Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Корнев, А. П. Хромов, Абсолютная сходимость разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с переменным пределом интегрирования, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 4, 59–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/im647>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:55:09

УДК 517.968

В. В. Корнев, А. П. Хромов

**Абсолютная сходимость разложений по собственным
и присоединенным функциям интегрального оператора
с переменным пределом интегрирования**

Для разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора $Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t) dt$ устанавливается аналог признака А. Зигмунда абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Библиография: 6 наименований.

1. Введение. Интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где $A(x, t)$ удовлетворяет условиям: $A(x, t)$ n раз непрерывно дифференцируемо по x и один раз по t , причем

$$\left. \frac{\partial^s}{\partial x^s} A(x, t) \right|_{t=x} = \delta_{s, n-1}, \quad s = 0, \dots, n,$$

$\delta_{s, n-1}$ – символ Кронекера, представляет собой простейший вид интегрального оператора, ядро которого имеет разрыв $(n-1)$ -й производной по x на линии $t = 1-x$. Для такого оператора (и даже более общего, когда к (1) добавляется еще оператор $\alpha \int_0^x A(x, t)f(t) dt$ в работе [1] установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (с. п. ф.) и в обычный тригонометрический ряд Фурье. В [2] для него установлена базисность по Риссу в $L_2[0, 1]$ системы с. п. ф. В настоящей статье устанавливается для разложений по с. п. ф. аналог известной теоремы А. Зигмунда [3, с. 614] об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

2. Резольвента оператора A_0 . Обозначим через A_0 оператор

$$A_0 f(x) = \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект № 03-01-00169) и программы “Университеты России” (проект УР.04.01.041).

и через $R_{0,\lambda} = (E - \lambda A_0)^{-1} A_0$ его резольвенту Фредгольма (E – единичный оператор, λ – спектральный параметр и для определенности $n = 4\nu + 1$).

Введем в рассмотрение следующую краевую задачу в пространстве вектор-функций размерности два:

$$v^{(n)}(x) - \lambda \mathcal{D}v(x) = BF(x), \quad (2)$$

$$Pv^{(j)}(0) + Qv^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (3)$$

где $v(x) = (v_1(x), v_2(x))^T$, $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T$, $F_1(x) = f(x)$, $F_2(x) = f(1-x)$.

ЛЕММА 1. Если λ таково, что однородная задача, соответствующая задаче (2), (3), имеет только нулевое решение, то $R_{0,\lambda}$ существует и

$$R_{0,\lambda}f(x) = v_1(x) + v_2(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Краевая задача (2), (3) имеет и притом единственное решение. Положим $z_1(x) = v_1(x) + v_2(x)$ и $z_2(x) = iv_1(x) - iv_2(x)$. Тогда $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} z_1^{(n)}(x) + \lambda z_2(x) &= -f(1-x), \\ z_2^{(n)}(x) - \lambda z_1(x) &= f(x), \\ z_1^{(j)}(1) = z_2^{(j)}(0) &= 0, \quad j = 0, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что $z_2(1-x)$, $z_1(1-x)$ также удовлетворяют (4). Поэтому в силу единственности решения системы (4) $z_2(x) = z_1(1-x)$ и для $z_1(x)$ получаем

$$\begin{aligned} z_1^{(n)}(x) + \lambda z_1(1-x) &= -f(1-x), \\ z_1^{(j)}(1) &= 0, \quad j = 0, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (5)$$

Положим $\varphi(x) = -z_1(1-x)$. Тогда из (5) получаем

$$\varphi^{(n)}(x) + \lambda z_1(x) = -f(x), \quad \varphi^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Отсюда после n -кратного интегрирования следует, что

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} z_1(t) dt = - \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt.$$

Значит,

$$z_1(x) - \lambda \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} z_1(t) dt = \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt,$$

т.е.

$$z_1(x) - \lambda A_0 z_1(x) = A_0 f(x). \quad (6)$$

Отсюда в силу единственности решения уравнения (6) получаем, что $R_{0,\lambda}$ существует и $R_{0,\lambda}f(x) = z_1(x)$. Лемма доказана.

Положим $\lambda = i\rho^n$, где ρ принадлежит сектору $S = \{\rho \mid \arg \rho \in [0, \frac{2\pi}{n}]\}$. Последний разобьем на четыре сектора $S_j = \{\rho \mid \arg \rho \in [\frac{\pi}{2n}(j-1), \frac{\pi}{2n}j]\}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Для определенности будем рассматривать сектор S_1 (остальные рассматриваются аналогично). Обозначим через ω_k , $k = 1, \dots, n$, корни n -й степени из 1, занумерованные так, чтобы в S_1 выполнялись неравенства

$$\operatorname{Re} \rho \omega_1 \geq \operatorname{Re} \rho \omega_2 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho \omega_{n_0} \geq 0 > \operatorname{Re} \rho \omega_{n_0+1} \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho \omega_n.$$

Положим

$$\begin{aligned} g_1(x, t, \rho) &= \frac{1}{n\rho^{n-1}} \left\{ \varepsilon(x, t) \sum_{k=n_0+1}^n \omega_k \exp(\rho \omega_k(x-t)) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon(t, x) \sum_{k=1}^{n_0} \omega_k \exp(\rho \omega_k(x-t)) \right\}, \\ g_2(x, t, \rho) &= \frac{1}{n\rho^{n-1}} \left\{ -\varepsilon(x, t) \sum_{k=1}^{n_0} \omega_k \exp(-\rho \omega_k(x-t)) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon(t, x) \sum_{k=n_0+1}^n \omega_k \exp(-\rho \omega_k(x-t)) \right\}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon(x, t) = 1$ при $t \leq x$ и $\varepsilon(x, t) = 0$ при $t > x$.

Введем еще матрицы-функции:

$$\begin{aligned} V_k(x, \rho) &= \begin{pmatrix} \exp(\rho \omega_k x) & 0 \\ 0 & \exp(-\rho \omega_k x) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n, \\ g(x, t, \rho) &= \begin{pmatrix} g_1(x, t, \rho) & 0 \\ 0 & g_2(x, t, \rho) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$U(\rho) = (U_{jk}(\rho))_1^n,$$

где $U_{jk}(\rho) = U_j(V_k(x, \rho))$, $U_j(V) = PV^{(j-1)}(0) + QV^{(j-1)}(1)$.

ТЕОРЕМА 1. Если ρ таково, что $U^{-1}(\rho)$ существует, то краевая задача (2), (3) имеет единственное решение, которое дается формулой

$$\begin{aligned} v(x, \rho) &= -(V_1(x, \rho), \dots, V_n(x, \rho)) U^{-1}(\rho) \int_0^1 U_x(g(x, t, \rho)) BF(t) dt \\ &\quad + \int_0^1 g(x, t, \rho) BF(t) dt, \end{aligned} \quad (7)$$

где $U_x(g) = (U_1^T(g), \dots, U_n^T(g))^T$ (запись U_x означает, что U_j применяются к $g(x, t, \rho)$ по переменной x).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрицы-функции $V_k(x, \rho)$, $k = 1, \dots, n$, образуют фундаментальную систему решений матричного уравнения

$$V^{(n)} - \lambda \mathcal{D}V = 0.$$

Непосредственная проверка показывает, что вектор-функция

$$\int_0^1 g(x, t, \rho) BF(t) dt$$

является частным решением системы (2). Поэтому общее решение этой системы имеет вид

$$v(x, \rho) = (V_1(x, \rho), \dots, V_n(x, \rho))c + \int_0^1 g(x, t, \rho) BF(t) dt, \quad (8)$$

где c – произвольный постоянный вектор размерности $2n$. После подстановки общего решения в краевые условия (3) для нахождения вектора c получается система

$$U(\rho)c + \int_0^1 U_x(g(x, t, \rho)) BF(t) dt = 0.$$

Находя отсюда c и подставляя в (8), приходим к формуле (7). Теорема доказана.

Обозначим $\Delta(\rho) = \det U(\rho)$ и через $\tilde{\omega}_k$, $k = 1, \dots, 2n$, числа ω_k , $-\omega_k$, $k = 1, \dots, n$, занумерованные следующим образом:

$$\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_1 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_n \geq 0 \geq \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_{n+1} \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_{2n}.$$

Заметим, что $\tilde{\omega}_n = \omega_{n_0}$, $\tilde{\omega}_{n+1} = -\omega_{n_0}$.

ЛЕММА 2. Для определителя $\Delta(\rho)$ в области S_1 справедлива асимптотическая формула

$$\Delta(\rho) = \rho^{n(n-1)} (a + b \exp(-2\rho \tilde{\omega}_n) + o(1)) \exp\left(\rho \sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_k\right), \quad (9)$$

где a и b – постоянные, отличные от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$U_{jk}(\rho) = \begin{pmatrix} (\rho \omega_k)^{j-1} \exp(\rho \omega_k) & (-\rho \omega_k)^{j-1} \exp(-\rho \omega_k) \\ (\rho \omega_k)^{j-1} & -(-\rho \omega_k)^{j-1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что после некоторой перестановки столбцов нечетные строки $\pm\Delta(\rho)$ будут иметь вид

$$(\rho\tilde{\omega}_1)^{j-1} \exp(\rho\tilde{\omega}_1), \dots, (\rho\tilde{\omega}_{2n})^{j-1} \exp(\rho\tilde{\omega}_{2n}), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

а четные строки будут иметь вид

$$\pm(\rho\tilde{\omega}_1)^{j-1}, \dots, \pm(\rho\tilde{\omega}_{2n})^{j-1}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

причем в каждом столбце каждая четная строка имеет один знак: плюс или минус. Разложим теперь $\pm\Delta(\rho)$ по теореме Лапласа по строкам с четными номерами. В итоге получим

$$\Delta(\rho) = \rho^{n(n-1)} \sum_{j_1 < \dots < j_n} \gamma \exp(\rho(\tilde{\omega}_{j_1} + \dots + \tilde{\omega}_{j_n})),$$

где γ – постоянные коэффициенты (вообще говоря, различные). Отсюда, вынося экспоненты с неотрицательными действительными частями в показателях, получим формулу (9). Числа a и b , как видно из структуры определителя $\Delta(\rho)$, равны с точностью до знака произведению определителей Вандермонда n -го порядка из наборов попарно различных чисел $\tilde{\omega}_j$. Поэтому $ab \neq 0$. Лемма доказана.

Нули функции $a + b \exp(-2\rho\tilde{\omega}_n)$ обозначим через ρ_m . Тогда $\rho_m = a_1 + b_1 \pi m$, где $a_1 = -\frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \ln(-\frac{a}{b})$, $b_1 = \frac{i}{\tilde{\omega}_n}$. Очевидно, $\operatorname{Re} b_1 > 0$. Удалим из S_1 нули ρ_m вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ . Получившуюся область обозначим $S_{1,\delta}$.

ЛЕММА 3. В области $S_{1,\delta}$ при достаточно больших $|\rho|$ справедлива оценка

$$|\Delta(\rho)| \geq C |\rho|^{n(n-1)} \left| \exp\left(\sum_{k=1}^n \rho \tilde{\omega}_k\right) \right|,$$

где $C > 0$ не зависит от ρ .

Это утверждение есть простое следствие леммы 2.

Обозначим $\sigma(x, \rho) = \exp(\rho\tilde{\omega}_k(x-1))$, если $k = 1, \dots, n$, и $\sigma(x, \rho) = \exp(\rho\tilde{\omega}_k x)$, если $k = n+1, \dots, 2n$. Ясно, что $|\sigma(x, \rho)| \leq 1$.

ЛЕММА 4. В области $S_{1,\delta}$ при достаточно больших $|\rho|$ для решения краевой задачи (2), (3) имеет место представление

$$v(x, \rho) = \int_0^1 G(x, t, \rho) B F(t) dt,$$

где $G(x, t, \rho) = g(x, t, \rho) + \frac{1}{\rho^{n-1}} H(x, t, \rho)$, $H(x, t, \rho)$ – матрица размера 2×2 , компоненты которой являются линейными комбинациями всевозможных произведений $\sigma(x, \rho)\sigma(t, \rho)$ с коэффициентами (не зависящими от x и t), являющимися ограниченными функциями ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 имеем

$$\frac{1}{\rho^{n-1}} H(x, t, \rho) = -(V_1(x, \rho), \dots, V_n(x, \rho)) U^{-1}(\rho) U_x(g(x, t, \rho)). \quad (10)$$

Рассмотрим $U_x(g(x, t, \rho))$. Имеем

$$U_x(g(x, t, \rho)) = \frac{1}{n\rho^{n-1}} \begin{pmatrix} \sum_{k=n_0+1}^n \omega_k \exp(\rho\omega_k(1-t)) & -\sum_{k=1}^{n_0} \omega_k \exp(-\rho\omega_k(1-t)) \\ -\sum_{k=1}^{n_0} \omega_k \exp(-\rho\omega_k t) & \sum_{k=n_0+1}^n \omega_k \exp(\rho\omega_k t) \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где многоточием обозначены $n-1$ клетки по две строки и два столбца. Каждая следующая отличается от предыдущей добавлением множителя ρ , а коэффициенты ω_k первой клетки заменяются на $\pm\omega_k^s$ (т.е. на некоторые степени ω_k). Поскольку все экспоненты, входящие в (11), есть $\sigma(t, \rho)$, то элементы первой клетки являются конечной суммой $\sigma(t, \rho)$ с постоянными коэффициентами, элементы второй – такой же суммой, умноженной на ρ , и так далее, элементы последней n -й клетки – указанными суммами, умноженными на ρ^{n-1} .

Рассмотрим теперь $J = (V_1(x, \rho), \dots, V_n(x, \rho)) U^{-1}(\rho)$. Имеем

$$U^{-1}(\rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{2n,1} \\ \dots\dots\dots \\ A_{1,2n} & A_{2,2n} & \dots & A_{2n,2n} \end{pmatrix},$$

где A_{jk} – алгебраическое дополнение элемента с индексом (j, k) в матрице $U(\rho)$. Поэтому

$$J = \frac{1}{\Delta(\rho)} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1,2j-1} \exp(\rho\omega_j x) & \dots & \sum_{j=1}^n A_{2n,2j-1} \exp(\rho\omega_j x) \\ \sum_{j=1}^n A_{1,2j} \exp(-\rho\omega_j x) & \dots & \sum_{j=1}^n A_{2n,2j} \exp(-\rho\omega_j x) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Из явного вида $\Delta(\rho)$ следует, что выражения

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{1-s}}{\Delta(\rho)} A_{2s-1,2j-1} \exp(\rho\omega_j x), & \quad \frac{\rho^{1-s}}{\Delta(\rho)} A_{2s,2j-1} \exp(\rho\omega_j x), \\ \frac{\rho^{1-s}}{\Delta(\rho)} A_{2s-1,2j} \exp(-\rho\omega_j x), & \quad \frac{\rho^{1-s}}{\Delta(\rho)} A_{2s,2j} \exp(-\rho\omega_j x) \end{aligned}$$

равны $\sigma(x, \rho)O(1)$, где $O(1)$ не зависит от x . Из (10)–(12) получаем утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1. В области $S_{1,\delta}$ имеют место оценки

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} G_{ij}(x, t, \rho) = O\left(\frac{1}{\rho^{n-1-k}}\right), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad i, j = 1, 2,$$

где $G_{ij}(x, t, \rho)$ – компоненты матрицы $G(x, t, \rho)$.

3. Резольвента оператора A . Введем в рассмотрение операторы

$$T = (E + T_1)^{-1} - E, \quad T_1 f(x) = \int_0^x \frac{\partial^n}{\partial x^n} A(x, t) f(t) dt.$$

Из соотношения

$$T_1(x, t) + T(x, t) + \int_t^x T(x, \tau) T_1(\tau, t) d\tau = 0$$

для ядер $T_1(x, t)$ и $T(x, t)$ операторов T_1 и T следует, что $T(x, t)$ непрерывно дифференцируемо по t и $T(x, x) \equiv 0$. Введем еще оператор T'_t :

$$T'_t f(x) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) f(t) dt.$$

Через S_δ обозначим область $S_\delta = \bigcup_{j=1}^4 S_{j,\delta}$, где $S_{j,\delta}$, $j = 2, 3, 4$, получаются аналогично $S_{1,\delta}$.

ЛЕММА 5. В области S_δ ядро интегрального оператора $D^{n-1} S R_{0\lambda} T'_t$ есть $o(1)$ при $|\rho| \rightarrow \infty$ равномерно относительно остальных переменных (здесь $D = \frac{d}{dx}$, $S f(x) = f(1-x)$).

Это утверждение следует из лемм 1, 4 и [4, лемма 4].

ТЕОРЕМА 2. В области S_δ при больших $|\rho|$ справедлива формула

$$R_\lambda = R_{0\lambda} + R_{0\lambda} T'_t (E - D^{n-1} S R_{0\lambda} T'_t)^{-1} D^{n-1} S R_{0\lambda},$$

где $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ – резольвента Фредгольма оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y(x) = R_\lambda f(x)$. Тогда $(E - \lambda A)y = Af$. Отсюда имеем

$$y(1-x) - \lambda \int_0^x A(x, t) y(t) dt = \int_0^x A(x, t) f(t) dt. \quad (13)$$

Дифференцируя соотношение (13) n раз, получим

$$D^j S y(x) - \lambda \int_0^x \frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x, t) y(t) dt = \int_0^x \frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x, t) f(t) dt, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (14)$$

$$D^n S y(x) - \lambda (E + T_1) y(x) = (E + T_1) f(x). \quad (15)$$

Применяя к обеим частям (15) оператор $(E + T)$, с учетом (14) и равенства $TD^nSy = -T'_tD^{n-1}Sy$ получим

$$\begin{aligned} D^nSy - \lambda y &= f(x) + T'_tD^{n-1}Sy, \\ y(1) &= \dots = y^{(n-1)}(1) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$y = R_{0\lambda}f(x) + R_{0\lambda}T'_tD^{n-1}Sy. \quad (16)$$

Из соотношения (16) получаем

$$D^{n-1}Sy = D^{n-1}SR_{0\lambda}f(x) + D^{n-1}SR_{0\lambda}T'_tD^{n-1}Sy.$$

Отсюда по лемме 5 находим

$$D^{n-1}Sy = (E - D^{n-1}SR_{0\lambda}T'_t)^{-1}D^{n-1}SR_{0\lambda}f(x). \quad (17)$$

Подставляя (17) в правую часть (16), получим утверждение теоремы.

4. Вспомогательные утверждения. Обозначим $\sigma(x, \rho, m) = \sigma(x, \rho + b_1m\pi)$, $w(x, t, \rho, m) = \varepsilon(x, t) \exp(\rho + b_1m\pi)\omega(x - t)$, если ω — одно из чисел $\tilde{\omega}_{n+1}, \dots, \tilde{\omega}_{2n}$; $w(x, t, \rho, m) = \varepsilon(t, x) \exp(\rho + b_1m\pi)\omega(x - t)$, если ω — одно из чисел $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$, $\rho \in S_1$.

Введем следующие интегральные операторы:

$$P_m g(x) = \int_0^1 p(x, t, \rho, m) g(t) dt,$$

где $p(x, t, \rho, m) = \sigma(x, \rho, m)\sigma(t, \rho, m)$ или $p(x, t, \rho, m) = w(x, t, \rho, m)$.

ЛЕММА 6 [5]. Пусть $\alpha \neq 0$, $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$. Тогда для любой функции $f(x)$ из $L_2[0, 1]$ выполнено неравенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m(f)|^2 \leq c \|f\|_2^2, \quad (18)$$

где $a_m(f) = \int_0^1 f(t) \exp(m\alpha t) dt$, $\|\cdot\|_2$ — норма в $L_2[0, 1]$, постоянная $c > 0$ зависит только от α .

В работе [5] установлена лишь сходимость ряда слева в (18). Неравенство (18) следует из [6, с. 433].

ЛЕММА 7. Если ρ принадлежит ограниченному множеству из S_1 , то

$$\sum_{m=0}^{\infty} |P_m g(x)|^2 \leq c \|g\|_2^2, \quad (19)$$

где $c > 0$ не зависит от ρ и x . При этом ядра всех операторов P_m в (19) отличаются лишь параметром m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $p(x, t, \rho, m) = \sigma(x, \rho, m)\sigma(t, \rho, m)$. Тогда $P_m g(x) = \sigma(x, \rho, m)b_m(g, \rho)$, где $b_m(g, \rho) = \int_0^1 g(t)\sigma(t, \rho, m) dt$. Поскольку $\sigma(t, \rho, m) = \sigma(t, \rho, 0)\sigma(t, 0, m)$, то

$$b_m(g, \rho) = \int_0^1 g_1(t, \rho)\sigma(t, 0, m) dt,$$

где $g_1(t, \rho) = g(t)\sigma(t, \rho, 0)$. Так как $|\sigma(t, \rho, 0)| \leq 1$, то $\|g_1\|_2 \leq \|g\|_2$. Далее, $\sigma(t, 0, m)$ есть экспонента вида $\exp(ztm)$ или $\exp(z(1-t)m)$, где $z \neq 0$ и $\operatorname{Re} z \leq 0$.

По лемме 6 имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} |b_m(g, \rho)|^2 \leq c\|g\|_2^2. \quad (20)$$

Поскольку $|\sigma(x, \rho, m)| \leq 1$, то $|P_m g(x)| \leq |b_m(g, \rho)|$ и утверждение леммы следует из (20).

Пусть теперь $p(x, t, \rho, m) = w(x, t, \rho, m)$ и для определенности $w(x, t, \rho, m) = \varepsilon(t, x) \exp(\rho + b_1 m \pi) \omega(x - t)$. Тогда

$$P_m g(x) = \int_0^{1-x} g_2(x, t, \rho) \exp(-b_1 m \pi t \omega) dt,$$

где $g_2(x, t, \rho) = g(t+x) \exp(-\rho \omega t)$. Фиксируем x . По лемме 6 имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} |P_m g(x)|^2 \leq c \int_0^{1-x} |g(t+x)|^2 dt \leq c\|g\|_2^2.$$

Лемма доказана.

Обозначим $Mf = \int_0^1 M(x, t)f(t) dt$, где ядро $M(x, t)$ есть продолженная нулем одна из функций $\frac{\partial}{\partial \eta} T(\xi, \eta)$, когда ξ принимает значения x или $1-x$, а η принимает значения t или $1-t$.

ЛЕММА 8. Если ρ из ограниченного множества в S_1 , то

$$\sum_{m=0}^{\infty} |P_m M P_m g(x)| \leq c\|g\|_2,$$

где $c > 0$ не зависит от x и ρ . При этом ядра всех операторов P_m , стоящих перед M , отличаются лишь параметром t , таким же свойством обладают ядра всех операторов P_m , стоящих после M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $p(x, t, \rho, m) = \sigma(x, \rho, m)\sigma(t, \rho, m)$ для P_m , стоящих после M в $P_m M P_m$. Тогда $P_m g(x) = \sigma(x, \rho, m)b_m(g, \rho)$. Поэтому имеем

$$M P_m g(x) = b_m(g, \rho)r_m(x),$$

где $r_m(x) = \int_0^1 M(x, t) \sigma(t, \rho, m) dt$. По лемме 6 получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} |r_m(x)|^2 \leq c, \quad (21)$$

где c не зависит от x и ρ . Далее по неравенству Коши–Буняковского в силу (20), (21) выполнено неравенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} |r_m(x)| |b_m(g, \rho)| \leq c \|g\|_2,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} |P_m M P_m g(x)| &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 |p(x, t, \rho, m)| |M P_m g(t)| dt \\ &\leq \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} |M P_m g(t)| dt \leq c \|g\|_2, \end{aligned}$$

и в этом случае лемма доказана.

Пусть теперь $p(x, t, \rho, m) = \sigma(x, \rho, m) \sigma(t, \rho, m)$ для P_m , стоящих перед M в $P_m M P_m$. Тогда

$$\begin{aligned} |P_m M P_m g(x)| &\leq \left| \int_0^1 \sigma(t, \rho, m) dt \int_0^1 M(t, \tau) P_m g(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^1 |P_m g(\tau)| |\tilde{r}_m(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

где $\tilde{r}_m(\tau) = \int_0^1 M(t, \tau) \sigma(t, \rho, m) dt$. Отсюда по неравенству Коши–Буняковского и лемме 7 получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} |P_m M P_m g(x)| &\leq \int_0^1 \left(\sum_{m=0}^{\infty} |P_m g(\tau)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |\tilde{r}_m^2(\tau)| \right)^{1/2} d\tau \\ &\leq c \|g\|_2 \left(\int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} |\tilde{r}_m^2(\tau)| d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Однако по лемме 6 имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\tilde{r}_m^2(\tau)| \leq c \int_0^1 |M(t, \tau) \sigma(t, \rho, 0)|^2 dt. \quad (23)$$

Из неравенств (22), (23) следует утверждение леммы в этом случае.

Пусть у двух операторов P_m в $P_m M P_m$ ядро $p(x, t, \rho, m) = w(x, t, \rho, m)$, и для определенности пусть в обоих случаях

$$w(x, t, \rho, m) = \varepsilon(x, t) \exp(\rho + b_1 m \pi) \omega(x - t).$$

Тогда имеем

$$P_m M P_m g(x) = \int_0^1 P_m g(\tau) q_m(x, \tau) d\tau,$$

где $q_m(x, \tau) = \int_0^x M(x - \xi, \tau) \exp(\rho + b_1 m \pi) \omega \xi d\xi$. По лемме 6 получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} |q_m(x, \tau)|^2 \leq c,$$

где c не зависит от x, τ, ρ . Тогда по лемме 7

$$\sum_{m=0}^{\infty} |P_m M P_m g(x)| \leq \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} |P_m g(\tau)| |q_m(x, \tau)| d\tau \leq c \|g\|_2.$$

Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $\rho \in S_{1,\delta}$, $\rho = \rho_1 + b_1 t \pi$ и ρ_1 принадлежит ограниченному множеству. Тогда

$$\rho^{n-1-j} D^j R_{0\lambda} f(x), \quad j = 0, \dots, n-1,$$

есть конечная сумма с ограниченными по ρ_1 и t коэффициентами операторов $P_m g$ при всевозможных вариантах ядер $p(x, t, \rho_1, m)$ и $g(x)$ есть либо $f(x)$, либо $f(1-x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 имеем

$$\begin{aligned} \rho^{n-1-j} D^j v(x, \rho) &= \rho^{n-1-j} \int_0^1 \frac{\partial^j}{\partial x^j} g(x, t, \rho) B F(t) dt \\ &+ \rho^{-j} \int_0^1 \frac{\partial^j}{\partial x^j} H(x, t, \rho) B F(t) dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Первое слагаемое в (24) есть вектор-функция, компоненты которой являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами функций $P_m g(x)$, когда $p(x, t, \rho_1, m) = w(x, t, \rho_1, m)$. Второе слагаемое в (24) есть вектор-функция, компоненты которой являются линейными комбинациями функций $P_m g(x)$, когда

$$p(x, t, \rho_1, m) = \sigma(x, \rho_1, m) \sigma(t, \rho_1, m)$$

с коэффициентами, являющимися ограниченными функциями по t и ρ_1 . Утверждение леммы теперь следует из леммы 1.

5. Абсолютная равносходимость разложений по собственным функциям операторов A и A_0 . Обозначим через γ_m окружности радиуса δ с центрами в ρ_m . Считаем, что такие ρ_m и γ_m найдены и в оставшихся секторах S_2, S_3, S_4 ρ -плоскости. Для прежних ρ_m и вновь полученных сохраним прежние обозначения, т. е. все эти точки представим одной последовательностью $\{\rho_m\}$, занумерованной по правилу

$$|\rho_1| \leq |\rho_2| \leq \dots$$

Несложно убедиться, что все $\sqrt[n]{-\lambda_k i}$ и $\sqrt[n]{-\lambda_k^0 i}$, λ_k, λ_k^0 — характеристические числа операторов A и A_0 , достаточно большие по модулю, однократны и находятся по одному в каждом кружке γ_m . Обозначим через Γ_m образы γ_m в λ -плоскости.

ТЕОРЕМА 3. *Существует натуральное m_0 такое, что для любой функции $f(x) \in L_2[0, 1]$ ряд*

$$\sum_{m \geq m_0} \left| \int_{\Gamma_m} (R_\lambda - R_{0\lambda}) f(x) d\lambda \right|$$

сходится при всех $x \in [0, 1]$ и его сумма ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся лишь случаем, когда $\gamma_m \in S_1$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_m \left| \int_{\Gamma_m} (R_\lambda - R_{0\lambda}) f(x) d\lambda \right| &= \sum_m \left| \int_{\gamma_m} (R_\lambda - R_{0\lambda}) f(x) n \rho^{n-1} d\rho \right| \\ &\leq n \sum_m \int_{\gamma_m} |(R_\lambda - R_{0\lambda}) f(x)| |\rho|^{n-1} |d\rho| \\ &= n \int_{\gamma_0} \Phi(f, \rho_1) |d\rho_1|, \end{aligned}$$

где $\rho = \rho_1 + b_1 m \pi$, $\rho_1 \in \gamma_0$,

$$\Phi(f, \rho_1) = \sum_m |(R_\lambda - R_{0\lambda}) f(x)|_{-\lambda i = (\rho_1 + b_1 m \pi)^n} |\rho_1 + b_1 m \pi|^{n-1}.$$

Поскольку

$$(E - D^{n-1} S R_{0\lambda} T'_t)^{-1} = E + (E - D^{n-1} S R_{0\lambda} T'_t)^{-1} D^{n-1} S R_{0\lambda} T'_t,$$

то по теореме 2

$$R_\lambda - R_{0\lambda} = R_{0\lambda} T'_t D^{n-1} S R_{0\lambda} T'_t + K D^{n-1} R_{0\lambda} T'_t D^{n-1} S R_{0\lambda}, \quad (25)$$

где $K = R_{0\lambda} T'_t (E - D^{n-1} S R_{0\lambda} T'_t)^{-1} S$ (учли также, что $D^{n-1} S = S D^{n-1}$). По леммам 1, 4, 5 K есть интегральный оператор

$$Kf = \int_0^1 K(x, t, \rho) f(t) dt$$

с ядром $K(x, t, \rho) = O\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}\right)$ в $S_{1,\delta}$. Из (25) по лемме 9 можно оценить $\Phi(t, \rho_1)$ сверху конечной суммой рядов вида

$$\sum_m |P_m M P_m g(x)| + \int_0^1 \sum_m |P_m M P_m g(t)| dt,$$

где P_m имеют тот же смысл, что и в лемме 8. По лемме 8 эти ряды сходятся всюду и их суммы ограничены по x . Теорема доказана.

6. Абсолютная сходимость разложений по с.п.ф. оператора A . Здесь мы установим аналог известной теоремы А. Зигмунда об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье для разложений по с.п.ф. интегрального оператора A .

ТЕОРЕМА (А. Зигмунда [3, с. 614]). Пусть $f(x) \in V[0, 1] \cap \text{Lip } \alpha$, $f(0) = f(1)$ и $\alpha > 0$; a_k, b_k – коэффициенты ряда Фурье по тригонометрической системе $\{\cos(2k\pi x)\} \cup \{\sin(2k\pi x)\}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq c \sqrt{L_f(V_f + M_f)}, \quad (26)$$

где $c > 0$ зависит только от α , $V_f = \frac{1}{0} V(f)$, $M_f = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$, L_f – константа Липшица.

В работе [3] нет оценки (26), но она легко получается из рассуждений, приведенных в [3, с. 50–53, 610, 614].

ЛЕММА 10. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы А. Зигмунда, а $g(x)$ непрерывно дифференцируема. Тогда $F(x) = f(x)g(x) \in V[0, 1] \cap \text{Lip } \alpha$, причем $L_F \leq M_1 L_f + M M_2$, $V_F \leq V_f M_1 + M M_2$, $M = \|f(x)\|$, $M_1 = \|g(x)\|$, $M_2 = \|g'(x)\|$, $\|\cdot\|$ – норма в $C[0, 1]$.

Эта лемма очевидна.

ЛЕММА 11. Пусть $f(x) \in C[0, 1]$, $|f(x)| \leq c_f x^\alpha$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f(t) \exp(\omega m t) dt \right| \leq c_f c(\alpha), \quad (27)$$

где $\omega = -\gamma + i\beta$, $\gamma > 0$, $c(\alpha)$ зависит только от α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\left| \int_0^1 f(t) \exp(\omega m t) dt \right| \leq c_f \int_0^1 t^\alpha \exp(-\gamma m t) dt \leq \frac{c_f}{m^{1+\alpha}} \int_0^\infty t^\alpha \exp(-\gamma t) dt.$$

Отсюда следует (27), $c(\alpha) = \int_0^\infty t^\alpha \exp(-\gamma t) dt \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^{1+\alpha}}$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} u^{(n)}(x) - \lambda \mathcal{D}u(x) &= BF(x), \\ u^{(j)}(0) - u^{(j)}(1) &= 0, \quad j = 0, \dots, n-1, \end{aligned}$$

где $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$. Роли ρ_m для этой задачи выполняют точки $\tau_m = 2m\pi b_1$, и мы их наряду с прежними ρ_m удалим из S_1 вместе с круговыми окрестностями радиуса δ и получившуюся область по-прежнему обозначим $S_{1,\delta}$. Далее рассуждаем, как в предыдущем пункте, т. е. получим контуры γ_m и Γ_m , занумерованные в том же смысле.

Аналогично лемме 4 получается

ЛЕММА 12. В области $S_{1,\delta}$ имеет место представление

$$u(x) = u(x, \rho) = \int_0^1 G_1(x, t, \rho) BF(t) dt,$$

где $G_1(x, t, \rho) = g(x, t, \rho) + \frac{1}{\rho^{n-1}} H_1(x, t, \rho)$ и матрица $H_1(x, t, \rho)$ размера 2×2 имеет тот же вид, что и $H(x, t, \rho)$ в лемме 4.

ЛЕММА 13. Пусть $f(x) \in V[0, 1] \cap \text{Lip } \alpha$ и $f(0) = f(1) = 0$. Тогда ряды $\sum_{m=1}^{\infty} \|P_m(x)\|$, где $\|\cdot\|$ – норма в $C[0, 1]$, сходятся и их суммы ограничены по ρ_1 , когда ρ_1 принадлежит ограниченному множеству. Ядра операторов P_m в каждом ряде имеют вид $p(x, t, \rho_1, m) = \sigma(x, \rho_1, m)\sigma(t, \rho_1, m)$ и отличаются лишь параметром m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\|P_m f(x)\| \leq \left| \int_0^1 \sigma(t, \rho_1, m) f(t) dt \right|.$$

Пусть $\sigma(t, \rho_1, m) = \sigma(t, \rho) = \exp(\rho \tilde{\omega}_k(t-1))$, $\rho = \rho_1 + b_1 m \pi$ и $k = 1, \dots, n-1$. Тогда $\text{Re } \rho \tilde{\omega}_k \geq c|\rho|$, $c > 0$. Отсюда $\text{Re } b_1 \pi \tilde{\omega}_k > 0$. Далее, имеем

$$\int_0^1 \sigma(t, \rho_1, m) f(t) dt = \int_0^1 \psi(t, \rho_1) \exp(-b_1 \pi m \tilde{\omega}_k t) dt,$$

где $\psi(t, \rho_1) = f(1-t) \exp(-\rho_1 \tilde{\omega}_k t)$. Отсюда по лемме 11 получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f(t) \sigma(t, \rho_1, m) dt \right| \leq c_{\psi} c(\alpha).$$

Постоянная c_{ψ} ограничена по ρ_1 , и поэтому лемма в данном случае установлена.

Пусть теперь $k = n$. Тогда $b_1 \tilde{\omega}_n = i$, и поэтому

$$\sum_m \left| \int_0^1 \sigma(t, \rho_1, m) f(t) dt \right| = \sum_m \left| \int_0^1 \psi(t, \rho_1) \exp(m \pi i t) dt \right| = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где Σ_1 – ряд по четным m , а Σ_2 – ряд по нечетным m . Рассмотрим Σ_1 . По теореме Зигмунда $\Sigma_1 \leq c \sqrt{L_{\psi}(V_{\psi} + M_{\psi})}$. По лемме 10 L_{ψ} , V_{ψ} и M_{ψ} ограничены по ρ_1 . Рассмотрим Σ_2 . Имеем

$$\Sigma_2 = \sum \left| \int_0^1 \psi(t, \rho_1) \exp(\pi i t) \exp(2m \pi i t) dt \right|,$$

и тем самым Σ_2 оценивается так же, как и Σ_1 . Значит, и в этом случае лемма доказана. Случай $k \geq n+1$ исследуется аналогично.

ЛЕММА 14. Пусть $f(x)$ – такое же, как в лемме 13. Существует номер m_0 такой, что ряд

$$\sum_{m \geq m_0} \left| \int_{\Gamma_m} (R_{0\lambda} f(x) - u_1(x, \rho) - u_2(x, \rho)) d\lambda \right|$$

сходится всюду на $[0, 1]$ и его сумма ограничена по x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda = i\rho^n$, $\rho \in S_1$ и $\tilde{\gamma}_m$ – часть контура γ_m , лежащая в S_1 . Тогда существует m_0 такое, что по леммам 4 и 12 имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{m \geq m_0} \left| \int_{\tilde{\gamma}_m} (R_{0\lambda} f(x) - u_1(x, \rho) - u_2(x, \rho)) \rho^{n-1} d\rho \right| \\ &= \sum_{m \geq m_0} \left| \int_{\tilde{\gamma}_m} \left[\int_0^1 (H(x, t, \rho) BF(t))_1 dt + \int_0^1 (H(x, t, \rho) BF(t))_2 dt \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_0^1 (H_1(x, t, \rho) BF(t))_1 dt - \int_0^1 (H_1(x, t, \rho) BF(t))_2 dt \right] d\rho \right|. \quad (28) \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma(1-t, \rho_1, m) = \sigma(t, \rho_1, m)$, то каждое слагаемое в правой части (28) оценивается сверху конечной суммой следующих интегралов от рядов:

$$\int_{\tilde{\gamma}_0} \sum_m \|P_m f(x)\| |d\rho_1|, \quad (29)$$

где операторы P_m – те же, что и в лемме 13, и поэтому интегралы в (29) конечны. Значит, правая часть (27) конечна и ограничена по x . Аналогично рассматриваются случаи, когда ρ принадлежит остальным секторам S_2, S_3, S_4 . Лемма доказана.

ЛЕММА 15. Пусть $f(x)$ – такое же, как в лемме 13. Тогда ряд

$$\sum_{m \geq m_0} \left| \int_{\Gamma_m} (u_1(x, \rho) + u_2(x, \rho)) d\lambda \right|$$

сходится и его сумма ограничена по x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл $\int_{\Gamma_m} u_j(x, \rho) d\lambda$ (если он не равен тождественно нулю) с точностью до постоянного множителя (не зависящего от m) есть отдельный член обычного тригонометрического ряда Фурье функции $(BF(x))_j$, и по теореме Зигмунда ряды $\sum \left| \int_{\Gamma_m} u_j(x, \rho) d\lambda \right|$, $j = 1, 2$, сходятся и их суммы ограничены по x . Лемма доказана.

Установим теперь основной результат настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 4. Если $f(x) \in V[0, 1] \cap \text{Lip } \alpha$, $\alpha > 0$, и $f(0) = f(1) = 0$, то ее ряд Фурье по с. п. ф. оператора A сходится абсолютно и сумма модулей его членов ограничена по x .

Утверждение теоремы вытекает из теоремы 3 и лемм 14 и 15, если учесть, что с точностью до постоянного множителя ряд $\sum_{m \geq m_0} \int_{\Gamma_m} R_\lambda f(x) d\lambda$ может отличаться от ряда Фурье функции $f(x)$ по с. п. ф. оператора A лишь на конечное число членов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $f(1) = 0$ необходимо для сходимости разложений по с. п. ф. в точке $x = 1$, а применение теоремы Зигмунда требует, чтобы $f(0) = f(1)$. Отсюда получается условие $f(0) = f(1) = 0$.

Список литературы

1. Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 10. С. 33–50.
2. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 1. С. 14–17.
3. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
4. Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114 (156). № 3. С. 378–405.
5. Кесельман Г. М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 82–93.
6. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

Поступило в редакцию
05.03.2004