Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, О разрушении решений класса сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений типа Соболева с источниками, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 4, 89–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/im649>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:56:43

УДК 517.957

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

**О разрушении решений класса сильно
нелинейных волновых диссипативных
уравнений типа Соболева с источниками**

Рассмотрена абстрактная задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с нелинейными операторными коэффициентами. В качестве приложений приведены примеры сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений типа Соболева. Для данной задачи получены достаточные, близкие к необходимым, условия как глобальной разрешимости, так и разрушения за конечное время. В частности, при дополнительных условиях на нелинейные операторы доказана разрешимость задачи в любом конечном цилиндре, кроме того, доказано разрушение решения задачи за конечное время при некоторых условиях, налагаемых на норму начальной функции. Приведены задачи для уравнений типа Соболева, удовлетворяющие введенным условиям.

Библиография: 33 наименования.

§ 1. Введение. Постановка задачи

Целью настоящего исследования является получение оптимальных результатов типа теорем “существования–несуществования” решения начальных краевых задач для класса сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений типа Соболева, которые в абстрактной постановке являются задачей Коши для уравнений с операторными коэффициентами в банаховых пространствах

$$\frac{d}{dt} \left(A_0 u + \sum_{j=1}^N A_j(u) \right) + Lu + \mathbb{D}P(u) = F(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1.1)$$

и оценок снизу и сверху времени разрушения решений задачи (1.1).

Под оптимальными результатами мы понимаем такие, что при одних исходных параметрах задачи имеет место разрушение решений, а при других – глобальная разрешимость. В этой связи мы намеренно сузили класс рассматриваемых уравнений типа Соболева до такого класса, для которого можно получить оптимальные результаты. Кроме того, мы рассматриваем лишь такие задачи, для которых может быть доказана единственность решения, понимаемого в том или ином смысле.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 02-01-00253, 02-01-06038).

В последнее время в математической физике стали интенсивно появляться новые сильно нелинейные волновые диссипативные уравнения псевдопараболического типа [1], [2], причем модельные уравнения оказываются либо третьего, либо пятого порядка с производной по времени первого порядка.

Исследованию уравнений псевдопараболического и соболевского типов посвящено большое количество работ. Прежде всего отметим классическую работу [3] (последующие результаты по исследованию линейных уравнений типа Соболева см. в работах [4], [5]). Отметим также работу [6], где был предложен операторный метод исследования линейных уравнений типа Соболева высокого порядка. В работе [7] был предложен метод полугрупп с нетривиальными ядрами, который был успешно применен к исследованию разнообразных задач для нелинейных псевдопараболических задач.

Исследованию вопросов разрушения решений квазилинейных диссипативных “не волновых” уравнений с источниками посвящена классическая работа [8]. В этой работе был предложен оригинальный энергетический метод исследования разрушения решений уравнений формально параболического вида

$$\mathbb{P}u_t = -\mathbb{A}u + \mathbb{F}(u), \quad (1.2)$$

где существенно использовалась линейность и позитивность операторов $\mathbb{P}$ и $\mathbb{A}$, определенных на некотором гильбертовом пространстве. Далее в работе [9] данный подход был развит и применен для исследования, например, такого нелинейного уравнения:

$$|u'|^q u' + \mathbb{A}u = \mathbb{F}(u, t). \quad (1.3)$$

Однако исследование случая производной по времени нелинейного эллиптического оператора осталось вне рамок предлагаемой в [8] техники.

В работе [10] методом нижних и верхних решений был исследован вопрос о разрушении решения и о глобальной разрешимости для уравнения типа Буссинеска с источником.

В работе [11] была предложена некоторая модификация энергетического метода Г. А. Левина [8], [9] и удалось рассмотреть случай сильно нелинейных псевдопараболических “не волновых” уравнений с источниками. В работах [12], [13] авторами были рассмотрены следующие операторно-дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_j(u) \right) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_j(u) \right) + \mathbb{L}u = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_j(u) \right) + \mathbb{D}\mathbb{P}(u) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1.6)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbb{A}_0 u + \mathbb{L}u) + \mathbb{L}u + \mathbb{D}\mathbb{P}(u) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1.7)$$

где $\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_j(u)$ – нелинейный эллиптический оператор, $\mathbb{L}u$ – линейный диссипативный эллиптический оператор, $\mathbb{D}\mathbb{P}(u)$ – оператор “конвективной” нелинейности, $\mathbb{F}(u)$ – оператор нелинейного источника. В целях определенной завершенности цикла результатов о разрушении решений сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа возникла задача (1.1), имеющая физические приложения. В частности, к задаче (1.1) сводятся задачи о волновых процессах в полупроводниках или магнетиках при наличии внешнего электрического поля или магнитного поля при нелинейной зависимости диэлектрической проницаемости от электрического поля либо магнитной восприимчивости от магнитного поля, при учете диссипации в среде и наличии внешних источников. Подробный вывод модельных уравнений приведен в [1], [2].

Принципиально новый подход, называемый *методом пробных функций* и предложенный в работе [14], может быть применен для исследования дифференциальных неравенств псевдопараболического типа.

Отметим, что исследованию волновых квазилинейных диссипативных уравнений с источниками и без источников посвящены работы [15]–[21]. В этих работах рассматривались вопросы асимптотического поведения решений псевдопараболических уравнений при больших временах, а также вопросы существования решений типа уединенных волн и их устойчивости.

Приведем примеры некоторых модельных трехмерных сильно нелинейных уравнений типа Соболева, вывод которых содержится в работах [1], [2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta u - u + \sum_{j=1}^N \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j-2} \nabla u) \right) - u + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + u^3 = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u - |u|^{q_1} u) + \Delta u + \frac{\partial |u|^{q_2+1}}{\partial x_1} + |u|^{2q_2} u = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\Delta^2 u + \Delta u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u)) + \Delta u + u \frac{\partial u}{\partial x_1} - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) = 0, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (-\Delta^2 u + \Delta u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u)) - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) + \Delta u \\ & + \beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| > 0$, $p_j > 2$, $q_1, q_2 \geq 0$, $p_1, p_2 > 2$.

§ 2. Первоначальные определения и условия

В настоящей статье мы будем в основном использовать стандартные определения функционального анализа, приведя лишь необходимые для дальнейшего изложения материала определения, предложения и вспомогательные результаты.

Пусть банаховы пространства $\mathbb{V}_i$, $\mathbb{V}_0$, $\mathbb{W}_0$, $\mathbb{W}_1$ бесконечномерны, сепарабельны и рефлексивны с соответствующими сопряженными банаховыми пространствами $\mathbb{V}_i^*$, $\mathbb{V}_0^*$, $\mathbb{W}_0^*$, $\mathbb{W}_1^*$ относительно соответствующих скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$,

$\langle \cdot, \cdot \rangle_0, (\cdot, \cdot)_0, (\cdot, \cdot)_1, i = \overline{1, N}$. Банаховы пространства $\mathbb{W}_j, j = \overline{2, 4}$, рефлексивны и сепарабельны. Обозначим через $\|\cdot\|_j, j = \overline{0, N}$, нормы банаховых пространств $\mathbb{V}_j$, а через $\|\cdot\|_j^*$ – нормы банаховых пространств $\mathbb{V}_j^*$. Нормы банаховых пространств $\mathbb{W}_i, i = \overline{0, 4}$, обозначим через $|\cdot|_i$, а нормы банаховых пространств $\mathbb{W}_i^*$ – через $|\cdot|_i^*$. Пусть $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство, отождествленное с сопряженным.

Далее мы предположим, что выполнены следующие *условия* $\mathbb{V}$.

- 1) Банаховы пространства $\mathbb{V}_i, i = \overline{0, N}$, непрерывно вложены в $\mathbb{H}$.
- 2) Для сильно сопряженного к банахову относительно нормы $\|\cdot\| = \sum_{i=0}^N \|\cdot\|_i$ рефлексивного пространства $\mathbb{V} \equiv \bigcap_{i=0}^N \mathbb{V}_i$ справедливо явное выражение

$$\mathbb{V}^* = \bigcup_{i=0}^N \mathbb{V}_i^*.$$

- 3) Справедливы следующие цепочки непрерывных вложений:

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}_i \subseteq \mathbb{H} \subseteq \mathbb{V}_i^* \subseteq \mathbb{V}^*, \quad i = \overline{0, N}, \\ \mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}_j \subseteq \mathbb{H} \subseteq \mathbb{W}_j^* \subseteq \mathbb{V}^*, \quad j = \overline{0, 1}. \end{aligned}$$

- 4) Пространство $\mathbb{V}$ бесконечномерное и сепарабельное.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из условия $\mathbb{V}$, 1) вытекает, что пересечение $\mathbb{V} \equiv \bigcap_{i=0}^N \mathbb{V}_i$, наделенное нормой $\|\cdot\| = \sum_{i=0}^N \|\cdot\|_i$, является банаховым пространством.

Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Оператор $\mathbb{A}: D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^*$ называется *полунепрерывным на D* , если для любых $u, v, w \in D$ функция $\lambda \rightarrow \langle \mathbb{A}(u + \lambda v), w \rangle$ непрерывна как функция из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Симметрическим* называется линейный оператор $\mathbb{A}$, действующий из рефлексивного банахова пространства $\mathbb{X}$ в сопряженное $\mathbb{X}^*$, если для любых $u, v \in \mathbb{X}$ выполнено соотношение

$$\langle \mathbb{A}u, v \rangle = \langle \mathbb{A}v, u \rangle.$$

Пусть операторы $\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_0, \mathbb{F}, \mathbb{L}$ определены на пространствах $\mathbb{V}_i, \mathbb{V}_0, \mathbb{W}_0, \mathbb{W}_1$ со значениями в соответствующих сопряженных пространствах:

$$\mathbb{A}_i: \mathbb{V}_i \rightarrow \mathbb{V}_i^*, \quad i = \overline{1, N}, \quad \mathbb{A}_0: \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0^*, \quad \mathbb{F}: \mathbb{W}_0 \rightarrow \mathbb{W}_0^*, \quad \mathbb{L}: \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_1^*, \quad (2.1)$$

причем области значений операторов $\mathbb{A}_j, \mathbb{L}_1$ совпадают с соответствующими банаховыми пространствами $\mathbb{V}_j^*, j = \overline{0, N}, \mathbb{W}_1^*$.

Введем некоторые *условия* $\mathbb{A}$, налагаемые на операторные коэффициенты уравнения (1.1).

1) Операторы $\mathbb{A}_j: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{V}_j^*$, $j = \overline{1, N}$, являются монотонными и полунепрерывными.

2) Операторы $\mathbb{A}_j$ имеют симметрическую производную Фреше для любого фиксированного $u \in \mathbb{V}_j$:

$$\mathbb{A}'_{j,u}(u): \mathbb{V}_j \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}_j, \mathbb{V}_j^*), \quad j = \overline{1, N},$$

неотрицательно определенную, и, кроме того, производная Фреше является полунепрерывной в каждом $\mathbb{V}_j$ в том смысле, что, каковы бы ни были $u, v, h_1, h_2 \in D \subset \mathbb{V}_j$, $j = \overline{1, N}$, и $\lambda \in \mathbb{R}^1$, функция $\langle \mathbb{A}'_{j,u}(u + \lambda v)h_1, h_2 \rangle_j$ непрерывна как функция из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^1$ относительно λ .

3) Справедливы неравенства снизу и сверху:

$$\|\mathbb{A}_j(u)\|_j^* \leq M_j \|u\|_j^{p_j-1}, \quad \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j \geq m_j \|u\|_j^{p_j}, \quad p_j > 2, \quad j = \overline{1, N},$$

где $M_j > 0$ и $m_j > 0$.

3*) Величина $\langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j^{1/p_j}$ является полунормой на $\mathbb{V}_j$.

4) Операторы $\mathbb{A}_j$ положительно однородные порядка $p_j - 1$:

$$\mathbb{A}_j(sv) = s^{p_j-1} \mathbb{A}_j(v), \quad s > 0.$$

Введем *условия* $\mathbb{A}_0$, налагаемые на операторные коэффициенты уравнения (1.1).

1) Справедливо неравенство $\langle \mathbb{A}_0 u - \mathbb{A}_0 v, u - v \rangle_0 \geq m_0 \|u - v\|_0^2$ для любых $u, v \in \mathbb{V}_0$, где $m_0 > 0$ – постоянная.

2) Оператор $\mathbb{A}_0$ симметричен.

3) Оператор $\mathbb{A}_0: \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0^*$ удовлетворяет условию $\|\mathbb{A}u\|_0^* \leq M_0 \|u\|_0$, где $M_0 > 0$ – постоянная.

3*) Величина $\langle \mathbb{A}u, u \rangle_0$ является полунормой для $\mathbb{V}_0$.

Введем *условия* $\mathbb{F}$, налагаемые на операторные коэффициенты уравнения (1.1).

1) Оператор $\mathbb{F}(u): \mathbb{W}_0 \rightarrow \mathbb{W}_0^*$ является ограниченно непрерывным по Липшицу:

$$|\mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v)|_0^* \leq \mu_1(R) |u - v|_0, \quad R = \max(|u|_0, |v|_0),$$

где $\mu_1(R)$ – возрастающая и непрерывная функция.

2) Оператор $\mathbb{F}(u)$ дифференцируем по Фреше и имеет симметрическую производную при любом фиксированном $u \in \mathbb{W}_0$.

3) Для любых $s > 0$ и $v \in \mathbb{W}_0$ выполнено равенство $\mathbb{F}(sv) = s^{1+q} \mathbb{F}(v)$, $q > 0$.

4) Справедливо неравенство сверху:

$$|\mathbb{F}(u)|_0^* \leq B |u|_0^{q+1}, \quad B > 0.$$

5) Справедливо неравенство снизу:

$$(\mathbb{F}(u), u)_0 \geq m_{\mathbb{F}} |u|_0^{q+2}.$$

Введем *условия* $\mathbb{L}$, налагаемые на операторные коэффициенты уравнения (1.1).

1) Справедливо неравенство $(\mathbb{L}u - \mathbb{L}v, u - v)_1 \geq d_1 |u - v|_1^2$ для любых $u, v \in \mathbb{W}_1$, где $d_1 > 0$ – постоянная.

2) Оператор $\mathbb{L}$ симметричен.

3) Оператор $\mathbb{L}: \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_1^*$ удовлетворяет условию $|\mathbb{L}u|_1^* \leq D_1 |u|_1$, где $D_1 > 0$ – постоянная.

Введем условия $\mathbb{DP}$, налагаемые на операторные коэффициенты уравнения (1.1).

1) Оператор $\mathbb{D}: \mathbb{W}_3 \rightarrow \mathbb{W}_4 \subseteq \mathbb{V}_0^*$ является линейным, ограниченным и $\mathbb{D}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

2) Оператор $\mathbb{P}(u): \mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_2 \rightarrow \mathbb{W}_3$ является ограничено непрерывным по Липшицу:

$$|\mathbb{P}(u_1) - \mathbb{P}(u_2)|_3 \leq \mu_2(R) |u_1 - u_2|_2,$$

где $\mu_2(R)$ – непрерывная возрастающая функция.

3) Справедливо неравенство сверху: $|\mathbb{P}(u)|_3 \leq B_2 |u|_2^{(q+2)/2}$.

4) Для любого $u \in \mathbb{V}_0$ имеет место равенство $\langle \mathbb{DP}(u), u \rangle_0 = 0$.

Отметим, что из условий $\mathbb{A}_0$ и $\mathbb{L}$ вытекает, что величины $\langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0^{1/2}$ и $(\mathbb{L}u, u)_1^{1/2}$ являются нормами на пространствах $\mathbb{V}_0$ и $\mathbb{W}_1$ соответственно.

Далее нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Для любых $u, v \in \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W}_2$ справедливо неравенство

$$|\langle \mathbb{DP}(u), v \rangle_0| \leq C \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2} (\mathbb{F}(u), u)_0^{1/2}, \quad C > 0. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее через C мы будем обозначать различные постоянные. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |\langle \mathbb{DP}(u), v \rangle_0| &\leq \|\mathbb{D}(\mathbb{P}(u))\|_0^* \|v\|_0 \leq C \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2} |\mathbb{D}(\mathbb{P}(u))|_4 \\ &\leq C \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2} |\mathbb{P}(u)|_3 \leq C \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2} |u|_2^{(q+2)/2} \\ &\leq C \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2} |u|_0^{(q+2)/2} \leq C \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2} (\mathbb{F}(u), u)_0^{1/2}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Без ограничения общности будем считать, что в (2.2) постоянная C равна единице.

§ 3. Слабая обобщенная разрешимость, единственность и разрушение решения задачи (1.1)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Слабым обобщенным решением абстрактной задачи Коши (1.1) называется решение задачи, удовлетворяющее условиям

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle_0 + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j + \langle \mathbb{DP}(u), v \rangle_0 + (\mathbb{L}u, v)_1 = (\mathbb{F}(u), v)_0 \quad (3.1)$$

$$\forall v \in \mathbb{V}, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{V},$$

где производная по времени понимается в смысле $\mathcal{D}'(0, T)$. Поскольку решение $u(t)$ ищется в классе $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V})$, $\frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0)$, то имеют место включения $\mathbb{A}_0 u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}_0^*)$, $\mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}_j^*)$, $\mathbb{DP}(u) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_4)$,

$\mathbb{L}u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_1^*)$, $\mathbb{F}(u) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^*)$, Тем самым задача (3.1) в силу условий $\mathbb{V}$ и условий следующей ниже теоремы 3.1 эквивалентна задаче

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle + \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u), v \rangle + \langle \mathbb{L}u, v \rangle = \langle \mathbb{F}(u), v \rangle$$

$$\forall v \in \mathbb{V}, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{V},$$

где производная по времени понимается в смысле $\mathcal{D}'(0, T)$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{D}\mathbb{P}$. Предположим, что $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ и $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_1$, т. е. вложения вполне непрерывны, и что $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_1$ и $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W}_2$. Кроме того, предположим, что найдется $j^* \in \overline{1, N}$, для которого $p_{j^*} \geq p_j$ и $p_{j^*}^* \geq q + 2$, $j = \overline{1, N}$, такое, что $\mathbb{V}_{j^*} \subseteq \mathbb{W}_0$. Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{V}$ найдется максимальное $T_0 \equiv T_{u_0} > 0$ такое, что для любого $0 < T < T_0$ задача Коши (1.1) имеет единственное непродолжаемое во времени решение $u(t)$ класса $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V})$, $\frac{d}{dt}u(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0)$, т. е. либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_0} \|u\|_{\mathbb{V}} = +\infty,$$

причем для положительно определенной в силу условий $\mathbb{A}_0$, 2) и $\mathbb{A}$, 3) и имеющей смысл кинетической энергии функции

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j$$

в трех случаях относительно возможных значений величины $\alpha \equiv \frac{q+2}{\bar{p}}$, $\bar{p} \equiv \max_{j=\overline{1, N}} p_j$, справедливы следующие оценки:

- 1) если $\alpha = 1$, то $T_0 = +\infty$ и $\Phi(t) \leq \Phi_0 \exp\{C_2 t\}$;
- 2) если $\alpha \in (0, 1)$, то $T_0 = +\infty$ и $\Phi(t) \leq \Phi_0 [1 + (1 - \alpha) C_2 \Phi_0^{\alpha-1} t]^{1/(1-\alpha)}$;
- 3) если $\alpha > 1$ и выполнены неравенства

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0), \quad \Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha - 1}} \Phi(0),$$

то найдется такое $T_0 > 0$, что

$$\lim_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty, \quad T_1 \leq T_0 \leq T_2,$$

где

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{2}{q} \Phi_0^{-q/2} \overline{B}^{-1}, & T_2 &= \Phi_0^{1-\alpha} A^{-1}, \\
C_2 &\equiv BC_{j^*}^{q+2} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1} \right)^\alpha, & |v|_0 &\leq C_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*} v, v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \\
\Phi_0 &\equiv \Phi(0), & \Phi'(0) &\equiv (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{L}u_0, u_0)_1, \\
\alpha &\equiv \frac{\bar{p} + q + 2}{2\bar{p}}, & \beta &\equiv \frac{(q+2)(q+1)}{q+2-\bar{p}}, \\
\gamma &\equiv \frac{4(q+1)^2}{q+2-\bar{p}}, & q+2 > \bar{p} &\equiv \max_{j=1, n} p_j, \\
A^2 &\equiv (\alpha-1)^2 \Phi_0^{-2\alpha} \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\gamma}{\alpha-1} \Phi^2(0) \right], \\
\overline{B} &= 2^{q+2} BC_1^{q+2},
\end{aligned}$$

C_1 – константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B – константа из условия $\mathbb{F}$, 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство в несколько этапов.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В силу принадлежности решения $u(t)$ классу $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V})$, $\frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0)$, следует, что после возможного изменения на множестве нулевой меры Лебега отображение $u(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{V}_0$ непрерывно. Значит, имеет смысл начальное условие $u(0) = u_0$.

Шаг 1. Приближения Галёркина. Из сепарабельности пространства $\mathbb{V}$ следует, что найдется счетная всюду плотная в $\mathbb{V}$ линейно независимая система функций $\{w_i\}_{i=1}^m \hookrightarrow \mathbb{V}$. Докажем разрешимость задачи (3.1) методом Галёркина в сочетании с методами монотонности и компактности [26].

Сначала рассмотрим следующую конечномерную аппроксимацию задачи (3.1):

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u_m, w_k \rangle_0 + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u_m), w_k \rangle_j + (\mathbb{L}u_m, w_k)_1 \\
&+ \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), w_k \rangle_0 = (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0, \quad k = \overline{1, m}, \\
&u_m = \sum_{i=1}^m c_{mi}(t) w_i, \quad u_{m0} = \sum_{i=1}^m c_{mi}(0) w_i, \\
&c_{mi}(0) = \alpha_{mi}, \quad u_{m0} \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{V}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из (3.2) вытекает, что в классе $\mathbb{C}^1([0, T_m]; \mathbb{V})$ для функции u_m справедлива система уравнений

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^m c'_{mi} \left[\langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}'_{j, u_m}(u_m) w_i, w_k \rangle_j \right] \\
&+ \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), w_k \rangle_0 + (\mathbb{L}u_m, w_k)_1 = (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0, \quad k = \overline{1, m}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Введем обозначение

$$a_{ik} \equiv \langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) w_i, w_k \rangle_j.$$

Очевидно,

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k = \langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) \eta, \eta \rangle_j \geq \langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0, \quad \eta = \sum_{i=1}^m \xi_i w_i,$$

поскольку $\mathbb{A}_0$ – положительно определенный оператор, а значит, $\langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0 \geq 0$, причем равенство $\langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0 = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\eta = 0$. С другой стороны,

$$\eta \equiv \sum_{i=1}^m \xi_i w_i,$$

и в силу линейной независимости системы функций $\{w_i\}_{i=1}^m$ в $\mathbb{V}$ приходим к выводу, что $\eta = 0$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_i\}_{i=1}^m = \mathbf{0}$. Отсюда и из работы [27] получим, что $\det\{a_{ik}\}_{i,k=1}^m > 0$.

Докажем теперь, что функционалы $f_j \equiv \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) w_i, w_k \rangle_j$ являются непрерывными по совокупности переменных c_{mi} , $i = \overline{1, m}$. Действительно, пусть $(\bar{c}_{m1}, \dots, \bar{c}_{mm})$ – некоторая точка евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & |f_j(\bar{c}_{m1}, \dots, \bar{c}_{mm}) - f_j(c_{m1}, \dots, c_{mm})| \\ & \leq |f_j(\bar{c}_{m1}, \dots, \bar{c}_{mm}) - f_j(c_{m1}, \bar{c}_{m2}, \dots, \bar{c}_{mm})| \\ & \quad + |f_j(c_{m1}, \bar{c}_{m2}, \dots, \bar{c}_{mm}) - f_j(c_{m1}, c_{m2}, \bar{c}_{m3}, \dots, \bar{c}_{mm})| \\ & \quad + |f_j(c_{m1}, c_{m2}, \bar{c}_{m3}, \dots, \bar{c}_{mm}) - f_j(c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \dots, \bar{c}_{mm})| + \dots \\ & \quad \dots + |f_j(c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{(m-1)m}, \bar{c}_{mm}) - f_j(c_{m1}, \dots, c_{mm})|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В силу условия $\mathbb{A}, 2)$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что каждое слагаемое в правой части неравенства (3.4) при выполнении условия

$$\sum_{k=1}^m |\bar{c}_{mk} - c_{mk}| \leq \delta(\varepsilon)$$

меньше величины $\varepsilon/(m+1)$. Докажем теперь непрерывность по Липшицу функционалов $f_{0k} = (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0$ по совокупности переменных $\{c_{mi}\}_{i=1}^m$. Пусть $u_j = \sum_{i=1}^m c_{mi}^j w_i$, $j = 1, 2$. В силу условия $\mathbb{F}, 1)$ справедлива цепочка неравенств

$$|(\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2), w_k)_0| \leq \|\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2)\|_0^* |w|_0 \leq B |u_1 - u_2|_0 \leq B \sum_{l=1}^m |c_{ml}^1 - c_{ml}^2|.$$

Тем самым функция $f_0 = f_0(c_{m1}, \dots, c_{mm})$ является непрерывной по Липшицу и, тем более, непрерывной по совокупности переменных.

Рассмотрим теперь функционалы $g_k \equiv \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), w_k \rangle_0$ от переменных $c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mm}$. Точно так же, как и при выводе предыдущего неравенства, в силу условий $\mathbb{D}\mathbb{P}$ докажем непрерывность по Липшицу функционалов g_k . Стало быть, система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) является системой типа Коши–Ковалевской и удовлетворяет условиям, гарантирующим ее разрешимость на некотором сегменте $[0, T_m]$, $T_m > 0$, в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^1([0, T_m])$, $k = \overline{1, m}$ (см., например, [28]).

Шаг 2. Априорные оценки. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3.1. *Найдется $T > 0$, не зависящее от $m \in \mathbb{N}$, такое, что для последовательности $\{u_m\}$ приближений Галёркина справедливы равномерно по $m \in \mathbb{N}$ следующие свойства:*

- 1) u_m ограничено в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V})$;
- 2) u'_m ограничено в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0)$;
- 3) $\mathbb{A}_0 u_m$ ограничено в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}_0^*)$;
- 4) $\mathbb{A}_j(u_m)$ ограничено в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}_j^*)$;
- 5) $\mathbb{F}(u_m)$ ограничено в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^*)$;
- 6) $\mathbb{L}u_m$ ограничено в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_1^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим обе части равенства (3.3) на $c_{mk}(t)$ и просуммируем по $k = \overline{1, m}$; тогда получим

$$\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}'_{j, u_m}(u_m) u'_m, u_m \rangle_j + (\mathbb{L}u_m, u_m)_1 = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \quad (3.5)$$

С другой стороны, в силу того, что $u_m = \sum_{k=1}^N c_{mk}(t) w_k \in \mathbb{C}^1([0, T_m]; \mathbb{V})$, и условий $\mathbb{A}$, 2), 4) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j &= p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u'_{mt} \rangle_j, \\ \langle (\mathbb{A}_j(u_m))'_t, u_m \rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(u_m), u'_{mt} \rangle_j &= p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u'_{mt} \rangle_j, \\ \langle (\mathbb{A}_j(u_m))'_t, u_m \rangle_j &= (p_j - 1) \langle \mathbb{A}_j(u_m), u'_{mt} \rangle_j = \frac{p_j - 1}{p_j} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.5) получим

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right] + (\mathbb{L}u_m, u_m)_1 = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \quad (3.6)$$

Интегрируя обе части соотношения (3.6) по $t \in (0, T_m)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j &= \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 \\ &+ \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j + \int_0^t [(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 - (\mathbb{L}u_m, u_m)_1] ds. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В силу условия $\mathbb{A}$, 3) в банаховом пространстве $\mathbb{V}$ можно выбрать норму, эквивалентную исходной:

$$\|v\| = \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2} + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(v), v \rangle_j^{1/p_j}. \quad (3.8)$$

С другой стороны, $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ и $|(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0| \leq B|u_m|_0^{q+2}$. Из соотношения (3.7) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \\ & \leq \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j \\ & \quad + 2^{q+2} B C_1^{q+2} \int_0^t \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right)^{q+2} ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Выведем теперь вторую априорную оценку. Умножим (3.3) на c'_{mk} и просуммируем по $k = \overline{1, m}$; в результате интегрирования обеих частей полученного равенства по $t \in (0, T_m)$ получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j \right) ds \\ & \quad + \frac{1}{q+2} (\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 - \frac{1}{2} (\mathbb{L}u_{m0}, u_{m0})_1 \\ & = \frac{1}{q+2} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 - \frac{1}{2} (\mathbb{L}u_m, u_m)_1 \\ & \leq \frac{1}{2} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 - \frac{1}{2} (\mathbb{L}u_m, u_m)_1 - \int_0^t \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), u'_m \rangle_0 ds. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Введем обозначение

$$\Phi_m \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j, \quad \Phi_{m0} \equiv \Phi_m(0). \quad (3.11)$$

Из неравенства (3.9) получим

$$\Phi_m \leq \Phi_{m0} + \overline{B} \int_0^t \Phi_m^{1+q/2}(s) ds, \quad (3.12)$$

где

$$\overline{B} \equiv 2^{q+2} B C_1^{q+2},$$

C_1 – константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B – константа из условия $\mathbb{F}, 4$). Теперь из неравенства (3.12) и теоремы Бихари (см., например, [29]) следует

$$\Phi_m \leq \frac{\Phi_{m0}}{\left[1 - \frac{q}{2} \Phi_{m0}^{q/2} \overline{B} t\right]^{2/q}}. \quad (3.13)$$

Поскольку $u_{m0} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, то $\Phi_{m0} \leq C_0$, где C_0 не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Далее возможны два случая для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$: либо $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$, либо $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$.

Рассмотрим сначала случай $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} 1 - \frac{q}{2} \overline{B} \Phi_{m0}^{q/2} t &\geq 1 - \frac{q}{2} \overline{B} \Phi_0^{q/2} t \quad \forall t \in (0, T), \quad T \in (0, T_1), \quad T_1 = \frac{2}{q} \overline{B}^{-1} \Phi_0^{-q/2}, \\ \Phi_m &\leq C_1 \quad \forall t \in (0, T), \quad T \in (0, T_1), \quad T_1 = \frac{2}{q} \overline{B}^{-1} \Phi_0^{-q/2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где C_1 не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь случай $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$. Тогда для любого $\overline{m} < m$ имеем

$$\Phi_{\overline{m}0} > \Phi_{m0}, \quad 1 - \frac{q}{2} \overline{B} \Phi_{m0}^{q/2} t \geq 1 - \frac{q}{2} \overline{B} \Phi_{\overline{m}0}^{q/2} t,$$

и для любого $t \in [0, \overline{B}^{-1} \Phi_{\overline{m}0}^{-(q+1)})$ получим

$$\Phi_m \leq \frac{C_0}{\left[1 - \frac{q}{2} \Phi_{\overline{m}0}^{q/2} \overline{B} t\right]^{2/q}}.$$

Значит, для любого фиксированного $T \in (0, T_1)$ найдется такое $\overline{m} \in \mathbb{N}$, что будет иметь место неравенство (3.14).

В силу того, что всегда найдется $p_{j^*} = \max_{j=1, \overline{N}} p_j > 2$, $p_{j^*} \geq q + 2$, такое, что $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$, справедливо следующее неравенство:

$$|v|_0 \leq C_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}. \quad (3.15)$$

Из соотношения (3.15) сразу получаем, что

$$|v|_0^{q+2} \leq C_{j^*}^{q+2} \left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*} - 1} \right)^{(q+2)/p_{j^*}} \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(v), v \rangle_j \right)^{(q+2)/p_{j^*}}. \quad (3.16)$$

С учетом соотношений (3.7), (3.11), (3.15) и (3.16) приходим к выводу:

$$\Phi_m \leq \Phi_{m0} + B C_{j^*}^{q+2} \left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*} - 1} \right)^{(q+2)/p_{j^*}} \int_0^t \Phi_m^{\alpha_{j^*}}(s) ds, \quad \alpha_{j^*} \equiv \frac{q+2}{p_{j^*}}. \quad (3.17)$$

Рассмотрим два случая: $\alpha_{j^*} < 1$ и $\alpha_{j^*} = 1$. Воспользовавшись теоремами Гронуолла–Белмана–Бихари [29], получим

$$\Phi_m \leq [\Phi_{m0}^{1-\alpha_{j^*}} + (1-\alpha_{j^*})C_2t]^{1/(1-\alpha_{j^*})}, \quad \alpha_{j^*} \in (0, 1), \quad (3.18)$$

$$\Phi_m \leq \Phi_{m0} \exp\{C_2t\}, \quad \alpha_{j^*} = 1, \quad (3.19)$$

где

$$C_2 \equiv BC_{j^*}^{q+2} \left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*} - 1} \right)^{(q+2)/p_{j^*}}.$$

Вследствие сильной сходимости $u_{m0} \rightarrow u_0$ в $\mathbb{V}$ имеем $\Phi_{m0} \leq C_0$, где C_0 не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Поэтому получим

$$\Phi_{m0} \leq C_3 \quad \forall T \geq 0, \quad \forall \alpha_{j^*} \in (0, 1]. \quad (3.20)$$

Из условия $\mathbb{A}$, 3) и соотношений (3.12), (3.14), (3.20) следует, что

$$\begin{aligned} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 &\leq B|u_m|_0^{q+2} \\ &\leq 2^{q+2} BC_1^{q+2} \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right)^{q+2} \\ &\leq C_3 \Phi_m^{(q+2)/2} \leq C_{30}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $0 < C_{30} < +\infty$ – не зависящая от $m \in \mathbb{N}$ постоянная для любых $T > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любых $T \in (0, T_1)$, T_1 определено в (3.16), в случае $\alpha_{j^*} > 1$. Теперь из (3.10) и условий $\mathbb{A}$, 2) и $\mathbb{A}_0$, 2) вытекает, что

$$m_0 \int_0^t \|u'_m\|_0^2 ds \leq \int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 ds \leq C_{40},$$

где $0 < C_{40} < +\infty$ – не зависящая от $m \in \mathbb{N}$ постоянная для любых $T > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любых $T \in (0, T_1)$, T_1 определено в (3.14), в случае $\alpha_{j^*} > 1$.

Итак, выполнены свойства 1)–6) леммы 3.1. Эти свойства имеют место для любых $T > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любых $T \in (0, T_1)$, T_1 определено в (3.14), в случае $\alpha_{j^*} > 1$. Лемма доказана.

Найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ (обозначим ее так же), что

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}), \quad u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0). \quad (3.22)$$

Из (3.22) и компактного вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ получим, что для почти всех $t \in (0, T)$ имеет место сильная сходимость $u_m(t) \rightarrow u(t)$ в $\mathbb{W}_0$. С другой стороны, в силу условия $\mathbb{F}$, 1) имеем

$$|\mathbb{F}(u_m) - \mathbb{F}(u)|_0^* \leq \mu(R)|u_m - u|_0 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty, \quad R = \max\{|u|_0, |u_m|_0\}. \quad (3.23)$$

Отсюда вытекает сильная сходимость

$$\mathbb{F}(u_m)(t) \rightarrow \mathbb{F}(u)(t) \quad \text{в } \mathbb{W}_0^* \text{ для почти всех } t \in (0, T). \quad (3.24)$$

Отметим теперь, что, поскольку $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_1$ и $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{V}$, для почти всех $t \in (0, T)$ следует, что для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеем $u_m \rightarrow u$ сильно в $\mathbb{W}_1$ для почти всех $t \in (0, T)$. Отсюда и из условия $\mathbb{L}$, 3) следует сильная сходимость $\mathbb{L}u_m \rightarrow \mathbb{L}u$ в $\mathbb{W}_1^*$ для почти всех $t \in (0, T)$. Нетрудно убедиться в том, что из условий $\mathbb{DP}$ вытекает сильная сходимость $\mathbb{DP}(u_m) \rightarrow \mathbb{DP}(u)$ в $\mathbb{V}_0^*$ для почти всех $t \in (0, T)$.

Шаг 3. Метод монотонности. Воспользуемся теперь методом монотонности. Напомним, что на шаге 2 мы получили предельные включения (3.22) и (3.24) и, кроме того,

$$\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \chi \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}^*), \quad \mathbb{A}(u) \equiv \sum_{j=0}^N \mathbb{A}_j(u). \quad (3.25)$$

Далее потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mathbb{A}(u) \equiv \sum_{j=0}^N \mathbb{A}_j(u)$. Тогда для некоторого $T > 0$ найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что $\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \mathbb{A}(u)$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}^*)$. Кроме того, для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ выполнено свойство

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{p_j}(0, T; \mathbb{V}_j), \quad j = \overline{0, N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем уравнение (3.2) в эквивалентном виде:

$$\langle \mathbb{A}(u_m), w_j \rangle = \langle \mathbb{A}(u_{m0}), w_j \rangle + \int_0^t [(\mathbb{F}(u_m), w_j)_0 - (\mathbb{L}u_m, w_j)_1 - \langle \mathbb{DP}(u_m), w_j \rangle_0] ds, \quad (3.26)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и перейдем в уравнении (3.26) к пределу при $m \rightarrow +\infty$; тогда получим

$$\chi = \int_0^t [\mathbb{F}(u) - \mathbb{L}u - \mathbb{DP}(u)] ds + \mathbb{A}(u_0). \quad (3.27)$$

Пусть

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{X}_\mu &\equiv \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu) - \mathbb{A}(v), u_\mu - v \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu \rangle dt - \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu), v \rangle dt - \int_0^T \langle \mathbb{A}(v), u_\mu - v \rangle dt, \\ \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu \rangle dt &= \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_{\mu 0}), u_\mu \rangle dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^t [(\mathbb{F}(u_\mu)(s), u_\mu(t))_0 - (\mathbb{L}u_\mu(s), u_\mu(t))_1 \\ &\quad - \langle \mathbb{DP}(u_\mu)(s), u_\mu(t) \rangle_0] ds dt. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что

$$\begin{aligned}
0 \leq \limsup_{\mu \rightarrow +\infty} \mathbb{X}_\mu &\leq \int_0^T \int_0^t [(\mathbb{F}(u)(s), u(t))_0 - (\mathbb{L}u(s), u(t))_1 - \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u)(s), u(t) \rangle_0] ds dt \\
&\quad + \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_0), u \rangle dt - \int_0^T \langle \chi, v \rangle dt - \int_0^T \langle \mathbb{A}(v), u - v \rangle dt \\
&= \int_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(v), u - v \rangle dt \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Положим теперь $v = u - \lambda w$ для любых $v, w \in \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{V})$, $\lambda > 0$, $u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}) \subset \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{V})$, $\chi, \mathbb{A}(v) \in \mathbb{L}^{r'}(0, T; \mathbb{V}^*)$, $r > 1$, $r' = r/(r-1)$. Справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(u - \lambda w), w \rangle dt \geq 0,$$

из которого в силу полунепрерывности каждого из операторов $\mathbb{A}_j(v)$, $j = \overline{0, N}$, получим $\chi = \mathbb{A}(u)$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\limsup_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u_\mu), u_\mu \rangle_j dt &\leq - \liminf_{\mu \rightarrow +\infty} \sum_{k=0, k \neq j}^N \int_0^T \langle \mathbb{A}_k(u_\mu), u_\mu \rangle_k dt \\
&\quad + \limsup_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu \rangle dt \leq - \sum_{k=0, k \neq j}^N \int_0^T \langle \mathbb{A}_k(u), u \rangle_k dt + \int_0^T \langle \mathbb{A}(u), u \rangle dt \\
&= \int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j dt,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

где мы воспользовались тем, что каждый из операторов $\mathbb{A}_j(v)$, $j = \overline{0, N}$, в силу условий $\mathbb{A}_0, 3^*)$ и $\mathbb{A}, 3^*)$ порождает нормы рефлексивных банаховых пространств $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0)$ и $\mathbb{L}^{p_j}(0, T; \mathbb{V}_j)$, эквивалентные исходным в силу условий $\mathbb{A}_0, 3)$ и $\mathbb{A}, 3)$, следующим образом:

$$\left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 dt \right)^{1/2}, \quad \left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j dt \right)^{1/p_j}.$$

Наконец, в силу слабой сходимости $u_\mu \rightharpoonup u$ в $\mathbb{L}^{p_j}(0, T; \mathbb{V})$, $j = \overline{0, N}$, и того, что операторы $\mathbb{A}_j(v)$, $j = \overline{0, N}$, по указанным выше правилам порождают нормы рефлексивных банаховых пространств, имеем

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j dt \geq \int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j dt. \tag{3.30}$$

Из соотношений (3.29) и (3.30) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j dt = \int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j dt. \tag{3.31}$$

Теперь в силу условия $\mathbb{A}$, 3) выражения

$$\left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j dt \right)^{1/p_j}, \quad \left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 dt \right)^{1/2}$$

являются нормами, эквивалентными исходным нормам

$$\left(\int_0^T \|u\|_j^{p_j} dt \right)^{1/p_j}, \quad \left(\int_0^T \|u\|_0^2 dt \right)^{1/2}$$

банаховых пространств $\mathbb{L}^{p_j}(0, T; \mathbb{V}_j)$. Поэтому из (3.31) следует существование такой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$, что

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j dt \right)^{1/p_j} &\rightarrow \left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j dt \right)^{1/p_j}, \quad j = \overline{1, N}, \\ \left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 dt \right)^{1/2} &\rightarrow \left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеет место слабая сходимость $u_m \rightharpoonup u$ в $\mathbb{L}^{p_j}(0, T; \mathbb{V}_j)$, $j = \overline{0, N}$, значит, найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что $u_m \rightarrow u$ сильно сходится в каждом $\mathbb{L}^{p_j}(0, T; \mathbb{V}_j)$, $j = \overline{0, N}$. Лемма доказана.

Шаг 4. Предельный переход и единственность. Из предельных выражений (3.22), (3.24) и (3.25) вытекает возможность перехода к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в уравнении (3.26). В результате указанного предельного перехода в смысле $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}^*)$ получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j &= \langle \mathbb{A}_0 u_0, v \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u_0), v \rangle_j \\ &+ \int_0^t [(\mathbb{F}(u), v)_0(s) - (\mathbb{L}u, v)_1(s) - \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u), v \rangle_0] ds \quad \forall v \in \mathbb{V}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}.$$

С другой стороны, $u' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0)$, $u \in \mathbb{L}^\infty(0, T)$. Перепишем равенство (3.32) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j &= -\langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle_0 + \langle \mathbb{A}_0 u_0, v \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u_0), v \rangle_j \\ &+ \int_0^t [(\mathbb{F}(u), v)_0(s) - (\mathbb{L}u, v)_1(s) - \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u), v \rangle_0] ds \quad \forall v \in \mathbb{V}. \end{aligned}$$

Правая часть данного равенства дифференцируема по $t \in (0, T)$ в смысле Лебега, значит, дифференцируема и левая часть, и мы приходим к выводу, что каждое решение уравнения (3.32) является решением уравнения

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle_0 + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j = (\mathbb{F}(u), v)_0 - (\mathbb{L}u, v)_1 - \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u), v \rangle_0 \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

понимаемого в смысле $\mathcal{D}'(0, T)$. Перепишем теперь уравнение (3.1) в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j = -\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle_0 + (\mathbb{F}(u), v)_0 - (\mathbb{L}u, v)_1 - \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u), v \rangle_0 \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

откуда из принадлежности $u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V})$ приходим к выводу, что

$$\sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j \in \mathbb{L}^\infty(0, T), \quad \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j \in \mathbb{L}^2(0, T) \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

В силу этого каждое решение u задачи (3.1) класса $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V})$, $u' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0)$, является решением уравнения (3.32). Значит, для функции $u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V})$, $u' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0)$, задачи (3.1) и (3.32) эквивалентны.

Для доказательства единственности решения рассматриваемой задачи воспользуемся эквивалентным к (3.1) уравнением (3.32); тогда получим уравнение

$$\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_j(u) = \int_0^t [\mathbb{F}(u) - \mathbb{L}u(s) - \mathbb{D}\mathbb{P}(u)] ds + \mathbb{A}_0 u_0 + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_j(u_0), \quad (3.33)$$

которое понимается в смысле $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}^*)$.

Пусть u_1 и u_2 – два решения уравнения (3.33) класса $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V})$ с одной и той же начальной функцией $u_0 \in \mathbb{V}$. Тогда для разности этих решений $w = u_1 - u_2$ получим соотношение

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}_0 w, w \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u_1) - \mathbb{A}_j(u_2), w \rangle_j &= \int_0^t [(\mathbb{F}(u_1)(s) - \mathbb{F}(u_2)(s), w(t))_0 \\ &\quad - (\mathbb{L}u_1(s) - \mathbb{L}u_2(s), w(t))_1 - \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_1) - \mathbb{D}\mathbb{P}(u_2), w \rangle_0] ds, \end{aligned}$$

откуда в силу монотонности операторов $\mathbb{A}_j(u)$, а также с учетом условия $\mathbb{A}_0$, 2) и вложений $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0$ и $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_1$ приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \|w\|_0^2(t) &\leq C|w|_0(t) \int_0^t |\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2)|_0^* ds + C|w|_1(t) \int_0^t |\mathbb{L}u_1 - \mathbb{L}u_2|_1^* ds \\ &\quad + C\|w\|_0(t) \int_0^t |\mathbb{D}\mathbb{P}(u_1) - \mathbb{D}\mathbb{P}(u_2)|_3 ds \\ &\leq C\|w\|_0(t) \int_0^t \|w\|_0(s) ds, \quad C > 0, \end{aligned}$$

из которого в силу теоремы Гронуолла–Белмана получаем, что $u_1 = u_2$ почти всюду на множестве $(0, T) \times \Omega$.

Шаг 5. Разрушение решений. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 3.3. *Пусть*

$$\Phi \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\bar{p}}, \quad \bar{p} \equiv \max_{j=1, N} p_j.$$

Тогда:

1) *если $\alpha \in (0, 1)$, то $T_0 = +\infty$ и имеет место неравенство*

$$\Phi \leq \Phi_0 [1 + (1 - \alpha) C_2 \Phi_0^{\alpha-1} t]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *если $\alpha = 1$, то $T_0 = +\infty$ и имеет место неравенство $\Phi \leq \Phi_0 \exp\{C_2 t\}$;*

3) *если $\alpha > 1$ и выполнены условия*

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0), \quad \Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha - 1}} \Phi(0),$$

то найдется такое $T_0 \in [T_1, T_2]$, что справедливо соотношение

$$\lim_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2}{q} \Phi_0^{-q/2} \bar{B}^{-1}, & T_2 &= \Phi_0^{1-\alpha} A^{-1}, \\ C_2 &\equiv B C_{j^*}^{q+2} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^\alpha, & |v|_0 &\leq C_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*} v, v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \\ \Phi_0 &\equiv \Phi(0), & \Phi'(0) &\equiv (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{L}u_0, u_0)_1, \\ \alpha &\equiv \frac{\bar{p} + q + 2}{2\bar{p}}, & \beta &\equiv \frac{(q+2)(q+1)}{q+2-\bar{p}}, \\ \gamma &\equiv \frac{4(q+1)^2}{q+2-\bar{p}}, & q+2 &> \bar{p} \equiv \max_{j=1, n} p_j, \\ A^2 &\equiv (\alpha - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha} \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi^2(0) \right], \\ \bar{B} &= 2^{q+2} B C_1^{q+2}, \end{aligned}$$

C_1 – константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B – константа из условия $\mathbb{F}$, 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия А, 2) справедливо неравенство Шварца [30] для производных Фреше $\mathbb{A}'_{j,u}: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}_j; \mathbb{V}_j^*)$ операторов $\mathbb{A}_j: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{V}_j^*$:

$$\begin{aligned} | \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m \rangle_j | &= | \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) u'_m, u_m \rangle_j | \\ &\leq \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) u'_m, u'_m \rangle_j^{1/2} \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) u_m, u_m \rangle_j^{1/2} \\ &= \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j^{1/2} (p_j - 1)^{1/2} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$| \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u_m \rangle_0 | \leq \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0^{1/2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0^{1/2}. \quad (3.35)$$

Введем обозначение

$$\Phi_m \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j. \quad (3.36)$$

Из соотношений (3.34)–(3.36) вытекает

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \Phi_m \right|^2 &\leq \left| \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N | \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m \rangle_j | \right|^2 \\ &\leq \left(\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j \right) \\ &\quad \times \left(\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N (p_j - 1) \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right) \\ &\leq \bar{p} \left(\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\bar{p}} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{\bar{p}} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right) \\ &\leq \bar{p} \left(\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

где $\bar{p} = \max_{j=1, \dots, N} p_j > 2$.

Справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть выполнены условия $\mathbb{L}$ и $\mathbb{A}_0$ и, кроме того, $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_1$. Тогда справедливо неравенство

$$(\mathbb{L}u, u)_1 \leq C \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 \quad \forall u \in \mathbb{V}_0$$

при некотором $C > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $u \in \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_1$; тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$(\mathbb{L}u, u)_1 \leq D_1 |u|_1^2 \leq D_1 C_1 \|u\|_0^2 \leq D_1 C_1 m_0^{-1} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 = C \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0.$$

Утверждение доказано.

Без ограничения общности можно считать постоянную C в утверждении 3.1 равной единице. Действительно, введем новые операторы

$$\tilde{\mathbb{L}} \equiv C^{-1} \mathbb{L}, \quad \tilde{\mathbb{F}} \equiv C^{-1} \mathbb{F}$$

и, кроме того, сделаем замену $\tilde{t} \equiv Ct$. Тогда для введенных операторов будет иметь место утверждение 3.1 с постоянной $C = 1$. В силу утверждения 3.1 и неравенства Гёльдера справедливы неравенства

$$(\mathbb{L}u_m, u'_m)_1 \leq (\mathbb{L}u_m, u_m)_1^{1/2} (\mathbb{L}u'_m, u'_m)_1^{1/2} \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0. \quad (3.38)$$

В силу утверждения 2.1 и неравенства Гёльдера справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), u'_m \rangle_0 &\leq \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0^{1/2} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0^{1/2} \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{2} \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \frac{1}{2\varepsilon_0} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Введем обозначение

$$\mathbb{J}_m \equiv \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j.$$

Тогда из энергетических равенств (3.6), (3.10) с учетом неравенств (3.38) и (3.39) для функции $\mathbb{J}_m$ вытекает цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_m &\leq -(\mathbb{L}u_m, u_m)_1 + \frac{\varepsilon_0}{2} \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon_0} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 + \frac{1}{q+2} \Phi_m'' + \frac{2}{q+2} (\mathbb{L}u_m, u'_m)_1 \\ &\leq \frac{q}{q+2} (\mathbb{L}u_m, u'_m)_1 + \frac{\varepsilon_0}{2} \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \frac{1}{2\varepsilon_0} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 + \frac{1}{q+2} \Phi_m'' \\ &\leq \frac{q}{q+2} (\mathbb{L}u_m, u'_m)_1 + \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbb{J}_m + \frac{1}{q+2} \Phi_m'' + \frac{1}{2\varepsilon_0} (\mathbb{L}u_m, u_m)_1 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \Phi_m' \\ &\leq \frac{1}{q+2} \Phi_m'' + \frac{1}{2\varepsilon_0} \Phi_m' + \frac{2}{\varepsilon_0} \frac{q+1}{q+2} \Phi_m + \frac{q+1}{q+2} \varepsilon_0 \mathbb{J}_m. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Из (3.40) вытекает следующее неравенство:

$$\left[1 - \frac{q+1}{q+2} \varepsilon_0 \right] \mathbb{J}_m \leq \frac{1}{q+2} \Phi_m'' + \frac{1}{2\varepsilon_0} \Phi_m' + \frac{2}{\varepsilon_0} \frac{q+1}{q+2} \Phi_m. \quad (3.41)$$

Используя соотношения (3.37) и (3.41), получаем обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка

$$\Phi_m \Phi_m'' - \alpha (\Phi_m')^2 + \beta \Phi_m \Phi_m' + \gamma \Phi_m^2 \geq 0, \quad (3.42)$$

где

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\bar{p}} \left[1 - \frac{q+1}{q+2} \varepsilon_0 \right], \quad \beta = \frac{q+2}{2\varepsilon_0}, \quad \gamma = \frac{2q+2}{\varepsilon_0}.$$

Предположим, что $\varepsilon_0 \in (0, (q+2-\bar{p})(q+1)^{-1})$; тогда $\alpha > 1$. Рассмотрим теперь детально неравенство (3.42). Данное неравенство нетрудно привести к линейному дифференциальному неравенству

$$\mathbb{Z}_m'' + \beta \mathbb{Z}_m' - \delta \mathbb{Z}_m \leq 0, \quad \delta = \gamma(\alpha - 1), \quad (3.43)$$

относительно функции

$$\mathbb{Z}_m = \Phi_m^{1-\alpha}. \quad (3.44)$$

Перейдем теперь к новой функции

$$\mathbb{Y}_m \equiv \mathbb{Z}_m e^{\beta t} \quad (3.45)$$

в уравнении (3.43); тогда получим неравенство

$$\mathbb{Y}_m'' - \beta \mathbb{Y}_m' - \delta \mathbb{Y}_m \leq 0. \quad (3.46)$$

Из соотношения (3.45) следует, что

$$\mathbb{Y}_m' = e^{\beta t} (\alpha - 1) \Phi_m^{-\alpha} \left(-\Phi_m' + \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_m \right). \quad (3.47)$$

Предположим, что выполнены условия

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0), \quad \Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j. \quad (3.48)$$

Тогда, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, получим

$$\Phi_m'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_m(0). \quad (3.49)$$

В силу непрерывной дифференцируемости функции $\mathbb{Y}_m$, учитывая условие (3.49) и соотношение (3.47), приходим к выводу, что найдется такой интервал $[0, T_{3m})$, принадлежащий области определения $\Phi_m(t)$, что $\mathbb{Y}_m' < 0$, причем если $T_{3m} \leq T_{m0}$, то $\mathbb{Y}_m' = 0$ при $t = T_{3m}$. Следовательно, при $t \in [0, T_{2m}]$ имеем $-\beta \mathbb{Y}_m'(t) > 0$. Отсюда и из неравенства (3.46) получим следующее дифференциальное неравенство:

$$\mathbb{Y}_m'' - \delta \mathbb{Y}_m \leq 0, \quad t \in [0, T_{3m}]. \quad (3.50)$$

Предположим, что выполнено неравенство

$$\Phi'(0) > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha-1}} \Phi(0). \quad (3.51)$$

Тогда, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, получим

$$\Phi'_m(0) > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha-1}} \Phi_m(0), \quad (3.52)$$

откуда вытекает неравенство

$$(\mathbb{Y}'_m)^2 \geq \delta \mathbb{Y}_m^2 + A_m^2, \quad (3.53)$$

где

$$A_m^2 \equiv (1-\alpha)^2 \Phi_m^{-2\alpha}(0) \left[(\Phi'_m(0))^2 - \frac{\delta}{(1-\alpha)^2} (\Phi_m(0))^2 \right] > 0. \quad (3.54)$$

Из неравенства (3.53) получим

$$\mathbb{Y}'_m(t) \leq -A_m \quad \forall t \in [0, T_{3m}]. \quad (3.55)$$

Используя (3.55), получим, что на области определения функции $\Phi_m(t)$ выполнено неравенство $\mathbb{Y}'_m < 0$, а отсюда и из (3.55) имеем

$$\mathbb{Y}_m(t) \leq \mathbb{Y}_{m0} - A_m t.$$

Значит, найдется такой момент времени $T_{m0} \in (0, T_{2m})$, что

$$\limsup_{t \uparrow T_{m0}} \Phi_m(t) = +\infty, \quad (3.56)$$

где $T_{2m} = \mathbb{Y}_m(0) A_m^{-1}$.

Рассмотрим отдельно условия (3.48) и (3.51). Заметим, что ε_0 выбрано произвольно из интервала $(0, (q+2-\bar{p})(q+1)^{-1})$. Теперь в качестве ε_0 выберем точку минимума функций

$$f_1 = \frac{\beta}{\alpha-1}, \quad f_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha-1}}.$$

Нетрудно убедиться в том, что минимум достигается в точке

$$\varepsilon_0 = \frac{q+2-\bar{p}}{2q+2}.$$

Из неравенства (3.42) вытекает оценка снизу для функции $\Phi_m(t)$:

$$\Phi_m \geq \frac{\Psi_{m0} e^{-\theta t}}{[T_{2m} - t]^{1/(\alpha-1)}}, \quad (3.57)$$

где $T_{2m} \equiv \Phi_{m0}^{1-\alpha} A_m^{-1}$, $\Psi_{m0} = A_m^{1/(1-\alpha)}$, $\theta = \beta/(\alpha-1)$.

Докажем теперь, что $\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t)$ для почти всех $t \in (0, T)$, где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j.$$

С одной стороны, вследствие сильной сходимости $u_m \rightarrow u$ в $\mathbb{L}^{p_j}(0, T; \mathbb{V}_j)$ имеем

$$\int_0^t \Phi_m(s) ds \rightarrow \int_0^t \Phi(s) ds.$$

С другой стороны, из (3.38) получаем

$$\Phi_m = \Phi_{m0} + \int_0^t [(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0(s) - (\mathbb{L}u_m, u_m)_1(s)] ds.$$

По условию $\Phi_{m0} \rightarrow \Phi_0$, $u_m(t) \rightarrow u(t)$ сильно в $\mathbb{W}_0$ и в $\mathbb{W}_1$ для почти всех $t \in (0, T)$, поэтому в силу ограниченной непрерывности по Липшицу оператора $\mathbb{F}(u): \mathbb{W}_0 \rightarrow \mathbb{W}_0^*$ и непрерывности по Липшицу оператора $\mathbb{L}: \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_1^*$ приходим к выводу, что $\mathbb{F}(u_m) \rightarrow \mathbb{F}(u)$ сильно в $\mathbb{W}_0^*$ и $\mathbb{L}u_m \rightarrow \mathbb{L}u$ в $\mathbb{W}_1^*$ для почти всех $t \in (0, T)$. Понятно, что

$$|(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0| \leq B|u_m|_0^{q+2} \leq C\|u_m\|_{\mathbb{V}}^{q+2} \leq C,$$

где C не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и от $t \in (0, T)$, а также

$$(\mathbb{L}u_m, u_m)_1 \leq D_1|u_m|_1^2 \leq C\|u_m\|_{\mathbb{V}}^2 \leq C,$$

где C не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и от $t \in (0, T)$. Поэтому по теореме Лебега [31] получим, что для почти всех $t \in (0, T)$ последовательность функций $\Phi_m(t)$ почти всюду сходится к $\eta(t)$. Снова по теореме Лебега получим

$$\int_0^t \Phi_m ds \rightarrow \int_0^t \eta ds.$$

Значит,

$$\int_0^t [\Phi(s) - \eta(s)] ds = 0 \quad \forall t \in (0, T),$$

отсюда сразу получаем

$$\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t) \tag{3.58}$$

при почти всех $t \in (0, T)$.

С учетом того, что $u_{m0} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, при $m \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned}\Phi_{m0} &\rightarrow \Phi_0 \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j, \\ \Psi_{m0} &\rightarrow \Psi_0 \equiv A_0^{1/(\alpha_1 - 1)}.\end{aligned}$$

Из (3.58), переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в неравенствах (3.18), (3.19), получим

$$\Phi(t) \leq \Phi_0 \exp\{C_2 t\}, \quad \alpha = \frac{q+2}{\bar{p}} = 1, \quad (3.59)$$

$$\Phi(t) \leq \Phi_0 [1 + (1 - \alpha) C_2 \Phi_0^{\alpha-1} t]^{1/(1-\alpha)}, \quad \alpha < 1, \quad (3.60)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv \frac{q+2}{\bar{p}}, \quad C_2 \equiv BC_{j^*}^{q+2} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1} \right)^{(q+2)/\bar{p}}, \\ |v|_0 &\leq C_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \quad \bar{p} = \max_{j=1, N} p_j.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь неравенства (3.13) и (3.57). Отметим, что при $m \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}\Psi_{m0} &\rightarrow \Psi_0 \equiv A^{1/(\alpha_1 - 1)}, \quad T_{2m} \rightarrow T_2 \equiv \Phi_0^{1-\alpha_1} A^{-1}, \\ T_{1m} &\rightarrow T_1 = \frac{2}{q} \Phi_0^{-q/2} \bar{B}^{-1}, \\ \bar{B} &\equiv 2^{q+2} BC_1^{q+2},\end{aligned}$$

где C_1 – константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B – константа из условия $\mathbb{F}$, 4).

Рассмотрим сначала неравенство (3.57). Без ограничения общности переходом к подпоследовательности мы можем получить, что последовательность $T_{2m} > 0$ равномерно по m , поскольку $T_2 > 0$. В силу сходимости последовательности $T_{2m} \rightarrow T_2$ при $m \rightarrow +\infty$ можно выбрать монотонно сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим через T_{2m} . Соответствующие подпоследовательности последовательностей $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$ мы снова будем обозначать $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$. Пусть $T_{2m} \uparrow T_2$; тогда неравенство (3.43) имеет место равномерно по $t \in [0, T_{2\bar{m}})$, $m \geq \bar{m}$ для некоторого фиксированного $\bar{m} \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу в неравенстве (3.57) при $m \rightarrow +\infty$, для таких t получим

$$\Phi \geq \frac{\Psi_0 e^{-\theta t}}{[T_2 - t]^{1/(\alpha-1)}}, \quad \theta = \frac{\beta}{\alpha - 1}, \quad (3.61)$$

при $t \in [0, T_{2\bar{m}})$. Отсюда в силу произвольности $\bar{m} \in \mathbb{N}$ сразу же получаем, что (3.61) справедливо для всех $t \in [0, T_2)$ и время разрушения решения задачи (3.1) удовлетворяет оценке $T_0 \leq T_2$.

Пусть теперь $T_{2m} \downarrow T_2$. Предположим, что $T_0 > T_2$, и пусть, кроме того, $M \equiv \sup_{t \in [0, T_2]} \Phi(t) < +\infty$. Тогда неравенство (3.57) имеет место равномерно по $t \in [0, T_2)$. Переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в неравенстве (3.57), получим в силу сделанного предположения относительно T_0 следующее неравенство:

$$\Phi \geq \frac{\Psi_0 e^{-\theta t}}{[T_2 - t]^{1/(\alpha-1)}} \leq M < +\infty \quad \text{при } t \in [0, T_2), \quad \theta = \frac{\beta}{\alpha - 1}.$$

Однако из полученного неравенства следует, что наше предположение не выполняется. Отсюда сразу следует, что $T_0 \leq T_2$. Аналогичным образом из неравенства (3.13) вытекает, что

$$\Phi(t) \leq \frac{\Phi_0}{[1 - \frac{q}{2} \Phi_0^{q/2} B t]^{2/q}} \quad \forall t \in (0, T_1), \quad T_0 \geq T_1. \quad (3.62)$$

Лемма доказана. Тем самым доказана и теорема 3.1.

§ 4. Сильная обобщенная разрешимость, единственность и разрушение решения задачи (1.1)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Сильным обобщенным решением* задачи (1.1) называется решение класса $\mathbb{C}^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} \langle (\mathbb{A}_0 u)', v \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u))', v \rangle_j + \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u), v \rangle_0 + \langle \mathbb{L}u, v \rangle_1 &= \langle \mathbb{F}(u), v \rangle_0 \\ \forall v \in \mathbb{V}_0, \quad t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{V}_0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где производная по времени понимается в классическом смысле.

В предположении, что производная Фреше $\mathbb{A}'_{j,u}(u): \mathbb{V}_j \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}_j; \mathbb{V}_j^*)$ оператора $\mathbb{A}_j$ является сильно непрерывной по $u \in \mathbb{V}_j$, получаем, что в рассматриваемом классе имеют место включения $\mathbb{A}_0 u \in \mathbb{C}^1([0, T]; \mathbb{V}_0^*)$, $\mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}^1([0, T]; \mathbb{V}_j^*)$, $\mathbb{D}\mathbb{P}(u) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{W}_4)$, $\mathbb{L}u \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{W}_1^*)$, $\mathbb{F}(u) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{W}_0^*)$ и операторы $\mathbb{A}_0 u$ и $\mathbb{A}_j(u)$ принадлежат классу $\mathbb{C}^1([0, T]; \mathbb{V}_0^*)$, а $\mathbb{D}\mathbb{P}(u)$, $\mathbb{L}u$, $\mathbb{F}(u)$ – классу $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{V}_0^*)$. Тем самым задача в силу условий следующей ниже теоремы 4.1 эквивалентна задаче

$$\begin{aligned} \langle (\mathbb{A}_0 u)', v \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u))', v \rangle_0 + \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u), v \rangle_0 + \langle \mathbb{L}u, v \rangle_0 &= \langle \mathbb{F}(u), v \rangle_0 \\ \forall v \in \mathbb{V}_0, \quad t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{V}_0, \end{aligned}$$

где производная по времени понимается в классическом смысле.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{DP}$. Предположим, что $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{V}_j$, $j = \overline{1, N}$, $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W}_2$, $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_1$, и пусть найдется $j^* \in \overline{1, N}$, при котором $\bar{p} \equiv p_{j^*} \geq p_j$ и $p_{j^*} \geq q + 2$, $j = \overline{1, N}$, такое, что $\mathbb{V}_{j^*} \subseteq \mathbb{W}_0$. Пусть производные Фреше

$$\mathbb{A}'_{j,u} \in \mathbb{BC}(\mathbb{V}_j; \mathcal{L}(\mathbb{V}_j, \mathbb{V}_j^*))$$

операторов $\mathbb{A}_j: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{V}_j^*$ являются ограниченными, сильно непрерывными и, кроме того, монотонными в том смысле, что

$$\langle \mathbb{A}'_{j,u}(u)u_1 - \mathbb{A}'_{j,u}(u)u_2, u_1 - u_2 \rangle_j \geq 0 \quad \forall u, u_1, u_2 \in \mathbb{V}_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Пусть выполнено неравенство $(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0$. Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ найдется такое максимальное $T_0 \equiv T_{u_0} > 0$, что для любого $0 < T < T_0$ задача Коши (1.1) имеет точно одно непродолжаемое во времени решение $u(t)$ класса $\mathbb{C}^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$, т. е. либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_0} \|u\|_0 = +\infty,$$

причем справедливы следующие оценки для разных значений $\alpha = (q + 2)/\bar{p}$, $\bar{p} = \max_{j=\overline{1, n}} p_j$:

1) если $\alpha \in (0, 1)$, то $T_0 = +\infty$, и тогда

$$\Phi(t) \leq [\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\bar{A}t]^{1/(1-\alpha)};$$

2) если $\alpha = 1$, то $T_0 = +\infty$, и тогда $\Phi(t) \leq \Phi_0 \exp\{\bar{A}t\}$;

3) если $\alpha > 1$ и выполнены условия

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0), \quad \Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha - 1}} \Phi(0),$$

то $T_0 \in [T_1, T_2]$ и справедливо соотношение

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0),$$

$$T_1 = \frac{2}{q} \Phi_0^{-q/2} \bar{B}^{-1}, \quad T_2 = \Phi_0^{1-\alpha} A^{-1}, \quad \bar{B} = 2^{(q+2)/2} B C_1^{q+2},$$

$$\bar{A} \equiv C_{j^*}^{q+2} M \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^{(q+2)/\bar{p}}, \quad |v|_0 \leq C_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*} v, v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0), \quad \Phi'(0) \equiv (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{L}u_0, u_0)_1,$$

$$\alpha \equiv \frac{\bar{p} + q + 2}{2\bar{p}}, \quad \beta \equiv \frac{(q+2)(q+1)}{q+2-\bar{p}}, \quad \gamma \equiv \frac{4(q+1)^2}{q+2-\bar{p}}, \quad q+2 > \bar{p} \equiv \max_{j=\overline{1, n}} p_j,$$

$$A^2 \equiv (\alpha - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha} \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi^2(0) \right],$$

C_1 – константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B – константа из условия $\mathbb{F}$, 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этой теоремы также проведем в несколько этапов.

Шаг 1. Локальная разрешимость. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. *Для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ найдется такое максимальное $T_0 > 0$, что существует единственное максимальное решение класса $\mathbb{C}^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$ для любого $T \in (0, T_0)$ задачи (1.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу (1.1). Заметим, что для оператора

$$\mathbb{A}(u) \equiv \mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_j(u): \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0^*$$

справедливо равенство

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2), u_1 - u_2 \rangle &= \langle \mathbb{A}_0 u_1 - \mathbb{A}_0 u_2, u_1 - u_2 \rangle_0 \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u_1) - \mathbb{A}_j(u_2), u_1 - u_2 \rangle \\ &\geq \langle \mathbb{A}_0 u_1 - \mathbb{A}_0 u_2, u_1 - u_2 \rangle_0 = \|u_1 - u_2\|_0^2. \end{aligned}$$

Следовательно, для оператора $\mathbb{A}$ существует непрерывный по Липшицу обратный оператор $\mathbb{A}^{-1}: \mathbb{V}_0^* \rightarrow \mathbb{V}_0$ с постоянной Липшица, равной единице. С учетом этого сделаем замену $v = \mathbb{A}(u)$ в уравнении (1.1); тогда уравнение примет эквивалентный вид

$$\frac{dv}{dt} = \mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)) - \mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v) - \mathbb{D}\mathbb{P}(\mathbb{A}^{-1}(v)), \quad v(0) = v_0,$$

где $v_0 = \mathbb{A}(u_0)$. Данная задача эквивалентна следующей задаче:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t [\mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)) - \mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v) - \mathbb{D}\mathbb{P}(\mathbb{A}^{-1}(v))] ds. \quad (4.2)$$

Воспользуемся методом сжимающих отображений для доказательства локальной разрешимости уравнения (4.2) в классе $\mathbb{C}^1([0, T]; \mathbb{V}_0^*)$. С этой целью введем замкнутое ограниченное выпуклое подмножество банахова пространства $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}_0^*)$:

$$\mathbb{B}_R = \{v \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}_0^*): \|v\|_T^* \leq R\},$$

где $\|v\|_T^* = \text{ess. sup}_{t \in (0, T)} \|v(t)\|_0^*$.

Докажем, что оператор

$$\mathbb{H}(u) \equiv \int_0^t [\mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)) - \mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v) - \mathbb{D}\mathbb{P}(\mathbb{A}^{-1}(v))] ds$$

действует из $\mathbb{B}_R$ в $\mathbb{B}_R$ и является сжимающим. Нетрудно доказать, что оператор $\mathbb{H}(v)$ действует из $\mathbb{B}_R$ в $\mathbb{B}_R$ при достаточно большом R и при достаточно малом T . Поэтому рассмотрим вопрос о сжимаемости оператора $\mathbb{H}(v)$. Действительно, справедлива следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2)\|_T^* &\leq T\mu_1(\bar{R})\|\mathbb{A}^{-1}(v_1) - \mathbb{A}^{-1}(v_2)\|_T \\ &+ T\mu_2(\bar{R})\|\mathbb{A}^{-1}(v_1) - \mathbb{A}^{-1}(v_2)\|_T + TC\|\mathbb{A}^{-1}(v_1) - \mathbb{A}^{-1}(v_2)\|_T, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\|\cdot\|_T \equiv \text{ess. sup}_{t \in (0, T)} \|\cdot\|_0, \quad \bar{R} = \max(\|\mathbb{A}^{-1}(v_1)\|_T, \|\mathbb{A}^{-1}(v_2)\|_T).$$

Из неравенства (4.3) в силу свойств оператора $\mathbb{A}^{-1}$ вытекает следующее неравенство:

$$\|\mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2)\|_T^* \leq TC[1 + \mu_1(R) + \mu_2(R)]\|v_1 - v_2\|_T^*. \quad (4.4)$$

При условии $T \leq \frac{1}{2}[1 + \mu_1(R) + \mu_2(M)]^{-1}C^{-1}$ из неравенства (4.4) вытекает сжимаемость оператора $\mathbb{H}(v)$ на множестве $\mathbb{B}_R$. Значит, существует единственное решение v уравнения (4.2) класса $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}_0^*)$. Используя стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений по времени, приходим к выводу, что найдется максимальное $T_0 > 0$, при котором существует единственное решение v уравнения (4.2) класса $\mathbb{L}^\infty(0, T_0; \mathbb{V}_0^*)$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \rightarrow T_0} \|v(t)\|_0^* = +\infty.$$

Наконец, из уравнения (4.2) в силу сглаживающих свойств оператора $\mathbb{H}(v)$ получим, что $v \in \mathbb{C}^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0^*)$.

Теперь заметим, что имеет место равенство

$$\mathbb{A}(u) \equiv \mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_j(u) = v(x, t) \in \mathbb{C}^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0^*). \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) для функции $u \in \mathbb{C}^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$ эквивалентно следующему равенству:

$$u(x, t) = \mathbb{A}^{-1}(v).$$

Из последнего уравнения следует, что $u(x, t) \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$. Действительно,

$$\|u(t) - u(t_0)\|_0 \leq \|\mathbb{A}^{-1}(v)(t) - \mathbb{A}^{-1}(v)(t_0)\|_0 \leq \|v(t) - v(t_0)\|_0^* \rightarrow +0, \quad t \rightarrow t_0.$$

Значит, существует единственное решение u уравнения (4.5) класса $\mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$. Докажем теперь, что это решение принадлежит классу $\mathbb{C}^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$.

Рассмотрим сначала производную Фреше оператора $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}'_u(u) = \mathbb{A}_0 + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}'_{j,u}(u). \quad (4.6)$$

В силу условий теоремы имеем

$$\langle \mathbb{A}'_u(u)u_1 - \mathbb{A}'_u(u)u_2, u_1 - u_2 \rangle \geq \|u_1 - u_2\|_0^2$$

для любых $u, u_1, u_2 \in \mathbb{V}_0$. Значит, при любом фиксированном $u \in \mathbb{V}_0$ существует непрерывный по Липшицу обратный оператор $[\mathbb{A}'_u]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_0^*; \mathbb{V}_0)$. Теперь рассмотрим следующее уравнение:

$$\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_j(u) = v(x, t) \in \mathbb{C}^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0^*). \quad (4.7)$$

Далее необходимо доказать обратимость оператора $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}}$,

$$\widehat{\mathbb{B}} = \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_0^{-1} \mathbb{A}'_{j,u}(u),$$

где $\mathbb{A}'_{j,u}(u)$ – производная Фреше при фиксированном элементе $u \in \mathbb{C}^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$ оператора $\mathbb{A}_j$. Действительно, рассмотрим уравнение

$$[\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}}]w = 0. \quad (4.8)$$

Докажем, что это уравнение имеет только тривиальное решение. С этой целью применим оператор $\mathbb{A}_0$ к обеим частям этого уравнения; тогда получим

$$\mathbb{A}'_u w = \mathbb{A}_0 w + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}'_{j,u}(u)w = 0 \quad \forall u \in \mathbb{V}_0.$$

Ранее мы доказали, что для оператора $\mathbb{A}'_u$ определен непрерывный по Липшицу обратный оператор $[\mathbb{A}'_u]^{-1}$. Теперь применим этот оператор к обеим частям равенства (4.8). Все операции были эквивалентными, и поэтому мы приходим к выводу, что $w = 0$.

Для функции $u \in \mathbb{C}^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$ уравнение (4.7) эквивалентно следующей задаче:

$$\left[\mathbb{A}_0 + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}'_{j,u}(u) \right] u' = v' \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{V}_0^*), \quad u = \mathbb{A}^{-1}v.$$

Применим оператор $\mathbb{A}_0^{-1}$ к последнему уравнению; тогда получим

$$[\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}}]u' = \mathbb{A}_0^{-1}v'. \quad (4.9)$$

Введем оператор

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}}: \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0^*,$$

для которого, как мы уже доказали, имеется обратный линейный ограниченный оператор. Поэтому (4.9) эквивалентно следующему равенству:

$$u' = \widehat{\mathbb{C}}^{-1} \mathbb{A}_0^{-1} v'. \quad (4.10)$$

Осталось доказать, что $u' = \widehat{\mathbb{C}}^{-1} \mathbb{A}_0^{-1} v' \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|u'(t) - u'(t_0)\|_0 &\leq \|\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) \mathbb{A}_0^{-1} [v'(t) - v'(t_0)]\|_0 \\ &\quad + \|(\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)) \mathbb{A}_0^{-1} v'(t_0)\|_0 \\ &\leq C \|v'(t) - v'(t_0)\|_0^* + C \|\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Отметим, что линейный при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$ оператор $\widehat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ является линейным непрерывным, следовательно, в силу линейности – ограниченным. Стало быть, можно воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}: \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}) = (\lambda \mathbb{I} - \widehat{\mathbb{C}})^{-1}.$$

Пусть Γ – окружность $|\lambda| = r$ с достаточно большим радиусом, бóльшим, чем

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \|\widehat{\mathbb{C}}(t)\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0}.$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при указанных $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [0, T_0]$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \|u(t)\|_0 < +\infty.$$

Теперь можно воспользоваться спектральным представлением для операторов $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$ и $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ :

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-1} \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) d\lambda, \quad \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-1} \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) d\lambda.$$

Очевидно, имеем

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-1} [\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))] d\lambda.$$

Воспользуемся известным представлением для резольвент операторов:

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) = \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \sum_{n=1}^{+\infty} [(\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))]^n,$$

при условии

$$\|\widehat{\mathbb{C}}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}(t)\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0} \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0} \leq \delta < 1.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0} \\ & \leq \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0}^n \|\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0}^n. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0) = \mathbb{A}_0^{-1} \sum_{j=1}^N [\mathbb{A}'_{j,u}(u(t)) - \mathbb{A}'_{j,u}(u(t_0))].$$

В силу непрерывности производных Фреше $\mathbb{A}'_{j,u}$ по $u \in \mathbb{V}_0$ и того, что мы уже доказали, имеем $u \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0} & \leq \sum_{j=1}^N \|\mathbb{A}'_{j,u}(u(t)) - \mathbb{A}'_{j,u}(u(t_0))\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0^*} \rightarrow +0, \\ \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0} & \rightarrow +0, \\ \|\widehat{\mathbb{C}}(t)^{-1} - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)^{-1}\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0} & \rightarrow +0 \end{aligned}$$

при $t \rightarrow t_0$. Значит, $u \in \mathbb{C}^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$. Тем самым лемма доказана.

Шаг 2. Априорные оценки и разрушение решения. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4.2. Пусть

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\bar{p}}.$$

Тогда для разных значений $\alpha = (q+2)/\bar{p}$, $\bar{p} = \max_{j=\overline{1,n}} p_j$ справедливы следующие оценки:

1) если $\alpha \in (0, 1)$, то $T_0 = +\infty$, и тогда

$$\Phi(t) \leq [\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\bar{A}t]^{1/(1-\alpha)};$$

2) если $\alpha = 1$, то $T_0 = +\infty$, и тогда $\Phi(t) \leq \Phi_0 \exp\{\bar{A}t\}$;

3) если $\alpha > 1$ и выполнены условия

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha-1} \Phi(0), \quad \Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha-1}} \Phi(0),$$

то найдется такое $T_0 \in [T_1, T_2]$, что $\lim_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty$; здесь

$$\begin{aligned}\Phi(t) &\equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j, & \Phi_0 &\equiv \Phi(0), \\ T_1 &= \frac{2}{q} \Phi_0^{-q/2} \bar{B}^{-1}, & T_2 &= \Phi_0^{1-\alpha} A^{-1}, & \bar{B} &= 2^{(q+2)/2} B C_1^{q+2}, \\ \bar{A} &\equiv C_{j^*}^{q+2} M \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^{(q+2)/\bar{p}}, & |v|_0 &\leq C_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*} v, v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \\ \Phi_0 &\equiv \Phi(0), & \Phi'(0) &\equiv (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{L}u_0, u_0)_1, \\ \alpha &\equiv \frac{\bar{p} + q + 2}{2\bar{p}}, & \beta &\equiv \frac{(q+2)(q+1)}{q+2-\bar{p}}, & \gamma &\equiv \frac{4(q+1)^2}{q+2-\bar{p}}, & q+2 > \bar{p} &\equiv \max_{j=1, n} p_j, \\ A^2 &\equiv (\alpha - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha} \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi^2(0) \right],\end{aligned}$$

C_1 – константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B – константа из условия $\mathbb{F}$, 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in \mathbb{C}^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$ – максимальное решение задачи (1.1). Рассмотрим в равенстве (4.1) функцию $v = u(t)$; после интегрирования по частям получим следующее равенство:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j \right] = (\mathbb{F}(u), u)_0 - (\mathbb{L}u, u)_1. \quad (4.12)$$

Теперь пусть в (4.1) $v = u'(t)$; интегрируя по частям, имеем

$$\langle \mathbb{A}_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u))', u' \rangle_j = \frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} (\mathbb{F}(u), u)_0 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbb{L}u, u)_1 - \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u), u' \rangle_0. \quad (4.13)$$

Интегрируя уравнение (4.12) по $t \in (0, T)$, получим

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \int_0^t [(\mathbb{F}(u), u)_0 - (\mathbb{L}u, u)_1] ds, \quad (4.14)$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j, \quad \Phi_0 = \Phi(0).$$

Поскольку по условию $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$, то найдется постоянная $C_1 > 0$ такая, что

$$|v|_0 \leq C_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2},$$

и из (4.14) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}\Phi(t) &\leq \Phi_0 + MC_1^{q+2} \int_0^t \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{(q+2)/2} ds \\ &\leq \Phi_0 + \bar{B} \int_0^t \Phi^{(q+2)/2}(s) ds, \quad \bar{B} \equiv 2^{(q+2)/2} MC_1^{q+2}.\end{aligned}$$

По теореме Бихари [29] получаем

$$\Phi(t) \leq \frac{\Phi_0}{[1 - \frac{q}{2} \Phi_0^{q/2} \bar{B} t]^{2/q}} \quad \forall t \in [0, T_1), \quad T_1 \equiv \frac{2}{q} \Phi_0^{-q/2} \bar{B}^{-1}. \quad (4.15)$$

Стало быть, в случае $\bar{p} < q + 2$ имеем $T_0 \geq T_1$.

Пусть теперь $\bar{p} \geq q + 2$. Воспользуемся тем, что в данном случае найдется $j^* \in \overline{1, N}$, при котором $p_{j^*} = \bar{p}$ и $p_{j^*} \geq q + 2$, такое, что $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$. Пусть C_{j^*} – константа вложения $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$:

$$\begin{aligned}|v|_0 &\leq C_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \\ \Phi(t) &\leq \Phi_0 + C_{j^*}^{q+2} M \int_0^t \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{(q+2)/p_{j^*}} ds \\ &\leq \Phi_0 + C_{j^*}^{q+2} M \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^{(q+2)/\bar{p}} \int_0^t \Phi^{(q+2)/\bar{p}}(s) ds.\end{aligned}$$

Рассмотрим два случая: $\alpha = 1$, $\alpha \in (0, 1)$, где $\alpha \equiv \frac{q+2}{\bar{p}}$.

В первом случае по теореме Гронвалла–Беллмана [29] имеем

$$\Phi(t) \leq \Phi_0 \exp\{\bar{A}t\}, \quad \bar{A} \equiv C_{j^*}^{q+2} M \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^{(q+2)/\bar{p}}. \quad (4.16)$$

Во втором случае, когда $\alpha \in (0, 1)$, по теореме Бихари получим

$$\Phi(t) \leq [\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\bar{A}t]^{1/(1-\alpha)}. \quad (4.17)$$

Из соотношений (4.16) и (4.17) следует, что $T_0 = +\infty$ в случае $\alpha \in (0, 1]$.

Теперь из соотношений (4.12) и (4.13) точно так же, как и на шаге 5 доказательства теоремы 3.1, выводим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\Phi''\Phi - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi'\Phi + \gamma\Phi^2 \geq 0, \quad (4.18)$$

где

$$\alpha \equiv \frac{\bar{p} + q + 2}{2\bar{p}}, \quad \beta \equiv \frac{(q+2)(q+1)}{q+2-\bar{p}}, \quad \gamma \equiv \frac{4(q+1)^2}{q+2-\bar{p}}, \quad q+2 > \bar{p} \equiv \max_{j=\overline{1, n}} p_j.$$

Интегрируя дифференциальное неравенство (4.18), с учетом (4.12) и (4.13) и неравенств

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_0, \quad \Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha - 1}} \Phi(0)$$

получим

$$\Phi \geq \frac{e^{\theta t} A^{1/(1-\alpha_1)}}{[T_2 - t]^{1/(\alpha_1-1)}} \quad \forall t \in [0, T_2), \quad T_2 \equiv \Phi_0^{1-\alpha_1} A^{-1}, \quad \theta = \frac{\beta}{\alpha - 1}.$$

Таким образом, теорема 4.1 доказана.

§ 5. Примеры

В примерах используются стандартные теоремы вложения Соболева, которые можно найти, например, в [32].

Во всех примерах $\mathbb{H} = \mathbb{L}^2(\Omega)$.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta u - u + \sum_{j=1}^N \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j-2} \nabla u) \right) - u + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + u^3 &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \end{aligned}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей класса $\mathcal{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 u &\equiv -\Delta u + u: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbb{A}_j(u) &\equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j-2} \nabla u): \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'_j}(\Omega), \quad p_j > 2, \\ \mathbb{F}(u) &\equiv u^3: \mathbb{L}^4(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{4/3}(\Omega), \quad \mathbb{P}(u) \equiv u^2: \mathbb{L}^4(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega), \\ \mathbb{D}v &\equiv \frac{\partial v}{\partial x_1}: \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbb{L}u &\equiv \mathbb{I}u: \mathbb{W}_1 = \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega) = \mathbb{W}_1^*, \\ \mathbb{V}_0 &\equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbb{V}_j \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega), \\ \mathbb{W}_0 &\equiv \mathbb{L}^4(\Omega), \quad \mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{L}^4(\Omega), \quad \mathbb{W}_3 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0^* &\equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_j^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p'_j}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{L}^{4/3}(\Omega), \\ \mathbb{V} &\equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \left(\bigcap_{j=1}^N \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \right). \end{aligned}$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^4(\Omega)$ имеет место при условии $N \leq 4$.

Наконец вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0 = \mathbb{W}_2$ справедливо при условиях

$$\bigcap_{j=1}^N \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$

что, в свою очередь, справедливо при условиях

$$N \leq \bar{p} \equiv \max_{j=1,n} p_j, \quad 4 < \frac{N\bar{p}}{N-\bar{p}} \quad \text{при } N > \bar{p}.$$

Предположим, что выполнены следующие условия, налагаемые на начальную функцию $u_0 \in \mathbb{V}$:

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha-1} \Phi(0), \quad \Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha-1}} \Phi(0),$$

где

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \|\nabla u\|_{p_j}^{p_j}, \quad \Phi'(0) = \|u_0\|_4^4 - \|u_0\|_2^2,$$

$$\alpha = \frac{\bar{p} + 4}{2\bar{p}}, \quad \beta = \frac{12}{4 - \bar{p}}, \quad \gamma = \frac{36}{4 - \bar{p}}$$

при $\bar{p} < 4$.

Можно проверить, что операторные коэффициенты удовлетворяют всем условиям теоремы 3.1.

ПРИМЕР 5.2. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\Delta^2 u + \Delta u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)) + \Delta u + u \frac{\partial u}{\partial x_1} - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) = 0,$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(0, x) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^{(4, \delta)}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 u &\equiv \Delta^2 u - \Delta u: \mathbb{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \\ \mathbb{F}(u) &\equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u): \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega), \\ \mathbb{A}_1(u) &\equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u): \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega), \\ \mathbb{P}(u) &= u^2: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega), \\ \mathbb{D}v &= \frac{\partial v}{\partial x_1}: \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{L}u = -\Delta u: \mathbb{W}_1 = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega) = \mathbb{W}_1^*, \\ \mathbb{V}_0 &\equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega), \quad \mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{L}^4(\Omega), \\ \mathbb{V}_1 &\equiv \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad \mathbb{W}_3 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0^* &\equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega), \quad \mathbb{V}_1^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1}, \\ \mathbb{V} &\equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0 \subset \mathbb{W}_1$ имеет место при $N \leq 3$ и $p \in (2, 6]$. Также имеют место вложения $\mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}_1$, $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W}_2$.

Предположим теперь, что выполнены следующие условия, налагаемые на начальную функцию $u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0), \quad \Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha - 1}} \Phi(0),$$

где

$$\alpha = \frac{4 + p}{2p}, \quad \beta = \frac{12}{4 - p}, \quad \gamma = \frac{36}{4 - p},$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \|\Delta u_0\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \|\nabla u_0\|_p^p,$$

$$\Phi'(0) = \|\nabla u_0\|_4^4 - \|\nabla u_0\|_2^2$$

при $p < 4$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.1.

ПРИМЕР 5.3. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (-\Delta^2 u + \Delta u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)) + \Delta u - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) \\ + \beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \end{aligned}$$

где $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^{(4, \delta)}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 u &\equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u): \mathbb{V}_1 = \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}_1^* = \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega), \\ \mathbb{L} u &\equiv -\Delta u: \mathbb{W}_1 = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}_1^* = \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbb{A}_0 u &\equiv \Delta^2 u - \Delta u: \mathbb{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \\ \mathbb{F}(u) &\equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u): \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega), \\ \mathbb{P}(u) &= \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_3} \mathbf{e}_1 + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial u}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \beta_3 \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathbf{e}_3: \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega), \\ \mathbb{D} \mathbf{v} &\equiv \operatorname{div}(\mathbf{v}): \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0 &\equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega), \\ \mathbb{W}_2 &\equiv \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega), \quad \mathbb{W}_3 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega), \\ \mathbb{W}_4 &\equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega), \\ \mathbb{V} &\equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

при $N \leq 3$ и $p \in (2, 6]$. Кроме того, имеют место вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0 \subset \mathbb{W}_1$, $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_1$, $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W}_2$.

Предположим, что выполнены следующие условия, налагаемые на начальную функцию $u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0), \quad \Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha - 1}} \Phi(0),$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{4+p}{2p}, \quad \beta = \frac{12}{4-p}, \quad \gamma = \frac{36}{4-p}, \\ \Phi(0) &= \frac{1}{2} \|\Delta u_0\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \|\nabla u_0\|_p^p, \\ \Phi'(0) &= \|\nabla u_0\|_4^4 - \|\nabla u_0\|_2^2 \end{aligned}$$

при $p < 4$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.1.

ПРИМЕР 5.4. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^{p_1-2}u) + \Delta u + \frac{\partial |u|^{q_2+1}}{\partial x_1} + |u|^{2q_2}u &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \end{aligned}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 u &\equiv -\Delta u + u: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{A}_1(u) \equiv |u|^{p_1-2}u: \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{p'_1}(\Omega), \\ \mathbb{F}(u) &\equiv |u|^{q_2}u: \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{q'_2}(\Omega), \quad q'_2 = \frac{q_2+2}{q_2+1}, \\ \mathbb{P}(u) &\equiv |u|^{q_2+1}: \mathbb{L}_0^{2q_2+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \mathbb{D}v \equiv \frac{\partial v}{\partial x_1}: \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbb{L}u &\equiv -\Delta u: \mathbb{W}_1 = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}_1^* = \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0 &\equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbb{V}_1 \equiv \mathbb{L}^{p_1}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega), \\ \mathbb{W}_2 &\equiv \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_3 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0^* &\equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_1^* \equiv \mathbb{L}^{p'_1}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{L}^{q'_2}(\Omega), \\ p_1 &= q_1 + 2, \quad q_1 > 0, \quad p'_1 \equiv \frac{p_1}{p_1-1}, \quad q'_2 \equiv \frac{q_2+2}{q_2+1}, \quad q_2 > 0. \end{aligned}$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$ имеет место либо при условии $0 < q_2 \leq 2/(N-2)$, $N \geq 3$, либо при условии $0 < q_2 < +\infty$, $N = 1, 2$. Это означает, что

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega).$$

Кроме того, $\mathbb{W}_0 = \mathbb{W}_2$. Предположим, что

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha-1} \Phi(0), \quad \Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha-1}} \Phi(0),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi'(0) &= \|u_0\|_{2q_2+2}^{2q_2+2} - \|\nabla u_0\|_2^2, \quad \Phi(0) = \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \frac{1}{p_1} \|u_0\|_{p_1}^{p_1}, \\ \alpha &= \frac{2q_2+2+p_1}{2p_1}, \quad \beta = \frac{2(q_2+1)(2q_2+1)}{2q_2+2-p_1}, \quad \gamma = \frac{4(2q_2+1)^2}{2q_2+2-p_1} \end{aligned}$$

при условии $\bar{p} = p_1 < 2q_2 + 2$.

Проверим монотонность производной Фреше оператора $\mathbb{A}_1(u) = |u|^{q_1}u$ в указанном в формулировке теоремы 4.1 смысле. Действительно, производная Фреше имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}'_{1,u}(u)h &\equiv (q_1+1)|u|^{q_1}h: \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{q'_1}(\Omega), \quad q'_1 \equiv \frac{q_1+2}{q_1+1}, \quad \forall h \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega), \\ \langle \mathbb{A}'_{1,u}(u)u_1 - \mathbb{A}'_{1,u}(u)u_2, u_1 - u_2 \rangle_1 &= (q_1+1) \langle |u|^{q_1}u_1 - |u|^{q_1}u_2, u_1 - u_2 \rangle_1 \\ &= (q_1+1) \int_{\Omega} (|u|^{q_1}u_1 - |u|^{q_1}u_2)(u_1 - u_2) dx \geq 0 \quad \forall u, u_1, u_2 \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega), \end{aligned}$$

где $q_1 = p_1 - 2$. Докажем теперь, что при условии $\|\nabla u_n - \nabla u\|_2 \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow +\infty$, имеет место сходимость производных Фреше в равномерной операторной топологии $\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}'_{1,u}(u) - \mathbb{A}'_{1,u}(u_n)\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}^{-1}} &= \sup_{\|\nabla h\|_2=1} \|\mathbb{A}'_{1,u}(u)h - \mathbb{A}'_{1,u}(u_n)h\|_{-1} \\ &\leq \sup_{\|\nabla h\|_2=1} \|\mathbb{A}'_{1,u}(u)h - \mathbb{A}'_{1,u}(u_n)h\|_{(q+2)/(q+1)} \\ &\leq (q+1) \sup_{\|\nabla h\|_2=1} \left(\int_{\Omega} [|u|^q - |u_n|^q] |h|^{(q+2)/(q+1)} dx \right)^{(q+1)/(q+2)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{\Omega} [|u|^q - |u_n|^q] |h|^{(q+2)/(q+1)} dx \\ &\leq \int_{\Omega} [|u|^q - |u_n|^q]^{(q+2)/(q+1)} |h|^{(q+2)/(q+1)} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} [|u|^q - |u_n|^q]^{(q+2)/q} dx \right)^{q/(q+1)} \left(\int_{\Omega} |h|^{q+2} dx \right)^{1/(q+1)} \\ &\leq \|\nabla h\|_2^{(q+2)/(q+1)} \left(\int_{\Omega} [|u|^q - |u_n|^q]^{(q+2)/q} dx \right)^{q/(q+1)} \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} [|u|^q - |u_n|^q]^{(q+2)/q} dx \right)^{q/(q+1)} \\ &\leq C \max \{ \|\nabla u\|_2^{(q+2)q/(q+1)}, \|\nabla u_n\|_2^{(q+2)q/(q+1)} \} \leq C. \end{aligned}$$

Отметим, что поскольку $\|\nabla u - \nabla u_n\|_2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, то $u_n \rightarrow u$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Рассмотрим оператор $f(x, u) = |u|^q: \mathbb{L}^{q+1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{(q+1)/q}$. Значит, по теореме Вайнберга–Немыцкого [33, с. 39] имеем $J_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 4.1.

В заключение мы хотим выразить искреннюю признательность В. М. Миллионщикову за весьма ценные замечания, улучшившие содержание работы.

Список литературы

1. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // ЖВМиМФ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1835–1869.
2. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики. Ч. 2 // ЖВМиМФ. 2004. Т. 44. № 11. С. 2041–2048.
3. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. № 1. С. 3–50.
4. Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.

5. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
6. Плетнер Ю. Д. Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // ЖВМиМФ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1899.
7. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
8. Levine H. A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Rational. Mech. Analys. 1973. V. 51. P. 371–386.
9. Levine H. A., Park S. R., Serrin J. Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type // J. Diff. equat. 1998. V. 142. P. 212–229.
10. Кожанов А. И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 1. С. 70–75.
11. Корпусов М. О. О разрушении решений класса сильно нелинейных уравнений типа Соболева // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. № 4. С. 151–204.
12. Корпусов М. О., Свешиников А. Г. Разрушение решений абстрактных задач Коши для нелинейных дифференциально-операторных уравнений // Докл. РАН. 2005. Т. 401. № 1. С. 1–3.
13. Корпусов М. О., Свешиников А. Г. О разрушении решений одного класса квазилинейных волновых диссипативных уравнений псевдопараболического типа с источниками // Докл. РАН. 2005 (в печати).
14. Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 229. С. 1–232.
15. Шишмарёв И. А. Об одном нелинейном уравнении типа Соболева // Дифф. уравн. 2005. Т. 41. № 1. С. 1–3.
16. Karch G. Asymptotic behavior of solutions to some pseudoparabolic equations // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20. № 3. P. 271–289.
17. Goldstein J. A., Kajikiya R., Oharu S. On some nonlinear dispersive equations in several space variables // Diff. and Integ. Equat. 1990. V. 3. № 4. P. 617–632.
18. Zhang L. Decay of solutions of generalized BBMB equations in n-space dimensions // Nonlinear Anal. TMA. 1995. V. 20. P. 1343–1390.
19. Naumkin P. I. Large-time asymptotic behaviour of a step for the Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation // Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A. 1996. V. 126. № 1. P. 1–18.
20. Avrin J., Goldstein J. A. Global existence for the Benjamin–Bona–Mahony equation in arbitrary dimensions // Nonlinear Anal. TMA. 1985. V. 9. № 8. P. 861–865.
21. Albert J. P. On the decay of solutions of the generalized Benjamin–Bona–Mahony equation // J. Math. Anal. Appl. 1989. V. 141. № 2. P. 527–537.
22. Lee H. Y., Ohm M. R., Shin J. Y. The convergence of fully discrete Galerkin approximations of the Rosenau equation // Korean J. Comput. Appl. Math. 1999. V. 6. № 1. P. 1–13.
23. Mei M. Long-time behavior of solution for Rosenau–Burgers equation. II // J. Appl. Anal. 1998. V. 68. № 3–4. P. 333–356.
24. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
25. Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
26. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
27. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986.

28. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
29. *Демидович В. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
30. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.
31. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
32. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
33. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.

E-mail: korpusev@rsci.ru

Поступило в редакцию
16.11.2004