогично (4.11),

$$v_j(x) - v_j(A^{-j}h_{[m]}) = T_{d_1(x)} T_{d_2(x)} \dots T_{d_j(x)} [v_0(\tau^j x) - v_0(\tau^j A^{-j}h_{[m]})]. \quad (4.17)$$

Учитывая, что $v_0(\tau^j \cdot)$ равномерно ограничены на U , а также что

$$\begin{aligned} |\varphi_j(x) - \varphi_j(A^{-j}h_{[m]})| &\leq \|v_j(x) - v_j(A^{-j}h_{[m]})\|, \\ \|T_{d_1(x)} T_{d_2(x)} \dots T_{d_j(x)}\| &\leq Cq^j, \end{aligned}$$

из соотношения (4.17) получаем неравенство

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(A^{-j}h_{[m]})| \leq Cq^j. \quad (4.18)$$

Пусть теперь $x \in U_{n-1} \setminus U$. Положим $x' = x \ominus h_{[k]}$ и $m' = m - k$, где

$$k = x_0 2^j + x_{-1} 2^{j+1} + \dots + x_{2-n} 2^{j+n-2}.$$

Тогда $x' \in U$ и

$$v_j(x') - v_j(A^{-j}h_{[m']}) = T_{d_1(x')} T_{d_2(x')} \dots T_{d_j(x')} [v_0(\tau^j x') - v_0(\tau^j A^{-j}h_{[m']})].$$

Поскольку

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(A^{-j}h_{[m]})| \leq \|v_j(x') - v_j(A^{-j}h_{[m']})\|,$$

вновь приходим к оценке (4.18). Аналогично оценивается последнее слагаемое в (4.16). Поэтому верно неравенство (4.7). Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Для вычисления значений функции φ полезна формула

$$v(x) = \begin{cases} T_0 v(Ax), & \text{если } x \in U_{1,0}, \\ T_1 v(Ax \ominus h_{[1]}), & \text{если } x \in U_{1,1}. \end{cases} \quad (4.19)$$

В частности, полагая $x = \theta$ в (4.19), видим, что вектор

$$v(\theta) = (\varphi(h_{[0]}), \varphi(h_{[1]}), \dots, \varphi(h_{[N-1]}))^T$$

является собственным вектором матрицы T_0 , отвечающим собственному значению 1. Отметим, что принадлежность числа 1 спектру матрицы T_0 следует из условий (4.2). При $p = n = 2$ из (4.3) и (4.19) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(h_{[0]}) &= \frac{1+a-b}{2(1-b)}, & \varphi(h_{[1]}^-) &= \frac{1+a+b}{2(1+b)}, \\ \varphi(h_{[1]}) &= \frac{1-a-b}{2(1-b)}, & \varphi(h_{[2]}^-) &= \frac{1-a+b}{2(1+b)}, \end{aligned}$$

где параметры a и b такие, как в (1.10). Для случая $p = 2$, $n = 3$ отметим, что если функция φ определена формулой (1.11) при $a = 1$, $|\gamma| < 1$, то

$$\begin{aligned} \varphi(h_{[0]}) &= \frac{1+c-\gamma}{2(1-\gamma)} - \frac{c(1-\beta)}{4(1-\gamma)} + \frac{b}{4}, \\ \varphi(h_{[1]}) &= \frac{1-c-\gamma}{2(1-\gamma)} + \frac{c(1-\beta)}{4(1-\gamma)} - \frac{b}{4}, \\ \varphi(h_{[2]}) &= \frac{b}{2} - \frac{c(1-\beta)}{2(1-\gamma)}, \\ \varphi(h_{[3]}) &= -\frac{b}{2} + \frac{c(1-\beta)}{2(1-\gamma)}. \end{aligned}$$

Здесь $\varphi(h_{[2]}) = \varphi(h_{[3]}) = 0$, если $b = 0$ ($\beta = 1$) или $b = c$ ($\beta = \gamma$).

ПРИМЕР 4.3. Для функции φ , заданной формулой (1.10), имеет место оценка

$$\Omega_j(\varphi) \leq C|b|^j, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (4.20)$$

Действительно, при $n = 2$

$$\begin{aligned} E_1 &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 + v_2 = 0\} = \{te_1^0 \mid t \in \mathbb{R}\}, \\ T_0 e_1^0 &= be_1^0, \quad T_1 e_1^0 = -be_1^0, \end{aligned}$$

где $e_1^0 = (-1, 1)^T$. Поэтому неравенство (4.20) следует из предложения 4.1. Поскольку

$$\varphi(h_{[0]}) - \varphi(A^{-j}h_{[1]}) = \frac{ab^j}{1-b},$$

то оценка (4.20) является точной по порядку. Учитывая условие $|b| < 1$, из (4.20) получаем непрерывность φ .

ПРИМЕР 4.4. Для функции φ , заданной формулой (1.11) при $a = 1$, $0 < |\gamma| < 1$, справедлива оценка

$$\Omega_j(\varphi) \leq C|\gamma|^j, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (4.21)$$

Действительно, при $n = 3$ базис пространства E_1 образуют векторы

$$e_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

При условии $a = 1$ имеем

$$\begin{aligned} T_0 e_1^0 &= T_1 e_1^0 = 0, \\ T_0 e_2^0 &= -T_1 e_2^0 = \beta e_1^0 + \gamma e_2^0, \\ T_0 e_3^0 &= T_1 e_3^0 = \beta e_1^0 + \gamma e_2^0. \end{aligned}$$

Пользуясь этими равенствами, для произвольного вектора $w = \nu_1 e_1^0 + \nu_2 e_2^0 + \nu_3 e_3^0$ пространства E_1 получаем

$$T_0^2 w = -T_1 T_0 w = (\nu_2 \gamma + \nu_3 c) T_0 e_2^0, \quad T_1^2 w = -T_0 T_1 w = (\nu_2 \gamma - \nu_3 c) T_0 e_2^0 \quad (4.22)$$

и, в частности,

$$T_0^2 e_2^0 = T_1^2 e_2^0 = -T_0 T_1 e_2^0 = -T_1 T_0 e_2^0 = \gamma T_0 e_2^0.$$

Поэтому для любых $d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0, 1\}$ справедливо равенство

$$T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} e_2^0 = \pm \gamma^{m-1} T_0 e_2^0.$$

Отсюда и из равенств (4.22) видно, что

$$\|T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} |_{E_1}\| \leq C|\gamma|^m$$

и оценка (4.21) следует из предложения 4.1. Из формулы (1.11) при $a = 1$, $b = 0$, $|\gamma| < 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$ выводится равенство

$$\varphi(h_{[0]}) - \varphi(A^{-j} h_{[1]}) = \frac{c\gamma^{j+3}}{4(1-\gamma)}.$$

Таким образом, оценка (4.21) также является точной по порядку.

Автор благодарит В. Ю. Протасова за полезные замечания по первоначальному варианту статьи.

Список литературы

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
2. Holshneider M. Wavelets: an analysis tool. Oxford: Clarendon Press, 1995.
3. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975; Т. 2. М.: Мир, 1975.

4. *Jia R. Q., Shen Z.* Multiresolution and wavelets // Proc. Edinburg Math. Soc. 1994. V. 37. P. 271–300.
5. *Gröchenig K., Madych W. R.* Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tiling of $\mathbb{R}^n$ // IEEE Trans. Inform. Theory. 1992. V. 38. P. 556–568.
6. *Speegle D.* On the existence of wavelets for non-expansive dilation matrices // Collect. Math. 2003. V. 54. P. 163–179.
7. *Dahlke S.* Multiresolution analysis and wavelets on locally compact abelian groups // Wavelets, Images, and Surface Fitting / Eds. P. J. Laurent, A. Le Méhauté, L. L. Schumaker. Wellesley, Massachusetts: AK Peters, 1994. P. 141–156.
8. *Фарков Ю. А.* Ортогональные всплески на локально компактных абелевых группах // Функцион. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. №4. С. 86–88.
9. *Козырев С. В.* Теория всплесков как p -адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. №2. С. 149–158.
10. *Lang W. C.* Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. 1998. V. 24. P. 533–544.
11. *Lemarié P. G.* Bases d'ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés // Bull. Math. Soc. France. 1989. V. 117. P. 211–232.
12. *Разунатан М.* Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.
13. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1984.
14. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Сжворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987.
15. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis. N. Y.: Adam Hilger, 1990.
16. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.
17. *Фарков Ю. А.* Об ортогональных вейвлет-разложениях на полуоси // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней школы. Саратов, 27 января–3 февраля 2004 года. Саратов: Изд-во УНЦ “Колледж”, 2004. С. 187–188.
18. *Малоземов В. Н., Машарский С. М.* Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Вилленкина–Крестенсона // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. С. 111–157.
19. *Sendov Bl.* Adapted multiresolution analysis // Functions, series, operators / Eds. L. Leindler, F. Schipp, J. Szabados. Budapest, 2002. P. 23–38.
20. *Бычков С. А., Фарков Ю. А.* О теореме Коэна для вейвлет-разложений на группах // VI Международная конференция “Новые идеи в науках о Земле” (Москва, апрель 2003 г.). Избранные доклады. М.: МГГРУ, 2003. С. 226–233.
21. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14. М.: ВИНТИ АН СССР, 1987. С. 103–260.
22. *Wickerhauser M. V.* Adapted Wavelet Analysis. Wellesley, MA: AK Peters Ltd, 1994.
23. *Рубинштейн А. И.* О модулях непрерывности функций, определенных на нульмерной группе // Матем. заметки. 1978. Т. 23. №3. С. 379–388.
24. *Daubechies I., Lagarias J. C.* Two-scale difference equations II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1031–1078.

Московский государственный
геологоразведочный университет
E-mail: farkov@msgpa.ru

Поступило в редакцию
05.07.2004