Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алимов, Связность солнц в пространстве c_0 , *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 4, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im645>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 10:44:04

УДК 517.982.256

А. Р. Алимов

Связность солнц в пространстве c_0

Исследуется вопрос о связности солнца в пространстве c_0 . Показано, что произвольное солнце M в c_0 m -связно (в смысле понятия, введенного А. Л. Брауном). Как следствие, получено, что M монотонно линейно связно и что пересечение M с произвольным шаром в c_0 монотонно линейно связно (в частности, линейно связно). С другой стороны, установлено, что каждое аппроксимативно компактное m -связное множество является солнцем в c_0 . Для $X = c_0, c, \ell^\infty$ показано, что пересечение солнца в X с конечномерным координатным подпространством $H_n \subset X$ является P -ациклическим солнцем в H_n .

Библиография: 24 наименования.

§ 1. Введение

Мы изучаем геометрическое строение солнц в бесконечномерных пространствах c_0, c и ℓ^∞ . Подобные вопросы рассматривались в [1]–[7]. Настоящая работа связана с работами [8] и [9], где, в частности, охарактеризованы чебышевские множества в $\ell^\infty(n)$ и аппроксимативно компактные чебышевские множества в c_0 .

Для подмножества $M \neq \emptyset$ линейного нормированного пространства X обозначим через $\rho(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\|$ расстояние от x до M и через $P_M x = \{y \in M \mid \|x - y\| = \rho(x, M)\}$ множество всех ближайших точек из M для x .

Множество $M \subset X$ называется *солнцем*, если для любой точки $x \in X \setminus M$ существует точка $y \in P_M x$ (называемая *солнечной*) такая, что $y \in P_M[(1-\lambda)y + \lambda x]$ для всех $\lambda \geq 0$. Понятие солнца было введено в работах Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина (см., например, [10], [11]) и оказалось важным, в частности, для исследования чебышевских множеств. (О солнцах и чебышевских множествах см. работы [11]–[13], [1] и цитированную в них литературу.)

Далее X – действительное линейное нормированное пространство.

Хорошо известно, что в гладком линейном нормированном пространстве всякое солнце выпукло [11, теорема 3.9], поэтому вопрос о связности солнц представляет интерес только для негладких пространств. Первые результаты о связности солнц были получены Л. П. Власовым и В. А. Кощеевым (см. § 4, [11] и [13]). В настоящей работе мы изучаем геометрическую структуру солнц в пространствах $X = c_0, c, \ell^\infty$.

В дальнейшем основным будет являться понятие m -связного подмножества банахова пространства X . В случае $\dim X < \infty$ m -связные подмножества M пространства X изучались А. Л. Брауном в [1], а в случае $\dim X = \infty$ – К. Франчетти и С. Роверси [7] при дополнительном предположении ограниченной компактности множества M .

Напомним необходимые определения. Для $M \subset X$ через $m(M)$ обозначим *оболочку Банаха–Мазура* множества M , т. е. пересечение всех замкнутых шаров

$B(x, r)$ в X , содержащих M . Тогда $m(M)$ – замкнутое множество, $M \subset m(M)$. Подмножество $M \subset X$ называется m -связным подмножеством X , если $m(\{x, y\}) \cap M \neq \{x, y\}$ для любых различных точек $x, y \in M$.

Браун [1], [2] показал, что m -связное замкнутое подмножество M конечномерного пространства X всегда линейно связно, k -связно для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, V -ациклично (т.е. его пересечение с любым замкнутым шаром $B(x, r)$ в X ациклично¹) и P -ациклично (т.е. для любой точки $x \in X$ множество $P_M x$ ее ближайших точек из M ациклично); см. теорему А ниже. В теоремах 1 и 2 мы обобщаем это утверждение на $X = c_0, c, \ell^\infty$.

Для формулировки основных результатов введем необходимые определения. Пусть $X = c_0, c$ или ℓ^∞ , (e_i) – стандартный базис в X . Следуя [8] и [9], множество $H \subset X$ вида

$$\text{lin}\{e_i \mid i \in I\}, \quad I \subset \mathbb{N} \text{ фиксировано,} \quad (1)$$

будем называть *координатным подпространством* пространства X . *Аффинное* координатное подпространство $H \subset X$ определяется как сдвиг координатного подпространства на вектор $x \in X$. Если I в (1) конечно, то $n = \dim H = \text{card } I < \infty$; множество всех n -мерных аффинных координатных подпространств H ($n < \infty$) будем обозначать $\text{sAff}_n(X)$.

Рассматривая аффинное координатное подпространство в $X = c_0, c$ или ℓ^∞ , мы его всегда снабжаем нормой, индуцированной ℓ^∞ -нормой на X .

Подмножество M пространства X функций, заданных на множестве Q , назовем *монотонно линейно связным*, если M линейно связно и для любых точек x и y из M найдется непрерывная кривая $k(t) \subset M$, соединяющая их, координатные функции $k_q(t)$ которой монотонны по t для любого $q \in Q$. К примеру, окружность линейно связна, но не монотонно линейно связна, а координатный крест $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$ в $\mathbb{R}^2$ монотонно линейно связан. Несложно показать, что пересечение монотонно линейно связного подмножества функционального пространства, снабженного равномерной нормой, с произвольным шаром в этом пространстве монотонно линейно связно.

Обозначим $B(x, r)$ и $\dot{B}(x, r)$ соответственно замкнутый и открытый шары с центром x и радиусом r .

В теореме 1 показано, что если $M \subset c_0$ замкнуто и m -связно, то множество M и множества $M \cap B(x, r)$, $M \cap \dot{B}(x, r)$ и $P_M x$ монотонно линейно связны для любого выбора $x \in X$ и $r > 0$.

Отметим, что монотонно линейно связное множество является m -связным в $X = c_0, c$ или ℓ^∞ . Это будет следовать из предложения 1.

В теореме 2 установлено, что пересечение m -связного замкнутого подмножества пространства $X = c_0, c$ или ℓ^∞ с n -мерным координатным аффинным подпространством H_n в X , $n \in \mathbb{N}$, является солнцем в H_n .

Изучая геометрические свойства солнц в конечномерных банаховых пространствах, Х. Беренс и Л. Хетцельт в работе [5] и А. Браун в [1] установили для

¹Напомним, что множество M называется (топологически) k -связным ($k \in \mathbb{Z}_+$), если оно гомотопически тривиально над k -мерной сферой; множество M ациклично, если оно непусто, компактно и его группы гомологий H_q , $q \geq 1$, и приведенная группа $\tilde{H}_0$ тривиальны. Напомним, что стягиваемое (в частности, выпуклое) компактное подмножество линейного нормированного пространства ациклично; ацикличное множество связно; гомеоморфный образ ацикличного множества ацикличен.

замкнутого непустого множества $M \subset \mathbb{R}^n$, что²:

$$\begin{aligned} M - \text{солнце в } \ell^\infty(n) &\Leftrightarrow M \text{ } \ell^1\text{-выпукло} \Leftrightarrow M \text{ } m\text{-связно в } \ell^\infty(n) \\ &\Leftrightarrow M \text{ монотонно линейно связно.} \end{aligned} \quad (2)$$

Ниже (предложение 3) мы покажем, что существует норма $|\cdot|$ на $X = c_0, c, \ell^\infty$ такая, что для данных $z, x, y \in X$ выполнено

$$z \in m(x, y) \Leftrightarrow z \text{ находится } |\cdot| \text{-между } x \text{ и } y, \quad (3)$$

где последнее означает, что $|x - y| = |x - z| + |z - y|$.

Используя (3), мы обобщаем (2) на случай произвольных солнц в c_0 (теоремы 1, 3, 5) и частью для случая $X = c, \ell^\infty$ (теоремы 2, и 6).

Напомним, что подмножество $M \subset X$ называется *аппроксимативно компактным* [10], [11], если для любой точки $x \in X$ и для любой последовательности (y_n) из M такой, что $\|x - y_n\| \rightarrow \rho(x, M)$, найдется подпоследовательность, сходящаяся к элементу из M . Отметим, что для такого M множество $P_M x$ всегда непусто и компактно (см. [11], [14]).

В теореме 3 показано, что произвольное солнце в c_0 m -связно; обратно, m -связное аппроксимативно компактное непустое подмножество пространства c_0 является солнцем. Как следствие, солнце в c_0 монотонно линейно связно (теорема 5).

Таким образом, для аппроксимативно компактного множества в c_0 его солнечность эквивалентна его m -связности (монотонной линейной связности).

Напомним, что множество $M \subset X$ называется *чебышевским*, если любая точка из X имеет только одну ближайшую точку $P_M x$ из M .

В теореме 4 установлено, что m -связное чебышевское множество в c_0 является солнцем.

В теореме 6 изучен вопрос о солнечности пересечения солнца M в пространствах c_0, c или ℓ^∞ с конечномерными координатными подпространствами H_n . В частности, если $H \cap H_n \neq \emptyset$, то $M \cap H_n$ — m -связное солнце в H_n .

§ 2. Вспомогательные утверждения

Помимо m -связных множеств³ в работе будет использоваться другое важное понятие, также введенное А. Брауном [1]. Линейное нормированное пространство X называется *(BM)-пространством*, если

$$B(0, \|x\|) \cap (m(x, y) \setminus \{x\}) \neq \emptyset, \quad \text{когда} \quad [x, x - y] \cap \overset{\circ}{B}(0, \|x\|) = \emptyset. \quad (4)$$

Класс *(BM)-пространств* содержит в себе все гладкие пространства, все двумерные пространства с полигональным единичным шаром, пространство $\ell^\infty(n)$

²Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *ℓ^1 -выпуклым*, если для любых различных $x, y \in M$ существует точка $z \in M$, $z \neq x, y$, такая, что $|x - y|_1 = |x - z|_1 + |z - y|_1$; здесь $|\cdot|_1$ — обычная ℓ^1 -норма на $\mathbb{R}^n$.

³Буква “ m ” в названии отмечает вклад Мазура в основание теории. Он исследовал пространства, в которых выполнено $m(M) = M$ для каждого замкнутого ограниченного выпуклого множества M ; такие пространства называются *пространствами со свойством пересечения Мазура* (см. [15], [16]). Мазур установил это свойство для евклидовых пространств.

и замкнут по отношению к формированию конечной ℓ^∞ -прямой суммы [1, § 5] и бесконечной c_0 -прямой суммы сепарабельных (BM) -пространств [7, теорема 8.7]. Далее, в предложении 2, мы установим, что пространства c_0 , c и ℓ^∞ также являются (BM) -пространствами.

Используя это понятие, Браун доказал, что солнца в конечномерных (BM) -пространствах удовлетворяют сильным кохомологическим условиям связности (являясь clc^∞ -кохомологически локально связными и, в частности, P -ациклическими и R_δ -множествами по Ароншайну).

Следующее предложение было доказано в [5] для $X = \ell^\infty(n)$ и в [1, теорема 3.1] для произвольных конечномерных пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $X = c_0$, c или ℓ^∞ , $x, y \in X$. Тогда

$$m(x, y) = Z(x, y), \quad Z(x, y) = \{z \in X \mid z^{(i)} \in [x^{(i)}, y^{(i)}], i \in \mathbb{N}\}.$$

Прежде чем доказывать предложение 1, напомним определение *опорного конуса* $\mathring{K}(y, x)$ к шару $B(x, \|x - y\|)$ в его граничной точке y (см. [11, гл. 3]):

$$\mathring{K}(y, x) = \bigcup_{r>0} \mathring{B}(-ry + (r+1)x, (r+1)\|x - y\|). \quad (5)$$

Будем также использовать следующее эквивалентное представление для конуса $\mathring{K}(y, x)$. Рассмотрим точку p на единичной сфере S . Через Σ_p обозначим множество всех функционалов из S^* , достигающих максимум на S в p (где S^* – единичная сфера сопряженного пространства). Понятно, что Σ_p непусто и является выпуклым w^* -компактным множеством; по теореме Крейна–Мильмана множество $\mathcal{E}_p$ его экстремальных точек непусто. Далее, для различных точек $x, y \in X$ определим точку $p = (y - x)/\|y - x\|$. Тогда [11, лемма 3.1] имеем

$$\begin{aligned} \mathring{K}(y, x) &= \{z \in X \mid f(z) < f(y) \forall f \in \Sigma_p\} \\ &= \{z \in X \mid f(z) < f(y) \forall f \in \mathcal{E}_p\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Важное свойство солнц (точка, не принадлежащая солнцу, отделяется от него посредством выпуклого открытого конуса) дается в следующем утверждении (см., например, [11, гл. 3]); мы воспользуемся им позже.

ЛЕММА А. Подмножество $M \subset X$ является солнцем в X тогда и только тогда, когда для любой точки $x \notin M$ существует точка $y \in P_M x$ такая, что $\mathring{K}(y, x) \cap M = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть $z \in Z(x, y)$. Рассмотрим шар $B(v, r) \ni x, y$. Понятно, что $\|v - z\| \leq \max\{\|x - z\|, \|y - z\|\}$, откуда $z \in B(v, r)$, и, следовательно, $z \in m(x, y)$.

Пусть теперь $z \notin Z(x, y)$. Тогда существует номер i такой, что $z^{(i)} \notin [x^{(i)}, y^{(i)}]$. Без ограничения общности считаем, что $z^{(i)} > \max\{x^{(i)}, y^{(i)}\} + a$, $a > 0$. На единичной сфере S рассмотрим точку $s = e_i$. Хорошо известно, что s – точка гладкости для S (в [17, с. 352] показано, что точками гладкости сферы S для $X = \ell^\infty$ являются в точности точки $\sigma e_k + x'$, где $|\sigma| = 1$ и $\|x'\| < 1$). По определению опорная гиперплоскость H_s к S в точке s единственна, поэтому опорный конус $\mathring{K}(s, 0)$

к S в точке s является открытым полупространством с границей H_s . В силу (6) имеем

$$\mathring{K}(s, 0) = \{u \in X \mid u^{(i)} < 1\}.$$

Определим точку $\bar{z} = (\bar{z}^{(j)})$, где $\bar{z}^{(j)} = z^{(j)}$ для $j \neq i$ и $\bar{z}^{(i)} = z^{(i)} - a/2$, и сдвинем $\mathring{K}(s, 0)$ и H_s на вектор $\bar{z} - s$; тогда

$$\mathring{K}(\bar{z}, \bar{z} - s) = \left\{u \mid u^{(i)} < z^{(i)} - \frac{a}{2}\right\}$$

будет опорным конусом к шару $B(\bar{z} - s, 1)$, а $H_s = \bar{z} - s$ — его границей. Вследствие (5) конус $\mathring{K}(\bar{z}, \bar{z} - s)$ представляется в виде объединения открытых шаров. Поскольку $x, y \in \mathring{K}(\bar{z}, \bar{z} - s)$, то каждый шар из (5) содержит x и y для всех достаточно больших r . Следовательно, $z \notin m(x, y)$, что и требуется доказать.

Используя те же аргументы, можно установить аналог предложения 1 для пространств $C(Q)$ и $C_0(Q)$.

Следующий результат доказан в [1] для $X = \ell^\infty(n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пространства c_0 , c , ℓ^∞ являются (ВМ)-пространствами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = c_0$, c или ℓ^∞ . Рассмотрим $x \in X$, $\|x\| = 1$, и зафиксируем произвольно точку $y \in X$ такую, что

$$[x, x - y] \cap \mathring{B}(0, \|x\|) = \emptyset. \quad (7)$$

Проверим, что выполнено (4).

Для простоты считаем, что $x^{(i)} \geq 0$ для всех i . Докажем, что найдется номер j такой, что $y^{(j)} < 1$ (без этого предположения нам следовало бы установить существование такого i , что $y^{(i)} < 1$ в случае $x^{(i)} \geq 0$ или $y^{(i)} > -1$ в случае $x^{(i)} < 0$).

Предположим противное: пусть $y^{(i)} \geq 1$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим точку $x_\alpha = x - \alpha y \in (x, x - y)$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$x_\alpha^{(i)} \leq 1 - \alpha, \quad x_\alpha^{(i)} \geq x^{(i)} - \alpha\|y\| \geq -\alpha\|y\|.$$

Если $\alpha \rightarrow 0$, то найдутся $\alpha_0 > 0$ и $0 < \delta < 1$ такие, что $-\alpha_0\|y\| > -1 + \delta$. Поэтому

$$\|x_{\alpha_0}^{(i)}\| \leq \min\{1 - \delta, 1 - \alpha_0\},$$

откуда $\|x_{\alpha_0}\| < 1$. Однако $x_{\alpha_0} \in (x, x - y)$ — противоречие с (7).

По доказанному найдется такой номер j , что $y^{(j)} < 1$. Определим точку u такую, что $u^{(i)} = x^{(i)}$ для $i \neq j$ и $u^{(j)} = y^{(j)}$. Ясно, что $u \in X$. По предложению 1 имеем $u \in m(x, y)$ и $[u, x] \subset m(x, y)$. Пусть $u_\beta = \beta x + (1 - \beta)u$, $0 < \beta < 1$. Тогда

$$-(1 - \beta)\|y\| \leq (1 - \beta)y^{(j)} \leq u_\beta^{(j)} < \beta x^{(j)} + (1 - \beta) \leq 1.$$

Отсюда вытекает, что $u_\beta \in B(0, 1)$ для всех достаточно больших $\beta \rightarrow 1$. Следовательно, $u_\beta \in (m(x, y) \setminus \{x\}) \cap B$, что и требуется доказать.

Рассмотрим метрическое пространство (X, d) , или, в частном случае, линейное нормированное пространство $(X, |\cdot|)$. Напомним [18], [1], что точка $z \in X$ расположена d -между (или $|\cdot|$ -между) точками $x, y \in X$, если $d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$. Множество $M \subset X$ называется d -выпуклым (или $|\cdot|$ -выпуклым), если для любых $x, y \in M$ множество $M \setminus \{x, y\}$ содержит точки, расположенные d -между ($|\cdot|$ -между) точками x и y .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Существует норма $|\cdot|$ на $X = c_0, c, \ell^\infty$ такая, что для всех $x, y, z \in X$

$$z \in m(x, y) \Leftrightarrow z \text{ находится } |\cdot| \text{-между } x \text{ и } y. \quad (8)$$

Такую норму будем называть *ассоциированной* (см. [1]). Отметим, что утверждения, аналогичные (8), возникают в римановой геометрии [19].

Ниже, если не оговорено противное, через $\|\cdot\|$ будем обозначать ℓ^∞ -норму на пространстве последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Будем использовать фрагменты схем из [1]. Пусть $\alpha_i > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots < \infty$. Определим на X следующую норму:

$$|x| = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i |x^{(i)}|. \quad (9)$$

Ясно, что $|x| \leq \|x\|(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots)$. Тогда условия

- (i) $z \in m(x, y)$,
- (ii) $z^{(i)} \in [x^{(i)}, y^{(i)}]$ для всех $i \in \mathbb{N}$,
- (iii) $|x^{(i)} - y^{(i)}| = |x^{(i)} - z^{(i)}| + |z^{(i)} - y^{(i)}|$ для всех $i \in \mathbb{N}$,
- (iv) $|x - y| = |x - z| + |z - y|$

эквивалентны по предложению 1.

Для пространства $X = \ell^\infty(n)$ ясно, что ℓ^1 -норма является ассоциированной к равномерной норме $\|\cdot\|$. Из предложения 3, рассуждая аналогично [1], имеем, что если $|\cdot|$ – ассоциированная норма (9) на $X = c_0, c$ или ℓ^∞ , то в силу (8) выполнено следующее утверждение:

(*) замкнутое подмножество пространства X является m -связным, если и только если оно $|\cdot|$ -выпукло.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1) Каждое из пространств c_0, c и ℓ^∞ не является полным по отношению к ассоциированной норме $|\cdot|$.

2) Для любых $u, v \in c_0$ или $u, v \in \ell^\infty$ множество $m(u, v)$ является полным пространством по отношению к $|\cdot|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Хорошо известно, что для любой последовательности (α_i) положительных чисел такой, что $\sum \alpha_j < \infty$, существует последовательность (d_n) , $d_n > 0$, $d_n \uparrow +\infty$, такая, что $\sum \alpha_j d_j < \infty$. Определим $x_n = (d_1, \dots, d_n, 0, \dots)$. Тогда (x_n) – последовательность Коши в норме $|\cdot|$, которая не может сходиться к элементу из ℓ^∞ .

2) Пусть (x_n) – последовательность Коши в $(m(u, v), |\cdot|)$. Рассмотрим ее предельную точку $x \in \{z = (z^{(i)}) \mid \sum \alpha_i |z^{(i)}| < \infty\}$ в $|\cdot|$ -пополнении множества $m(u, v)$. Предположим, что $x \notin m(u, v)$. Тогда по предложению 1 существует номер j такой, что выполнен случай а) $x^{(j)} > \max\{u^{(j)}, v^{(j)}\} + \gamma$ или случай б) $x^{(j)} < \min\{u^{(j)}, v^{(j)}\} - \gamma$, $\gamma > 0$.

Рассмотрим случай а) и выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma - \varepsilon/\alpha_j > 0$. Для такого ε выберем номер N такой, что $|x_n - x| < \varepsilon$ при всех $n > N$. Отсюда $\alpha_j |x_n^{(j)} - x^{(j)}| < \varepsilon$. Следовательно,

$$x_n^{(j)} > x^{(j)} - \frac{\varepsilon}{\alpha_j} > \max\{u^{(j)}, v^{(j)}\} - \frac{\varepsilon}{\alpha_j} + \gamma > \max\{u^{(j)}, v^{(j)}\},$$

что невозможно, поскольку $x_n \in m(u, v)$, поэтому предположение, что $x \notin m(u, v)$, было неверно.

Случай б) рассматривается аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (см. также [7]). Пусть $u, v \in c_0$. Тогда:

- 1) $m(u, v)$ – компактное подмножество пространства c_0 ;
- 2) если $M \subset c_0$ замкнуто, то $m(u, v) \cap M$ является $|\cdot|$ -компактным множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение следует из предложения 1 и критерия компактности в c_0 .

2) Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n) \subset M \cap m(u, v)$. Пусть x – ее $\|\cdot\|$ -пределная точка в $m(u, v)$, существующая в силу 1). Поскольку M замкнуто, то $x \in M \cap m(u, v)$. Теперь $|\cdot|$ -компактность M следует из неравенства $|y| \leq \|y\| \sum \alpha_i$, которое выполнено для любого $y \in c_0$.

§3. Свойства m -связных множеств

Важным результатом при исследовании m -связных множеств является

ЛЕММА В ([18], см. также [1, с. 93]). Пусть (Y, d) – d -выпуклое компактное метрическое пространство. Тогда для x и y в Y существует изометрия $f: [0, d(x, y)] \rightarrow Y$ такая, что $f(0) = x$ и $f(d(x, y)) = y$. Как следствие, Y линейно связно.

Следующий результат доказан в [5] для $\ell^\infty(n)$. Напомним, что в силу (*) замкнутое множество $M \subset c_0$ является m -связным тогда и только тогда, когда M $|\cdot|$ -выпукло, где норма $|\cdot|$ определена в (9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для любых точек x, y из m -связного замкнутого множества $M \subset c_0$ существует непрерывная кривая $k(t) \subset M$, $0 \leq t \leq |x - y|$, связывающая x и y , являющаяся изометрией. Кроме того, координатные функции $k^{(i)}(t)$ кривой $k(t)$ монотонны по t для каждого $i \in \mathbb{N}$.

Такую кривую $k(t)$ назовем *монотонной дугой*.

В введенных обозначениях из предложения 6 следует, что m -связное замкнутое подмножество в c_0 является монотонно линейно связным. Таким образом, для замкнутого множества $M \subset c_0$ имеем

$$M \text{ } m\text{-связно} \Leftrightarrow M \text{ монотонно линейно связно.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6. Рассмотрим $x, y \in M$. По предположению множество $M \subset X$ является $\|\cdot\|$ -замкнутым, поэтому $M \cap m(x, y)$ замкнуто. Из предложения 4 множество $m(x, y)$ $|\cdot|$ -полно. По предложению 5 множество $M \cap m(x, y)$ $|\cdot|$ -замкнуто, поэтому мы можем применить лемму В к множеству $M \cap m(x, y)$, получая монотонную дугу $k(\cdot)$, соединяющую x и y .

Докажем монотонность по t координатных функций $k^{(i)}(t)$. Без ограничения общности считаем, что $x = 0$, $y^{(i)} \geq 0$ для любого i , $|y| = 1$. Для любых $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1)$, $\beta_1 \leq \beta_2$, по лемме В существуют точки $x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \in k(\cdot)$ такие, что

$|x_{\beta_1}| = \beta_1$, $|y - x_{\beta_1}| = 1 - \beta_1$, $|x_{\beta_2}| = \beta_2$, $|y - x_{\beta_2}| = 1 - \beta_2$. По предложению 1 имеем $0 \leq x_{\beta_1}^{(i)}, x_{\beta_2}^{(i)} \leq y^{(i)}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |y| &= \sum \alpha_i y^{(i)} = |x_{\beta_1}| + |x_{\beta_1} - x_{\beta_2}| + |y - x_{\beta_2}| \\ &= \sum \alpha_i (x_{\beta_1}^{(i)} + |x_{\beta_1}^{(i)} - x_{\beta_2}^{(i)}| + y^{(i)} - x_{\beta_2}^{(i)}), \end{aligned}$$

откуда $x_{\beta_1}^{(i)} \leq x_{\beta_2}^{(i)}$ для всех i , что и требуется доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В пространстве $C[0, 1]$ m -связное множество может быть не-связным. Соответствующий пример построен в [7, с. 12]. Пусть $M = M_1 \cup M_{-1}$, где $M_\sigma = \{x \in C[0, 1] \mid x(0) = \sigma\}$, $\sigma = \pm 1$. Тогда M состоит из двух выпуклых компонент и поэтому несвязно. Однако множество M m -связно. Отметим, что M не является солнцем. Аналогичный пример можно построить в $X = c$.

ТЕОРЕМА А [1], [2]. Пусть X – конечномерное линейное нормированное пространство, и пусть $\emptyset \neq M \subset X$ замкнуто. Каждое из четырех условий:

- 1) M m -связно,
- 2) $M \cap B(x, r)$ k -связно для всех $k = 0, 1, 2, \dots$ и любых $x \in X$, $r > 0$,
- 3) M V -ациклично,
- 4) M P -ациклично,

влечет следующее:

- 5) M – солнце.

Если X имеет размерность два или является (BM) -пространством, то все условия эквивалентны.

Отметим, что существует конечномерное негладкое пространство X , в котором всякое m -связное замкнутое множество выпукло. Поэтому в этом пространстве существует не m -связное солнце (см. [1], [3]). В [3, теорема 1.2] охарактеризованы конечномерные полиэдральные пространства, в которых каждое солнце m -связно.

В теоремах 1 и 2 мы частично обобщаем теорему А на случай пространств c_0 , c и ℓ^∞ . Утверждение теоремы 1 вытекает из предложений 1 и 6.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $M \subset c_0$ замкнуто и m -связно. Тогда множество M и множества $M \cap B(x, r)$, $M \cap \mathring{B}(x, r)$ и $P_M x$ монотонно линейно связны для любого выбора $x \in X$ и $r > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – m -связное замкнутое непустое подмножество пространства $X = c_0$, c или ℓ^∞ . Если $H_n \in \text{cAff}_n(X)$ – n -мерное координатное аффинное подпространство в X , $n \in \mathbb{N}$, $B_{H_n}(x, r)$ – замкнутый шар в H_n и $B_{H_n}(x, r) \cap M \neq \emptyset$, то:

- 1) $M \cap B_{H_n}(x, r)$ ациклично;
- 2) $M \cap H_n$ – солнце в H_n .

Кроме того, $M \cap H_n$ монотонно линейно связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\dim H_n = n < \infty$, то отождествим H_n с $\ell^\infty(n)$. Выберем $u, v \in H_n$. По предложению 1 имеем $m(u, v) \subset H_n$. Следовательно, $M \cap H_n$ также m -связно. Теперь монотонная линейная связность $M \cap H_n$ следует из предложения 6.

Зафиксируем замкнутый шар $B_{H_n}(x, r)$ в H_n . Снова применяя предложение 1, получим, что $M \cap B_{H_n}(x, r)$ m -связно. В [1, с. 93] установлено, что непустое ограниченное замкнутое m -связное подмножество конечномерного линейного нормированного пространства Y ациклично. Полагая $Y = H_n$, получаем ацикличность множества $M \cap B_{H_n}(x, r)$.

Солнечность множества $M \cap H_n$ в H_n следует из [11, теорема 4.4], где показано, что ограниченно-компактное P -ацикличное подмножество банахова пространства является солнцем. Теорема 2 доказана.

§ 4. Свойства солнц в пространствах c_0 , c и ℓ^∞

Напомним, что известно о связности солнц в линейных нормированных пространствах. Этот вопрос изучался многими авторами (см., например, [13]). Л. П. Власов [11, теорема 3.9] показал, что солнце в X выпукло, если и только если единичный шар в X является гладким. Поэтому вопрос о связности солнц представляет интерес только в негладких пространствах.

В. А. Кошечев [21] установил, что солнце в конечномерном банаховом пространстве X_n связно. Браун [1], [2], развивая рассуждения Кошечева, показал, что солнце M в X_n линейно связно и, следовательно, локально линейно связно. Более того [2, теорема 3], существуют положительные константы C и α , зависящие от пространства X_n , такие, что для любых $x_0, y_0 \in M$ существует путь $s: [0, 1] \rightarrow M$, связывающий x_0 с y_0 , такой, что

$$\|s(\xi) - s(\eta)\| \leq C\|x_0 - y_0\| \cdot |\xi - \eta|^\alpha$$

для всех $\xi, \eta \in [0, 1]$.

В бесконечномерном случае Кошечев [22] установил, что компактное солнце в банаховом пространстве связно и что произвольное солнце в равномерно неквадратном⁴ банаховом пространстве связно [22, следствие 1]. В работе [23] им построен пример несвязного солнца в некотором банаховом пространстве.

Вопрос о том, является ли произвольное солнце в конечномерном пространстве размерности ≥ 3 стягиваемым, P -ацикличным или, по крайней мере, V -связным, является открытым (см. [2], [3], [13]). Однако в некоторых конечномерных пространствах X ответ на этот вопрос положителен. По теореме А в конечномерном (BM) -пространстве X солнца оказываются m -связными и поэтому P -ацикличными. Аналогичный результат верен для произвольных солнц в $X = c_0$.

ТЕОРЕМА 3. 1) Пусть M – солнце в c_0 . Тогда M m -связно.

2) m -связное аппроксимативно компактное непустое подмножество пространства c_0 является солнцем.

В [7, теорема 7.4] утверждения теоремы 3 установлены для *ограниченно-компактных множеств* M (т. е. для множеств M со свойством: $M \cap B(x, r)$ компактно для любого выбора x и $r > 0$); понятно, что каждое ограниченно-компактное множество является аппроксимативно компактным, но не наоборот.

⁴Напомним, что линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ *равномерно неквадратно*, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\|(x+y)/2\| \leq 1 - \varepsilon$ или $\|(y-x)/2\| \leq 1 - \varepsilon$ для всех $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$. Понятно, что c_0 , c и ℓ^∞ не являются такими пространствами.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко построить замкнутое выпуклое (и потому m -связное) множество в c_0 , не являющееся солнцем (достаточно взять гиперплоскость, определяемую функционалом, не достигающим своей нормы). Вопрос, будет ли произвольное m -связное множество *существования* солнцем в c_0 , является открытым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Для доказательства утверждения 1) используются некоторые схемы из [1]. Предположим противное и рассмотрим солнце $M \subset c_0$, не являющееся m -связным. Тогда по определению существуют различные точки $u, v \in M$ такие, что

$$(m(u, v) \setminus \{u, v\}) \cap M = \emptyset. \quad (10)$$

Рассмотрим определенную в (9) ассоциированную норму $|\cdot|$ на c_0 .

1. Для каждого $\varepsilon > 0$ положим

$$\mathcal{O}_\varepsilon(M) = \{x \in X \mid \rho(x, M) := \inf_{z \in M} \|x - z\| \leq \varepsilon\}, \quad A_\varepsilon = m(u, v) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(M).$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in A_\varepsilon$ такое, что

$$|x_\varepsilon - u| = |x_\varepsilon - v| = \frac{1}{2} |u - v|.$$

Отсюда будет следовать, что если $\bar{x} - |\cdot|$ -предельная точка для x_ε , существующая по предложению 5, то $\bar{x} \in (m(u, v) \setminus \{u, v\}) \cap M$, что противоречит предположению (10).

Мы можем считать, что $\varepsilon < \|u - v\|/2$. Если $0 < \theta < \varepsilon/\|u - v\|$, то $v + \theta(u - v) \in A_\varepsilon$ и

$$|(v + \theta(u - v)) - u| > \frac{1}{2} |u - v|.$$

Предположим, что $x_0 \in A_\varepsilon$, $x_0 \neq u, v$, $|x_0 - u| \geq |u - v|/2$ и что y – солнечная точка для x_0 . В силу (10) $x_0 \notin M$, поэтому $y \neq x_0$. Для простоты обозначений считаем $x_0 = 0$.

2. Поскольку y – солнечная точка для 0 и $u \in M$, то $[y, u] \cap \mathring{B}(0, \|y\|) = \emptyset$ (см. [11, лемма 3.1]); это эквивалентно тому, что $[y, y - (y - u)] \cap \mathring{B}(0, \|y\|) = \emptyset$. Так как по предложению 2 c_0 является (BM) -пространством, то из (4) следует

$$B(0, \|y\|) \cap (m(y, y - u) \setminus \{y, y - u\}) \neq \emptyset,$$

что эквивалентно $B(y, \|y\|) \cap (m(0, u) \setminus \{0, u\}) \neq \emptyset$. Предположим, что w содержится во множестве $B(y, \|y\|) \cap (m(0, u) \setminus \{0, u\})$. Тогда $[0, w]$ тоже содержится в нем. Кроме того, $\|w - y\| \leq \|y\| \leq \varepsilon$, так что $[0, w] \subset \mathcal{O}_\varepsilon(M)$, и $(0, w] \subset m(0, u) \setminus \{0, u\}$, откуда по предложению 3 имеем

$$|w' - u| < |u| \quad \text{для любой точки } w' \in (0, w]. \quad (11)$$

3. Убедимся, что множество $Z = \{z \in m(u, v) \mid |z - u| \geq (1/2)|u - v|\} - |\cdot|$ -замкнуто. Действительно, если $(x_n) \subset Z$, то в силу $|\cdot|$ -компактности множества $m(u, v)$ (предложение 5) имеем, что $|x_{n_k} - x| \rightarrow 0$ для некоторого $x \in m(u, v)$. Не ограничивая общности считаем $|x_n - x| \rightarrow 0$. Предположим, что $x \notin Z$. Тогда

$|x - u| + \gamma = (1/2)|u - v|$ при некотором $\gamma > 0$. Для $0 < \varepsilon < \gamma$ выберем номер N такой, что $|x_n - x| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Имеем

$$|x_n - u| \leq |x_n - x| + |x - u| < \varepsilon + |x - u| < \gamma + |x - u| = \frac{1}{2}|u - v| \leq |x_n - u|, \quad n \geq N.$$

Полученное противоречие показывает, что Z замкнуто.

Рассмотрим

$$a_\varepsilon = \inf \left\{ |z - u| \mid z \in A_\varepsilon \text{ и } |z - u| \geq \frac{1}{2}|u - v| \right\}. \quad (12)$$

Поскольку M непусто, то $\mathcal{O}_\varepsilon(M)$ тоже замкнуто (так как функция расстояния до непустого множества непрерывна), откуда множество A_ε является $|\cdot|$ -компактным по предложению 5. По доказанному выше Z замкнуто, поэтому в (12) инфимум достигается, скажем, в точке x_ε . Отсюда $x_\varepsilon \in A_\varepsilon$ и $|x_\varepsilon - u| \geq (1/2)|u - v|$.

Далее,

$$a_\varepsilon = |u - x_\varepsilon| = \frac{1}{2}|u - v| = |v - x_\varepsilon|,$$

в противном случае из (11) получим точку $w' \in \mathcal{O}_\varepsilon(M) \cap m(u, v)$, $|w' - u| \geq |u - v|/2$, и окажется, что w' находится $|\cdot|$ -ближе к u , чем x_ε , — противоречие с (12).

Докажем утверждение 2). Пусть $0 \notin M$, $\rho(0, M) = 1$. Поскольку M аппроксимативно компактно, то $P_M 0 \neq \emptyset$ компактно; кроме того, множество

$$I = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{существует точка } y \in P_M 0 \text{ такая, что } |y^{(i)}| = 1\}$$

непусто и конечно. Обозначим $k = \max\{i \mid i \in I\}$.

Докажем, что M является солнцем в c_0 , для этого воспользуемся конечномерным результатом (2) для $\ell^\infty(k)$. Определим

$$\begin{aligned} \hat{M} &= M \cap \{z \mid -1 < z^{(j)} < 1 \quad \forall j \geq k+1\}, \\ M' &= \text{rg}_{\mathbb{R}^k} \hat{M} = \{z = (z^{(1)}, \dots, z^{(k)}) \in \mathbb{R}^k \mid z \in \hat{M}\}. \end{aligned} \quad (13)$$

По определению k имеем, что $P_M 0 \subset \hat{M}$ и, следовательно, $\text{rg}_{\mathbb{R}^k}(P_M 0) \subset M'$, т. е. оба множества из (13) непусты, причем M' содержится в конечномерном координатном подпространстве $\mathbb{R}^k$.

Пусть $\hat{z} \in \hat{M}$. Понятно, что $\hat{M} \cap \mathring{B}_{c_0} = \emptyset$, откуда $|\hat{z}^{(i)}| > 1$ для некоторого i . Из (13) имеем, что $i \in \{1, \dots, k\}$. Это влечет, что $|\text{rg}_{\mathbb{R}^k} \hat{z}^{(i)}| > 1$. Следовательно, $M' \cap \mathring{B}_{\mathbb{R}^k} = \emptyset$.

Рассмотрим замыкание $\text{cl } M'$ множества M' в $\mathbb{R}^k$. Убедимся, что $P_{M'} 0 = P_{\text{cl } M'} 0$. Для этого рассмотрим последовательность $(y'_n) \subset M'$, $y'_n \rightarrow y' \in P_{\text{cl } M'} 0$. Выберем $\hat{y}_n \in \hat{M}$ таким образом, что $\text{rg}_{\mathbb{R}^k} \hat{y}_n = y'_n$. Из (13) вытекает, что $\rho_{\mathbb{R}^k}(0, \text{cl } M') = 1$. Итак, $(\hat{y}_n)$ — минимизирующая последовательность из $\hat{M} \subset M$ для 0. Поскольку M аппроксимативно компактно, то $(\hat{y}_n)$ содержит сходящуюся к некоторой точке $y \in M$ подпоследовательность. Ясно, что $\|y\| = 1$, т. е. $y \in P_M 0$. Теперь из (13) имеем, что $y \in \hat{M}$. Окончательно, $\text{rg}_{\mathbb{R}^k} y = y' \in M'$, что и требовалось доказать.

Норма пространства c_0 естественным образом индуцирует на $\mathbb{R}^k$ ℓ^∞ -норму, поэтому отождествим $\mathbb{R}^k$ с пространством $\ell^\infty(k)$; тогда m -связность замкнутого множества в $\ell^\infty(k)$ равносильна его ℓ^1 -выпуклости в смысле (2).

Множество M по условию замкнуто и m -связно. Установим, что $\text{cl } M' \subset \ell^\infty(k)$ будет ℓ^1 -выпуклым множеством. Пусть $u, v \in \text{cl } M'$, $(u_n), (v_n) \in M'$, $u_n \rightarrow u$, $v_n \rightarrow v$. Пусть $\hat{u}_n, \hat{v}_n \in \hat{M}$ такие что, что $\text{pr}_{\mathbb{R}^k} \hat{u}_n = u_n$, $\text{pr}_{\mathbb{R}^k} \hat{v}_n = v_n$. По предложению 6 для каждого n найдется монотонная дуга $\hat{\varkappa}_n(\cdot) \subset \hat{M}$, соединяющая $\hat{u}_n$ и $\hat{v}_n$. Из предложения 1 имеем, что $\hat{\varkappa}_n(\cdot) \subset \hat{M}$ и что $\varkappa_n(\cdot) := \text{pr}_{\mathbb{R}^k} \hat{\varkappa}_n(\cdot) \subset M'$ является монотонной дугой, соединяющей u_n и v_n . В силу монотонности по t координатных функций $\varkappa_n^{(i)}(\cdot)$, $i = 1, \dots, k$, для каждого n найдется точка $z_n \in \varkappa_n(\cdot)$ такая, что $|z_n - u_n| = |u_n - v_n|/2$. Последовательность $(z_n) \subset \mathbb{R}^k$ обладает сходящейся подпоследовательностью. Пусть z – ее предельная точка. Тогда $|z - u| = |u - v|/2$ и $z \in m(u, v)$ в силу (8).

Итак, множество $\text{cl } M' \subset \mathbb{R}^k$ замкнуто и ℓ^1 -выпукло, причем $\mathring{B}_{\mathbb{R}^k}(0, 1) \cap \text{cl } M' = \emptyset$, $\rho_{\mathbb{R}^k}(0, M') = 1$ и $P_{\text{cl } M'} 0 = P_{M'} 0$. Применяя (2), имеем, что $\text{cl } M' - \text{солнце}$ в $\ell^\infty(k)$. Пусть $y'_0 - \text{солнечная}$ точка из $\text{cl } M' \subset \ell^\infty(k)$ для 0; по доказанному выше выполняется $y'_0 \in M'$. Пусть $y_0 \in \hat{M}$ – такая точка, что $\text{pr}_{\mathbb{R}^k} y_0 = y'_0$.

Переставляя при необходимости координаты $1, \dots, k$, без ограничения общности считаем, что $y'_0 = (1, \dots, 1, \eta^{(l+1)}, \dots, \eta^{(k)})$. Тогда

$$y_0 = (1, \dots, 1, \eta^{(l+1)}, \dots, \eta^{(k)}, \eta^{(k+1)}, \dots), \quad |\eta^{(j)}| < 1, \quad j \geq l+1. \quad (14)$$

Поскольку $\text{cl } M' - \text{солнце}$ в $\ell^\infty(k)$, то по лемме А имеем

$$\mathring{K}_{\mathbb{R}^k}(y'_0, 0) \cap M = \emptyset; \quad (15)$$

здесь в силу (6) и (14)

$$\begin{aligned} \mathring{K}_{\mathbb{R}^k}(y'_0, 0) &= \{z \in \mathbb{R}^k \mid z^{(i)} < 1 \text{ для всех } i = 1, \dots, l\}, \\ \mathring{K}(y_0, 0) &= \{z \in c_0 \mid z^{(i)} < 1 \text{ для всех } i = 1, \dots, l\}. \end{aligned}$$

Установим, что

$$\mathring{K}(y_0, 0) \cap M = \emptyset. \quad (16)$$

Из соотношений (15) и (13) вытекает, что $\hat{M} \cap \mathring{K}(y_0, 0) = \emptyset$. Предположим, что (16) неверно. Тогда найдется точка $v \in M \cap \mathring{K}(y_0, 0)$, $v \notin \hat{M}$. Так как замкнутое множество M по условию m -связно, то по предложению 6 найдется монотонная дуга $\varkappa(\cdot): [0, 1] \rightarrow M$, соединяющая v и y_0 ; считаем $\varkappa(0) = v$, $\varkappa(1) = y_0$.

Обозначим $\underline{J} = \{j \in [l+1, k] \mid |v^{(j)}| \geq 1\}$, $\bar{J} = \{j > k \mid |v^{(j)}| \geq 1\}$. Поскольку $v \in M \setminus \hat{M}$, то $\bar{J} \neq \emptyset$; кроме того, $\bar{J}$ и $\underline{J}$ конечны. Положим

$$t^* = \max\{t \in [0, 1] \mid \text{найдется номер } j \in \bar{J} \cup \underline{J} \text{ такой, что } |k^{(j)}(t)| \geq 1\}.$$

Поскольку $y_0 \in \hat{M}$ и кривая $\varkappa(\cdot)$ непрерывна, то $t^* < 1$.

Далее, пусть $\underline{J}^* = \{j \in \underline{J} \mid |\varkappa^{(j)}(t^*)| = 1\}$, $\bar{J}^* = \{j \in \bar{J} \mid |\varkappa^{(j)}(t^*)| = 1\}$. По крайней мере одно из этих множеств непусто. Предположим, что $\bar{J}^* \neq \emptyset$. Тогда $\|\varkappa(t^*)\| = 1$. Имеем $\varkappa(t^*) \in P_M 0 \subset \hat{M}$, что противоречит определению числа k .

Теперь считаем, что $\underline{J}^* \neq \emptyset$ ($\bar{J}^* = \emptyset$ по доказанному выше). Имеем $v \in \hat{M}$, но ранее доказано, что $v \notin \hat{M}$. Противоречие.

Итак, предположение, что $\mathring{K}(y_0, 0) \cap M \neq \emptyset$, было неверно, откуда $M - \text{солнце}$ в c_0 по лемме А. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *m-связное чебышевское множество в c_0 является солнцем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – m -связное чебышевское множество в c_0 . Без ограничения общности считаем $0 \notin M$, $\rho(0, M) = 1$. Обозначим $y = P_M 0$. Переставляя при необходимости координаты, имеем, что $y^{(1)} = \dots = y^{(k)} = 1$, $|y^{(j)}| < 1$ при $j > k$.

Покажем, что множество M является солнцем, для этого воспользуемся леммой А. Предположим, что $z \in M \cap \mathring{K}(y, 0)$. По теореме 1 множество M монотонно линейно связно, поэтому найдется монотонная дуга $k: [0, 1] \rightarrow M$, соединяющая y и z , $k(0) = y$, $k(z) = 1$. Поскольку $y, z \in c_0$ и $|y^{(j)}| < 1$ при $j > k$, из монотонности по t координатных функций $k^{(j)}$ кривой $k(t)$ следует, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $|k^{(j)}(t)| < 1$ при всех $j > k$ и $t \in (0, \varepsilon)$. Далее, поскольку $z \in \mathring{K}(y, 0)$, то в силу (6) имеем $z^{(i)} < 1$ при $i = 1, \dots, k$. Поэтому найдется $\varepsilon' > 0$ такое, что $|k^{(i)}(t)| \leq 1$ при всех $i = 1, \dots, k$ и $t \in (0, \varepsilon')$.

Проверим, что $k^{(j)}(t) < 1$ для всех $t \neq 0$. Действительно, если предположить, что $k^{(i_0)}(t_0) = 1$ при некотором i_0 (понятно, что $1 \leq i_0 \leq k$) и $t_0 \in (0, 1)$, то из монотонности будем иметь $k^{(i_0)}(t) = 1$ при всех $t \leq t_0$. Получаем, что при $t < \min\{\varepsilon, \varepsilon', t_0\}$ выполнено $\|k(t)\| = 1$. Поскольку $k(t) \neq y$ при $t \neq 0$ и $k(t) \in M$ при всех t , то $k(t) \in P_M 0$ при $t < \min\{\varepsilon, \varepsilon', t_0\}$ – противоречие с тем, что M является чебышевским множеством.

Итак, $k^{(i)}(t) < 1$ для любого t , поэтому $k(t) \in \mathring{B}(0, 1)$ при всех достаточно малых $t > 0$. Однако поскольку $k(\cdot) \subset M$, то имеем противоречие с условием $\rho(0, M) = 1$. Поэтому исходное предположение, что $M \cap \mathring{K}(y, 0)$ непусто, неверно и M – солнце по лемме А. Теорема доказана.

Следующее утверждение непосредственно следует из теорем 1 и 3.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть M – солнце в c_0 . Тогда M монотонно линейно связно.*

ЛЕММА 1. *Пусть $X = c_0$, с или ℓ^∞ . Пусть $M \subset X$ и $H_m \in \text{sAff}_m(X)$, $m < \infty$. Предположим, что $x \in H_m$, $x \notin M$ и $M \cap H_m \neq \emptyset$. Пусть y – солнечная точка из M для x . Положим $y_m = \text{pr}_{H_m} y$. Тогда*

$$\|x - y_m\| = \|x - y\|. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем $x = 0$ и $\|y\| = 1$ и отождествим H_m с $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим случай $X = c_0$ и предположим, что (17) не выполнено. Тогда $|y^{(i)}| < 1$ для всех $i = 1, \dots, m$ и найдутся номера $i_1, \dots, i_k > m$ такие, что $|y^{(i_j)}| = 1$ при $j = 1, \dots, k$ и $|y^l| < 1$ при $l > m$, $j \neq i_1, \dots, i_k$. В нашем случае опорный конус $\mathring{K}(y, 0)$ (см. (5), (6)) имеет вид

$$\mathring{K}(y, 0) = \{z \in c_0 \mid z^{(i_j)} \text{ sign } y^{(i_j)} < 1, j = 1, \dots, k\}.$$

Поскольку $i_1, \dots, i_k > m$, то $X_m \subset \mathring{K}(y, 0)$. Однако это невозможно, так как $M \cap H_m \neq \emptyset$, в то время как $\mathring{K}(y, 0) \cap M = \emptyset$ по лемме А.

Пусть теперь $X = c$. Предположим, что (17) неверно. Тогда $|y^{(i)}| < 1$ при $i = 1, \dots, m$. Рассмотрим два случая:

- а) $|y^{(j)}| < 1$ для всех $j > m$;
- б) $|y^{(j)}| = 1$ при $j \in I_1 \neq \emptyset$, $\min I_1 > m$, $|y^{(j)}| < 1$ при $j \in I_2$, $I_1 \cup I_2 = \mathbb{N}$.

Напомним, что произвольный линейный непрерывный функционал на c имеет вид

$$f(x) = \alpha \lim x^{(j)} + \sum \beta_j x^{(j)}, \quad \|f\| = |\alpha| + \sum |\beta_j|.$$

В случае а) $\mathcal{E}_y$ из (6) состоит из единственного функционала $\hat{f}(x) = \lim x^{(j)}$. Тогда в силу (6) имеем

$$\mathring{K}(y, 0) = \{z \in c \mid \lim z^{(j)} < 1\}. \quad (18)$$

В случае б) $\hat{f} \in \mathcal{E}_y$ тогда и только тогда, когда $|\lim y^{(j)}| = 1$. Остальные элементы из $\mathcal{E}_y$ имеют вид $f^j(x) = x^{(j)} \operatorname{sign} y^{(j)}$ при $j \in I_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathring{K}(y, 0) &= \bigcap_{j \in I_1} \{z \in c \mid f^j(z) < f^j(y)\}, \\ \mathring{K}(y, 0) &= \{z \mid \lim z^{(j)} < 1\} \cap \left(\bigcap_{j \in I_1} \{z \mid f^j(z) < f^j(y)\} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

когда $|\lim y^{(j)}| < 1$ и $|\lim y^{(j)}| = 1$ соответственно.

Из (18) и (19) вытекает, что в случаях а) и б) опорный конус $\mathring{K}(y, 0)$ содержит подпространство H_m . Но это невозможно, поскольку $M \cap H_m \neq \emptyset$ и по лемме А $\mathring{K}(y, 0) \cap M = \emptyset$.

Пусть $X = \ell^\infty$. Рассмотрим произвольный ограниченный линейный функционал f на ℓ^∞ , $\|f\| = 1$, $f(y) = 1$. Тогда $f(z) = \int z d\varphi$, где φ – положительная конечно аддитивная мера на $\mathbb{N}$, $\|f\| = \operatorname{Var} \varphi$. Предположим, что $|y^{(j)}| < 1$ для $j = 1, \dots, m$. Тогда, поскольку $\|f\| = 1$ и $f(y) = 1$, мы заключаем, что $\varphi(1, \dots, m) = 0$, т.е. $f(H_m) = 0$. Это влечет, что опорный конус $\mathring{K}(y, 0)$ содержит подпространство H_m . Это невозможно, так как $u, v \in M \cap H_m$, а с другой стороны, по лемме А $\mathring{K}(y, 0) \cap M = \emptyset$. Итак, предположение $|y^{(j)}| < 1$ для $j = 1, \dots, m$ было неверно, поэтому (17), а вместе с ним и лемма 1 доказаны.

ТЕОРЕМА 6. Пусть M – солнце в $X = c_0$, c или ℓ^∞ , и пусть H_n – n -мерное аффинное координатное подпространство в X , $H_n \cap M \neq \emptyset$. Тогда:

1) $M \cap H_n$ m -связно.

Это утверждение эквивалентно любому из следующих условий:

2) $M \cap H_n$ монотонно линейно связно;

3) $M \cap H_n$ k -связно для всех $k \in \mathbb{Z}_+$;

4) $M \cap H_n$ P -ациклично в H_n ;

5) $M \cap H_n$ V -ациклично в H_n ;

6) $M \cap H_n$ – солнце в H_n .

Кроме того, $M \cap H_n$ монотонно линейно связно.

Ответ на вопрос, является ли пересечение $M \cap H$ солнцем в H , где M – солнце в $X = c_0$, c или ℓ^∞ и $H \subset X$ – координатное аффинное подпространство, $\dim H = \operatorname{codim} H = \infty$, остается открытым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6 аналогично доказательству теоремы 3. Как и ранее, отождествим H_n с $\ell^\infty(n)$.

Предположим, что условие 1) доказано. Тогда монотонная линейная связность множества $M \cap H_n$ следует из леммы В. Утверждение 1) $\Rightarrow$ 4), т. е. P -ацикличность солнц в $\ell^\infty(n)$, доказано Брауном в теореме А. Для компактного множества в конечномерном пространстве его V -ацикличность равносильна его P -ацикличности [24, следствие 1.6.2], поэтому имеем 4) $\Leftrightarrow$ 5). В [2, теорема 2] доказано, что 3) $\Leftrightarrow$ 4). Ограниченно компактное P -ацикличное множество в банаховом пространстве является солнцем. Из этого результата Власова [11, теорема 4.4] вытекает 5) $\Rightarrow$ 6). Поскольку H_n можно отождествить с $\ell^\infty(n)$, а последнее является (BM) -пространством, то по теореме А имеем 6) $\Rightarrow$ 1). Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) установлена в (2).

Докажем утверждение 1). Предположим противное: найдется солнце $M \subset X$, не являющееся m -связным в некотором конечномерном координатном аффинном подпространстве H_n в X . Не ограничивая общности, отождествим H_n с $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, где $\|\cdot\|_\infty$ – обычная максимум-норма. Тогда по определению существуют точки $u, v \in M \cap H_n$ такие, что $(m(u, v) \setminus \{u, v\}) \cap M = \emptyset$. Рассмотрим ℓ^1 -норму $|\cdot|_1$ на H_n как ассоциированную (в смысле (8), (9)).

Пусть H_m – минимальное координатное аффинное подпространство, которое содержит u и v (к примеру, если $u^{(i)} \neq v^{(i)}$ для всех $i = 1, \dots, n$, то $H_m = H_n$). Без ограничения общности отождествим H_m с $\{x = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}, 0, \dots)\}$. Теперь доказательство повторяет рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2. Предположим, что $x_0 \in A_\varepsilon$, $x_0 \in H_n$, $|x_0 - u| \geq (1/2)|u - v|$ и что y – солнечная точка для x_0 (ясно, в общем случае $y \notin H_m$). Для простоты обозначений положим $x_0 = 0$.

Определим точку y_m как координатную проекцию точки y на H_m : $y_m = (y^{(1)}, \dots, y^{(m)}, 0, \dots)$. По лемме 1 имеем

$$\|y_m\| = \|y\|. \quad (20)$$

Поскольку y – солнечная точка для 0 и $u \in M$, то $[y, u] \cap \overset{\circ}{B}(0, \|y\|) = \emptyset$ (см., например, [11, лемма 3.1]). Из этого следует, что $[y_m, u] \cap \overset{\circ}{B}(0, \|y\|) = \emptyset$. В действительности, из того, что $u \in H_m$, мы, используя (20), получаем

$$\sup |\alpha u^{(i)} - (1 - \alpha)y^{(i)}| \geq \sup |\alpha u^{(i)} - (1 - \alpha)y_m^{(i)}| \geq 1$$

для всех $0 < \alpha < 1$. Отсюда имеем

$$\overset{\circ}{B}(0, \|y\|) \cap [y_m, y_m - (y_m - u)] = \emptyset.$$

Вследствие (4) получаем

$$B(0, \|y\|) \cap (m(y_m, y_m - u) \setminus \{y_m\}) \neq \emptyset,$$

что эквивалентно $B(y_m, \|y\|) \cap (m(0, u) \setminus \{0, u\}) \neq \emptyset$. Как и раньше, пусть $w \in B(y_m, \|y\|) \cap (m(0, u) \setminus \{0, u\})$. Тогда $w \in H_m$. Так как $0 \in \mathcal{O}_\varepsilon(M)$ и $y \in M$, то $\|y\| < \varepsilon$, откуда $\|y_m - w\| < \varepsilon$, $\|y - w\| < \varepsilon$, т. е. $w \in A_\varepsilon \cap X_m$. Далее рассуждаем, как при доказательстве утверждения 3) теоремы 3. Теорема доказана.

Работа была начата во время пребывания автора в университете г. Лилль (Франция). Автор благодарен профессору Э. Кефелеку за гостеприимство и научное сотрудничество.

Список литературы

1. *Brown A. L.* Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional // *Math. Ann.* 1987. V. 279. P. 87–101.
2. *Brown A. L.* On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces // *Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ.* 1988. V. 20. P. 1–15.
3. *Brown A. L.* Suns in polyhedral spaces // *Seminar of Math. Analysis. Proceedings. Univ. Malaga and Seville (Spain), Sept. 2002 – Feb. 2003* / Eds. D. G. Álvarez, G. Lopez Acedo, R. V. Caro. Sevilla: Universidad de Sevilla, 2003. P. 139–146.
4. *Braess D.* Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation // *J. Approx. Theory.* 1974. V. 11. P. 260–274.
5. *Berens H., Hetzelt L.* Die Metrische Struktur der Sonnen in $\ell^\infty(n)$ // *Aequat. Math.* 1984. V. 27. P. 274–287.
6. *Алимов А. Р.* Геометрическая характеристика строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ // *Матем. заметки.* 2001. Т. 70. №1. С. 3–11.
7. *Franchetti C., Roversi S.* Suns, M -connected sets and P -acyclic sets in Banach spaces. Preprint № 50139 / *Istituto di Matematica Applicata “G. Sansone”*, 1988. P. 1–29.
8. *Алимов А. Р.* Геометрическое строение чебышевских множеств в $\ell^\infty(n)$ // *Функцион. анализ и его прилож.* 2005. Т. 38. №1. С. 1–10.
9. *Alimov A. R.* Characterisations of Chebyshev Sets in c_0 // *J. Approx. Theory.* 2004. V. 129. № 2. P. 217–229.
10. *Стечкин С. Б.* Избранные труды. Математика. М.: Наука, 1998.
11. *Власов Л. П.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // *УМН.* 1973. Т. 28. №6. С. 3–66.
12. *Балаганский В. С., Власов Л. П.* Проблема выпуклости чебышевских множеств // *УМН.* 1996. Т. 51. №6(312). С. 125–188.
13. *Карлов М. И., Царьков И. Г.* Выпуклость и связность чебышевских множеств и солнц // *Фундам. и прикл. матем.* 1997. Т. 3. №4. С. 967–978.
14. *Власов Л. П.* Понятие аппроксимативной компактности и его варианты // *Матем. заметки.* 1974. Т. 16. №2. С. 337–348.
15. *Kenderov P. S., Giles J. R.* On the structure of Banach spaces with Mazur’s intersection property // *Math. Ann.* 1991. V. 291. № 3. P. 463–474.
16. *Whitfield J. H. M., Zizler V.* Mazur’s intersection property of balls for compact convex sets // *Bull. Aust. Math. Soc.* 1987. V. 35. P. 267–274.
17. *Köthe G.* Topological vector spaces. I. Berlin: Springer-Verlag, 1969.
18. *Menger K.* Untersuchungen über allgemeine Metrik // *Math. Ann.* 1928. V. 100. P. 75–163.
19. *Gordeo-Erasquin D., McCann R. J., Schmuckenschläger M.* A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb // *Invent. Math.* 2001. V. 146. P. 219–257.
20. *Власов Л. П.* Чебышевские множества и некоторые их обобщения // *Матем. заметки.* 1968. Т. 3. №1. С. 36–41.
21. *Кошечев В. А.* Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // *Матем. заметки.* 1975. Т. 17. №2. С. 193–204.
22. *Кошечев В. А.* Связность и солнечные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // *Матем. заметки.* 1976. Т. 19. №2. С. 267–278.
23. *Кошечев В. А.* Пример несвязного солнца в банаховом пространстве // *Матем. заметки.* 1979. Т. 26. №1. С. 89–92.
24. *Brown A. L.* Chebyshev sets and the shapes of convex bodies // *Methods of Functional Analysis in Approximation Theory* / Ed. C. A. Micchelli. Internat. Series of Numerical Math. V. 76. Basel: Birkhäuser-Verlag, 1986. P. 97–121.

Поступило в редакцию
31.05.2004