Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, Изменение знака функции $S(t)$ на коротких промежутках, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 4, 75–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/im648>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 09:57:50

УДК 511

М. А. Королёв

Изменение знака функции $S(t)$ на коротких промежутках

В работе изучается изменение знака функции $S(t)$ на коротких промежутках вещественной прямой. Доказано, что для почти всех T найдется точка, в которой $S(t)$ меняет знак и которая отстоит от T на расстоянии, не превосходящем $4,39 \ln \ln \ln T$.

Библиография: 13 наименований.

Введение

Прежде всего, дадим определение функции $S(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для вещественного t , отличного от ординаты нуля дзета-функции Римана $\zeta(s)$, положим

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где $\arg \zeta(1/2 + it)$ получается непрерывным продолжением $\arg \zeta(s)$ вдоль ломаной линии, начинающейся в точке $s = 2$, $\arg \zeta(2) = 0$, идущей к точке $s = 2 + it$ и затем к точке $s = 1/2 + it$. Если t – мнимая часть нуля $\zeta(s)$, то

$$S(t) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{2} (S(t + \delta) + S(t - \delta)).$$

Формулой Римана–Мангольда функция $S(t)$ связана с числом $N(t)$ комплексных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq t$ (при условии, что вклад в $N(t)$ каждого из нулей с ординатой t равен $1/2$). Эта формула имеет вид

$$N(t) = \frac{t}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(t) + \Delta(t),$$

где последнее слагаемое – гладкая функция порядка t^{-1} . Следствием этого равенства является тот факт, что $S(t)$ имеет разрывы в точках, совпадающих с ординатами комплексных нулей $\zeta(s)$, причем при переходе через точку разрыва функция $S(t)$ совершает скачок, равный сумме кратностей нулей дзета-функции, имеющих эту точку своей ординатой. На всяком промежутке непрерывности (γ, γ') , где γ, γ' – соседние ординаты таких нулей, функция $S(t)$ является монотонно убывающей с производной, равной

$$-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + O(t^{-2}).$$

Г. Бором и Э. Ландау [1] было установлено в 1913 г., что величина $S(t)$ с ростом t может принимать сколь угодно большие по модулю как положительные, так

и отрицательные значения. Отсюда следует, что функция $S(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ меняет свой знак бесконечно много раз.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для положительного T через $M(T)$ обозначим количество точек перемены знака $S(t)$ на промежутке $(0, T]$.

А. Сельберг в 1946 г. разработал [2] новый метод исследования функции $S(t)$, который позволил свести задачу об оценке числа точек перемен знака этой функции на промежутке $(T, T + H]$ к оценке интегралов

$$I(\alpha) = \int_T^{T+H} |S(t)|^\alpha dt, \quad J(\alpha) = \int_T^{T+H} \left| \int_0^h S(t+u) du \right|^\alpha dt,$$

называемых *моментами* $S(t)$, $\alpha, h > 0$. Если длину H промежутка выбрать равной $T^{0,5+\varepsilon}$, где ε – сколь угодно малое фиксированное положительное число, то метод Сельберга приводит к оценке вида

$$M(T+H) - M(T) \geq H(\ln T)^{1/3} e^{-c_1 \sqrt{\ln \ln T}}, \quad c_1 > 0.$$

Дальнейшее уточнение этого метода (см. [3]–[8]) позволило, с одной стороны, сократить длину H исследуемого промежутка до $T^{27/82+\varepsilon}$ и, с другой стороны, заменить правую часть последнего неравенства величиной

$$H(\ln T) e^{-c_2 \frac{\ln \ln T}{\sqrt{\ln \ln \ln T}}}, \quad c_2 > 0.$$

Более того, для почти всех T соответствующая оценка справедлива уже при $H = T^\varepsilon$. Согласно гипотезе Сельберга [9] число перемен знака функции $S(t)$ на таком промежутке асимптотически равно

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{H \ln T}{\sqrt{\ln \ln T}}.$$

В доказательствах перечисленных выше оценок, проводимых методом Сельберга, существенно используется то обстоятельство, что величина H достаточно велика по сравнению с T :

$$H = T^{c_3}, \quad 0 < c_3 < 1.$$

Те же рассуждения, примененные, например, к промежутку $(T, T + \ln T]$, не только не приводят к нижней оценке разности $M(T+H) - M(T)$, но даже не позволяют утверждать, что она положительна.

Иной подход к исследованию величины $M(T)$ был предложен Дж. Мюллер [10]. Пусть T – достаточно большое число, $T > 0$. При каком значении A промежуток $(T - A, T + A]$ будет содержать точку перемены знака функции $S(t)$? Иными словами, требуется указать как можно меньшее значение A (как функцию T), для которого разность $M(T+A) - M(T-A)$ будет строго больше нуля.

Опираясь на гипотезу Римана, Дж. Мюллер доказала, что величину A можно положить равной $c_4 \ln \ln \ln T$, где c_4 – абсолютная постоянная.

Отказ от использования гипотезы Римана и применение плотностной теоремы для нулей дзета-функции позволяют получить подобный результат для почти всех T , но с еще меньшим значением A .

Цель настоящей статьи состоит в доказательстве следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0,001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $A = 4,39 \ln \ln \ln T$. Тогда интервал $(t - A, t + A)$ содержит точку перемены знака функции $S(t)$ при любом t , $T \leq t \leq T + H$, за исключением значений из множества E с мерой

$$\text{mes}(E) = O(H(\ln \ln T)^{-0,5}).$$

Идея доказательства этого утверждения восходит к работе Дж. Мюллер [10] и основана на следующем факте. Пусть неотрицательные функции $\psi_0(u)$ и $\psi_1(u)$ таковы, что при некотором положительном A для данного T выполнены неравенства

$$\int_{-A}^A \psi_0(u) S(T+u) du < 0, \quad \int_{-A}^A \psi_1(u) S(T+u) du > 0.$$

Тогда функция $S(t)$ меняет знак по крайней мере в одной точке интервала $(T - A, T + A)$.

В настоящей работе леммы 5–7 посвящены реализации этой идеи. В § 1 приведены формулировки вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основных лемм и теоремы.

В статье используются следующие обозначения: a, b – положительные абсолютные постоянные, $K(z) = \exp \{-(e^z + e^{-z})\}$, ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0,001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Через $\text{mes}(E)$ обозначена мера Лебега множества E . Функция Мангольда $\Lambda(n)$ равна $\ln p$, если $n = p^r$, p – простое, $r \geq 1$ – целое, и равна нулю в остальных случаях.

§ 1. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. Пусть $\psi(z)$ – функция, вещественная на вещественной прямой, аналитическая в полосе $|\text{Im } z| \leq 1$ и удовлетворяющая в этой полосе условию $|\psi(z)| \leq c(1+|z|)^{-(1+\alpha)}$, где c и α – положительные абсолютные постоянные. Пусть

$$\hat{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) e^{-ixu} du.$$

Тогда при любом вещественном t справедлива формула

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) S(t+u) du &= \pi^{-1} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \ln n} \text{Im}(n^{-it} \hat{\psi}(\ln n)) \\ &+ 2 \left(\sum_{\beta > 0,5} \int_0^{\beta-0,5} \text{Im} \psi(\gamma - t - ix) dx - \int_0^{0,5} \text{Im} \psi(-t - ix) dx \right), \end{aligned}$$

где β принимает значения вещественных частей нулей дзета-функции, лежащих правее критической прямой.

Частный случай этой формулы был использован А. Сельбергом в работе [2] при доказательстве омега-теорем для функции $S(t)$. Доказательство общей формулы см. в [11].

ЛЕММА 2 (формула первого момента $S(t)$). Пусть c_1, c_2 – положительные абсолютные постоянные, $c_1 T \leq T_1 \leq c_2 T$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\int_{T_1}^{T_1+H} |S(t)| dt = \frac{H}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \ln T} (1 + O((\ln \ln \ln T)^{-0,5})),$$

где постоянная в знаке O зависит от ε .

Асимптотика первого момента функции $S(t)$ впервые была получена А. Гошем в 1981 г. для случая $H = T^{0,5+\varepsilon}$ [12]. Доказательство этой формулы для $H = T^{27/82+\varepsilon}$ см. в [5].

ЛЕММА 3 (плотностная теорема А. А. Карацубы). Пусть $N(\sigma, T)$ – число нулей $\zeta(s)$ в области $\operatorname{Re} s \geq \sigma$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$, $0,5 \leq \sigma \leq 1$. Тогда имеет место оценка

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) \leq cH(\ln T)T^{-0,1\varepsilon(2\sigma-1)},$$

где c – положительная абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы см. в [3].

§ 2. Основные леммы

ЛЕММА 4. Для любых вещественных x и b , $0 < b < \pi/2$, справедливо неравенство

$$|\widehat{K}(x)| \leq \kappa(b) \exp\{-b|x|\},$$

где

$$\kappa(b) = 2 \int_0^{+\infty} \exp\{-(e^u + e^{-u}) \cos b\} du.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $x \geq 0$. Возьмем $R > 1$ и рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\Gamma} K(z) e^{-ixz} dz,$$

где Γ – граница прямоугольника с вершинами в точках $\pm R, \pm R - ib$, обходимая против часовой стрелки. По теореме Коши о вычетах имеет место равенство $I = 0$.

Сумма интегралов по боковым сторонам контура по модулю не превосходит величины

$$\begin{aligned} & \int_0^b (|K(R+it)| + |K(R-it)|) e^{-xt} dt \\ & \leq 2 \int_0^b \exp \{-(e^R + e^{-R}) \cos b\} dt < \pi \exp \{-e^R \cos b\}. \end{aligned}$$

Следовательно, при некотором θ , модуль которого не превосходит единицы, имеет место следующее равенство:

$$\int_{-R}^R K(u) e^{-ixu} du = \int_{-R}^R K(u-ib) e^{-ix(u-ib)} du + \pi \theta \exp \{-e^R \cos b\}.$$

Устремим здесь R к бесконечности и заметим, что предел левой части равен $\widehat{K}(x)$. Таким образом мы приходим к искомой оценке:

$$\begin{aligned} |\widehat{K}(x)| & \leq e^{-xb} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(u-ib)| du \\ & \leq e^{-xb} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{-(e^u + e^{-u}) \cos b\} du = \varkappa(b) e^{-xb}. \end{aligned}$$

В случае, когда $x < 0$, доказательство проводится аналогично, с той лишь разницей, что в качестве пути интегрирования Γ следует брать контур, симметричный относительно вещественной оси контуру, рассмотренному выше. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $a > 1$, $0 < b < \pi/2$, $2ab > 1$, $A > 0$. Определим неотрицательные функции $\psi_k(u)$, $k = 0, 1$, равенством

$$\psi_k(u) = \frac{1}{a} K\left(\frac{u}{a}\right) (1 + (-1)^k \sin((t+u) \ln 2)).$$

Тогда для любого $t > t_0 > 1$ справедливо соотношение

$$\int_{-A}^A \psi_k(u) S(t+u) du = (-1)^{k+1} c + \theta_k \left(U + V + W + 0,8a^{-1} \exp \left\{ -\left(\frac{t}{2a} \right)^2 \right\} \right),$$

где $k = 0, 1$,

$$c = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \exp \{-(e^u + e^{-u})\} du = 0,02563512796 \dots, \quad |\theta_k| \leq 1,$$

$$U = U(t; a) = 3,1a^{-1} \sum_{\beta > 0,5} (\beta - 0,5)^2 \exp \left\{ -\left(\frac{\gamma - t}{2a} \right)^2 \right\},$$

$$V = V(t; A, a) = 4a^{-1} \int_A^{+\infty} K\left(\frac{u}{a}\right) (|S(t+u)| + |S(t-u)|) du,$$

$$W = W(a, b) = (2\pi)^{-1} \varkappa(b) \left((\zeta(ab + 0,5) - 1) (2^{0,5ab} + 2^{-0,5ab})^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 1$, $z = x + iy$, модуль каждой из функций $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$ не превосходит величины

$$\begin{aligned} & a^{-1}(1 + 0,5(2^y + 2^{-y})) \exp \left\{ -(e^{x/a} + e^{-x/a}) \cos \frac{y}{a} \right\} \\ & = 2,25\theta \exp \{ -e^{|x|/a} \cos 1 \}, \quad |\theta| \leq 1, \end{aligned}$$

верхней границей которой при надлежащих c и α служит дробь $c/(1 + |z|)^{1+\alpha}$. Следовательно, к интегралам

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(u) S(t+u) du, \quad k = 0, 1,$$

можно применить лемму 1. Согласно этой лемме интеграл I_k представляется рядом

$$\pi^{-1} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \ln n} \operatorname{Im} (n^{-it} \hat{\psi}_k(\ln n)),$$

сложенным с величиной

$$U_k = 2 \left(\sum_{\beta > 0,5} \int_0^{\beta-0,5} \operatorname{Im} \psi_k(\gamma - t - ix) dx - \int_0^{0,5} \operatorname{Im} \psi_k(-t - ix) dx \right).$$

По определению значение $n^{-it} \hat{\psi}_k(\ln n)$ выражается следующим несобственным интегралом:

$$\begin{aligned} & n^{-it} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(u) n^{-iu} du \\ & = n^{-it} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{-1} K\left(\frac{u}{a}\right) (1 + (-1)^k \sin((t+u) \ln 2)) n^{-iu} du. \end{aligned}$$

Заменяя по формуле Эйлера величину $\sin((t+u) \ln 2)$ разностью $(2^{i(t+u)} - 2^{-i(t+u)})/(2i)$, получим

$$\begin{aligned} n^{-it} \hat{\psi}_k(\ln n) & = n^{-it} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{-1} K\left(\frac{u}{a}\right) \left(1 + \frac{(-1)^k}{2i} (2^{i(t+u)} - 2^{-i(t+u)})\right) n^{-iu} du \\ & = n^{-it} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{-1} K\left(\frac{u}{a}\right) n^{-iu} du \\ & \quad + \frac{(-1)^k}{2i} \left(\frac{n}{2}\right)^{-it} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{-1} K\left(\frac{u}{a}\right) \left(\frac{n}{2}\right)^{-iu} du \\ & \quad - \frac{(-1)^k}{2i} (2n)^{-it} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{-1} K\left(\frac{u}{a}\right) (2n)^{-iu} du \\ & = n^{-it} \hat{K}(a \ln n) + \frac{(-1)^k}{2i} \left(\left(\frac{n}{2}\right)^{-it} \hat{K}\left(a \ln \frac{n}{2}\right) - (2n)^{-it} \hat{K}(a \ln 2n) \right). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения нетрудно заключить, что при $n = 2$ в выражении для $n^{-it}\hat{\psi}_k(\ln n)$ присутствует чисто мнимое слагаемое $-\frac{i}{2}(-1)^k\hat{K}(0)$, вкладом которого в интеграл I_k является величина

$$\frac{(-1)^{k+1}}{2\sqrt{2}\pi}\hat{K}(0) = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\exp\{-(e^u + e^{-u})\}du = (-1)^{k+1}c.$$

Таким образом, формула для интеграла I_k принимает следующий вид:

$$I_k = (-1)^{k+1}c + U_k + W_k,$$

где

$$\begin{aligned} W_k = & \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}\ln n}\operatorname{Im}(n^{-it}\hat{K}(a\ln n)) \\ & + \frac{(-1)^k}{2\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}\ln n}\operatorname{Im}(i(2n)^{-it}\hat{K}(a\ln 2n)) \\ & - \frac{(-1)^k}{2\pi}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}\ln n}\operatorname{Im}\left(i\left(\frac{n}{2}\right)^{-it}\hat{K}\left(a\ln\frac{n}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством леммы 4, оценим величину W_k по абсолютной величине:

$$\begin{aligned} |W_k| \leq & \frac{\varkappa(b)}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}n^{-0,5-ab} \\ & + \frac{\varkappa(b)}{2\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}n^{-0,5}(2n)^{-ab} + \frac{\varkappa(b)}{2\pi}\sum_{n=3}^{+\infty}n^{-0,5}\left(\frac{n}{2}\right)^{-ab}. \end{aligned}$$

Поскольку $2ab > 1$, то ряды в правой части последнего неравенства сходятся, и их суммы равны

$$\zeta(ab + 0,5) - 1, \quad 2^{-ab}(\zeta(ab + 0,5) - 1)$$

и

$$2^{ab}\left(\zeta(ab + 0,5) - 1 - \frac{2^{-ab}}{\sqrt{2}}\right)$$

соответственно. Следовательно,

$$\begin{aligned} |W_k| \leq & \frac{\varkappa(b)}{\pi}(\zeta(ab + 0,5) - 1) \\ & + \frac{\varkappa(b)}{2\pi}\left(2^{-ab}(\zeta(ab + 0,5) - 1) + 2^{ab}\left(\zeta(ab + 0,5) - 1 - \frac{2^{-ab}}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ = & \frac{\varkappa(b)}{2\pi}\left((\zeta(ab + 0,5) - 1)(2^{0,5ab} + 2^{-0,5ab})^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = W(a, b). \end{aligned}$$

Для того чтобы оценить величины U_k , рассмотрим интеграл

$$I(\varrho) = \int_0^{\beta-0,5} \operatorname{Im} \psi_k(\gamma - t - ix) dx, \quad \varrho = \beta + i\gamma.$$

Из определения функций ψ_k мы заключаем, что подынтегральное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} & a^{-1} \exp \left\{ - (e^{(\gamma-t)/a} + e^{-(\gamma-t)/a}) \cos \frac{x}{a} \right\} \\ & \times \left((1 + 0,5(-1)^k \sin(\gamma \ln 2)(2^x + 2^{-x})) \sin \left(\sin \frac{x}{a} (e^{(\gamma-t)/a} - e^{-(\gamma-t)/a}) \right) - \right. \\ & \left. - 0,5(-1)^k \cos(\gamma \ln 2)(2^x - 2^{-x}) \cos \left(\sin \frac{x}{a} (e^{(\gamma-t)/a} - e^{-(\gamma-t)/a}) \right) \right). \end{aligned}$$

Поскольку $|\sin \xi| \leq |\xi|$ для любого вещественного ξ , то мнимая часть $\psi_k(\gamma - t - ix)$ удовлетворяет следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \psi_k(\gamma - t - ix)| & \leq \frac{1}{a} \exp \left\{ -e^{|\gamma-t|/a} \cos \frac{1}{2a} \right\} \\ & \times \left(\left(1 + 0,5 \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) \frac{x}{a} e^{|\gamma-t|/a} + 0,5(2^x - 2^{-x}) \right) \\ & < \frac{1}{a} \exp \left\{ -e^{|\gamma-t|/a} \cos \frac{1}{2} \right\} \left(2,1 \frac{x}{a} e^{|\gamma-t|/a} + x\sqrt{2} \ln 2 \right) \\ & < 3,1 \frac{x}{a} \exp \left\{ -e^{|\gamma-t|/a} \cos \frac{1}{2} + \frac{|\gamma-t|}{a} \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы заменить показатель экспоненты более простым выражением, заметим, что при любом неотрицательном ξ верны неравенства

$$\left(\cos \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) e^\xi > e^{\xi-1} > 1 + (\xi - 1) = \xi, \quad -\frac{1}{2} e^\xi < -\left(\frac{\xi}{2} \right)^2,$$

следствием которых оказывается оценка

$$-e^{|\gamma-t|/a} \cos \frac{1}{2} + \frac{|\gamma-t|}{a} < -0,5e^{|\gamma-t|/a} < -\left(\frac{\gamma-t}{2a} \right)^2.$$

Таким образом, интеграл $I(\varrho)$ по модулю не превосходит выражения

$$\int_0^{\beta-0,5} 3,1 \frac{x}{a} \exp \left\{ -\left(\frac{\gamma-t}{2a} \right)^2 \right\} dx = 1,55 \frac{1}{a} (\beta - 0,5)^2 \exp \left\{ -\left(\frac{\gamma-t}{2a} \right)^2 \right\},$$

а интеграл

$$I(1) = \int_0^{0,5} \operatorname{Im} \psi_k(-t - ix) dx$$

не превосходит величины $0,4a^{-1} \exp \left\{ -\left(\frac{t}{2a} \right)^2 \right\}$. Отсюда следует искомая оценка U_k :

$$|U_k| < 3,1 \frac{1}{a} \sum_{\beta > 0,5} (\beta - 0,5)^2 \exp \left\{ -\left(\frac{\gamma - t}{2a} \right)^2 \right\} + 0,8 \frac{1}{a} \exp \left\{ -\left(\frac{t}{2a} \right)^2 \right\} = U(t) + 0,8 \frac{1}{a} \exp \left\{ -\left(\frac{t}{2a} \right)^2 \right\}.$$

Для завершения доказательства леммы представим интеграл I_k суммой:

$$\left(\int_{-A}^A + \int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{+\infty} \right) \psi_k(u) S(t+u) du = \int_{-A}^A \psi_k(u) S(t+u) du + V_k,$$

и заметим, что вклад V_k от двух несобственных интегралов по абсолютной величине не превосходит

$$\begin{aligned} & \int_A^{+\infty} |\psi_k(u)| |S(t+u)| du + \int_{-\infty}^{-A} |\psi_k(-u)| |S(t-u)| du \\ & \leq 2a^{-1} \int_A^{+\infty} \left(K \left(\frac{u}{a} \right) |S(t+u)| + K \left(-\frac{u}{a} \right) |S(t-u)| \right) du = V(t). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть

$$j_1(T) = \int_T^{T+H} U(t) dt.$$

Тогда справедливо неравенство $j_1(T) \leq (c_1 \varepsilon^{-1})^3 H (\ln T)^{-1}$, где c_1 — абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интеграл

$$j(T; \gamma) = \int_T^{T+H} \exp \left\{ -\left(\frac{\gamma - t}{2a} \right)^2 \right\} dt.$$

Поскольку при $T \leq t \leq T+H$ дробь $(t-T)^2/H^2$ не превосходит единицы, то справедлива оценка

$$\begin{aligned} j(T; \gamma) & \leq e \int_T^{T+H} \exp \left\{ -\left(\frac{t-T}{H} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - t}{2a} \right)^2 \right\} dt \\ & < e \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\left(\frac{t-T}{H} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - t}{2a} \right)^2 \right\} dt. \end{aligned}$$

Выделяя в показателе экспоненты полный квадрат и делая замену переменной, получим

$$\begin{aligned} j(T; \gamma) & < e \exp \left\{ -\frac{(\gamma - T)^2}{H^2 + (2a)^2} \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\left(\frac{1}{H^2} + \frac{1}{(2a)^2} \right) t^2 \right\} dt \\ & = e \sqrt{\frac{\pi}{H^{-2} + (2a)^{-2}}} \exp \left\{ -\frac{(\gamma - T)^2}{H^2 + (2a)^2} \right\} < 2ae\sqrt{\pi} \exp \left\{ -\left(\frac{\gamma - T}{2H} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл из условия леммы не превосходит величины

$$\begin{aligned} & 3,1 \frac{1}{a} \cdot 2ae\sqrt{\pi} \sum_{\beta > 0,5} (\beta - 0,5)^2 \exp \left\{ - \left(\frac{\gamma - T}{2H} \right)^2 \right\} \\ & = 30 \theta \sum_{\beta > 0,5} (\beta - 0,5)^2 \exp \left\{ - \left(\frac{\gamma - T}{2H} \right)^2 \right\}, \quad |\theta| \leq 1. \end{aligned}$$

Представим сумму по нулям дзета-функции в виде

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \sum_{2\nu H < |\gamma - T| \leq 2(\nu+1)H} (\beta - 0,5)^2 \exp \left\{ - \left(\frac{\gamma - T}{2H} \right)^2 \right\} = U^{(1)} + U^{(2)},$$

относя к $U^{(1)}$ члены с $\nu \leq TH^{-1}/3$, а к $U^{(2)}$ – все остальные слагаемые. Таким образом, получим

$$U^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} e^{-\nu^2} \left(\sum_{T+2\nu H < \gamma \leq T+2(\nu+1)H} (\beta - 0,5)^2 + \sum_{T-2(\nu+1)H \leq \gamma < T-2\nu H} (\beta - 0,5)^2 \right).$$

Оценим сначала первую внутреннюю сумму. Фиксируя произвольное целое число k из промежутка $0 \leq k \leq 0,5 \ln T$, мы убеждаемся, что количество членов этой суммы с условием

$$\frac{k}{\ln T} < \beta - 0,5 \leq \frac{k+1}{\ln T}$$

не превосходит разности

$$N\left(0,5 + \frac{k}{\ln T}, T + 2(\nu+1)H\right) - N\left(0,5 + \frac{k}{\ln T}, T + 2\nu H\right),$$

верхней границей которой согласно лемме 3 служит величина

$$c \cdot 2H(\ln T)T^{-0,1\varepsilon(2(0,5+k/\ln T)-1)} = 2cH(\ln T)e^{-0,2k\varepsilon}.$$

При этом вклад в сумму от каждого из этих слагаемых не превосходит величины

$$\left(0,5 + \frac{k+1}{\ln T} - 0,5\right)^2 = \left(\frac{k+1}{\ln T}\right)^2.$$

Следовательно, имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} & \sum_{T+2\nu H < \gamma \leq T+2(\nu+1)H} (\beta - 0,5)^2 \leq \sum_{0 \leq k \leq 0,5 \ln T} \left(\frac{k+1}{\ln T}\right)^2 2cH(\ln T)e^{-0,2k\varepsilon} \\ & \leq \frac{2cH}{\ln T} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^2 e^{-0,2k\varepsilon} = \frac{2cH}{\ln T} \frac{1 + e^{-0,2\varepsilon}}{(1 - e^{-0,2\varepsilon})^3} < 4c(5,5\varepsilon^{-1})^3 H \frac{1}{\ln T}. \end{aligned}$$

Поскольку $T - 2(\nu + 1)H \asymp T$, то для суммы по γ из промежутка $T - 2(\nu + 1)H \leq \gamma < T - 2\nu H$ будет справедлива та же оценка. Поэтому верхняя граница для $U^{(1)}$ имеет следующий вид:

$$U^{(1)} < 8c(5,5\varepsilon^{-1})^3 H \frac{1}{\ln T} \sum_{\nu=0}^{+\infty} e^{-\nu^2} < 12,8c(5,5\varepsilon^{-1})^3 H \frac{1}{\ln T}.$$

Сумму $U^{(2)}$ оценим грубо, пользуясь формулой Римана–Мангольда:

$$\begin{aligned} U^{(2)} &\leq \sum_{\nu > TH^{-1}/3} \exp\{-\nu^2\} \sum_{2\nu H < |\gamma - T| \leq 2(\nu+1)H} 1 \\ &< \sum_{\nu > TH^{-1}/3} \exp\{-\nu^2\} \sum_{|\gamma| \leq T+2(\nu+1)H} 1 \\ &\ll \sum_{\nu > TH^{-1}/3} \exp\{-\nu^2\} \nu H \ln(\nu H) < 0,2c. \end{aligned}$$

Полученные выше неравенства приводят к искомой оценке интеграла $j_1(T)$:

$$\begin{aligned} j_1(T) &< 30 \left(12,8c(5,5\varepsilon^{-1})^3 H \frac{1}{\ln T} + 0,2c \right) \\ &< 390c(5,5\varepsilon^{-1})^3 H \frac{1}{\ln T} < (c_1\varepsilon^{-1})^3 H \frac{1}{\ln T}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\varkappa_1 > 0$, и пусть $E_1 = E_1(\varkappa_1; T)$ – множество тех t , $T \leq t \leq T + H$, для которых $U(t) > \varkappa_1$. Тогда для меры множества E_1 справедлива оценка

$$\text{mes}(E_1) < \frac{1}{\varkappa_1} (c_1\varepsilon^{-1})^3 H \frac{1}{\ln T}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из цепочки неравенств

$$\varkappa_1 \text{mes}(E_1) \leq \int_{E_1} U(t) dt \leq \int_T^{T+H} U(t) dt \leq (c_1\varepsilon^{-1})^3 H \frac{1}{\ln T}.$$

ЛЕММА 7. Пусть $A = a \ln \ln \ln \ln T$. Тогда для интеграла

$$j_2(T) = \int_T^{T+H} V(t) dt$$

имеет место оценка $j_2(T) < H(\ln \ln T)^{-0,5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, пользуясь определением функции $V(t)$, преобразуем интеграл j_2 :

$$j_2(T) = 4 \frac{1}{a} \int_A^{+\infty} K\left(\frac{u}{a}\right) \left(\int_{T+u}^{T+u+H} |S(t)| dt + \int_{T-u}^{T-u+H} |S(t)| dt \right) du.$$

Бесконечный промежуток интегрирования разобьем на два: $A \leq u \leq 0,5T$, $0,5T < u < +\infty$. Если u меняется в первом промежутке, то величины $T \pm u$ заключены между $0,5T$ и $1,5T$. Согласно формуле леммы 2 сумма двух интегралов по t , выписанная в выражении для j_2 в скобках, равна

$$\frac{2H}{\pi\sqrt{\pi}} (\ln \ln T)^{0,5} (1 + O((\ln \ln \ln T)^{-0,5}))$$

и при больших T не превосходит $0,4H(\ln \ln T)^{0,5}$. В случае, когда u велико ($u > 0,5T$), указанная сумма оценивается сверху удвоенной длиной промежутка интегрирования, умноженной на максимум подынтегральной функции $|S(t)|$ на отрезке $T - u \leq t \leq T + u + H$, равный $O(\ln(T + u))$ (см. [13, с. 211]). Таким образом, мы приходим к серии неравенств

$$\begin{aligned} j_2(T) &< 4 \cdot 0,4H(\ln \ln T)^{0,5} \int_A^{+\infty} \frac{1}{a} K\left(\frac{u}{a}\right) du \\ &\quad + O\left(H \int_{0,5T}^{+\infty} \frac{1}{a} K\left(\frac{u}{a}\right) H \ln(T + u) du\right) \\ &< 1,6H(\ln \ln T)^{0,5} \int_A^{+\infty} \frac{1}{a} \exp\{-e^{u/a}\} du \\ &\quad + O\left(H \int_{0,5T}^{+\infty} \frac{1}{a} \exp\{-e^{u/a}\} \ln u du\right) \\ &< 1,6H(\ln \ln T)^{0,5} \exp\{-e^{A/a}\} e^{-A/a} + O(H(\ln T)e^{-T/(2a)}) \\ &= 1,6H(\ln \ln T)^{0,5} \exp\{-\ln \ln \ln T - \ln \ln \ln \ln T\} + O(H(\ln T)e^{-T/(2a)}) \\ &< H(\ln \ln T)^{-0,5}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A – то же, что и в условии леммы 7, $\varkappa_2 > 0$, и пусть $E_2 = E_2(\varkappa_2; T)$ – множество тех t , $T \leq t \leq T + H$, для которых $V(t) > \varkappa_2$. Тогда для меры множества E_2 справедлива оценка

$$\text{mes}(E_2) < \varkappa_2^{-1} H(\ln \ln T)^{-0,5}.$$

§ 3. Доказательство теоремы

Согласно лемме 5 для $k = 0, 1$ имеют место равенства

$$\int_{-A}^A \psi_k(u) S(T + u) du = (-1)^{k+1} c + \theta_k \left(U + V + W + 0,8 \frac{1}{a} e^{-(0,5T/a)^2} \right),$$

в которых $c = 0,02563512796 \dots$, $|\theta_k| \leq 1$,

$$\begin{aligned} U(t) &= 3,1 \frac{1}{a} \sum_{\beta > 0,5} (\beta - 0,5)^2 \exp \left\{ - \left(\frac{\gamma - t}{2a} \right) \right\}, \\ V(t) &= 4 \frac{1}{a} \int_A^{+\infty} K \left(\frac{u}{a} \right) (|S(t+u)| + |S(t-u)|) du, \\ W(a, b) &= \frac{\varkappa(b)}{2\pi} \left((\zeta(ab + 0,5) - 1) (2^{0,5ab} + 2^{-0,5ab})^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ \varkappa(b) &= 2 \int_0^{+\infty} \exp \{ -(e^u + e^{-u}) \cos b \} du, \end{aligned}$$

причем $a > 1$, $0 < b < \pi/2$, $2ab > 1$ и $A = a \ln \ln \ln T$.

Положим в этих соотношениях $a = 4,39$, $b = 1,1$ и будем считать T настолько большим, чтобы величина $0,8 \frac{1}{a} e^{-(0,5T/a)^2}$ не превосходила 10^{-5} . При таком выборе $W(a, b) < 0,02557018$.

Пользуясь следствиями 1, 2 построим множества E_1 и E_2 , содержащиеся в промежутке $T \leq t \leq T + H$ и такие, что $U(t) > 10^{-5}$ при $t \in E_1$ и $V(t) > 10^{-5}$ при $t \in E_2$. Тогда

$$\text{mes}(E_1) = O(H(\ln T)^{-1}), \quad \text{mes}(E_2) = O(H(\ln \ln T)^{-0,5}).$$

Полагая $E = E_1 + E_2$ и исключая из рассмотрения это множество, для оставшихся значений t будем иметь

$$\begin{aligned} U(t) &\leq 10^{-5}, \quad V(t) \leq 10^{-5}, \\ \int_{-A}^A \psi_0(u) S(T+u) du &< -c + 0,02557018 + 3 \cdot 10^{-5} < -3 \cdot 10^{-5} < 0, \\ \int_{-A}^A \psi_1(u) S(T+u) du &> c - 0,02557018 - 3 \cdot 10^{-5} > 3 \cdot 10^{-5} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, промежуток $(-A, A)$ содержит точку перемены знака функции $S(t+u)$. Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\text{mes}(E) \leq \text{mes}(E_1) + \text{mes}(E_2) = O(H(\ln \ln T)^{-0,5}).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пользуясь леммой 5 и предполагая справедливость гипотезы Римана, можно показать, что в условной теореме Дж. Мюллер из [10] величину A можно положить равной $4,39 \ln \ln \ln T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. С помощью изложенных приемов можно исследовать перемены знака функции $S(\sigma, t)$, $0,5 \leq \sigma \leq 1$, равной приращению непрерывной ветви аргумента $\zeta(s)$ вдоль ломаной линии с вершинами в точках $s = 2$, $s = 2 + it$ и $s = \sigma + it$.

Список литературы

1. *Bohr H., Landau E.* Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion // Math. Ann. 1913. V. 74. № 1. P. 3–30.
2. *Selberg A.* Contributions to the theory of the Riemann zeta-function // Arch. Math. Naturvid. 1946. V. 48. № 5. P. 89–155.
3. *Карацуба А. А.* О функции $S(t)$ // Изв. РАН. Сер.матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 27–56.
4. *Карацуба А. А.* Плотностная теорема и поведение аргумента дзета-функции Римана // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 448–449.
5. *Королёв М. А.* Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой // Тр. МИАН. 2002. Т. 239. С. 215–238.
6. *Королёв М. А.* О числе перемен знака функции $S(t)$ на коротком промежутке // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 4. С. 446–447.
7. *Королёв М. А.* Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой // Изв. РАН. Сер.матем. 2003. Т. 67. № 2. С. 21–60.
8. *Королёв М. А.* О поведении функции $S(t)$ на коротких промежутках // Докл. РАН. 2003. Т. 390. № 5. С. 588–589.
9. *Selberg A.* Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989). Salerno: Univ. di Salerno, 1992. P. 365–387.
10. *Mueller J. H.* On the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ – gaps between sign changes of $S(t)$ // Mathematika. 1983. V. 29. № 58. P. 264–269.
11. *Tsang K.-M.* Some Ω -theorems for the Riemann zeta-function // Acta Arith. 1986. V. 46. № 4. P. 369–395.
12. *Ghosh A.* On Riemann's zeta-function – sign changes of $S(T)$ // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 1. N.Y.: Academic Press, 1981. P. 29–46.
13. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.

Поступило в редакцию
28.04.2005