Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ковалевский, G -компактность последовательностей нелинейных операторов задач Дирихле с переменной областью определения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 1, 133–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/im65>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:34:16

УДК 517.98

А. А. Ковалевский

**G -компактность последовательностей
нелинейных операторов задач Дирихле
с переменной областью определения**

Для последовательности операторов $A_s : \dot{W}^{1,m}(\Omega_s) \rightarrow (\dot{W}^{1,m}(\Omega_s))^*$ дивергентного вида доказывается теорема о выборе подпоследовательности, G -сходящейся к оператору $\hat{A} : \dot{W}^{1,m}(\Omega) \rightarrow (\dot{W}^{1,m}(\Omega))^*$ с теми же старшими коэффициентами, что и у операторов A_s , и некоторым добавочным младшим коэффициентом $b(x, u)$. Дается процедура построения функции $b(x, u)$. Обсуждается вопрос о необходимости основного условия, при котором устанавливается теорема о выборе. Доказывается критерий выполнения этого условия.

Библиография: 12 наименований.

Понятие G -сходимости операторов с переменной областью определения, подходящее для исследования сходимости решений задач Дирихле для эллиптических уравнений в переменных (например, перфорированных) областях, было введено и изучалось в работах [1], [2]. Из результатов этих работ следует, в частности, что при определенных условиях на геометрию областей Ω_s , $s = 1, 2, \dots$, для последовательности равномерно регулярных и равномерно монотонных операторов $A_s : \dot{W}^{k,m}(\Omega_s) \rightarrow (\dot{W}^{k,m}(\Omega_s))^*$ имеет место теорема о выборе подпоследовательности, G -сходящейся к оператору $\hat{A} : \dot{W}^{k,m}(\Omega) \rightarrow (\dot{W}^{k,m}(\Omega))^*$ с аналогичными свойствами регулярности и монотонности (Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, содержащая области Ω_s). Однако данный результат не несет никакой информации о структуре оператора $\hat{A}$. В настоящей работе указанный пробел устраняется для случая $k = 1$. А именно, доказывается возможность выбора из последовательности операторов $A_s : \dot{W}^{1,m}(\Omega_s) \rightarrow (\dot{W}^{1,m}(\Omega_s))^*$ дивергентного вида подпоследовательности, G -сходящейся к оператору $\hat{A} : \dot{W}^{1,m}(\Omega) \rightarrow (\dot{W}^{1,m}(\Omega))^*$ следующей структуры: $\hat{A} = A + F_b$, где оператор A имеет те же коэффициенты, что и операторы A_s , а оператор F_b порождается некоторой функцией $b : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Этот результат устанавливается при некотором функциональном условии (условии $\mathcal{R}$) на области Ω_s и достигается путем использования абстрактной теоремы о выборе [1], [2], а также решений некоторых “локальных” вариационных неравенств и связанных с ними величин, которые в конечном счете и определяют функцию b . Эта функция в некоторой степени характеризует плотность распределения множеств $\Omega \setminus \Omega_s$. Дается процедура ее построения. В этом состоит существенное отличие данной статьи от работ других авторов (см., например, [3]–[6]), в которых

Работы выполнены при финансовой поддержке Международного научного Фонда и Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

предположение о существовании функции b – плотности распределения множеств $\Omega \setminus \Omega_s$ – является основным условием для сходимости решений задач Дирихле в областях Ω_s к решению усредненного уравнения с добавочным коэффициентом b . Кроме того, в отличие от работ [4], [5] по нелинейной невариационной задаче Дирихле в перфорированных областях в статье не используются никакие особенности структуры областей Ω_s и связанные с этим поточечные оценки решений вспомогательных задач.

В заключительной части работы дается уточнение теоремы о выборе, относящееся к сходимости решений уравнений с операторами A_s по энергии. В связи с этим вводится понятие сильной G -сходимости последовательности $\{A_s\}$ и доказывается необходимость условия $\mathcal{R}$ для сильной G -сходимости $\{A_s\}$ к оператору вида $A + F_b$. Устанавливаются критерии выполнения условия $\mathcal{R}$.

Подчеркнем, что благодаря условию $\mathcal{R}$ оператор F_b является интегральным оператором относительно меры Лебега. Без каких-либо предположений на области $\Omega_s \subset \Omega$ поведение решений задач Дирихле для линейных эллиптических уравнений в областях Ω_s изучалось в [7], где было показано, что эти решения сходятся к решению предельного уравнения, отличающегося от исходных уравнений интегральным оператором относительно некоторой борелевской меры. Аналогичный результат для квазилинейных эллиптических уравнений с однородными по градиенту коэффициентами получен в [8]. В данной же работе никакая однородность коэффициентов рассматриваемых операторов не предполагается.

Отметим, что определенное влияние на методы, развитые в статье, оказали работы [3], [6], [9]. Основной результат статьи доказан в препринте [10].

§ 1. Предположения и формулировка основного результата

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\{\Omega_s\}$ – последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω , $m > 1$.

Пусть отображения p_s определяются следующим образом: если $s \in \mathbb{N}$, то p_s – отображение $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$ в $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$ такое, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$

$$(p_s u)|_{\Omega_s} = u, \quad p_s u = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \setminus \Omega_s.$$

Пусть $\nu \geq 1$ и выполняется условие:

$\mathcal{R}$ если $u \in C_0^\infty(\Omega)$, то существует последовательность $u_s \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s u_s \rightarrow u$ слабо в $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$ и для любого открытого множества $E \subset \Omega$

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^m dx \leq \nu \int_{E \cap \Omega} \{|\nabla u|^m + |u|^m\} dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ A_s – обратимый оператор из $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$ в $(\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s))^*$, $\hat{A}$ – обратимый оператор из $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$ в $(\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega))^*$. Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ G -сходится к оператору $\hat{A}$, если для любого $f \in (\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega))^*$ $p_s A_s^{-1}(f \circ p_s) \rightarrow \hat{A}^{-1}f$ слабо в $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$.

Это определение является реализацией общего определения G -сходимости для абстрактных операторов из [1], [2].

Далее введем в рассмотрение последовательность операторов $A_s : \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s) \rightarrow (\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s))^*$ дивергентного вида и изучим для нее вопрос о выборе G -сходящейся подпоследовательности и о структуре соответствующего G -предельного оператора.

Пусть $m' = \frac{m}{m-1}$, $0 < m_1 \leq \min(m, m')$, $m_2 \geq \max(m, 2)$, $c \geq 1$, для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ a_i – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$, причем для любых $x \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, 0)| = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, \eta) - a_i(x, \eta')|^{m'} \leq c(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_1} |\eta - \eta'|^{m_1}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, \eta) - a_i(x, \eta'))(\eta_i - \eta'_i) \geq c^{-1}(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_2} |\eta - \eta'|^{m_2}. \quad (3)$$

Пусть теперь A – оператор из $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$ в $(\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) \partial_i v \right\} dx;$$

если $s \in \mathbb{N}$, то A_s – оператор из $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$ в $(\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s))^*$ такой, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$

$$\langle A_s u, v \rangle = \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) \partial_i v \right\} dx.$$

Из условий на функции a_i , $i = 1, \dots, n$, вытекает, что операторы A_s обратимы [11].

Положим

$$m'' = m' m_1 (m' m_2 - m_1)^{-1}, \quad \mu = 2^{m m_2 + 2} c^{2m} \nu n$$

и обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех функций Каратеодори $b : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для любых $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}$

$$|b(x, \xi)|^{m'} \leq \mu^{m'} (1 + |\xi|)^{m-m''} |\xi|^{m''}. \quad (4)$$

Введем обозначение: если $b \in \mathcal{B}$, то F_b – оператор из $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$ в $(\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$

$$\langle F_b u, v \rangle = \int_{\Omega} b(x, u) v dx.$$

ТЕОРЕМА 1. *Существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $b \in \mathcal{B}$ такие, что оператор $A + F_b$ обратим и последовательность $\{A_{s_j}\}$ G -сходится к оператору $A + F_b$.*

Доказательству теоремы предпослел изучение свойств решений некоторых “локальных” вариационных неравенств. С помощью этих решений и будет установлено существование функции b , о которой говорится в формулировке теоремы 1.

§ 2. Функции $w_{t,s}^{y,\xi}$ и некоторые их свойства

Пусть для любых $y \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{N}$

$$Q_t(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x_i - y_i| < \frac{1}{2t}, \quad i = 1, \dots, n \right\};$$

для любых $t, s \in \mathbb{N}$, $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$V_{t,s}(y, \xi) = \left\{ u \in \mathring{W}^{1,m}(\Omega_s) : \int_{\Omega_s} |\nabla u|^m dx \leq t^{2m}, \right. \\ \left. \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |u - \xi|^m dx \leq t^{-n-3m} \right\}.$$

Заметим, что если $t, s \in \mathbb{N}$, $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$, причем $V_{t,s}(y, \xi) \neq \emptyset$, то существует функция $w \in V_{t,s}(y, \xi)$ такая, что $\forall v \in V_{t,s}(y, \xi)$

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w) \partial_i(v - w) \right\} dx \geq 0.$$

Это вытекает из условий на функции a_i , выпуклости, замкнутости, ограниченности множества $V_{t,s}(y, \xi)$ и из [11, гл. 2, теорема 8.1].

Сделанное замечание позволяет дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $t, s \in \mathbb{N}$, $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$. Если $V_{t,s}(y, \xi) = \emptyset$, то $w_{t,s}^{y,\xi} \in \mathring{W}^{1,m}(\Omega_s)$, $w_{t,s}^{y,\xi} = 0$ на Ω_s ; если же $V_{t,s}(y, \xi) \neq \emptyset$, то $w_{t,s}^{y,\xi} \in V_{t,s}(y, \xi)$ и $\forall v \in V_{t,s}(y, \xi)$

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) \partial_i(v - w_{t,s}^{y,\xi}) \right\} dx \geq 0.$$

Введем еще ряд вспомогательных функций и чисел. Пусть χ – функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $0 \leq \chi \leq 1$ в $\mathbb{R}^n$, $\chi = 1$ на $Q_2(0)$, $\chi = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus Q_1(0)$; $\chi_0 = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\nabla \chi(x)|$; λ – функция класса $C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $0 \leq \lambda \leq 1$ на $\mathbb{R}$, $\lambda(\xi) = 1$ при $\xi \leq 1/2$, $\lambda(\xi) = 0$ при $\xi \geq 1$; $\lambda_0 = \max_{\xi \in \mathbb{R}} |\lambda'(\xi)|$. Для любых $y \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}$ положим

$$T(y, \xi) = n [d(y, \partial\Omega)]^{-1} + \nu \chi_0 (1 + 2|\xi|)^{m'} + n \lambda_0;$$

для любого $t \in \mathbb{N}$ положим $t' = t/2$, если t – четное число, и $t' = (t-1)/2$, если t – нечетное число.

Через c_i , $i = 1, 2, \dots$, далее будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, m, m_1, m_2, c, ν .

ЛЕММА 1. Пусть $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{N}$, причем $t \geq T(y, \xi)$. Тогда существует $s_t^0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geq s_t^0$,

$$V_{t,s}(y, \xi) \neq \emptyset, \quad (5)$$

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi}|^m dx \leq \mu(1 + |\xi|)^{m(1 - \frac{m''}{m_1})} |\xi|^{\frac{mm''}{m_1}} t^{-n}, \quad (6)$$

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) \partial_i w_{t,s}^{y,\xi} \right\} dx \leq \mu(1 + |\xi|)^{m-1 - \frac{m''}{m'}} |\xi|^{1 + \frac{m''}{m'}} t^{-n}, \quad (7)$$

$$\int_{[Q_t(y) \setminus Q_{t+3}(y)] \cap \Omega_s} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi}|^m dx \leq c_1(1 + |\xi|)^m t^{-n - \frac{1}{m}}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\xi = 0$, то для любого $s \in \mathbb{N}$ функция, равная нулю на Ω_s , принадлежит $V_{t,s}(y, \xi)$. Тогда в силу определения 2 и соотношений (1), (3) $|\nabla w_{t,s}^{y,\xi}| = 0$ почти всюду на $Q_t(y) \cap \Omega_s$ и, следовательно, неравенства (6)–(8) имеют место.

Поэтому для доказательства леммы остается рассмотреть случай $\xi \neq 0$. В силу неравенства $t > n[d(y, \partial\Omega)]^{-1} + 1$ имеем $\overline{Q_{t'}(y)} \subset \Omega$. Пусть χ_t – функция на Ω такая, что $\forall x \in \Omega$ $\chi_t(x) = \chi(\frac{t}{2}(x - y))$. Имеем $\chi_t = 1$ на $Q_t(y)$, $\chi_t = 0$ на $\Omega \setminus Q_{t'}(y)$, $\chi_t \in C_0^\infty(\Omega)$. Согласно условию $\mathcal{R}$ найдется последовательность $u_s \in \mathring{W}^{1,m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s u_s \rightarrow \xi \chi_t$ слабо в $\mathring{W}^{1,m}(\Omega)$ и для любого открытого множества $E \subset \Omega$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^m dx \leq \nu |\xi|^m \int_{E \cap \Omega} \{|\nabla \chi_t|^m + |\chi_t|^m\} dx.$$

Тогда, учитывая свойства функции χ_t , получаем, что при $s \in \mathbb{N}$, $s \geq s_t^0$,

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |u_s - \xi|^m dx \leq \nu \chi_0(1 + |\xi|) t^{-n-3m-1}, \quad (9)$$

$$\int_{\Omega_s} |\nabla u_s|^m dx \leq \nu \chi_0^m |\xi|^m t^m, \quad \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^m dx \leq 2\nu |\xi|^m t^{-n}, \quad (10)$$

$$\int_{[Q_t(y) \setminus Q_{t+6}(y)] \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^m dx \leq 7n\nu |\xi|^m t^{-n-1}. \quad (11)$$

Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$, $s \geq s_t^0$. В силу (9), первого из неравенства (10) и неравенства $t \geq \nu \chi_0(1 + |\xi|)$ имеем $u_s \in V_{t,s}(y, \xi)$ и, следовательно, (5) верно. Тогда в силу определения 2 $w_{t,s}^{y,\xi} \in V_{t,s}(y, \xi)$ и

$$\begin{aligned} & \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) \partial_i w_{t,s}^{y,\xi} \right\} dx \\ & \leq \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) \partial_i u_s \right\} dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть M_s – правая часть неравенства (12), I_s – интеграл от функции $|\nabla w_{t,s}^{y,\xi}|^m$ по $Q_t(y) \cap \Omega_s$. С помощью интегрального неравенства Гёльдера находим, что

$$I_s \leq \left[\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} (1 + |\nabla w_{t,s}^{y,\xi}|)^{m-m_2} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi}|^{m_2} dx \right]^{\frac{m}{m_2}} \times \left[\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} (1 + |\nabla w_{t,s}^{y,\xi}|)^m dx \right]^{\frac{m_2-m}{m_2}}.$$

Отсюда и из (1), (3), (12) выводим, что

$$I_s \leq 2^{\frac{m}{m_2}(m_2-m)} (cM_s)^{\frac{m}{m_2}} (t^{-n} + I_s)^{\frac{m_2-m}{m_2}}. \quad (13)$$

Кроме того, используя (1), (2) и второе из неравенств (10), устанавливаем, что

$$M_s \leq 2^{\frac{m-m_1}{m'}} (2n\nu|\xi|^{m_1} t^{-n})^{\frac{1}{m}} c(t^{-n} + I_s)^{\frac{m-m_1}{mm'}} I_s^{\frac{m_1}{mm'}}. \quad (14)$$

Из (13) и (14) получаем

$$I_s \leq 2^m (n\nu c^{2m} |\xi|^m)^{\frac{m''}{m_1}} t^{-n} + 2^m (n\nu c^{2m} |\xi|^{m_1} t^{-n})^{\frac{m''}{m_1}} I_s^{1-\frac{m''}{m_1}}.$$

Из этого неравенства, используя для оценки второго слагаемого в его правой части неравенство Юнга, выводим

$$I_s \leq \mu (1 + |\xi|)^{m(1-\frac{m''}{m_1})} |\xi|^{\frac{mm''}{m_1}} t^{-n}. \quad (15)$$

Значит, неравенство (6) имеет место. Из (14) и (15) получаем

$$M_s \leq \mu (1 + |\xi|)^{m-1-\frac{m''}{m'}} |\xi|^{1+\frac{m''}{m'}} t^{-n}. \quad (16)$$

Отсюда и из (12) следует неравенство (7).

Далее, пусть λ_t – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$\lambda_t(\xi) = \begin{cases} \lambda \left(\frac{1}{3}(t+3)(t+6)\xi - \frac{1}{6}t \right), & \text{если } \xi \geq 0, \\ \lambda \left(-\frac{1}{3}(t+3)(t+6)\xi - \frac{1}{6}t \right), & \text{если } \xi < 0. \end{cases}$$

Пусть теперь ψ_t – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$

$$\psi_t(x) = \prod_{i=1}^n \lambda_t(x_i - y_i).$$

Имеем $\psi_t \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \psi_t \leq 1$ на Ω , $\psi_t = 1$ на $Q_{t+6}(y)$, $\psi_t = 0$ на $\Omega \setminus Q_{t+3}(y)$, $|\nabla \psi_t| \leq n\lambda_0 t^2$. Положим

$$\alpha = \nu\chi_0(1 + |\xi|)t^{-1},$$

и пусть

$$v_s = (1 - \alpha)\psi_t w_{t,s}^{y,\xi} + [(1 - \alpha)(1 - \psi_t) + \alpha]u_s. \quad (17)$$

Используя включение $w_{t,s}^{y,\xi} \in V_{t,s}(y, \xi)$, (9), первое из неравенств (10), неравенство $t \geq n\lambda_0$ и определение α , устанавливаем, что $v_s \in V_{t,s}(y, \xi)$. Тогда в силу определения 2

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) \partial_i (v_s - w_{t,s}^{y,\xi}) \right\} dx \geq 0.$$

Отсюда и из (17) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) \partial_i w_{t,s}^{y,\xi} \right\} (1 - \psi_t) dx \\ & \leq (1 - \alpha) \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) \partial_i u_s \right\} (1 - \psi_t) dx \\ & \quad + (1 - \alpha) \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) \partial_i \psi_t \right\} (w_{t,s}^{y,\xi} - u_s) dx + \alpha M_s. \end{aligned}$$

Левую и правую части этого неравенства обозначим соответственно через J'_s и J''_s . Используя (1), (3) и свойства функции ψ_t , находим, что

$$\int_{[Q_t(y) \setminus Q_{t+3}(y)] \cap \Omega_s} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi}|^m dx \leq 2^{m_2} c J'_s + 3nt^{-n-1}, \quad (18)$$

а используя (1), (2), (9), (11), (15), (16), свойства функции ψ_t и принадлежность $w_{t,s}^{y,\xi}$ множеству $V_{t,s}(y, \xi)$, получаем

$$J''_s \leq n\lambda_0 \mu^2 (1 + |\xi|)^m t^{-n-\frac{1}{m}} + \nu \chi_0 \mu (1 + |\xi|)^{m+1} t^{-n-1}. \quad (19)$$

Из неравенства (18), (19), учитывая, что $t \geq (1 + |\xi|)^{m'}$, выводим (8). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $y \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{N}$, причем $t \geq T(y, \xi) + T(y, \xi')$. Тогда существует $s'_t \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geq s'_t$,

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi} - \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}|^m dx \leq c_2 (1 + |\xi| + |\xi'|)^{m-\frac{m}{m_2}} |\xi - \xi'|^{\frac{m}{m_2}} t^{-n}. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $\xi \neq \xi'$. Положим

$$\sigma = |\xi - \xi'| (1 + |\xi| + |\xi'|)^{-1}, \quad \xi'' = \xi' + \sigma^{-1}(\xi - \xi'), \quad \xi''' = \xi + \sigma^{-1}(\xi' - \xi).$$

Легко убедиться в том, что $\xi'' \neq 0$, $\xi''' \neq 0$ и имеют место неравенства

$$|\xi''| \leq 1 + |\xi| + 2|\xi'|, \quad |\xi'''| \leq 1 + 2|\xi| + |\xi'|, \quad (21)$$

$$|\xi''| \leq \frac{t}{\nu \chi_0}, \quad |\xi'''| \leq \frac{t}{\nu \chi_0}. \quad (22)$$

Пусть χ_t – функция, определенная в доказательстве леммы 1. Согласно условию $\mathcal{R}$ существуют последовательности $u_s, v_s \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$ такие, что $p_s u_s \rightarrow \xi'' \chi_t, p_s v_s \rightarrow \xi''' \chi_t$ слабо в $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$ и для любого открытого множества $E \subset \Omega$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^m dx &\leq \nu |\xi''|^m \int_{\overline{E} \cap \Omega} \{|\nabla \chi_t|^m + |\chi_t|^m\} dx, \\ \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_s} |\nabla v_s|^m dx &\leq \nu |\xi'''|^m \int_{\overline{E} \cap \Omega} \{|\nabla \chi_t|^m + |\chi_t|^m\} dx. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая свойства функции χ_t и неравенства (21), (22), получаем, что при $s \geq \tilde{s}_t$

$$u_s \in V_{t,s}(y, \xi''), \quad v_s \in V_{t,s}(y, \xi''')$$

и справедливо неравенство

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \{|\nabla u_s|^m + |\nabla v_s|^m\} dx \leq 3^m \nu (1 + |\xi| + |\xi'|)^m t^{-n}. \quad (23)$$

Далее, согласно лемме 1 при $s \geq s_t^0$

$$w_{t,s}^{y,\xi} \in V_{t,s}(y, \xi), \quad w_{t,s}^{y,\xi'} \in V_{t,s}(y, \xi')$$

и справедливо неравенство

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \{|\nabla w_{t,s}^{y,\xi}|^m + |\nabla w_{t,s}^{y,\xi'}|^m\} dx \leq \mu (2 + |\xi| + |\xi'|)^m t^{-n}. \quad (24)$$

Положим теперь $s'_t = \max(s_t^0, \tilde{s}_t)$ и зафиксируем $s \in \mathbb{N}$, $s \geq s'_t$. Так как

$$(1 - \sigma) w_{t,s}^{y,\xi'} + \sigma u_s \in V_{t,s}(y, \xi), \quad (1 - \sigma) w_{t,s}^{y,\xi} + \sigma v_s \in V_{t,s}(y, \xi'),$$

то в силу определения 2

$$\begin{aligned} &\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) \partial_i(w_{t,s}^{y,\xi} - w_{t,s}^{y,\xi'}) \right\} dx \\ &\leq \sigma \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) \partial_i(u_s - w_{t,s}^{y,\xi'}) \right\} dx, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &- \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}) \partial_i(w_{t,s}^{y,\xi} - w_{t,s}^{y,\xi'}) \right\} dx \\ &\leq \sigma \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}) \partial_i(v_s - w_{t,s}^{y,\xi}) \right\} dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (25), (26) и (3) выводим

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} (1 + |\nabla w_{t,s}^{y,\xi}| + |\nabla w_{t,s}^{y,\xi'}|)^{m-m_2} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi} - \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}|^{m_2} dx \leq c \sigma (J'_s + J''_s), \quad (27)$$

где J'_s – интеграл в правой части неравенства (25), J''_s – интеграл в правой части неравенства (26). Обозначим через J_s интеграл от функции $|\nabla w_{t,s}^{y,\xi} - \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}|^m$ по $Q_t(y) \cap \Omega_s$. Используя неравенство Гёльдера и (24), (27), находим, что

$$J_s \leq 3^{2m} c \sigma^{\frac{m}{m_2}} (J'_s + J''_s)^{\frac{m}{m_2}} [\mu(1 + |\xi| + |\xi'|)^m t^{-n}]^{\frac{m_2 - m}{m_2}}, \quad (28)$$

а используя (1), (2), (23), (24), получаем неравенство

$$J'_s + J''_s \leq 5\mu^2(1 + |\xi| + |\xi'|)^m t^{-n}.$$

Отсюда и из (28) вытекает неравенство (20). Лемма доказана.

Введем обозначения: $m''' = mm_2^{-2}$; если $t, s \in \mathbb{N}, y \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} E'_{t,s}(y, \xi) &= \{x \in Q_t(y) \cap \Omega_s : [w_{t,s}^{y,\xi}(x) - \xi(1 - t^{-1})] \operatorname{sign} \xi < 0\}, \\ E''_{t,s}(y, \xi) &= [Q_t(y) \cap \Omega_s] \setminus E'_{t,s}(y, \xi). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть $y \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}, \xi \neq 0, t \in \mathbb{N}$, причем $t \geq 2T(y, \xi)$. Тогда существует $s''_t \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}, s \geq s''_t$,

$$\operatorname{mes} E'_{t,s}(y, \xi) \leq |\xi|^{-m} t^{-n-2m}, \quad (29)$$

$$\int_{E''_{t,s}(y, \xi)} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi}|^m dx \leq c_3(1 + |\xi|)^m t^{-n-m''}. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\xi' = \xi(1 - t^{-1})$. В силу лемм 1 и 2 найдется $s''_t \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \geq s''_t$

$$w_{t,s}^{y,\xi} \in V_{t,s}(y, \xi), \quad w_{t,s}^{y,\xi'} \in V_{t,s}(y, \xi')$$

и имеют место неравенства

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi}|^m dx \leq \mu(1 + |\xi|)^m t^{-n}, \quad (31)$$

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi} - \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}|^m dx \leq 2^m c_2(1 + |\xi|)^m t^{-n - \frac{m}{m_2}}. \quad (32)$$

Зафиксируем $s \in \mathbb{N}, s \geq s''_t$. Для $x \in E'_{t,s}(y, \xi)$ имеем

$$|\xi|t^{-1} \leq |w_{t,s}^{y,\xi}(x) - \xi|.$$

Отсюда, учитывая принадлежность функции $w_{t,s}^{y,\xi}$ множеству $V_{t,s}(y, \xi)$, выводим неравенство (29). Покажем, что

$$\begin{aligned} & \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}) \partial_i w_{t,s}^{y,\xi'} \right\} dx \\ & \leq \int_{E'_{t,s}(y, \xi)} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}) \partial_i w_{t,s}^{y,\xi} \right\} dx. \end{aligned} \quad (33)$$

Пусть $\xi > 0$. Положим $v = \min\{w_{t,s}^{y,\xi}, \xi'\}$. Нетрудно проверить, что $v \in V_{t,s}(y, \xi')$. Тогда согласно определению 2

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}) \partial_i w_{t,s}^{y,\xi'} \right\} dx \leq \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}) \partial_i v \right\} dx. \quad (34)$$

Отсюда, учитывая определение функции v , получаем (33).

Пусть теперь $\xi < 0$. Положим $v = \max\{w_{t,s}^{y,\xi}, \xi'\}$. Имеем $v \in V_{t,s}(y, \xi')$ и в силу определения 2 справедливо неравенство (34), из которого, учитывая определение v , получаем (33).

Итак, неравенство (33) доказано. Из этого неравенства, учитывая, что его правую часть можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{E'_{t,s}(y,\xi)} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}) \partial_i w_{t,s}^{y,\xi'} \right\} dx \\ & + \int_{E'_{t,s}(y,\xi)} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}) [\partial_i w_{t,s}^{y,\xi} - \partial_i w_{t,s}^{y,\xi'}] \right\} dx, \end{aligned} \quad (35)$$

получаем

$$\int_{E''_{t,s}(y,\xi)} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}) \partial_i w_{t,s}^{y,\xi'} \right\} dx \leq J_s, \quad (36)$$

где J_s – второй интеграл в выражении (35). Используя (1), (3), (36) и неравенство Гёльдера, находим

$$\int_{E''_{t,s}(y,\xi)} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi'}|^m dx \leq (cJ_s)^{\frac{m}{m_2}} \left[\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} (1 + |\nabla w_{t,s}^{y,\xi'}|)^m dx \right]^{\frac{m_2 - m}{m_2}}.$$

Отсюда и из (1), (2), (31), (32) выводим (30). Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $t, s \in \mathbb{N}$, $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$. Если $\xi = 0$, то $b_{t,s}(y, \xi) = 0$; если же $\xi \neq 0$, то

$$b_{t,s}(y, \xi) = \frac{t^n}{\xi} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) \partial_i w_{t,s}^{y,\xi} \right\} dx.$$

ЛЕММА 4. Пусть $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{N}$, причем $t \geq T(y, \xi)$. Тогда существует $s_t^0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geq s_t^0$,

$$|b_{t,s}(y, \xi)|^{m'} \leq \mu^{m'} (1 + |\xi|)^{m-m''} |\xi|^{m''}.$$

Этот результат является следствием того, что в силу леммы 1 при достаточно больших s справедливо неравенство (7).

Положим

$$\tilde{m} = m_1(m_2 m')^{-1}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $y \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\xi' \neq 0$, $t \in \mathbb{N}$, причем $t \geq T(y, \xi) + T(y, \xi')$. Тогда существует $s_t''' \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geq s_t'''$,

$$|b_{t,s}(y, \xi) - b_{t,s}(y, \xi')| \leq c_4 |\xi'|^{-1} (1 + |\xi| + |\xi'|)^{m-\tilde{m}} |\xi - \xi'|^{\tilde{m}}. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 1 и 2 найдется $s_t''' \in \mathbb{N}$ такое, что при $s \geq s_t'''$

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \{ |\nabla w_{t,s}^{y,\xi}|^m + |\nabla w_{t,s}^{y,\xi'}|^m \} dx \leq \mu (2 + |\xi| + |\xi'|)^m t^{-n}, \quad (38)$$

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi} - \nabla w_{t,s}^{y,\xi'}|^m dx \leq c_2 (1 + |\xi| + |\xi'|)^{m-\frac{m}{m_2}} |\xi - \xi'|^{\frac{m}{m_2}} t^{-n}, \quad (39)$$

$$|b_{t,s}(y, \xi)|^{m'} \leq \mu^{m'} (1 + |\xi|)^{m-m''} |\xi|^{m''}, \quad (40)$$

$$|b_{t,s}(y, \xi')|^{m'} \leq \mu^{m'} (1 + |\xi'|)^{m-m''} |\xi'|^{m''}. \quad (41)$$

Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$, $s \geq s_t'''$. Если $\xi = 0$, то $b_{t,s}(y, \xi) = 0$ и в силу (41)

$$|b_{t,s}(y, \xi) - b_{t,s}(y, \xi')| \leq \mu |\xi'|^{-1} (1 + |\xi| + |\xi'|)^{m-\frac{m''}{m'}} |\xi - \xi'|^{\frac{m''}{m'}}.$$

Отсюда вытекает неравенство (37) с $c_4 = \mu$. Пусть теперь $\xi \neq 0$. Тогда

$$b_{t,s}(y, \xi) - b_{t,s}(y, \xi') = \xi \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} \right) b_{t,s}(y, \xi) + J'_s + J''_s, \quad (42)$$

где

$$J'_s = \frac{t^n}{\xi'} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) [\partial_i w_{t,s}^{y,\xi} - \partial_i w_{t,s}^{y,\xi'}] \right\} dx,$$

$$J''_s = \frac{t^n}{\xi'} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi}) - a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi'})] \partial_i w_{t,s}^{y,\xi'} \right\} dx.$$

С помощью (1), (2), (38) и (39) устанавливаем, что

$$|J'_s| \leq c_5 |\xi'|^{-1} (1 + |\xi| + |\xi'|)^{m-\frac{1}{m_2}} |\xi - \xi'|^{\frac{1}{m_2}},$$

$$|J''_s| \leq c_6 |\xi'|^{-1} (1 + |\xi| + |\xi'|)^{m-\tilde{m}} |\xi - \xi'|^{\tilde{m}}.$$

Используя эти неравенства, (40) и (42), получаем неравенство (37) с $c_4 = \mu + c_5 + c_6$. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Положим для любого $t \in \mathbb{N}$

$$Y_t = \{y \in \mathbb{R}^n : (t+1)y_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{y \in Y_t} \overline{Q_{t+1}(y)} &= \mathbb{R}^n, \\ \forall t \in \mathbb{N}, \quad \forall y, y' \in Y_t, \quad y \neq y', \quad Q_{t+1}(y) \cap Q_{t+1}(y') &= \emptyset. \end{aligned}$$

Зафиксируем $y^\circ \in \Omega$ и $t^\circ \in \mathbb{N}$ такое, что $t^\circ \geq n[d(y^\circ, \partial\Omega)]^{-1} + 1$. Для $t < t^\circ$ положим $Y_t^\circ = \{y^\circ\}$, а для $t \geq t^\circ$ положим

$$Y_t^\circ = \{y \in Y_t : Q_{t+1}(y) \subset \Omega\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для любого $t \in \mathbb{N}$ $Y_t^\circ \neq \emptyset$.

Поскольку в силу условия $\mathcal{R}$, (1)–(3) и абстрактной теоремы о выборе (см. [1], [2]) из последовательности $\{A_s\}$ можно извлечь G -сходящуюся подпоследовательность, а в силу определения чисел $b_{t,s}(y, \xi)$ при любых $t \in \mathbb{N}$, $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$ последовательность $\{b_{t,s}(y, \xi) : s \in \mathbb{N}\}$ ограничена в $\mathbb{R}$, то, учитывая лемму 5, получаем: существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$, обратимый оператор $\hat{A} : \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega) \rightarrow (\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega))^*$ и последовательность функций $\sigma_t : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что последовательность $\{A_{s_j}\}$ G -сходится к оператору $\hat{A}$ и для любых $t \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^\circ$, $\xi \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $2T(y, \xi) + 1 \leq t$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} b_{t,s_j}(y, \xi) = \sigma_t(y, \xi). \quad (43)$$

Из лемм 4, 5 и (43) выводим, что если $t \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^\circ$, $\xi \in \mathbb{R}$ и $2T(y, \xi) + 1 \leq t$, то

$$|\sigma_t(y, \xi)|^{m'} \leq \mu^{m'} (1 + |\xi|)^{m-m''} |\xi|^{m''}; \quad (44)$$

если $t \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^\circ$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\xi' \neq 0$ и $2T(y, \xi) + 2T(y, \xi') + 1 \leq t$, то

$$|\sigma_t(y, \xi) - \sigma_t(y, \xi')| \leq c_4 |\xi'|^{-1} (1 + |\xi| + |\xi'|)^{m-\tilde{m}} |\xi - \xi'|^{\tilde{m}}. \quad (45)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $t \in \mathbb{N}$. Тогда b_t – функция на $\Omega \times \mathbb{R}$ такая, что для любой пары $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$, удовлетворяющей набору условий

$$x \in Q_{t+1}(y), \quad y \in Y_t^\circ, \quad 2T(y, \xi) + 1 \leq t, \quad (46)$$

$b_t(x, \xi) = \sigma_t(y, \xi)$; для любой пары $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$, не удовлетворяющей набору условий (46), $b_t(x, \xi) = 0$.

Нетрудно убедиться в том, что для любых $t \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{R}$ функция $b_t(\cdot, \xi)$ измерима на Ω . Кроме того, из (44) вытекает, что для любых $t \in \mathbb{N}$ и $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$

$$|b_t(x, \xi)|^{m'} \leq \mu^{m'} (1 + |\xi|)^{m-m''} |\xi|^{m''}. \quad (47)$$

Теперь можно сделать вывод, что найдутся возрастающая последовательность $\{t_k\} \subset \mathbb{N}$ и семейство функций $h_\xi \in L^2(\Omega)$, $\xi \in \mathbb{Q}$, такие, что

$$\forall \xi \in \mathbb{Q} \quad b_{t_k}(\cdot, \xi) \rightarrow h_\xi \quad \text{слабо в } L^2(\Omega). \quad (48)$$

Пусть $\forall \xi \in \mathbb{Q}$ H_ξ — множество всех лебеговских точек функции h_ξ . Положим $H = \bigcap_{\xi \in \mathbb{Q}} H_\xi$. Имеем $\text{mes}(\Omega \setminus H) = 0$. Используя (48), (47) и (45), устанавливаем: если $x^\circ \in H$, $\xi \in \mathbb{Q}$, то

$$|h_\xi(x^\circ)|^{m'} \leq \mu^{m'} (1 + |\xi|)^{m-m''} |\xi|^{m''}; \quad (49)$$

если $x^\circ \in H$, $\xi, \xi' \in \mathbb{Q}$, $\xi' \neq 0$, то

$$|h_\xi(x^\circ) - h_{\xi'}(x^\circ)| \leq c_4 |\xi'|^{-1} (1 + |\xi| + |\xi'|)^{m-\tilde{m}} |\xi - \xi'|^{\tilde{m}}. \quad (50)$$

Из (49) и (50) вытекает, что если $x^\circ \in H$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\{\xi_l\} \subset \mathbb{Q}$, $\xi_l \rightarrow \xi$, то последовательность $\{h_{\xi_l}(x^\circ)\}$ сходится к некоторому вещественному числу, не зависящему от самого выбора последовательности $\{\xi_l\} \subset \mathbb{Q}$, $\xi_l \rightarrow \xi$. Это позволяет дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. b — функция на $\Omega \times \mathbb{R}$ такая, что если $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$, причем $x \in H$, то

$$b(x, \xi) = \lim_{l \rightarrow \infty} h_{\xi_l}(x) \quad (\{\xi_l\} \subset \mathbb{Q}, \quad \xi_l \rightarrow \xi);$$

если $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$, причем $x \notin H$, то $b(x, \xi) = 0$.

Легко видеть, что для любого $\xi \in \mathbb{R}$ функция $b(\cdot, \xi)$ измерима на Ω . Кроме того, в силу (49) для любых $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство (4), а в силу (50) для любых $x \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\xi' \neq 0$, справедливо неравенство

$$|b(x, \xi) - b(x, \xi')| \leq c_4 |\xi'|^{-1} (1 + |\xi| + |\xi'|)^{m-\tilde{m}} |\xi - \xi'|^{\tilde{m}}. \quad (51)$$

Теперь можно сделать вывод, что $b \in \mathcal{B}$. Отметим еще, что в силу (45), (47)–(49) и определения функции b

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad b_{t_k}(\cdot, \xi) \rightarrow b(\cdot, \xi) \quad \text{слабо в } L^2(\Omega). \quad (52)$$

Положим для любых $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ и $t \in \mathbb{N}$

$$\lambda_t(u, v) = \sum_{y \in Y_t^\circ} v(y) \int_{Q_{t+1}(y)} b_t(\cdot, u(y)) dx.$$

ЛЕММА 6. Пусть $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{t_k}(u, v) = \langle F_b u, v \rangle. \quad (53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\gamma_1 = 2m'(m''\tilde{m})^{-1}, \quad \gamma_2 = (m' + m'')(m''\tilde{m})^{-1},$$

α – мажоранта функции $1 + |u| + |v|$, $\beta = 2^{n+1}\alpha^{m+1}\mu^3(1 + c_4)(1 + \text{mes } \Omega)$, $\rho = d(\text{supp } v, \partial\Omega)$. Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$. Ясно, что существует $\delta \in (0, \rho)$ такое, что для любых $x', x'' \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| \leq \delta$,

$$|u(x') - u(x'')| \leq \beta^{-\gamma_1} \varepsilon^{\gamma_2}, \quad (54)$$

$$|v(x') - v(x'')| \leq \beta^{-1} \varepsilon. \quad (55)$$

Зафиксируем $\tau \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau \geq 4n\delta^{-1} + \beta\varepsilon^{-1}$, и положим

$$Z_\tau = \left\{ z \in Y_\tau \cap \Omega : d(z, \partial\Omega) \geq \frac{\rho}{2} \right\}.$$

Легко проверить, что $Z_\tau \neq \emptyset$ и

$$\bigcup_{z \in Z_\tau} Q_\tau(z) \subset \Omega. \quad (56)$$

Положим

$$M_\tau = \bigcup_{z \in Z_\tau} \overline{Q_{\tau+1}(z)}, \quad I_\tau = \sum_{z \in Z_\tau} v(z) \int_{Q_{\tau+1}(z)} b(\cdot, u(z)) dx.$$

Так как $\text{supp } v \subset M_\tau$, то, используя (4), (55) и (56), получаем

$$|I_\tau - \langle F_b u, v \rangle| \leq \alpha \sum_{z \in Z_\tau} \int_{Q_{\tau+1}(z)} |b(x, u) - b(x, u(z))| dx + \frac{\varepsilon}{8}. \quad (57)$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части неравенства (57). Пусть $z \in Z_\tau$. Если $|u(z)| \leq (\varepsilon/\beta)^{m'/m''}$, то в силу (4) и (54) для любого $x \in Q_{\tau+1}(z)$

$$\begin{aligned} |b(x, u(x)) - b(x, u(z))| &\leq |b(x, u(x))| + |b(x, u(z))| \\ &\leq 2\mu\alpha^{m-1} [|u(z)| + |u(x) - u(z)|]^{m''/m'} \leq 4\mu\alpha^{m-1}\beta^{-1}\varepsilon; \end{aligned}$$

если же $|u(z)| > (\varepsilon/\beta)^{m'/m''}$, то в силу (51) и (54) для любого $x \in Q_{\tau+1}(z)$

$$|b(x, u(x)) - b(x, u(z))| \leq 2^m \alpha^m c_4 \beta^{-1} \varepsilon.$$

Теперь ясно, что

$$\int_{Q_{\tau+1}(z)} |b(x, u) - b(x, u(z))| dx \leq [8\alpha(\tau+1)^n \text{mes } \Omega]^{-1} \varepsilon.$$

Отсюда и из (57), учитывая (56), выводим неравенство

$$|I_\tau - \langle F_b u, v \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (58)$$

Далее, положим для любого $t \in \mathbb{N}$

$$g_t = \sum_{z \in Z_\tau} v(z) \int_{Q_{\tau+1}(z)} b_t(\cdot, u(z)) dx.$$

В силу (52) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_{t_k} = I_\tau. \quad (59)$$

Пусть $\tilde{t} \in \mathbb{N}$, причем

$$\tilde{t} \geq t^\circ + 4\tau(\tau + 1) + 4n\lambda_0 + 4(2\alpha)^{m'} \nu \chi_0.$$

Зафиксируем $t \in \mathbb{N}$, $t \geq \tilde{t}$, и положим

$$Y'_t = \{y \in Y_t : \overline{Q_{t+1}(y)} \cap M_\tau \neq \emptyset\}.$$

Имеем

$$\bigcup_{y \in Y'_t} \overline{Q_{t+1}(y)} \subset \bigcup_{z \in Z_\tau} Q_\tau(z).$$

Отсюда и из (56) вытекает, что $Y'_t \subset Y_t^\circ$. Кроме того,

$$\forall y \in Y'_t \quad d(y, \partial\Omega) \geq \rho/4, \quad (60)$$

$$\forall y \in Y_t^\circ \setminus Y'_t \quad v(y) = 0. \quad (61)$$

Положим теперь $\forall z \in Z_\tau \quad X_z = Y'_t \cap Q_{\tau+2}(z)$, и пусть $Y''_t = Y'_t \setminus \bigcup_{z \in Z_\tau} X_z$, $|Y''_t|$ – число элементов множества Y''_t . Так как

$$\bigcup_{y \in Y''_t} Q_{t+1}(y) \subset \left[\bigcup_{z \in Z_\tau} Q_\tau(z) \right] \setminus \left[\bigcup_{z \in Z_\tau} Q_{\tau+3}(z) \right],$$

то

$$|Y''_t|(t+1)^{-n} \leq 3 \cdot 2^n n \tau^{-1} \text{mes } \Omega. \quad (62)$$

Заметим еще, что для любого $z \in Z_\tau$

$$Q_{\tau+3}(z) \subset \bigcup_{y \in X_z} \overline{Q_{t+1}(y)} \subset Q_{\tau+1}(z). \quad (63)$$

Используя (47), (58), (61), (62), устанавливаем, что

$$|\lambda_t(u, v) - \langle F_b u, v \rangle| \leq |g_t - I_\tau| + |g'_t - g_t| + \frac{3}{8}\varepsilon, \quad (64)$$

где

$$g'_t = \sum_{z \in Z_\tau} \sum_{y \in X_z} v(y) \int_{Q_{t+1}(y)} b_t(\cdot, u(y)) dx.$$

С помощью (47), (55), (56), (63) получаем

$$|g'_t - g_t| \leq \alpha \sum_{z \in Z_\tau} \sum_{y \in X_z} \int_{Q_{t+1}(y)} |b_t(\cdot, u(y)) - b_t(\cdot, u(z))| dx + \frac{\varepsilon}{4}. \quad (65)$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части (65). Пусть $z \in Z_\tau$, $y \in X_z$. Так как $y \in Y_t^\circ$ и ввиду (60)

$$2T(y, u(y)) + 2T(y, u(z)) + 1 \leq t, \quad (66)$$

то в силу определения функции b_t

$$\int_{Q_{t+1}(y)} |b_t(\cdot, u(y)) - b_t(\cdot, u(z))| dx = |\sigma_t(y, u(y)) - \sigma_t(y, u(z))| (t+1)^{-n}. \quad (67)$$

Если $|u(z)| \leq (\varepsilon/\beta)^{m'/m''}$, то, используя (66), (44) и (54), получаем

$$\begin{aligned} |\sigma_t(y, u(y)) - \sigma_t(y, u(z))| &\leq 2\mu\alpha^{m-1} [|u(z)| + |u(y) - u(z)|]^{m''/m'} \\ &\leq 4\mu\alpha^{m-1}\beta^{-1}\varepsilon; \end{aligned}$$

если же $|u(z)| > (\varepsilon/\beta)^{m'/m''}$, то в силу (66), (45) и (54)

$$|\sigma_t(y, u(y)) - \sigma_t(y, u(z))| \leq 2^m \alpha^m c_4 \beta^{-1} \varepsilon.$$

Эти рассуждения и (67) приводят к выводу, что

$$\int_{Q_{t+1}(y)} |b_t(\cdot, u(y)) - b_t(\cdot, u(z))| dx \leq [8\alpha(t+1)^n \text{mes } \Omega]^{-1} \varepsilon.$$

Отсюда и из (65) вытекает, что $|g'_t - g_t| \leq \frac{3}{8}\varepsilon$. Тогда из (64) получаем

$$|\lambda_t(u, v) - \langle F_b u, v \rangle| \leq |g_t - I_\tau| + \frac{3}{4}\varepsilon. \quad (68)$$

Итак, для любого $t \in \mathbb{N}$, $t \geq \tilde{t}$, справедливо неравенство (68). Используя этот факт и (59), устанавливаем, что при $k \geq k_\varepsilon$

$$|\lambda_{t_k}(u, v) - \langle F_b u, v \rangle| \leq \varepsilon.$$

Отсюда ввиду произвольности $\varepsilon \in (0, 1)$ получаем (53). Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $u, v \in \mathring{W}^{1,m}(\Omega)$, $\{u^k\} \subset \mathring{W}^{1,m}(\Omega)$, причем последовательность норм $\|u^k\|_{L^m(\Omega)}$ ограничена и $u^k \rightarrow u$ почти всюду на Ω . Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle F_b u^k, v \rangle = \langle F_b u, v \rangle. \quad (69)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – мажоранта последовательности норм $\|u^k\|_{L^m(\Omega)}$,

$$\beta = 12\mu[\alpha + \|u\|_{L^m(\Omega)} + (\text{mes } \Omega)^{1/m}]^{m-1}[1 + \|v\|_{L^m(\Omega)}].$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега и сходимости $\{u^k\}$ к u почти всюду на Ω найдется измеримое множество $\Omega^\varepsilon \subset \Omega$ такое, что $u^k \rightarrow u$ равномерно на Ω^ε и

$$\int_{\Omega \setminus \Omega^\varepsilon} |v|^m dx \leq \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^m. \quad (70)$$

Положим

$$\Omega^{\varepsilon,1} = \left\{x \in \Omega^\varepsilon : |u(x)| \leq \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{m'/m''}\right\}, \quad \Omega^{\varepsilon,2} = \Omega^\varepsilon \setminus \Omega^{\varepsilon,1}.$$

Используя неравенства (4), (51), равномерную сходимость $\{u^k\}$ к u на Ω^ε и теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см., например, [12, с. 302]), устанавливаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega^{\varepsilon,2}} b(x, u^k) v dx = \int_{\Omega^{\varepsilon,2}} b(x, u) v dx.$$

Отсюда и из равномерной сходимости $\{u^k\}$ к u на Ω^ε вытекает, что найдется $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall k \geq k_\varepsilon \quad \left| \int_{\Omega^{\varepsilon,2}} [b(x, u^k) - b(x, u)] v dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (71)$$

$$\forall k \geq k_\varepsilon \quad \forall x \in \Omega^\varepsilon \quad |u^k(x) - u(x)| \leq \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{m'/m''}. \quad (72)$$

Зафиксируем $k \geq k_\varepsilon$. Учитывая (71), получаем

$$\begin{aligned} |\langle F_b u^k, v \rangle - \langle F_b u, v \rangle| &\leq \int_{\Omega^{\varepsilon,1}} [|b(x, u^k)| + |b(x, u)|] |v| dx \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus \Omega^\varepsilon} [|b(x, u^k)| + |b(x, u)|] |v| dx + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части этого неравенства в силу (4), (72) и определения множества $\Omega^{\varepsilon,1}$ не превосходит $\varepsilon/4$, второй интеграл в силу (4) и (70) также не превосходит $\varepsilon/4$. Поэтому $|\langle F_b u^k, v \rangle - \langle F_b u, v \rangle| \leq \varepsilon$. Тем самым (69) можно считать установленным. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$, причем $\text{supp } v \subset \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$. Тогда

$$\langle \hat{A}u, v \rangle = \langle Au, v \rangle + \langle F_b u, v \rangle. \quad (73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{supp } v = \emptyset$, то равенство (73) очевидно. Поэтому далее будем считать, что $\text{supp } v \neq \emptyset$. Пусть число α – мажоранта функции $1 + |u| + |v| + |\nabla u| + |\nabla v|$,

$$\beta = \left\{ \min_{x \in \text{supp } v} |u(x)| \right\}^{-1} \max_{x \in \Omega} |v(x)|, \quad \rho = d(\text{supp } u, \partial\Omega),$$

$$M = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}, \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad M_r = \{x \in \Omega : |u(x)| \geq r^{-1}\}.$$

Легко видеть, что

$$\forall x \in \Omega \quad |v(x)| \leq \beta |u(x)|. \quad (74)$$

Далее через d_i , $i = 1, 2, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от $n, m, m_1, m_2, c, \nu, \text{mes } \Omega, \alpha$ и β .

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$u_s = A_s^{-1}((\hat{A}u) \circ p_s),$$

$$\alpha_s = \langle Au, p_s u_s - u \rangle, \quad \beta_s = \|p_s u_s - u\|_{L^m(\Omega)}.$$

Так как последовательность $\{A_{s_j}\}$ G -сходится к оператору $\hat{A}$, то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_{s_j} = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \beta_{s_j} = 0. \quad (75)$$

Кроме того, используя (1)–(3), условие $\mathcal{R}$ и G -сходимость $\{A_{s_j}\}$ к $\hat{A}$, устанавливаем, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \|u_s\|_{\dot{W}^{1,m}(\Omega_s)} \leq d_1. \quad (76)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$. В силу изложенного в доказательстве теоремы 6 из [2] существуют $f^\varepsilon \in (\dot{W}^{1,m}(\Omega))^*$ и $\psi^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ такие, что

$$\|f^\varepsilon - \hat{A}u\|_{(\dot{W}^{1,m}(\Omega))^*} \leq \varepsilon, \quad (77)$$

$$\forall w \in \dot{W}^{1,m}(\Omega) \quad \langle f^\varepsilon, w \rangle = \int_{\Omega} \psi^\varepsilon w \, dx. \quad (78)$$

Зафиксируем $r \in \mathbb{N}$ такое, что $r^{m_1} \geq \varepsilon^{-m'}$, $\text{supp } v \subset M_r$,

$$\text{mes}(M \setminus M_r) \leq \varepsilon^{mm'}. \quad (79)$$

Ясно, что существует $\delta \in (0, \rho)$ такое, что для любых $x', x'' \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| \leq \delta$,

$$|u(x') - u(x'')| + |v(x') - v(x'')| \leq \frac{1}{4r^2}. \quad (80)$$

Возьмем теперь $\tilde{t} \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\tilde{t} \geq t^0 + 4n\delta^{-1} + 3n\nu\chi_0\lambda_0(d_1 + 1)(3\alpha)^{m'} r^{\frac{2m_2}{m}} + \|\psi^\varepsilon\|_{L^{m'}(\Omega)},$$

и зафиксируем $t \in \mathbb{N}$, $t \geq \tilde{t}$. Положим

$$Y'_t = \{y \in Y_t : Q_t(y) \cap \text{supp } u \neq \emptyset\}, \quad Y''_t = \{y \in Y_t : \overline{Q_{t+1}(y)} \cap M_r \neq \emptyset\}.$$

Используя неравенства $t \geq n\delta^{-1}$ и (80), устанавливаем включения

$$\bigcup_{y \in Y'_t} \overline{Q_t(y)} \subset \Omega, \quad \bigcup_{y \in Y''_t} Q_t(y) \subset M_{2r}. \quad (81)$$

В силу первого из этих включений $Y'_t \subset Y_t^\circ$ и число элементов множества Y'_t не превосходит $2^n t^n \text{mes } \Omega$, а в силу второго включения $Y'_t \setminus Y''_t \neq \emptyset$. Используя (79), получаем

$$\sum_{y \in Y'_t \setminus Y''_t} \text{mes}(Q_{t+1}(y) \cap M) \leq \varepsilon^{mm'}. \quad (82)$$

Положим для любого $y \in Y'_t$ $\xi^y = u(y)$, для любого $y \in Y'_t \setminus Y''_t$ $\xi^y = 1$. В силу второго из включений (81)

$$\forall y \in Y'_t \quad |\xi^y|^{-1} \leq 2r. \quad (83)$$

Кроме того, поскольку $\forall y \in Y'_t$ $d(y, \partial\Omega) \geq \rho/2$, то

$$\forall y \in Y'_t \quad 2T(y, \xi^y) + 1 \leq t. \quad (84)$$

Заметим еще, что в силу (80) и второго из включений (81) $\forall y \in Y'_t$ $Q_{t'}(y) \subset M_{4r}$. Учитывая это, введем обозначение: если $y \in Y'_t$, то u^y – функция на Ω такая, что

$$u^y(x) = \begin{cases} \frac{\xi^y}{u(x)} \chi\left(\frac{t}{2}(x-y)\right), & \text{если } x \in Q_{t'}(y), \\ 0, & \text{если } x \notin Q_{t'}(y). \end{cases}$$

Далее, нетрудно установить, что существует набор функций $\{\varphi_y : y \in Y'_t\}$ класса $C_0^\infty(\Omega)$ со свойствами:

а) $\forall y \in Y'_t$ $0 \leq \varphi_y \leq 1$ на Ω , $\varphi_y = 1$ на $Q_{t+3}(y)$, $\varphi_y = 0$ на $\Omega \setminus Q_t(y)$, $|\nabla \varphi_y| \leq 3^n n \lambda_0 t^2$ на Ω ;

б) $\sum_{y \in Y'_t} \varphi_y = 1$ на $\text{supp } u$.

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$w_s = \sum_{y \in Y'_t} \frac{1}{\xi^y} u w_{t,s}^{y, \xi^y} \varphi_y, \quad v_s = \sum_{y \in Y'_t} \frac{1}{\xi^y} v w_{t,s}^{y, \xi^y} \varphi_y.$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $w_s, v_s \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$ и в силу определения u_s , (2), (3), (76)

$$\begin{aligned} & |\langle \hat{A}u, v \rangle - \langle Au, v \rangle - \langle F_b u, v \rangle| \\ & \leq d_2 \langle A_s w_s - A_s u_s, w_s - u_s \rangle^{\tilde{m}} \left(1 + \|w_s\|_{\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)} + \|v_s\|_{\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)} \right)^m \\ & \quad + |\langle A_s w_s, v_s \rangle - \langle Au, v \rangle - \langle F_b u, v \rangle| + |\langle \hat{A}u, p_s v_s - v \rangle|. \end{aligned} \quad (85)$$

Будем оценивать слагаемые в правой части неравенства (85). Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\Delta_s^{(1)} &= \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_{t,s}^{y,\xi^y}) \partial_i (w_{t,s}^{y,\xi^y} - u^y u_s) \right\} dx, \\ \Delta_s^{(2)} &= \sum_{y \in Y_t''} v(y) b_{t,s}(y, \xi^y) (t+1)^{-n}, \\ I_s^{(1)} &= \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+3}(y) \cap E'_{t,s}(y, \xi^y)} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_s) \partial_i (w_s - u_s) \right\} dx, \\ I_s^{(2)} &= \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+3}(y) \cap E''_{t,s}(y, \xi^y)} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_s) \partial_i (w_s - u_s) \right\} dx, \\ I_s^{(3)} &= \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+3}(y) \cap E'_{t,s}(y, \xi^y)} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_s) \partial_i v_s \right\} dx, \\ I_s^{(4)} &= \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+3}(y) \cap E''_{t,s}(y, \xi^y)} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla w_s) \partial_i v_s \right\} dx, \\ K_s^{(1)} &= \left\{ \sum_{y \in Y_t''} \int_{[Q_t(y) \setminus Q_{t+3}(y)] \cap \Omega_s} (1 + |\nabla w_s|)^m dx \right\}^{1/m'}, \\ K_s^{(2)} &= \left\{ \sum_{y \in Y_t' \setminus Y_t''} \int_{Q_{t+1}(y) \cap \Omega_s \cap M} (1 + |\nabla w_s|)^m dx \right\}^{1/m'}.\end{aligned}$$

Так как для любых $s \in \mathbb{N}$ и $y \in Y_t''$ $u^y u_s \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$,

$$\int_{\Omega_s} |\nabla(u^y u_s)|^m dx \leq t^{2m}, \quad \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |u^y u_s - \xi^y|^m dx \leq (2\beta_s)^m,$$

то, учитывая второе из равенств (75), определение множеств $V_{t,s}(y, \xi^y)$ и функций $w_{t,s}^{y,\xi^y}$, получаем

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \Delta_{s_j}^{(1)} \leq 0. \quad (86)$$

В силу (84), (43) и включения $\text{supp } v \subset M_r$ имеем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_{s_j}^{(2)} = \lambda_t(u, v). \quad (87)$$

Далее, из условия $\mathcal{B}$) следует, в частности, что $\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Поэтому найдется $\tilde{s} \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall s \geq \tilde{s} \quad \text{mes}(\Omega \setminus \Omega_s) \leq \left\{ 1 + \max_{x \in \Omega} |\psi^\varepsilon(x)| \right\}^{-1} \varepsilon. \quad (88)$$

В силу (83), (84) и лемм 1, 3, 4 найдется $s^\varepsilon \geq \tilde{s}$ такое, что для любых $s \geq s^\varepsilon$ и $y \in Y'_t$

$$w_{t,s}^{y,\xi^y} \in V_{t,s}(y, \xi^y), \quad (89)$$

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi^y}|^m dx \leq \mu(1+\alpha)^m t^{-n}, \quad (90)$$

$$\int_{[Q_t(y) \setminus Q_{t+3}(y)] \cap \Omega_s} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi^y}|^m dx \leq c_1(1+\alpha)^m t^{-n-\frac{1}{m}}, \quad (91)$$

$$\text{mes } E'_{t,s}(y, \xi^y) \leq t^{-n-m}, \quad (92)$$

$$\int_{E''_{t,s}(y, \xi^y)} |\nabla w_{t,s}^{y,\xi^y}|^m dx \leq c_3(1+\alpha)^m t^{-n-m'''}, \quad (93)$$

$$|b_{t,s}(y, \xi^y)| \leq \mu(1+\alpha)^{m-1}. \quad (94)$$

Зафиксируем $s \geq s^\varepsilon$. Используя свойство б) функций φ_y , получаем

$$w_s = u + \sum_{y \in Y'_t} \frac{1}{\xi^y} u(w_{t,s}^{y,\xi^y} - \xi^y) \varphi_y, \quad (95)$$

$$v_s = v + \sum_{y \in Y'_t} \frac{1}{\xi^y} v(w_{t,s}^{y,\xi^y} - \xi^y) \varphi_y. \quad (96)$$

С помощью этих равенств, учитывая (83) и (89), устанавливаем

$$\|w_s - u\|_{L^m(\Omega_s)} \leq d_3 t^{-2}, \quad \|v_s - v\|_{L^m(\Omega_s)} \leq d_3 t^{-2}. \quad (97)$$

Первое из полученных неравенств позволяет заключить, что

$$\|w_s - u_s\|_{L^m(\Omega_s)} \leq d_3 t^{-2} + \beta_s. \quad (98)$$

Исходя из (95), (96) с помощью неравенств (74), (80), (83), (89), (90) устанавливаем, что

$$\|w_s\|_{\dot{W}^{1,m}(\Omega_s)} \leq d_4, \quad \|v_s\|_{\dot{W}^{1,m}(\Omega_s)} \leq d_4. \quad (99)$$

Используя второе из этих неравенств, а также (77), (78), (88) и второе из неравенств (97), находим

$$|\langle \hat{A}u, p_s v_s - v \rangle| \leq d_5 \varepsilon. \quad (100)$$

Займемся оценкой выражения $\langle A_s w_s - A_s u_s, w_s - u_s \rangle$. Используя (76)–(78), (98) и первое из неравенств (99), получаем

$$\langle A_s w_s - A_s u_s, w_s - u_s \rangle \leq \langle A_s w_s, w_s - u_s \rangle + d_6 \varepsilon + t \beta_s. \quad (101)$$

Для первого слагаемого в правой части (101) в силу (1), (2), (76) и первого из неравенств (99) имеем

$$\langle A_s w_s, w_s - u_s \rangle \leq I_s^{(1)} + I_s^{(2)} + d_7 (K_s^{(1)} + K_s^{(2)}). \quad (102)$$

Заметим, что из (95), (80), (82), (83), (89)–(91) вытекает неравенство

$$K_s^{(1)} + K_s^{(2)} \leq d_8 \varepsilon. \quad (103)$$

Оценим $I_s^{(1)}$. Используя (1), (2), (76), (90), (91), (93) и первое из неравенств (99), находим, что

$$\begin{aligned} I_s^{(1)} &\leq \Delta_s^{(1)} + d_9 \left\{ \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+3}(y) \cap E'_{t,s}(y, \xi^y)} |\nabla(w_s - w_{t,s}^{y, \xi^y})|^m dx \right\}^{\frac{m_1}{mm'}} \\ &\quad + d_{10} \left\{ \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+3}(y) \cap E'_{t,s}(y, \xi^y)} |\nabla(u^y u_s - u_s)|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}} \\ &\quad + d_{11} \varepsilon \left\{ \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla(w_{t,s}^{y, \xi^y} - u^y u_s)|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}}. \end{aligned} \quad (104)$$

Принимая во внимание, что для любого $y \in Y_t''$

$$\nabla(w_s - w_{t,s}^{y, \xi^y}) = \left(\frac{u}{\xi^y} - 1 \right) \nabla w_{t,s}^{y, \xi^y} + \frac{1}{\xi^y} (w_{t,s}^{y, \xi^y} - \xi^y) \nabla u + \nabla u$$

почти всюду на $Q_{t+3}(y) \cap E'_{t,s}(y, \xi^y)$, и используя (80), (83), (89), (90) и (92), получаем

$$\left\{ \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+3}(y) \cap E'_{t,s}(y, \xi^y)} |\nabla(w_s - w_{t,s}^{y, \xi^y})|^m dx \right\}^{\frac{m_1}{mm'}} \leq d_{12} \varepsilon. \quad (105)$$

Последние два слагаемых в правой части неравенства (104) в силу (76), (80), (81), (90), (92) не превосходят в сумме $d_{13}(\varepsilon + r\beta_s)$. Учитывая это, из (104) и (105) выводим

$$I_s^{(1)} \leq \Delta_s^{(1)} + d_{13}r\beta_s + d_{14}\varepsilon. \quad (106)$$

Оценим $I_s^{(2)}$. Используя (1), (2), (76), (92) и первое из неравенств (99), получаем

$$\begin{aligned} I_s^{(2)} &\leq \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+1}(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) \partial_i(u - u_s) \right\} dx \\ &\quad + d_{15} \left\{ \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+3}(y) \cap E''_{t,s}(y, \xi^y)} |\nabla(w_s - u)|^m dx \right\}^{\frac{m_1}{mm'}} + d_{16} \varepsilon. \end{aligned} \quad (107)$$

В силу (1), (2), (76), (82), (88) имеем

$$\sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+1}(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) \partial_i(u - u_s) \right\} dx \leq |\alpha_s| + d_{17} \varepsilon. \quad (108)$$

Кроме того, учитывая, что для любого $y \in Y_t''$

$$\nabla(w_s - u) = \frac{u}{\xi^y} \nabla w_{t,s}^{y, \xi^y} + \frac{1}{\xi^y} (w_{t,s}^{y, \xi^y} - \xi^y) \nabla u$$

почти всюду на $Q_{t+3}(y) \cap E''_{t,s}(y, \xi^y)$, и используя (80), (83), (89), (93), получаем

$$\left\{ \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+3}(y) \cap E''_{t,s}(y, \xi^y)} |\nabla(w_s - u)|^m dx \right\}^{\frac{m_1}{mm'}} \leq d_{18} \varepsilon. \quad (109)$$

Из (107)–(109) следует, что

$$I_s^{(2)} \leq |\alpha_s| + d_{19}\varepsilon.$$

Отсюда и из (101)–(103), (106) выводим неравенство

$$\langle A_s w_s - A_s u_s, w_s - u_s \rangle \leq \Delta_s^{(1)} + |\alpha_s| + d_{20}t\beta_s + d_{21}\varepsilon. \quad (110)$$

Перейдем к оценке второго слагаемого в правой части неравенства (85). Используя (1), (2) и второе из неравенств (99), находим

$$\begin{aligned} & |\langle A_s w_s, v_s \rangle - \langle Au, v \rangle - \langle F_b u, v \rangle| \\ & \leq |I_s^{(3)} - \langle F_b u, v \rangle| + |I_s^{(4)} - \langle Au, v \rangle| + d_{22}(K_s^{(1)} + K_s^{(2)}). \end{aligned} \quad (111)$$

С помощью (1), (2), (74), (90), (91), (93), (94), (99) и (105) устанавливаем, что

$$\begin{aligned} & |I_s^{(3)} - \Delta_s^{(2)}| \\ & \leq d_{23} \left\{ \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+3}(y) \cap E'_{t,s}(y, \xi^y)} \left| \nabla \left(v_s - \frac{v(y)}{\xi^y} w_{t,s}^{y, \xi^y} \right) \right|^m dx \right\}^{1/m} + d_{24}\varepsilon. \end{aligned} \quad (112)$$

Принимая во внимание, что для любого $y \in Y_t''$

$$\nabla \left(v_s - \frac{v(y)}{\xi^y} w_{t,s}^{y, \xi^y} \right) = \frac{v - v(y)}{\xi^y} \nabla w_{t,s}^{y, \xi^y} + \frac{1}{\xi^y} (w_{t,s}^{y, \xi^y} - \xi^y) \nabla v + \nabla v$$

почти всюду на $Q_{t+3}(y) \cap E'_{t,s}(y, \xi^y)$, и используя (80), (83), (89), (90), (92), находим, что множитель при d_{23} в правой части неравенства (112) не превосходит $d_{25}\varepsilon$. Тогда

$$|I_s^{(3)} - \langle F_b u, v \rangle| \leq |\lambda_t(u, v) - \langle F_b u, v \rangle| + |\Delta_s^{(2)} - \lambda_t(u, v)| + d_{26}\varepsilon. \quad (113)$$

В силу (1), (2), (92), (99) (109) имеем

$$\begin{aligned} & |I_s^{(4)} - \langle Au, v \rangle| \leq \left| \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+1}(y) \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) \partial_i v \right\} dx - \langle Au, v \rangle \right| \\ & + d_{27} \left\{ \sum_{y \in Y_t''} \int_{Q_{t+3}(y) \cap E''_{t,s}(y, \xi^y)} |\nabla(v_s - v)|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}} + d_{28}\varepsilon. \end{aligned} \quad (114)$$

Из (1), (2), (82), (88) вытекает, что первое слагаемое в правой части неравенства (114) не превосходит $d_{29}\varepsilon$. Кроме того, учитывая, что для любого $y \in Y_t''$

$$\nabla(v_s - v) = \frac{v}{\xi^y} \nabla w_{t,s}^{y, \xi^y} + \frac{1}{\xi^y} (w_{t,s}^{y, \xi^y} - \xi^y) \nabla v$$

почти всюду на $Q_{t+3}(y) \cap E''_{t,s}(y, \xi^y)$, и используя (83), (89), (93), находим, что множитель при d_{27} в правой части неравенства (114) не превосходит $d_{30}\varepsilon$. Поэтому

$$|I_s^{(4)} - \langle Au, v \rangle| \leq d_{31}\varepsilon. \quad (115)$$

Из (111), (113), (115) и (103) получаем

$$\begin{aligned} & |\langle A_s w_s, v_s \rangle - \langle Au, v \rangle - \langle F_b u, v \rangle| \\ & \leq |\lambda_t(u, v) - \langle F_b u, v \rangle| + |\Delta_s^{(2)} - \lambda_t(u, v)| + d_{32}\varepsilon. \end{aligned} \quad (116)$$

Из (85), (99) (100), (110) и (116) вытекает, что

$$\begin{aligned} & |\langle \hat{A}u, v \rangle - \langle Au, v \rangle - \langle F_b u, v \rangle| \\ & \leq d_{33}(\Delta_s^{(1)} + |\alpha_s| + t\beta_s + \varepsilon)^{\tilde{m}} + |\lambda_t(u, v) - \langle F_b u, v \rangle| \\ & \quad + |\Delta_s^{(2)} - \lambda_t(u, v)| + d_{34}\varepsilon \quad (s \geq s^\varepsilon). \end{aligned}$$

Теперь, учитывая (75), (86) и (87), можно заключить, что

$$|\langle \hat{A}u, v \rangle - \langle Au, v \rangle - \langle F_b u, v \rangle| \leq |\lambda_t(u, v) - \langle F_b u, v \rangle| + d_{35}\varepsilon^{\tilde{m}}.$$

Отсюда, принимая во внимание лемму 6 и произвольную малость ε , выводим равенство (73). Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\hat{A}u = Au + F_b u. \quad (117)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Положим

$$M = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}.$$

Если $M = \emptyset$, то $u = 0$ на Ω . Тогда в силу (1) и (4) $Au + F_b u = 0$, а в силу (1)–(3), G -сходимости $\{A_{s_j}\}$ к $\hat{A}$ и условия $\mathcal{R}$ $\hat{A}u = 0$. Значит, если $M = \emptyset$, то равенство (117) имеет место. Поэтому далее будем считать, что $M \neq \emptyset$.

Зафиксируем $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Через d_i , $i = 1, 2, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n , m , m_1, m_2 , ν , c , $\text{mes } \Omega$ и функций u , v . Положим для любого $r \in \mathbb{N}$

$$M_r = \{x \in M : d(x, \partial M) \geq r^{-1}\}.$$

Ясно, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{mes}(M \setminus M_r) = 0. \quad (118)$$

Следовательно, существует $r_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall r \geq r_0$ $M_r \neq \emptyset$. Зафиксируем $r \geq r_0$. Используя формулу Тейлора, устанавливаем, что для любого $x \in M \setminus M_r$

$$|u(x)| \leq d_1 r^{-\left(\frac{1}{m}+1\right)}, \quad |\nabla u(x)| \leq d_2 r^{-\frac{1}{m}}. \quad (119)$$

Пусть φ_r – функция класса $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leq \varphi_r \leq 1$ на Ω , $\varphi_r = 1$ на M_{3r} , $\varphi_r = 0$ на $\Omega \setminus M_{4r}$, $|\nabla \varphi_r| \leq d_3 r$ на Ω . Положим $v_r = \varphi_r v$. Так как $\text{supp } v_r \subset M$, то по лемме 8

$$\langle \hat{A}u, v_r \rangle = \langle Au, v_r \rangle + \langle F_b u, v_r \rangle$$

и, следовательно,

$$|\langle \hat{A}u, v \rangle - \langle Au + F_b u, v \rangle| \leq |\langle \hat{A}u, v_r - v \rangle| + |\langle Au, v_r - v \rangle| + |\langle F_b u, v_r - v \rangle|. \quad (120)$$

Используя (1), (2), (4), второе из неравенства (119) и свойства функции φ_r , получаем

$$|\langle Au, v_r - v \rangle| + |\langle F_b u, v_r - v \rangle| \leq d_4 \text{mes}(M \setminus M_r). \quad (121)$$

Покажем, что аналогичная оценка верна и для первого слагаемого в правой части неравенства (120). В силу условия $\mathcal{R}$) существует последовательность $w_s \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$ такая, что

$$p_s w_s \rightarrow v_r - v \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega) \quad (122)$$

и для любого открытого множества $E \subset \Omega$

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_s} |\nabla w_s|^m dx \leq \nu \int_{E \cap \Omega} \{|\nabla(v_r - v)|^m + |v_r - v|^m\} dx. \quad (123)$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1}((\hat{A}u) \circ p_s)$. Используя (1) и (3), устанавливаем, что

$$\sup_s \|\nabla u_s\|_{L^m(\Omega_s)} \leq d_5. \quad (124)$$

В силу (122) имеем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \langle A_s u_s, w_s \rangle = \langle \hat{A}u, v_r - v \rangle. \quad (125)$$

Используя (1), (2), (124), находим, для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\langle A_s u_s, w_s \rangle| &\leq d_6 \left\{ \int_{(\text{int } M_{3r}) \cap \Omega_s} |\nabla w_s|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}} \\ &\quad + d_7 \left\{ \int_{\Omega_s \setminus M_{2r}} |\nabla u_s|^m dx \right\}^{\frac{m_1}{mm'}} \left\{ \int_{\Omega_s} |\nabla w_s|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя (123) к $E = \text{int } M_{3r}$ и $E = \Omega$, получаем

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |\langle A_{s_j} u_{s_j}, w_{s_j} \rangle| \leq d_8 r \left\{ \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{s_j} \setminus M_{2r}} |\nabla u_{s_j}|^m dx \right\}^{\frac{m_1}{mm'}}. \quad (126)$$

Оценим верхний предел, стоящий в правой части (126). Пусть ψ_r — функция класса $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leq \psi_r \leq 1$ на Ω , $\psi_r = 1$ на M_r , $\psi_r = 0$ на $\Omega \setminus M_{2r}$, $|\nabla \psi_r| \leq d_9 r$ на Ω . Из (119) вытекает, что

$$\|(1 - \psi_r)u\|_{\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)} \leq d_{10} r^{-1/\tilde{m}} \{\text{mes}(M \setminus M_r)\}^{1/m}. \quad (127)$$

Поскольку $\{A_{s_j}\}$ G -сходится к $\hat{A}$, то $p_{s_j} u_{s_j} \rightarrow u$ слабо в $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$. Следовательно,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|p_{s_j} u_{s_j} - u\|_{L^m(\Omega)} = 0, \quad (128)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle A_{s_j} u_{s_j}, (1 - \psi_r)u_{s_j} \rangle = \langle \hat{A}u, (1 - \psi_r)u \rangle. \quad (129)$$

Пусть $s \in \mathbb{N}$. В силу (1)–(3) и (124)

$$\begin{aligned} c^{-1} \int_{\Omega_s \setminus M_{2r}} (1 + |\nabla u_s|)^{m-m_2} |\nabla u_s|^{m_2} dx \\ \leq \langle A_s u_s, (1 - \psi_r) u_s \rangle + d_{11} r \left\{ \int_{(M \setminus M_r) \cap \Omega_s} |u_s|^m dx \right\}^{1/m}. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая (124) и первое из неравенств (119), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s \setminus M_{2r}} |\nabla u_s|^m dx \leq d_{12} \left\{ |\langle A_s u_s, (1 - \psi_r) u_s \rangle| \right. \\ \left. + r \|p_s u_s - u\|_{L^m(\Omega)} + r^{-1/\tilde{m}} [\text{mes}(M \setminus M_r)]^{1/m} \right\}^{m/m_2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (127)–(129) выводим, что

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{s_j} \setminus M_{2r}} |\nabla u_{s_j}|^m dx \leq d_{13} r^{-\frac{m}{m_2}} \{\text{mes}(M \setminus M_r)\}^{\frac{1}{m_2}}.$$

Это неравенство вместе с (126) и (125) приводит к заключению, что

$$|\langle \hat{A}u, v_r - v \rangle| \leq d_{14} \{\text{mes}(M \setminus M_r)\}^{\tilde{m}/m}.$$

Отсюда и из (120), (121) получаем

$$|\langle \hat{A}u, v \rangle - \langle Au + F_b u, v \rangle| \leq d_4 \text{mes}(M \setminus M_r) + d_{14} \{\text{mes}(M \setminus M_r)\}^{\tilde{m}/m}.$$

Из этого неравенства, учитывая произвольность $r \geq r_0$ и (118), выводим, что

$$\langle \hat{A}u, v \rangle = \langle Au + F_b u, v \rangle.$$

А поскольку здесь v – произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$, то имеет место равенство (117). Лемма доказана.

Заметим, что в силу условия $\mathcal{R}$, (1)–(3) и G -сходимости $\{A_{s_j}\}$ к $\hat{A}$ оператор $\hat{A}$ непрерывен на $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$. Учитывая это, из лемм 9 и 7 выводим, что $\hat{A} = A + F_b$. Значит, оператор $A + F_b$ обратим и последовательность $\{A_{s_j}\}$ G -сходится к оператору $A + F_b$. Теорема 1 доказана.

§ 4. Некоторые замечания о сильной G -сходимости и условии $\mathcal{R}$)

Используя построения и оценки, содержащиеся в доказательстве леммы 8, в частности, равенство (95), неравенство (110) и оценку для нормы разности $w_s - u_s$ в $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$, вытекающую из (110) и (3), в дополнение к сказанному в теореме 1 о последовательности $\{s_j\}$ и функции b получаем: если $u \in C_0^\infty(\Omega)$, для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1}((Au + F_b u) \circ p_s)$, E – открытое множество, $E \subset \Omega$ и $\text{mes } \partial E = 0$, то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_{s_j}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u_{s_j}) \partial_i u_{s_j} \right\} dx = \int_E \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) \partial_i u + b(x, u) u \right\} dx.$$

В связи с этим введем определение сильной G -сходимости. Обозначим через $\tilde{\mathcal{B}}$ множество всех функций Каратеодори $b : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию: существует $\tilde{c} > 0$ такое, что для любых $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$|b(x, \xi)| \leq \tilde{c}(1 + |\xi|)^{m-1}. \quad (130)$$

Очевидно, что $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}}$. Для всякой функции $b \in \tilde{\mathcal{B}}$ определим функционал $F_b : \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega) \rightarrow (\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega))^*$ таким же образом, как и для элементов из $\mathcal{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $b \in \tilde{\mathcal{B}}$, причем оператор $A + F_b$ обратим. Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ *сильно G -сходится* к оператору $A + F_b$, если последовательность $\{A_s\}$ G -сходится к оператору $A + F_b$ и из того, что $u \in C_0^\infty(\Omega)$, для любого $s \in \mathbb{N}$

$$u_s = A_s^{-1}((Au + F_b u) \circ p_s),$$

E – открытое множество, $E \subset \Omega$ и $\text{mes } \partial E = 0$, вытекает, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u_s) \partial_i u_s \right\} dx = \int_E \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) \partial_i u + b(x, u)u \right\} dx. \quad (131)$$

Заметим, что последнее равенство означает сходимость последовательности $\{u_s\}$ к u по энергии.

Учитывая определение 6 и сказанное в начале параграфа, получаем следующее уточнение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $b \in \tilde{\mathcal{B}}$ такие, что оператор $A + F_b$ обратим и последовательность $\{A_{s_j}\}$ сильно G -сходится к оператору $A + F_b$.*

Если не считать условий на коэффициенты a_i , то единственным условием, позволившим получить этот результат, явилось условие $\mathcal{R}$). Таким образом, условие $\mathcal{R}$) – достаточное условие для выбора из последовательности $\{A_s\}$ подпоследовательности, сильно G -сходящейся к оператору $A + F_b$, $b \in \tilde{\mathcal{B}}$. Что касается необходимости этого условия, приведем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $b \in \tilde{\mathcal{B}}$, оператор $A + F_b$ обратим и последовательность $\{A_s\}$ сильно G -сходится к оператору $A + F_b$. Тогда выполняется условие $\mathcal{R}$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $b \in \tilde{\mathcal{B}}$, то с некоторой константой $\tilde{c} > 0$ для любых $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство (130). Положим $\nu = 4^{m_2} c^2 n^2 (\tilde{c} + 1)$.

Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$u_s = A_s^{-1}((Au + F_b u) \circ p_s).$$

Поскольку $\{A_s\}$ G -сходится к $A + F_b$, то

$$p_s u_s \rightarrow u \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega). \quad (132)$$

Пусть E – открытое множество, $E \subset \Omega$, $\text{mes } \partial E = 0$. Так как $\{A_s\}$ сильно G -сходится к $A + F_b$, то имеет место равенство (131). Из этого равенства, используя (1)–(3) и (130), получаем

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^m dx \leq \frac{\nu}{2^{m_2} n} \int_E \{1 + |\nabla u|^m + |u|^m\} dx. \quad (133)$$

Итак, для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ существует последовательность $u_s \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$, удовлетворяющая (132) и неравенству (133) для любого открытого множества $E \subset \Omega$ с $\text{mes } \partial E = 0$.

Введем обозначение: если $t \in \mathbb{N}$, то

$$\tilde{Y}_t = \{y \in \mathbb{R}^n : ty_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, n; \quad \overline{Q_t(y)} \subset \Omega\}.$$

Ясно, что найдется $t_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall t \in \mathbb{N}, t \geq t_0, \tilde{Y}_t \neq \emptyset$. Положим для любого $t \in \mathbb{N}, t \geq t_0$,

$$E_t = \bigcup_{y \in \tilde{Y}_t} \overline{Q_t(y)}.$$

Имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{mes}(\Omega \setminus E_t) = 0. \quad (134)$$

Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{N}, t \geq t_0$, и возьмем функцию $\chi_t \in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что $0 \leq \chi_t \leq 1$ на Ω и $\chi_t = 1$ на E_t . В силу установленного выше результата существует последовательность $u_s^t \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s u_s^t \rightarrow \chi_t$ слабо в $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$ и $\forall y \in \tilde{Y}_t$

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla u_s^t|^m dx \leq 2^{1-m_2} (\nu/n) t^{-n}.$$

Отсюда вытекает, что найдется $s_t \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall s \geq s_t \quad \|p_s u_s^t - 1\|_{L^m(\Omega)} \leq t^{-1} + \{\text{mes}(\Omega \setminus E_t)\}^{1/m}, \quad (135)$$

$$\forall s \geq s_t, \quad \forall y \in \tilde{Y}_t \quad \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla u_s^t|^m dx \leq 2^{2-m_2} (\nu/n) t^{-n}. \quad (136)$$

Итак, для любого $t \in \mathbb{N}, t \geq t_0$, существуют последовательность $u_s^t \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$ и число s_t такие, что имеют место утверждения (135), (136). Без ограничения общности можно считать, что числа s_t образуют возрастающую последовательность.

Пусть теперь $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Определим последовательность $u_s \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$ следующим образом: если $s < s_{t_0}$, то $u_s = 0$; если $s_t \leq s < s_{t+1}$ при некотором $t \geq t_0$, то $u_s = u_s^t$. Используя (134)–(136), устанавливаем, что $p_s u_s \rightarrow u$ слабо в $\overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega)$ и для любого открытого множества $E \subset \Omega$

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^m dx \leq \nu \int_{E \cap \Omega} \{|\nabla u|^m + |u|^m\} dx.$$

Таким образом, условие $\mathcal{R}$) выполняется и тем самым теорема доказана.

Установим два критерия выполнения условия $\mathcal{R}$). Введем обозначение: если $\alpha, \beta > 0$, Q – замкнутый куб, $Q \subset \Omega$, $s \in \mathbb{N}$, то

$$V_s^{\alpha, \beta}(Q) = \left\{ u \in \overset{\circ}{W}^{1, m}(\Omega_s) : \int_{Q \cap \Omega_s} |\nabla u|^m dx \leq \alpha \operatorname{mes} Q, \right. \\ \left. \int_{Q \cap \Omega_s} |u - 1|^m dx \leq (\operatorname{mes} Q)^{1+\beta} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 4. Условие $\mathcal{R}$) выполняется тогда и только тогда, когда

- 1) $\lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_s) = 0$;
- 2) существуют $\alpha > 0$ и $\beta > 2m/n$ такие, что для любого замкнутого куба $Q \subset \Omega$ при достаточно больших $s \in \mathbb{N}$ $V_s^{\alpha, \beta}(Q) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется условие $\mathcal{R}$). Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем замкнутое множество $F \subset \Omega$ и функцию $u \in C_0^\infty(\Omega)$ такие, что $u = 1$ на F и

$$\operatorname{mes}(\Omega \setminus F) \leq \varepsilon. \quad (137)$$

Согласно условию $\mathcal{R}$) существует последовательность $u_s \in \overset{\circ}{W}^{1, m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s u_s \rightarrow u$ слабо в $\overset{\circ}{W}^{1, m}(\Omega)$. Тогда

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{mes}((\Omega \setminus \Omega_s) \cap F) = 0. \quad (138)$$

Из (137), (138), учитывая, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_s) \leq \operatorname{mes}((\Omega \setminus \Omega_s) \cap F) + \operatorname{mes}(\Omega \setminus F),$$

выводим, что выполняется условие 1).

Далее, пусть ν – константа из условия $\mathcal{R}$). Положим $\alpha = \nu + 1$, $\beta = 2m$. Пусть Q – замкнутый куб, $Q \subset \Omega$ и u – функция из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $u = 1$ на Q . Согласно условию $\mathcal{R}$) существует последовательность $u_s \in \overset{\circ}{W}^{1, m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s u_s \rightarrow u$ слабо в $\overset{\circ}{W}^{1, m}(\Omega)$ и

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \int_{Q \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^m dx \leq \nu \operatorname{mes} Q.$$

Ясно, что при достаточно больших $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in V_s^{\alpha, \beta}(Q)$ и, следовательно, $V_s^{\alpha, \beta}(Q) \neq \emptyset$. Значит, выполняется условие 2).

Теперь, предполагая, что выполняются условия 1), 2), покажем, что выполняется условие $\mathcal{R}$). Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Введем обозначения:

$$\gamma = 1 + \max_{\Omega} |u| + \max_{\Omega} |\nabla u|;$$

если $t \in \mathbb{N}$, то

$$Y'_t = \{y \in \mathbb{R}^n : (t+1)y_k \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, \dots, n; \quad Q_t(y) \cap \operatorname{supp} u \neq \emptyset\}.$$

Зафиксируем произвольное $i \in \mathbb{N}$. Ясно, что существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| \leq \delta$,

$$|u|^m(x') \leq |u|^m(x'') + i^{-1}. \quad (139)$$

Зафиксируем число $t \in \mathbb{N}$ такое, что

$$t \geq 2n\delta^{-1} + n[d(\text{supp } u, \partial\Omega)]^{-1} + 2^n \gamma i(1 + \text{mes } \Omega), \\ \gamma^m i \leq t^{n\beta-2m}.$$

Имеем

$$\bigcup_{y \in Y'_t} \overline{Q_t(y)} \subset \Omega. \quad (140)$$

Пусть $\{\varphi_y : y \in Y'_t\}$ – набор функций класса $C_0^\infty(\Omega)$ со свойствами: $0 \leq \varphi_y \leq 1$ на Ω , $\varphi_y = 1$ на $Q_{t+3}(y)$, $\varphi_y = 0$ на $\Omega \setminus Q_t(y)$, $|\nabla \varphi_y| \leq c_0 t^2$ на Ω ;

$$\sum_{y \in Y'_t} \varphi_y = 1 \quad \text{на} \quad \text{supp } u.$$

В силу (140) и условия 2) найдется $\tilde{s} \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $s \geq \tilde{s}$ и $y \in Y'_t$ $V_s^{\alpha, \beta}(\overline{Q_t(y)}) \neq \emptyset$. Зафиксируем для произвольных $s \geq \tilde{s}$ и $y \in Y'_t$ функцию $w_{s,y} \in V_s^{\alpha, \beta}(\overline{Q_t(y)})$. Положим теперь для любого $s \geq \tilde{s}$

$$v_s = u \sum_{y \in Y'_t} w_{s,y} \varphi_y.$$

Используя (139), свойства функций φ_y , включения $w_{s,y} \in V_s^{\alpha, \beta}(\overline{Q_t(y)})$ и условие 1), устанавливаем, что

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \|p_s v_s - u\|_{L^m(\Omega)} \leq i^{-1},$$

для любого $y \in Y'_t$

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla v_s|^m dx \leq \nu \int_{Q_t(y)} \{|\nabla u|^m + |u|^m\} dx + \nu i^{-1} t^{-n},$$

где ν – положительная постоянная, зависящая только от n, m, α .

Теперь можно сделать вывод: если $i \in \mathbb{N}$, то существуют числа $t_i, s_i \in \mathbb{N}$ и последовательность $v_s^i \in \overset{\circ}{W}^{1,m}(\Omega_s)$ такие, что $t_i \geq i$,

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \text{supp } v_s^i \subset \text{supp } u, \quad (141)$$

$$\forall s \geq s_i \quad \|p_s v_s^i - u\|_{L^m(\Omega)} \leq 2i^{-1}, \quad (142)$$

$$\forall s \geq s_i, \quad \forall y \in Y'_{t_i} \quad \int_{Q_{t_i}(y) \cap \Omega_s} |\nabla v_s^i|^m dx \\ \leq \nu \int_{Q_{t_i}(y)} \{|\nabla u|^m + |u|^m\} dx + 2\nu i^{-1} t_i^{-n}. \quad (143)$$

Без ограничения общности можно считать, что числа s_i образуют возрастающую последовательность. Определим последовательность $u_s \in \mathring{W}^{1,m}(\Omega_s)$ следующим образом: если $s < s_1$, то $u_s = 0$; если $s_i \leq s < s_{i+1}$ при некотором i , то $u_s = v_s^i$. Используя (141)–(143), находим, что $p_s u_s \rightarrow u$ слабо в $\mathring{W}^{1,m}(\Omega)$ и для любого открытого множества $E \subset \Omega$

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^m dx \leq \nu \int_{E \cap \Omega} \{|\nabla u|^m + |u|^m\} dx.$$

Значит, условие $\mathcal{R}$) выполняется. Теорема доказана.

Положим для любых $\beta > 0$, замкнутого куба $Q \subset \Omega$ и $s \in \mathbb{N}$

$$C_s^\beta(Q) = \inf_{u \in \mathring{W}^{1,m}(\Omega_s)} \int_{Q \cap \Omega_s} \{|\nabla u|^m + (\text{mes } Q)^{-\beta} |u - 1|^m\} dx.$$

Используя теорему 4, устанавливаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. *Условие $\mathcal{R}$) выполняется тогда и только тогда, когда:*

- 1) $\lim_{s \rightarrow \infty} \text{mes}(\Omega \setminus \Omega_s) = 0$;
- 2) *существуют $\alpha > 0$ и $\beta > 2m/n$ такие, что для любого замкнутого куба $Q \subset \Omega$*

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} C_s^\beta(Q) \leq \alpha \text{mes } Q.$$

В заключение приведем пример выполнения условия $\mathcal{R}$). Пусть существуют конечные множества J_s ($s \in \mathbb{N}$), точки $x_s^j \in \Omega$ и числа $r_s^j > 0$ ($s \in \mathbb{N}$, $j \in J_s$) такие, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \Omega \setminus \Omega_s = \bigcup_{j \in J_s} B(x_s^j, r_s^j), \quad (144)$$

где $B(x_s^j, r_s^j)$ – замкнутый шар с центром в точке x_s^j и радиусом r_s^j . Обозначим для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ через ρ_s^j расстояние от $B(x_s^j, r_s^j)$ до множества $\bigcup_{J_s \ni i \neq j} B(x_s^i, r_s^i) \cup \partial\Omega$. Будем предполагать, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \max_{j \in J_s} \rho_s^j = 0 \quad (145)$$

и существует постоянная $\nu_1 > 0$ такая, что

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in J_s \quad r_s^j \leq \nu_1 \rho_s^j. \quad (146)$$

Обозначим через $\mathcal{O}$ совокупность множеств, состоящую из Ω и всех открытых кубов Q таких, что $\overline{Q} \subset \Omega$. Для любых $Q \in \mathcal{O}$ и $s \in \mathbb{N}$ положим $J_s(Q) = \{j \in J_s : x_s^j \in Q\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть существует $\sigma > 0$ такое, что*

$$\forall Q \in \mathcal{O} \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_s(Q)} (r_s^j)^{n-m} \leq \sigma \text{mes } Q. \quad (147)$$

Тогда выполняется условие $\mathcal{R}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (145)–(147) имеем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_s} (r_s^j)^n = 0. \quad (148)$$

Отсюда и из (144) вытекает, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{mes}(\Omega \setminus \Omega_s) = 0. \quad (149)$$

Положим $a' = 1 + \frac{1}{4\nu_1}$, $a'' = 1 + \frac{1}{3\nu_1}$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ φ_s – функция из $C^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leq \varphi_s \leq 1$ в Ω , $\varphi_s = 0$ на $\bigcup_{j \in J_s} B(x_s^j, a' r_s^j)$, $\varphi_s = 1$ на $\Omega \setminus \bigcup_{j \in J_s} B(x_s^j, a'' r_s^j)$, причем для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ $|\nabla \varphi_s| \leq c_0 (r_s^j)^{-1}$ в $B(x_s^j, a'' r_s^j)$ (c_0 – положительная постоянная, зависящая только от n, ν_1).

Положим $\alpha = 2^{n+2} c_0^m w_n \sigma$ (w_n – мера единичного шара в $\mathbb{R}^n$), $\beta = 2m$. Пусть Q – замкнутый куб, $Q \subset \Omega$. Возьмем функцию $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что $\chi = 1$ на Q , и положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s = (\chi \varphi_s)|_{\Omega_s}$. Используя (147), (148) и свойства функций φ_s , легко убедиться в том, что при достаточно больших $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in V_s^{\alpha, \beta}(Q)$. Этот результат, равенство (149) и теорема 4 приводят к заключению, что выполняется условие $\mathcal{R}$). Предложение доказано.

Список литературы

1. Kovalevsky A. A. On G -convergence of operators of Dirichlet problem with varying domain // Dokl. Akad. Nauk Ukr. 1993. № 5. P. 13–17.
2. Ковалевский А. А. О G -сходимости нелинейных эллиптических операторов, связанных с задачей Дирихле в переменных областях // Укр. матем. журн. 1993. Т. 45. № 7. С. 948–962.
3. Хруслов Е. Я. Первая краевая задача в областях со сложной границей для уравнений высших порядков // Матем. сб. 1977. Т. 103. № 4. С. 614–629.
4. Скрыпник И. В. Квазилинейная задача Дирихле для областей с мелкозернистой границей // ДАН УССР. Сер. А. 1982. № 2. С. 21–25.
5. Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
6. Панкратов Л. С. Об асимптотическом поведении решений вариационных задач в областях со сложной границей: Препринт № 11-87. Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1987.
7. Dal Maso G., Garroni A. A new approach to the study of limits of Dirichlet problems in perforated domains: Preprint № 67/M. Trieste: SISSA, 1993.
8. Dal Maso G., Murat F. Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators: Preprint. Trieste: SISSA, 1993.
9. Жиков В. В. О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 8. С. 47–84.
10. Kovalevsky A. A. On G -compactness of a sequence of nonlinear operators of Dirichlet problems in variable domains: Preprint № 93.09. Donetsk: IAMM, 1993.
11. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
12. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд., перераб. М.: Наука, 1976.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины

Поступило в редакцию
28.X.1994